

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2012-0020**

**LİMİT ROTASYONLAR TARAFINDAN ÜRETİLEN GRUPLAR VE
BÖLÜM YÜZEYLERİ**

Eren GÜMÜŞALAN

**Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Eren GÜMÜŞALAN tarafından hazırlanan Limit Rotasyonlar Tarafından Üretilen Gruplar ve Bölüm Yüzeyleri başlıklı tez, 13.07.2012 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

Unvanı,	Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ	MĞÜ
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	ADÜ
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER	ADÜ

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu *yüksek lisans* tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun Sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

...../...../20....

Eren GÜMÜŞALAN

ÖZET**LİMİT ROTASYONLAR TARAFINDAN ÜRETİLEN GRUPLAR
VE BÖLÜM YÜZEYLERİ**

Eren GÜMÜŞALAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU
2012, 35 sayfa

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın amacı hiperbolik düzlemde limit rotasyonlar tarafından üretilen grupların bölüm yüzeylerini incelemektir.

Birinci bölümde giriş kısmı verildi.

İkinci bölümde tezin ana konusu için gerekli olan temel bilgilere yer verildi.

Üçüncü bölümde kısaca hiperbolik geometri tanıtıldı.

Dördüncü bölümde önce limit rotasyonlar tanıtıldı. Ardından limit rotasyonlar tarafından üretilen gruplar ve bunların bölüm yüzeylerinin bazı topolojik ve geometrik özellikleri incelendi.

Anahtar Sözcükler: Hiperbolik geometri, Hiperbolik düzlem, İzometri grubu, Limit rotasyon, Bölüm yüzeyi.

ABSTRACT**GROUPS GENERATED BY LIMIT ROTATIONS AND QUOTIENT SURFACES**

Eren GÜMÜŞALAN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

2012, 35 pages

The purpose of this study, which consists of four chapters, is to investigate the quotient surfaces of the groups generated by limit rotations in the hyperbolic plane.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter is devoted to the background material.

In the third chapter, hyperbolic geometry has been shortly introduced.

In the fourth chapter, first limit rotations have been introduced. Then the groups generated by limit rotations and some topological and geometrical properties of their quotient surfaces have been investigated.

Key words: Hyperbolic geometry, Hyperbolic plane, Isometry group, Limit rotation, Quotient surface.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmam boyunca benden yardımlarını, sabrını ve bilgisini esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU' na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik bölümü), manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	4
2.1 Topolojik Gruplar	4
2.2 Ayrık Gruplar.....	5
2.3 Grup Etkisi.....	5
2.4 Temel Bölge.....	6
2.5 Bölüm (Yörünge) Uzayları	8
2.6 Bir Çember Üzerinde Yansıma (İnversiyon).....	10
3. HİPERBOLİK GEOMETRİ.....	14
3.1 Hiperbolik Düzlem	14
3.2 Hiperbolik Düzlem İçin Bazı Modeller	14
3.3 Hiperbolik Düzlemde Doğrular	16
3.4 Hiperbolik Düzlemin İzometrilere	17
3.5 Fuchs Grupları	19
3.6 Hiperbolik Üçgenler	20
4. LİMİT ROTASYONLARIN ÜRETTİĞİ GRUPLAR VE BÖLÜM	22
YÜZEYLERİ.....	22
4.1 Limit Rotasyonlar	22
4.2 Bir Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı	25
4.3 Üç Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı.....	27
4.4 Dört Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı	29
4.5 n Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı	30
5. SONUÇ.....	33
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{D}	Hiperbolik düzlem için birim daire modeli
\mathbb{H}	Hiperbolik düzlem için üst yarı düzlem modeli
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
$PGL(2, \mathbb{R})$	Hiperbolik düzlemin tüm izometrilere grubu
$PSL(2, \mathbb{R})$	Hiperbolik düzlemin konform izometrilere grubu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. G grubu için bir temel bölge.....	7
Şekil 2.2. G grubu için temel bölge.....	7
Şekil 2.3. G grubu için temel bölgeler.....	8
Şekil 2.4. Tor yüzeyi.....	9
Şekil 2.5. Sonsuz bir silindir yüzeyi.....	10
Şekil 2.6. Bir çember üzerinde yansıma.....	11
Şekil 3.1. Yalancı küre.....	14
Şekil 3.2. Üst yarı düzlem modeline göre doğrular.....	15
Şekil 3.3. Birim daire modeline göre doğrular.....	15
Şekil 3.4. Hiperbolik doğrular.....	16
Şekil 3.5. Paralel, ayırık paralel ve kesişen hiperbolik doğrular.....	16
Şekil 3.6. Hiperbolik düzlemde öteleme.....	18
Şekil 3.7. Hiperbolik düzlemde rotasyon.....	18
Şekil 3.8. Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma.....	19
Şekil 3.9. Asimptotik üçgen.....	21
Şekil 4.1. Hiperbolik düzlemde limit rotasyon.....	22
Şekil 4.5. G grubu için temel bölge.....	25
Şekil 4.6. H grubu için temel bölge.....	26
Şekil 4.8. \mathbb{H}/H bölüm uzayı.....	26
Şekil 4.9. G grubu için temel bölge.....	27
Şekil 4.10. H grubu için temel bölge.....	28
Şekil 4.12. \mathbb{H}/H bölüm uzayı.....	28
Şekil 4.13. G grubu için temel bölge.....	29
Şekil 4.14. H grubu için temel bölge.....	29
Şekil 4.16. G grubu için temel bölge.....	31
Şekil 4.17. H grubu için temel bölge.....	31

1. GİRİŞ

Düzlemde bir L doğrusu ve bu doğruya ait olmayan bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğrusuna paralel bir tek doğru vardır. Bu ifade Öklid'in beş temel aksiyomlarından biri olan paralellik aksiyomuna denktir. Paralellik aksiyomunu sağlamayan geometri arayışları sonucunda Hiperbolik Geometri ortaya çıkmıştır. Bu geometriye göre, düzlemde bir L doğrusu ve bu doğrunun üzerinde bulunmayan bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen sonsuz doğru mevcuttur. Hiperbolik düzlem için, üzerinde geometrik çalışmaların yapılabileceği değişik modeller keşfedilmiştir.

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

kümesi, üzerinde tanımlanan

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$$

metriği ile hiperbolik düzlem için bir modeldir. Bu model üst yarı düzlem modeli olarak adlandırılır. Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik düzlemdeki doğrular, reel eksene dik olan doğrular ve merkezi reel eksen üzerinde bulunan çemberlerin üst yarı düzlemde kalan kısımlarıdır.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

kümesi de üzerinde tanımlanan

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

metriği ile hiperbolik düzlem için bir diğer modeldir. Bu model ise birim daire modeli olarak bilinir. Bu modele göre hiperbolik doğrular birim çemberi dik kesen Öklid doğrularının ve çemberlerinin \mathbb{D} kümesinde kalan kısımlarıdır.

Hiperbolik düzlem için başka modeller de mevcuttur. Fakat en çok kullanılan modeller yukarıda bahsedilen iki modeldir. İzometrilere, açılara, çokgenlere gibi bazı geometrik kavramlar Öklid geometrisinden de yararlanılarak daha kolay belirlendiği için bu iki modeli kullanmak daha avantajlıdır.

Üst yarı düzlem modeline göre konform izometrilere

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1)$$

biçimindeki dönüşümlerden oluşur. Konform olmayan izometrilere ise

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1)$$

biçimindedir. Dolayısıyla tüm izometrilere bileşke işlemine göre oluşturduğu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ grubudur.

Bu iki model arasında

$$J(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

olarak tanımlanan $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ dönüşümü bir izometridir. Dolayısıyla, h üst yarı düzlemde bir hiperbolik izometri olmak üzere, birim dairede bir hiperbolik izometri JhJ^{-1} biçimindedir.

Öklid düzleminde olduğu gibi hiperbolik düzlemin izometrilere de yansımaların bileşkesi olarak ifade edilebilir. Hiperbolik düzlemde sonsuzda kesişen iki doğru üzerindeki yansımaların bileşkesi bir izometridir ve limit rotasyon olarak adlandırılır. Limit rotasyonların hiperbolik düzlemde sabit noktaları bulunmamaktadır, ancak sonsuzdaki bir noktayı sabit tuttukları için bu ismi almışlardır. Hiperbolik düzlemdeki diğer izometrilere aksine bu tür izometrilere benzerleri Öklid düzleminde mevcut değildir.

Hiperbolik düzlemde köşeleri sonsuzda olan n kenarlı bir çokgen göz önüne alınsın. Bu çokgenin kenarları hiperbolik doğrulardır. Bu doğruların üzerindeki hiperbolik yansımalar bir G grubu üretir. Bu grubun konform elemanları G grubunun bir H alt grubunu oluştururlar. Bu alt grup yardımıyla elde edilen bölüm uzayı, üzerinden n tane nokta çıkarılmış bir küreye homeomorftur. Dolayısıyla, bu küre üzerinde n tane delik bulunur. Bu ise elde edilen kürenin kompakt olmadığını gösterir. Bu şekilde elde edilen küreler yerel olarak hiperbolik

düzleme izometrik oldukları için bunlar üzerinde hiperbolik metrik tarafından üretilen bir metrik bulunmaktadır.

Bu çalışmada; limit rotasyonlar ve bunlar tarafından üretilen ayrık grupların bölüm uzayı olan hiperbolik yüzeylerin bazı topolojik ve geometrik özellikleri incelenecektir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde karşılaşılacak olan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1. Topolojik Gruplar

Tanım 2.1.1 G bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Eğer her $g, h \in G$ için,

$$\alpha: G \times G \rightarrow G, \alpha(g, h) = gh$$

$$\beta: G \rightarrow G, \beta(g) = g^{-1}$$

olarak tanımlanan α ve β fonksiyonları sürekli ise G 'ye bir topolojik grup denir.

Örnek 2.1.1 $(\mathbb{R}, +)$ toplamsal grubu Öklid topolojisiyle birlikte ele alındığında bir topolojik gruptur. Tanım 2.1.1 de verilen α ve β fonksiyonları bu örnek için şu şekilde tanımlanır:

$$\alpha: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x, y) = x + y \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \beta(y) = -y \quad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Bu fonksiyonların sürekli olup olmadıklarını araştıralım. Bunun için, Öklid topolojisinin verilen bir tabanında bulunan tüm kümelerin α ve β fonksiyonları altında ters görüntülerinin sırasıyla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve \mathbb{R} topolojik uzaylarında açık olduklarını göstermek gerekir. $c, d \in \mathbb{R}$ ve $c < d$ olmak üzere, (c, d) açık aralıklarından oluşan ailenin Öklid topolojisi için bir taban olduğu biliniyor. Bu durumda,

$$\beta^{-1}[(c, d)] = (-d, -c) \text{ ve}$$

$$\alpha^{-1}[(c, d)] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid c < x + y < d\}$$

alt kümelerinin sırasıyla \mathbb{R} Öklid topolojik uzayı ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ çarpım uzayında açık oldukları kolayca gösterilebilir. Böylece, α ve β dönüşümleri süreklidir ve $(\mathbb{R}, +)$ toplamsal grubu bir topolojik gruptur.

Örnek 2.1.2 Benzer şekilde, $(\mathbb{C}, +)$ grubunun bir topolojik grup olduğu gösterilebilir.

2.2. Ayrık Gruplar

Tanım 2.2.1 G bir topolojik grup olmak üzere bu grubun bütün tek noktalı altkümeleri açık ise G topolojik grubuna bir ayrık grup denir. O halde, ayrık topoloji ile birlikte düşünülürse, her topolojik grup bir ayrık grup olur.

Tanım 2.2.2 X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ bir alt uzay olsun. Her $a \in A$ için $\{a\}$ kümesi alt uzayda açık ise A uzayına X topolojik uzayının bir ayrık alt uzayı denir.

Tanım 2.2.3 G bir topolojik grup ve H, G topolojik grubunun bir alt grubu olsun. Şayet G üzerindeki topolojinin H üzerinde ürettiği topoloji ayrık topoloji ise H grubuna G grubunun bir ayrık alt grubu denir.

Örnek 2.2.1 $(\mathbb{Z}, +)$ toplamsal grubu $(\mathbb{R}, +)$ toplamsal grubunun ayrık bir alt grubudur.

2.3. Grup Etkisi

Tanım 2.3.1 G bir grup ve $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer $\varphi: G \times A \rightarrow A$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme G grubunun A kümesine bir etkisi denir:

i) Her $a \in A$ için $\varphi(e, a) = a$

ii) Her $a \in A$ ve her $g_1, g_2 \in G$ için $\varphi(g_1 g_2, a) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, a))$.

Burada e, G grubunun birim elemanıdır.

Örnek 2.3.1 G bir grup ve $A \neq \emptyset$ olsun. Her $a \in A$ ve her $g \in G$ için

$$\varphi: G \times A \rightarrow A, \varphi(g, a) = a$$

şeklinde tanımlanan φ dönüşümü G grubunun A kümesi üzerine bir etkisidir. Buna aşikar etki denir.

Örnek 2.3.2 G bir grup olsun. Her $g, h \in G$ için

$$\varphi: G \times G \rightarrow G, \varphi(g, h) = gh$$

şeklinde tanımlanan φ dönüşümü G grubunun kendi üzerine bir etkisidir.

Çünkü her $g \in G$ için $\varphi(e, g) = g$ ve her $g_1, g_2, h \in G$ için

$$\varphi(g_1 g_2, h) = g_1 g_2 h = g_1 \varphi(g_2, h) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, h))$$

sağlanır. Dolayısıyla φ dönüşümü G grubunun kendi üzerine bir etkisi olur.

2.4. Temel Bölge

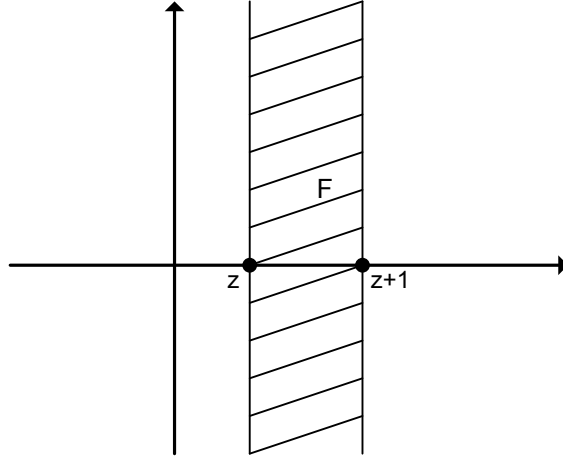
Tanım 2.4.1 A bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g: A \rightarrow A \text{ homeomorfizma}\}$ olmak üzere, her $a \in A$ ve her $g \in G$ için $\varphi(g, a) = g(a)$ olarak tanımlanan $\varphi: G \times A \rightarrow A$ dönüşümünün G grubunun A kümesine bir etkisi olduğu gösterilebilir. Bu durumda, A topolojik uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı bir K alt kümesine G grubu için bir temel bölge denir:

$$(i) \bigcup_{g \in G} g(K) = A,$$

$$(ii) \forall g \in G - \{e\} \text{ için } \overset{\circ}{K} \cap g(\overset{\circ}{K}) = \emptyset.$$

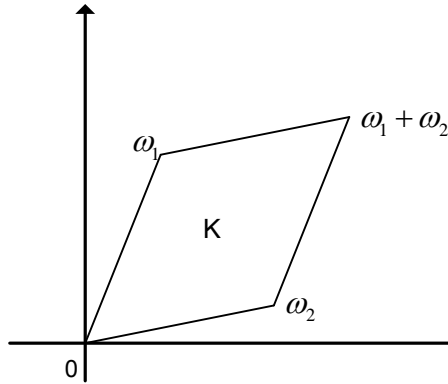
Burada; $\overset{\circ}{K}$, K kümesinin içini, e ise G grubunun birim elemanını göstermektedir.

Örnek 2.4.1 $f(z) = z+1$ olarak tanımlanan $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu sonsuz devirli bir G grubu üretir. Şekil 2.1 de görülen F kümesi bu G grubu için bir temel bölgedir.



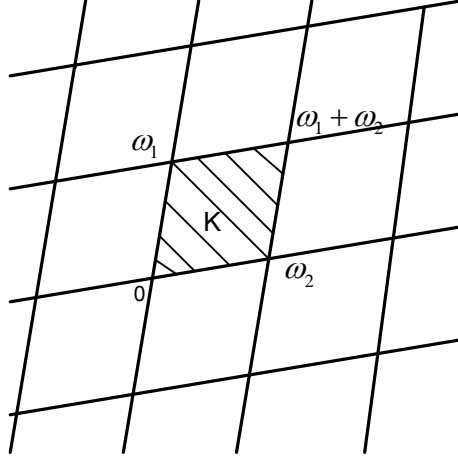
Şekil 2.1. G grubu için bir temel bölge

Örnek 2.4.2 ω_1 ve ω_2 sıfırdan farklı ve $\omega_1 \neq \alpha\omega_2$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) özelliğinde iki karmaşık sayı olmak üzere, $f(z) = z + \omega_1$ ve $g(z) = z + \omega_2$ olarak tanımlanan $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorf olan bir G grubu üretir. Şekil 2.2 de gösterilen K kümesi bu G grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 2.2. G grubu için temel bölge

Şekil 2.3 de K temel bölgesi ve bunun G grubunun bazı elemanları altındaki görüntüleri gösterilmiştir. Şekildeki paralelkenarların her biri G grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 2.3. G grubu için temel bölgeler

2.5. Bölüm (Yörünge) Uzayları

Tanım 2.5.1 A bir küme, G , A kümesine etki eden bir grup ve $a \in A$ olsun. Bu durumda, $G_a = \{g(a) : g \in G\}$ kümesine a noktasının yörüngesi denir.

Tanım 2.5.2 A bir topolojik uzay ve G , A uzayına etki eden bir grup olsun. G_a kümesi $a \in A$ noktasının yörüngesi olmak üzere, her $a, b \in A$ için,

$$a \sim b \Leftrightarrow b \in G_a$$

olarak tanımlanan \sim bağıntısı A üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı A uzayını denklik sınıflarına ayırır ve herhangi bir $a \in A$ elemanının denklik sınıfı a elemanının yörüngesidir. $A/\sim = \{G_a : a \in A\}$ bölüm kümesi ve

$$\pi : A \rightarrow A/\sim, \pi(a) = G_a$$

bölüm fonksiyonu olmak üzere,

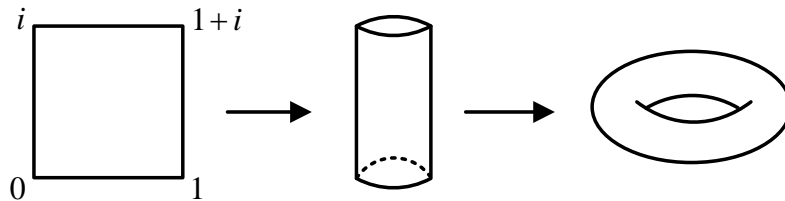
$$"O \subset A/\sim \text{ açıktır} :\Leftrightarrow \pi^{-1}(O), A \text{ uzayında açıktır}"$$

biçiminde tanımlanan O kümeleri A/\sim üzerinde bir τ topolojisi oluşturur. Bu topolojiye bölüm topolojisi, $(A/\sim, \tau)$ topolojik uzayına da bölüm uzayı veya yörünge uzayı denir. A/\sim bölüm uzayı G grubu yardımıyla elde edildiği için A/\sim yerine A/G notasyonu kullanılacaktır.

A/G geometrik olarak şu şekilde elde edilir. K , G grubu için bağlantılı bir temel bölge olsun. Temel bölge tanımından dolayı K kümesinin iki farklı iç noktası aynı yörüngede bulunamaz ama sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı yörüngede bulunabilir. K kümesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse A/G elde edilir.

Bu çalışmada A uzayı olarak genellikle Öklid düzlemi ve daha sonra tanıtılacak olan hiperbolik düzlem alınacaktır.

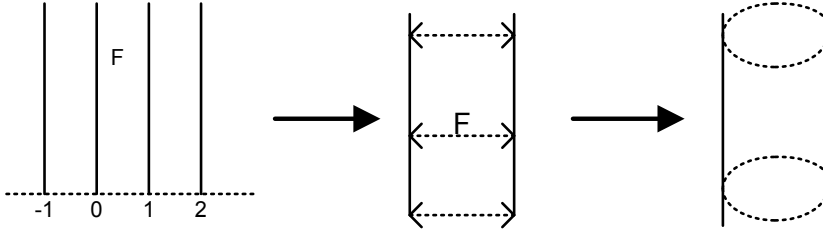
Örnek 2.5.1 Karmaşık sayılar kümesi üzerinde, $f(z) = z+1$ ve $g(z) = z+i$ biçiminde tanımlanan f ve g dönüşümleri \mathbb{C} kümesine etki eden ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorf olan bir G grubu üretirler. Bu durumda, köşeleri $0, 1, i$ ve $1+i$ olan kare bu grup için bir temel bölge olur. Bu temel bölgenin kenarları üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar birleştirilirse bölüm uzayının bir tor yüzeyi olduğu görülür.



Şekil 2.4. Tor yüzeyi

Karmaşık düzlemde; kenar uzunlukları 1 birim ve kenarları eksenlere paralel olan herhangi bir karenin yukarıdaki örnekte verilen G grubu için bir temel bölge olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 2.5.2 $f(z) = z+1$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü, \mathbb{C} üzerine etki eden ve $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olan bir G grubu üretir. Şekil 2.5 te verilen F kümesi G grubu için bir temel bölgedir. Bu temel bölgenin sınırı üzerinde bulunan ve aynı yörüngeye sahip noktalar uygun bir şekilde birleştirilirse bölüm uzayı olarak bir sonsuz silindir elde edilir.



Şekil 2.5. Sonsuz silindir

2.6. Bir Çember Üzerinde Yansıma (İnversiyon)

Karmaşık düzlemde p merkezli ve r yarıçaplı bir \mathbf{C} çemberi ele alınsın. z , \mathbf{C} çemberinin üzerinde bulunmayan bir nokta olsun. pz yarı doğrusu üzerinde,

$$|z - p||z' - p| = r^2 \quad (2.6.1)$$

denklemini sağlayan bir tane z' noktası vardır. Bu z' noktası z noktasının \mathbf{C} çemberi üzerinde yansıtılması sonucu elde edilen noktadır. Bu şekilde elde edilen yansıma \mathbf{C} çemberi üzerindeki yansıma veya inversiyon denir ve I_c notasyonu ile gösterilir.

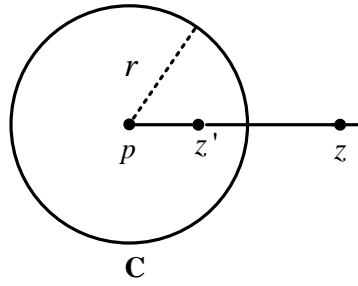
$I_c : \mathbb{C} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C} - \{p\}$ dönüşümü çemberin merkezi hariç, çemberin içindeki noktaları dışındaki noktalara, dışındaki noktaları ise içindeki noktalara götürür. Bu durumda, $z \rightarrow p$ iken $z' \rightarrow \infty$ ve $z' \rightarrow p$ iken $z \rightarrow \infty$ olur. I_c dönüşümü çember üzerindeki noktaların her birini sabit tutar. $z \neq p$ olmak üzere,

$$|z - p||z' - p| = r^2$$

ifadesinden yararlanılarak

$$z' = I_c(z) = p + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{p}} \quad (2.6.2)$$

elde edilir (Silverman, 1967).



Şekil 2.6. Bir çember üzerinde yansıma

Eğer $p = 0$ ve $r = 1$ olarak alınırsa, yukarıdaki formül yardımıyla birim çember üzerindeki yansıma

$$I_c(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (2.6.3)$$

olarak bulunur.

Örnek 2.6.1 Şekil 2.7 de verilen d_1 çemberinin dışındaki bir z noktasının bu çember üzerindeki yansımasını veren T_1 dönüşümünü bulmak için,

(i) $z \rightarrow z - 6$

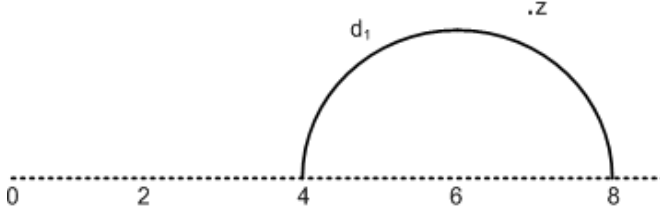
(ii) $z \rightarrow \frac{z}{2}$

(iii) $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$

(iv) $z \rightarrow 2z$

(v) $z \rightarrow z + 6$

dönüşümlerinin verilen sırada uygulanması gerekir.



Şekil 2.7.

Bu beş dönüşümün verilen sırada bileşkesi alındığında

$$z \xrightarrow{(i)} z-6 \xrightarrow{(ii)} \frac{z-6}{2} \xrightarrow{(iii)} \frac{1}{\left(\frac{z-6}{2}\right)} \xrightarrow{(iv)} \frac{4}{\bar{z}-6} \xrightarrow{(v)} \frac{4}{\bar{z}-6} + 6$$

elde edilir. O halde,

$$T_1(z) = \frac{4}{\bar{z}-6} + 6$$

olur. T_1 dönüşümü $\mathbb{C} - \{6\}$ kümesindeki bir z noktasını $\frac{4}{\bar{z}-6} + 6$ noktasına götürür ve çember üzerindeki tüm noktaları sabit tutar.

Örneğin $z = 8$ noktasını $\frac{4}{8-6} + 6 = 8$ noktasına götürür, yani sabit tutar.

Örnek 2.6.2 Şekil 2.8 de verilen d_1 ve d_2 çemberleri üzerindeki yansımalar sırasıyla T_1 ve T_2 olsun.

T_1 dönüşümünü bulmak için,

(i) $z \rightarrow z+1$

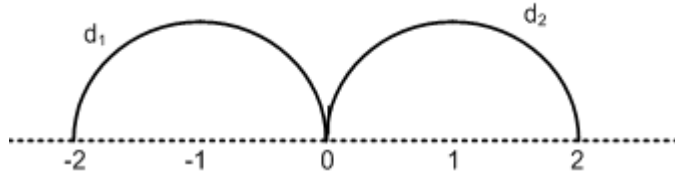
(ii) $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$

(iii) $z \rightarrow z-1$

adımları sırasıyla uygulanırsa,

$$z \xrightarrow{(i)} z+1 \xrightarrow{(ii)} \frac{1}{z+1} \xrightarrow{(iii)} \frac{1}{\bar{z}+1} - 1 = \frac{-\bar{z}}{\bar{z}+1}$$

$$T_1(z) = \frac{-\bar{z}}{\bar{z}+1} \text{ bulunur.}$$



Şekil 2.8.

Benzer şekilde, T_2 dönüşümünü bulmak için,

$$(i) z \rightarrow z-1$$

$$(ii) z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$$

$$(iii) z \rightarrow z+1$$

adımları sırasıyla uygulanırsa,

$$z \xrightarrow{(i)} z-1 \xrightarrow{(ii)} \frac{1}{z-1} \xrightarrow{(iii)} \frac{1}{\bar{z}-1} + 1 = \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1}$$

$$T_2(z) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1} \text{ bulunur.}$$

3. HİPERBOLİK GEOMETRİ

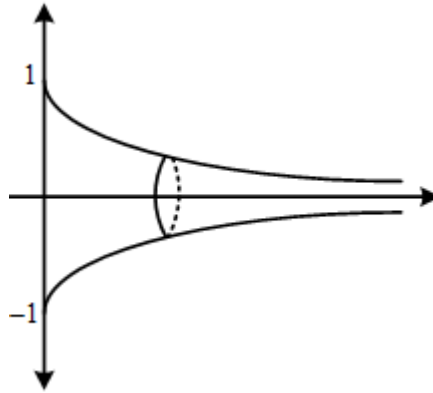
3.1. Hiperbolik Düzlem

Öklid'in beş temel aksiyomlarından bir tanesi aşağıda verilen paralellik aksiyomuna dekter:

Paralellik aksiyomu: Düzlemde bir L doğrusu ve bu doğruya ait olmayan bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

Paralellik aksiyomundaki p noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen birden fazla doğru bulunduran düzlem arayışları sonucunda Hiperbolik düzlem ve Hiperbolik Geometri ortaya çıkmıştır. Bu konudaki ilk çalışmaları Carl Friedrich Gauss, Nicolai Ivanovich Lobachevsky ve Janos Bolyai yapmıştır.

Çekme eğrisi olarak bilinen eğrinin x eksenini etrafında döndürülmesi sonucu elde edilen ve her noktasında eğriliği -1 olan yalancı küre (pseudosphere), hiperbolik düzlem için ilk somut örneklerdendir (Beltrami, 1868).



Şekil 3.1. Yalancı küre

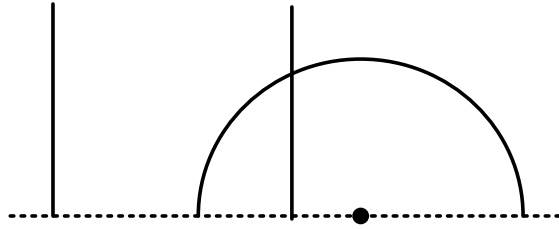
3.2. Hiperbolik Düzlem İçin Bazı Modeller

Hiperbolik düzlem için, üzerinde geometrik çalışmaların yapılabildiği bazı modeller keşfedilmiştir. Bu modellerden en çok kullanılanları, üst yarı düzlem modeli ve birim daire modelidir.

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ kümesi, üzerinde tanımlanan $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$ metriği ile hiperbolik düzlem için bir modeldir. Bu model üst yarı düzlem modeli olarak bilinir.

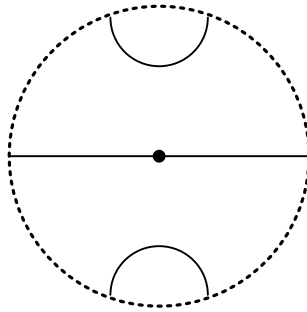
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kümesi de üzerinde tanımlanan $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ metriği ile hiperbolik düzlem için bir diğer modeldir. Bu model ise birim daire modeli olarak bilinir.

Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik düzlemdeki doğrular, reel eksene dik olan doğrular ve merkezi reel eksen üzerinde bulunan çemberlerin üst yarı düzlemde kalan kısımlarıdır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Üst yarı düzlem modeline göre doğrular

Birim daire modeline göre ise hiperbolik doğrular, birim çemberi dik kesen Öklid doğrularının ve çemberlerinin \mathbb{D} kümesinde kalan kısımlarıdır (Şekil 3.3).

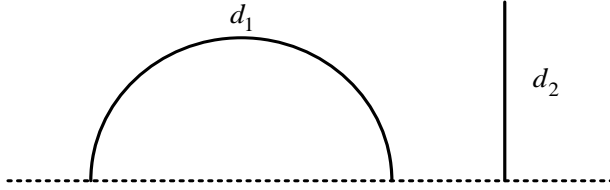


Şekil 3.3. Birim daire modeline göre doğrular

Bu tezde genellikle model olarak üst yarı düzlem modeli kullanılacaktır.

3.3. Hiperbolik Düzlemde Doğrular

Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğruların, reel eksene dik Öklid doğrularının ve merkezi reel eksen üzerinde bulunan Öklid çemberlerinin üst yarı düzlemde kalan kısımları olduğundan bahsedildi. Şekil 3.4 de verilen d_2 doğrusunun bir ucu reel eksen üzerindedir ve bu nokta hiperbolik düzleme dâhil değildir. Diğer ucunun ise sonsuzda olduğu varsayılır.



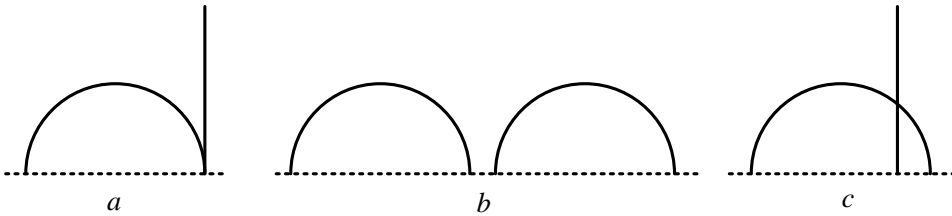
Şekil 3.4. Hiperbolik doğrular

Tanım 3.3.1 d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde farklı iki doğru olsun. Bu durumda;

(i) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde d_1 ve d_2 doğrularının ortak bir noktası varsa bu doğrular paraleldirler (Şekil 3.5 a).

(ii) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ve \mathbb{H} kümelerinde doğruların hiçbir ortak noktaları yoksa, doğrular ayrık paraleldirler (Şekil 3.5 b).

(iii) \mathbb{H} de bir tek ortak noktaları varsa, doğrular kesişirler (Şekil 3.5 c).



Şekil 3.5. Paralel, ayrık paralel ve kesişen hiperbolik doğrular

Teorem 3.3.1 Hiperbolik düzlemde bir L hiperbolik doğrusunun üzerinde olmayan bir P noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen sonsuz hiperbolik doğru vardır.

İspat: (Anderson, 1999).

3.4. Hiperbolik Düzlemin İzometrilere

Hiperbolik düzlemin izometrilere beş gruba ayrılırlar. Bunlar; yansımalar, ötelemeler, dönmeler, ötelemeli yansımalar ve limit rotasyonlardır. Bu izometrilere yansımalar ve ötelemeli yansımalar yönü korumayan izometrilere; ötelemeler, dönmeler ve limit rotasyonlar ise yönü koruyan izometrilere dir. Bu kısımda, limit rotasyonlar dışındaki izometrilere tanıtılacak, limit rotasyonlar ise son bölümde daha detaylı olarak incelenecektir.

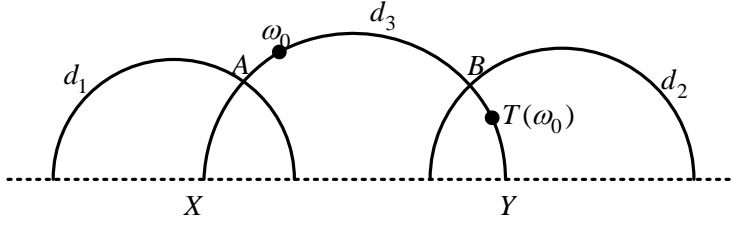
Teorem 3.4.1 *Hiperbolik düzlemin yönü koruyan izometrilere çift sayıda yansımaların, yönü korumayan izometrilere tek sayıda yansımaların bileşkesi olarak ifade edilebilirler.*

İspat: (Stillwell, 1992).

Yansıma: Hiperbolik düzlemde bir d doğrusu verilsin. Bu doğru reel eksene dik olan bir yarı doğru veya bir yarı çemberdir. Şayet d bir yarı çember ise d üzerindeki yansıma kendisi üzerindeki inversiyon ile aynıdır ve bunun denkleminin nasıl bulunacağı ikinci bölümde açıklanmıştır. Eğer d bir yarı doğru ise bu doğru üzerinde tanımlanan yansıma Öklid anlamındaki yansıma ile aynıdır ve bu yansıma $T(z) = -\bar{z} + a$ olarak tanımlanır. Burada a , d yarı doğrusunu üzerinde bulduran Öklid doğrusunun reel ekseni kestiği noktadır.

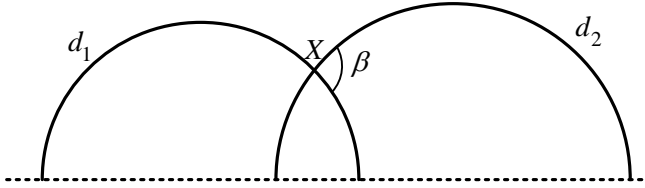
Öteleme: Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 ayrık paralel doğruları verilsin. Bu doğruların her ikisini de dik kesen bir tane d_3 doğrusu vardır. X ve Y noktaları d_3 doğrusunun sonsuzdaki noktaları olmak üzere, d_3 doğrusu d_1 ve d_2 doğrularını A ve B noktalarında kessin (Şekil 3.6). A ve B noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık q ve d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar da sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 olsun. Bu yansımaların bileşkesi alınarak elde edilen $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ ve $\Gamma^{-1} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ dönüşümlerinin her biri d_3 doğrusunu kümesel olarak sabit tutan bir hiperbolik ötelemedir. Γ ve Γ^{-1} ötelemelerinin hiperbolik düzlemde sabit noktaları yoktur. Fakat sonsuzdaki X ve Y noktalarını sabit tutarlar. Ayrıca, d_3 doğrusundan başka hiçbir doğruyu kümesel olarak sabit tutmazlar. ω_0 , d_3 doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere, Γ ve Γ^{-1} ötelemeleri ω_0 noktasını d_3 doğrusu üzerinde $2q$ kadar öteletirler. Γ ötelemesi d_3 doğrusu

üzerindeki noktaları X noktasından Y noktasına doğru ötelerken, Γ^{-1} ötelemesi tam tersi yönde öteler. Fakat her iki durumda da öteleme mesafesi değişmez.



Şekil 3.6. Hiperbolik düzlemde öteleme

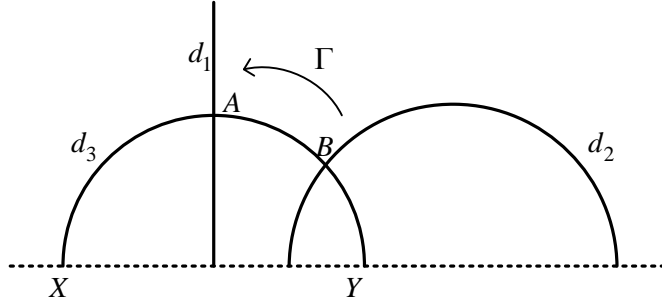
Dönme: d_1 ve d_2 doğruları hiperbolik düzlemde iki doğru olsun. Bu doğrular $\beta < 90^\circ$ olacak şekilde bir X noktasında kesişsinler (Şekil 3.7). d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 dönüşümleri olmak üzere, $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ ve $\Gamma^{-1} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ dönüşümlerinin her biri X noktasını sabit tutan bir dönmedir. Γ ve Γ^{-1} X noktası dışındaki noktaları X noktası etrafında 2β kadar fakat birbirlerine ters yönde döndürürler.



Şekil 3.7. Hiperbolik düzlemde rotasyon

Ötelemeli Yansıma: Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 ayrık paralel doğruları verilsin. Bu doğruların yegâne ortak dikmesi de d_3 olsun. d_3 doğrusunun sonsuzdaki noktaları X ve Y ve d_1 ve d_2 doğrularını kestiği noktalar sırasıyla A ve B olsun (Şekil 3.8). Γ_1 , Γ_2 ve Γ_3 dönüşümleri sırasıyla d_1 , d_2 ve d_3 doğruları üzerindeki yansımalar olsun. Bu yansımaların bileşkesi olan $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_3$ dönüşümü, $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ ötelemesi ile Γ_3 yansımasının bileşkesi olduğundan d_3 doğrusu boyunca bir ötelemeli yansımadır. Γ dönüşümü d_3 doğrusunu kümesel olarak sabit tutar fakat başka hiçbir hiperbolik doğruyu sabit tutmaz. Ayrıca, d_3 doğrusunun sonsuzdaki noktaları olan X ve Y noktalarını sabit tutar. Hiperbolik düzlemdeki hiçbir noktayı ise sabit tutmaz.

Eğer d_3 doğrusu üzerinde herhangi bir ω_0 noktası alınırsa, bu noktanın Γ dönüşümü altındaki görüntüsü olan $\Gamma(\omega_0)$ noktası da d_3 doğrusu üzerindedir. Ayrıca ω_0 ve $\Gamma(\omega_0)$ noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık, A ve B noktaları arasındaki hiperbolik uzaklığın iki katı kadardır. Γ dönüşümünün tersi olan Γ^{-1} dönüşümü de Γ dönüşümü ile aynı özelliklere sahip olmasına rağmen öteleme yönleri birbirlerinin tersidir.



Şekil 3.8. Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma

Limit Rotasyon: Hiperbolik düzlemde paralel iki doğru üzerindeki yansımaların bileşkesi olarak elde edilen limit rotasyonlar dördüncü bölümde daha geniş olarak ele alınacaktır.

3.5. Fuchs Grupları

Hiperbolik düzlemin tüm konform izometrilere fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $PSL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubuna bir Fuchs grubu denir.

Örnek 3.5.1 $\lambda > 1$ olmak üzere $T(z) = \lambda z$ dönüşümü hiperbolik düzlemde bir ötelemedir ve $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olan bir G grubu üretir. Bu G grubu bir devirli Fuchs grubudur.

Örnek 3.5.2 $T(z) = z + 1$ dönüşümü hiperbolik düzlemde bir limit rotasyondur ve $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olan bir Fuchs grubunu üretir.

Örnek 3.5.3 Modüler grup olarak bilinen

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

grubu da $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bir ayrık alt grubudur ve dolayısıyla bir Fuchs grubudur.

3.6. Hiperbolik Üçgenler

Öklid düzleminde farklı büyüklükte benzer üçgenler bulunabilir. Fakat hiperbolik düzlemde bu mümkün değildir. Hiperbolik düzlemde iç açıları belli olan bir üçgenin kenar uzunlukları ve alanı aşağıda verilen teoremler yardımıyla hesaplanabilir.

Teorem 3.6.1 *Hiperbolik düzlemde verilen bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarların karşısındaki açılar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

$$(i) \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

$$(ii) \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

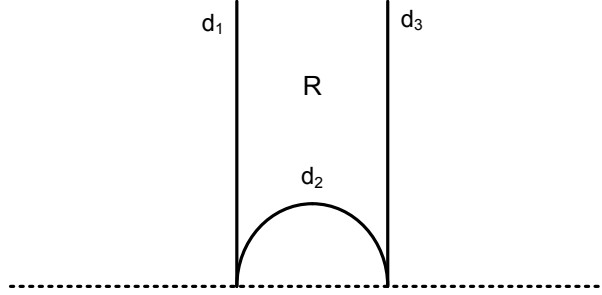
$$(iii) \frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

İspat: (Beardon, 1983).

Teorem 3.6.2 *T , iç açılarının ölçüleri α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. Bu durumda, T üçgeninin hiperbolik alanı $\mu(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ formülü ile verilir.*

İspat: (Beardon, 1983).

Örnek 3.6.3 Şekil 3.9 da verilen R üçgeninin iç açılarının ölçüsü 0 dır. Bu tür üçgenlere asimptotik üçgenler denir. Teorem 3.6.2 kullanılarak R üçgeninin alanının π olduğu kolayca görülebilir.

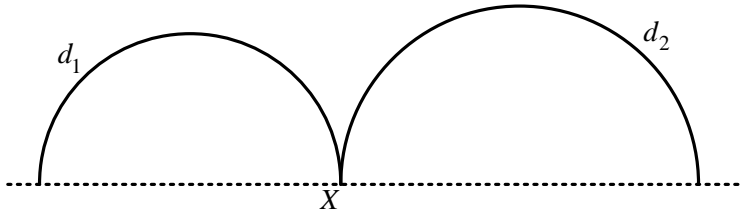


Şekil 3.9. Asimptotik üçgen

4. LİMİT ROTASYONLARIN ÜRETTİĞİ GRUPLAR VE BÖLÜM YÜZEYLERİ

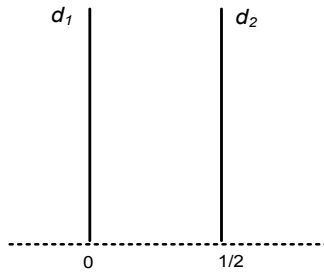
4.1. Limit Rotasyonlar

Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 paralel doğruları verilsin. Bu doğrular reel eksen üzerinde bir X noktasında kesişsinler (Şekil 4.1). d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 olmak üzere, $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ ve $\Gamma^{-1} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ dönüşümleri hiperbolik düzlemde hiçbir noktayı sabit tutmazlar. Fakat sonsuzdaki X noktasını sabit tuttıkları için limit rotasyonlar olarak adlandırılırlar. Γ ve Γ^{-1} X noktasından geçen hiperbolik doğruları X noktasından geçen başka hiperbolik doğrulara götürürler. X noktasında kesişen sonsuz hiperbolik doğru çifti bulunabileceği için X noktasını sabit tutan sonsuz limit rotasyon olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, bu limit rotasyonlar hiçbir hiperbolik doğruyu kümesel olarak sabit tutmazlar.



Şekil 4.1. Hiperbolik düzlemde limit rotasyon

Örnek 4.1.1 Şekil 4.2 de verilen d_1 ve d_2 doğruları hiperbolik düzlemde paralel iki doğrudur. d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla $T_1(z) = -\bar{z}$ ve $T_2(z) = -\bar{z} + 1$ dönüşümleridir.



Şekil 4.2. Limit rotasyon

Bu durumda,

$$T(z) = (T_1 \circ T_2)(z) = z + 1 \quad \text{ve} \quad T^{-1}(z) = (T_2 \circ T_1)(z) = z - 1$$

dönüşümlerinin her biri hiperbolik düzlemde bir limit rotasyondur.

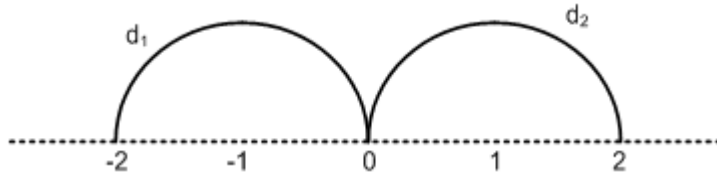
Örnek 4.1.2 Şekil 4.3 de verilen d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar, Örnek 2.6.2 de $T_1(z) = \frac{-\bar{z}}{\bar{z}+1}$ ve $T_2(z) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1}$ olarak bulunmuştu. Bu durumda,

$$(T_1 T_2)(z) = T_1(T_2(z)) = T_1\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}-1}\right) = \frac{\overline{\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}-1}\right)}}{\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}-1}\right)+1} = \frac{\frac{-z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}+1} = \frac{-z}{2z-1}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

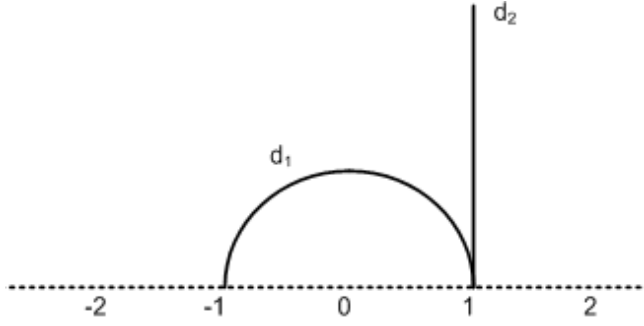
$$(T_2 T_1)(z) = \frac{z}{2z+1}$$

elde edilir. $T_1 T_2$ ve $T_2 T_1$ dönüşümlerinin her biri bir limit rotasyondur ve hiperbolik düzleme dahil olmayan 0 noktasını sabit tutar.



Şekil 4.3. Limit rotasyon

Örnek 4.1.3 Şekil 4.4 te verilen d_1 ve d_2 doğruları hiperbolik düzlemde paralel iki doğrudur. d_1 doğrusu üzerindeki yansımanın $T_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ olduğu inversiyonlar tanımlanırken gösterilmişti. d_2 üzerindeki yansımanın ise $T_2(z) = -\bar{z} + 2$ olduğu kolayca görülebilir.



Şekil 4.4. Limit rotasyon

Bu durumda,

$$(T_1 T_2)(z) = T_1(T_2(z)) = T_1(-\bar{z} + 2) = \frac{1}{(-\bar{z} + 2)} = \frac{1}{2 - z}$$

ve

$$(T_2 T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = T_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\left(\frac{1}{z}\right) + 2 = \frac{2z - 1}{z}$$

dönüşümleri 1 noktasını sabit tutan limit rotasyonlardır.

Uyarı 4.1.4 İki limit rotasyonun bileşkesinin bir limit rotasyon olması gerekmez.

Örnek 4.1.5 $f(z) = \frac{z-2}{2z-3}$ ve $g(z) = \frac{18-3z}{9-2z}$ dönüşümleri reel eksen üzerinde

sırasıyla 1 ve 3 noktalarını sabit tutan limit rotasyonlardır. Fakat $(f \circ g)(z) = \frac{1}{9}z$

dönüşümü bir limit rotasyon değildir. Bu dönüşüm 0 merkezli 1 ve 3 yarıçaplı

yarım çemberler üzerindeki yansımalar olan $T_1(z) = \frac{1}{z}$ ve $T_2(z) = \frac{9}{z}$

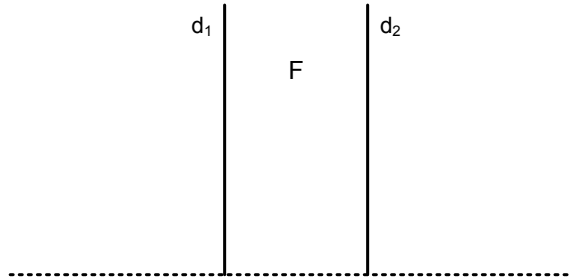
dönüşümlerinin bileşkesidir. Söz konusu yarım çemberler hiperbolik düzlemde

ayrık paralel doğrular oldukları için bunların üzerindeki yansımaların bileşkesi olan $z \rightarrow \frac{1}{9}z$ dönüşümü bir hiperbolik ötelemedir.

Bazı durumlarda ise iki limit rotasyonun bileşkesi yine bir limit rotasyondur. Örneğin, aynı noktayı sabit tutan farklı iki limit rotasyonun bileşkesi, o noktayı sabit tutan ve verilen limit rotasyonlardan farklı olan yeni bir limit rotasyondur.

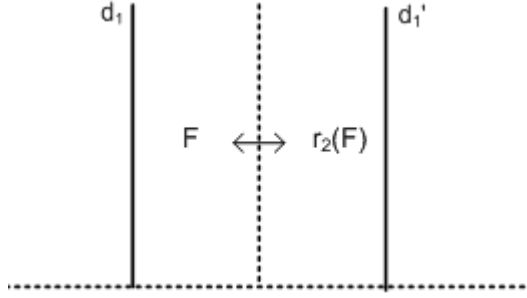
4.2. Bir Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı

Hiperbolik düzlemde birbirine paralel d_1 ve d_2 doğruları ele alınsın ve bu doğrular üzerindeki yansımalar sırasıyla r_1 ve r_2 olsun (Şekil 4.5). Bu yansımalar tarafından üretilen grup G olsun. Şekil 4.5 de gösterilen F kümesi G grubu için bir temel bölgedir. r_1 ve r_2 yansımalarının bileşkesi hiperbolik düzlemde bir limit rotasyondur. Bu limit rotasyon tarafından üretilen alt grup da H olsun. F kümesinin d_2 doğrusu üzerinde yansıtılmasıyla elde edilen $F \cup r_2(F)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olur (Şekil 4.6).

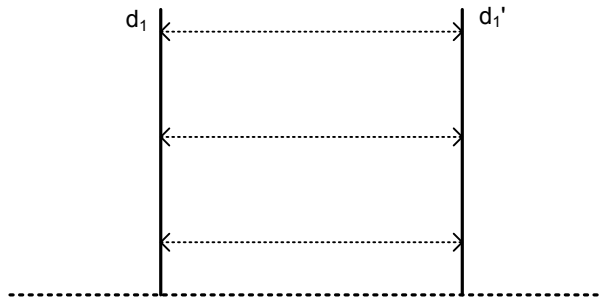


Şekil 4.5. G grubu için temel bölge

\mathbb{H}/H bir yüzeydir ve geometrik olarak şu şekilde elde edilir. $F \cup r_2(F)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olduğundan, $F \cup r_2(F)$ temel bölgesinin sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı yörüngede bulunabilir. $F \cup r_2(F)$ temel bölgesinin d_1 ile d_1' kenarları üzerinde sanal kısımları aynı olan noktalar aynı yörüngededirler (Şekil 4.7). $F \cup r_2(F)$ temel bölgesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse \mathbb{H}/H bölüm uzayı elde edilir. Bir sonsuz silindire homeomorf olan \mathbb{H}/H bölüm uzayı yalancı küre olarak adlandırılır (Şekil 4.8).

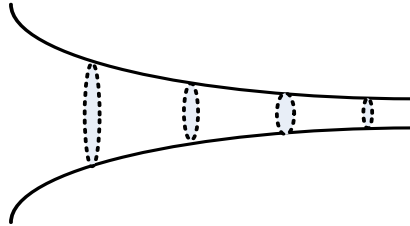


Şekil 4.6. H grubu için temel bölge



Şekil 4.7.

H grubu için başka temel bölgeler de bulunabilir. Temel bölge tanımı gereğince bunların her birinin alanı eşit olmak zorundadır. Yukarıdaki örnekte H grubu için bulunan temel bölge, sonsuz asimptotik üçgenlere bölünebilir. Bir asimptotik üçgenin alanının π olduğu Örnek 3.6.3 te gösterilmişti. O halde, H grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanının sonlu olmadığı ve dolayısıyla \mathbb{H}/H bölüm yüzeyinin alanının sonlu olmadığı kolayca görülebilir.



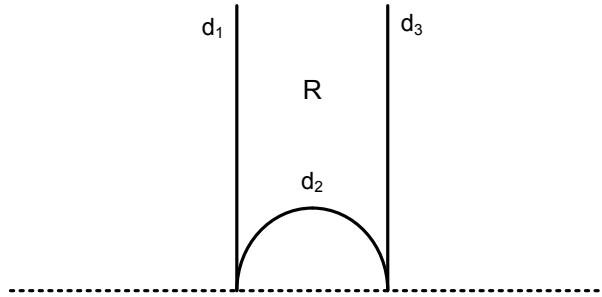
Şekil 4.8. \mathbb{H}/H bölüm uzayı (Yalancıküre)

Benzer şekilde iki limit rotasyon tarafından üretilen bir grubun da bölüm yüzeyi elde edilebilir. Ayrıca bu yüzeyin alanının da sonlu olmadığı görülebilir. Bu çalışmanın amacı sonlu nokta çıkarılmış kürelerin incelenmesi olduğu için iki limit

rotasyon tarafından üretilen gruplar ve bunların bölüm yüzeyleri bu kısma dâhil edilmeyecektir.

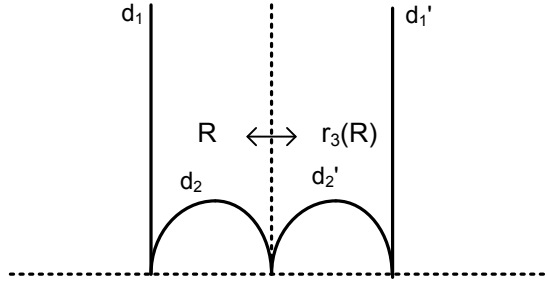
4.3. Üç Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı

Hiperbolik düzlemde bir asimptotik R üçgeni ele alınsın (Şekil 4.9). Bu üçgenin kenarları olan hiperbolik doğrular d_1, d_2 ve d_3 , ve bunlar üzerindeki yansımalar sırası ile r_1, r_2 ve r_3 olsun. Bu yansımalar tarafından üretilen grup G olsun. R üçgeninin G grubu için bir temel bölge olduğu kolayca görülebilir. r_1, r_2 ve r_3 yansımalarından elde edilen r_1r_2, r_2r_3 ve r_1r_3 bileşkeleri hiperbolik düzlemde birer limit rotasyondur. Elde edilen bu limit rotasyonlar tarafından üretilen alt grup da H olsun. R üçgeninin d_3 doğrusu üzerinde yansımaları alınsın. Bu durumda $R \cup r_3(R)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olur (Şekil 4.10).

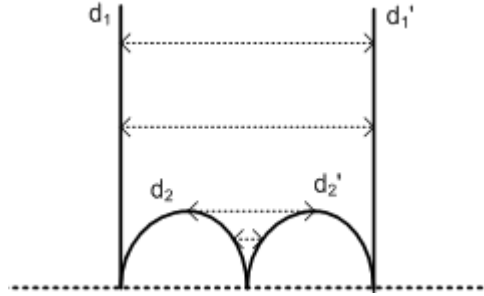


Şekil 4.9. G grubu için temel bölge

\mathbb{H}/H bir yüzeydir ve şöyle elde edilir. $R \cup r_3(R)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olduğundan, $R \cup r_3(R)$ temel bölgesinin sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı yörüngede bulunabilir. $R \cup r_3(R)$ temel bölgesinin d_1 ile d_1' kenarları üzerinde sanal kısımları aynı olan noktalar aynı yörüngededirler. Benzer şekilde, d_2 ile d_2' doğruları üzerinde bulunan ve r_3 dönüşümü ile birbirlerine götürülen noktaların da aynı yörünge oldukları aşikârdır (Şekil 4.11).

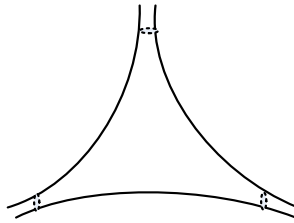


Şekil 4.10. H grubu için temel bölge



Şekil 4.11.

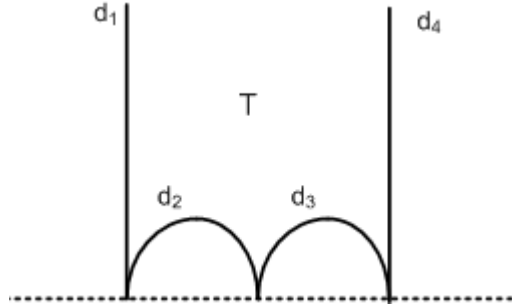
$R \cup r_3(R)$ kümesinin kenarlarının üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse \mathbb{H}/H bölüm yüzeyi elde edilir. Elde edilen \mathbb{H}/H bölüm uzayı üç nokta çıkarılmış bir küreye homeomorftur (Şekil 4.12). H grubunun Şekil 4.10'daki temel bölgesinin iki asimptotik üçgenin birleşimi olduğu görülmektedir. Böylece, $R \cup r_3(R)$ kümesi ve \mathbb{H}/H bölüm yüzeyinin alanının 2π olduğu görülür.



Şekil 4.12. \mathbb{H}/H bölüm uzayı

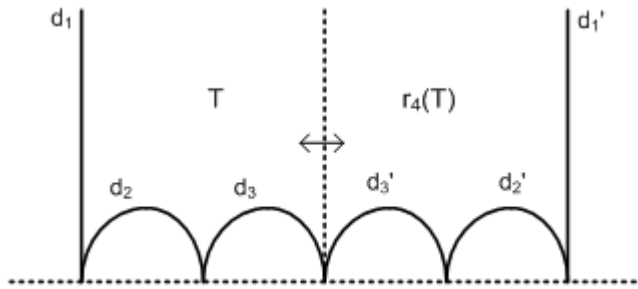
4.4. Dört Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı

Hiperbolik düzlemde dört köşesi sonsuzda olan bir T dörtgeni ele alınsın (Şekil 4.13).



Şekil 4.13. G grubu için temel bölge

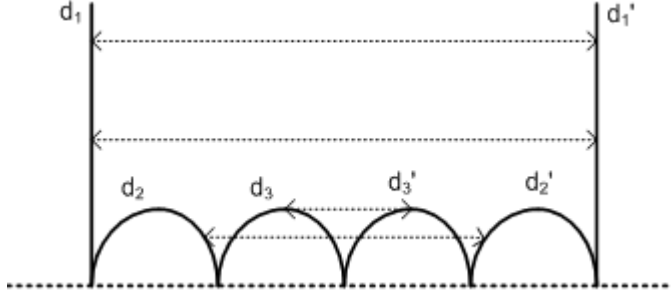
Bu dörtgenin kenarları olan hiperbolik doğrular d_1, d_2, d_3 ve d_4 ve bu kenarlar üzerindeki yansımalar sırası ile r_1, r_2, r_3 ve r_4 olsun. Bu yansımalar tarafından üretilen grup G olsun. Yukarıda verilen T dörtgeni, G grubu için bir temel bölgedir. r_1, r_2, r_3 ve r_4 yansımalarından elde edilen r_1r_2, r_2r_3, r_3r_4 ve r_1r_4 bileşkeleri hiperbolik düzlemde birer limit rotasyondur. Bu limit rotasyonlar tarafından üretilen alt grup H olsun. T dörtgeninin d_4 doğrusu üzerinde yansıması alınsın. Bu durumda, $T \cup r_4(T)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olur (Şekil 4.14).



Şekil 4.14. H grubu için temel bölge

Daha önce yapılanlara benzer şekilde, $T \cup r_4(T)$ temel bölgesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar şekil 4.15 te gösterildiği gibi birleştirilirse \mathbb{H}/H bölüm uzayı elde edilir. Bu ise, üzerinden dört nokta çıkarılmış bir küreye

homeomorftur H grubunun şekil 4.14 te verilen temel bölgesinin dört asimptotik üçgenin birleşimi olduğu görülmektedir. Böylece, Teorem 3.6.2 gereğince $T \cup r_4(T)$ kümesi ve \mathbb{H}/H bölüm yüzeyinin alanının 4π olduğu görülür.

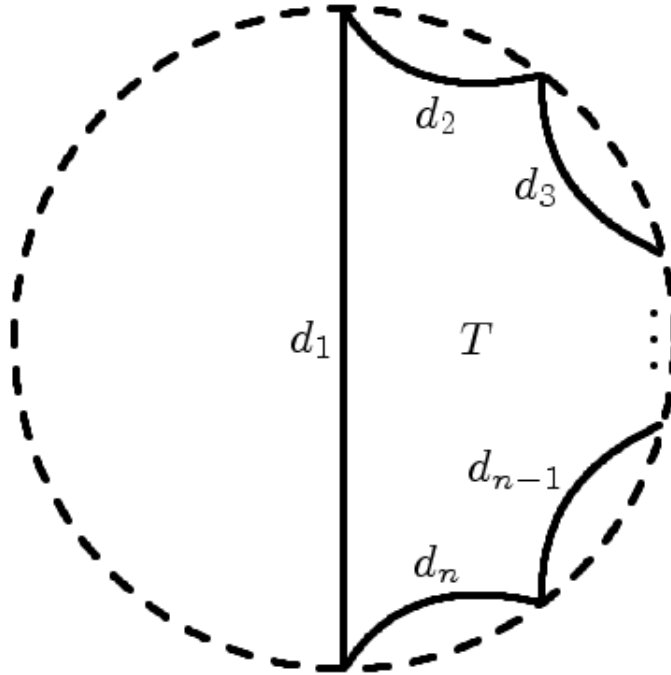


Şekil 4.15.

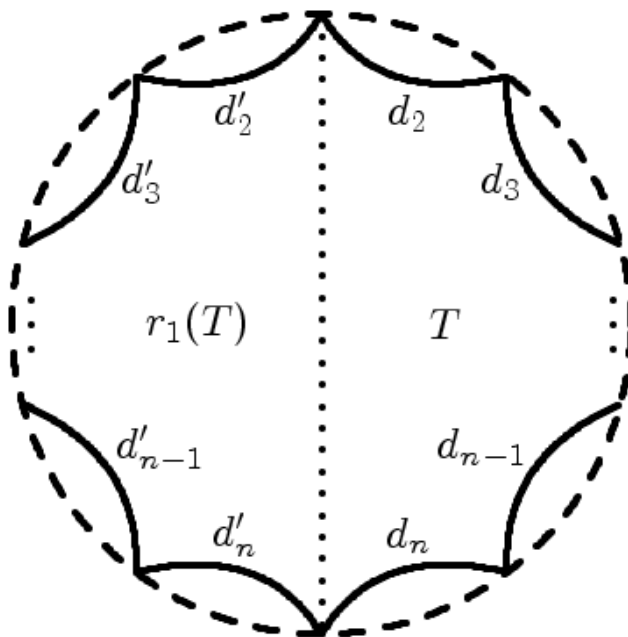
4.5. n Limit Rotasyon Tarafından Üretilen Grup ve Bölüm Uzayı

Hiperbolik düzlemde kenarları hiperbolik doğrular olan n kenarlı bir T çokgeni ele alınsın. Bu çokgenin kenarları olan hiperbolik doğrular $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, d_n$ ve bu kenarlar üzerindeki yansımalar sırası ile $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, r_n$ olsun. Bu yansımalar tarafından üretilen grup G olsun. n kenarlı T çokgeni G grubu için bir temel bölgedir (Şekil 4.16). $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, r_n$ yansımalarından elde edilen $r_1r_2, r_2r_3, r_3r_4, \dots, r_{n-1}r_n, r_nr_1$ bileşkeleri hiperbolik düzlemde birer limit rotasyondur. Bu limit rotasyonlar tarafından üretilen alt grup H olsun. T çokgeni d_1 doğrusu üzerinde yansıtılsın. Bu durumda, $T \cup r_1(T)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olur (Şekil 4.17). (Burada Şekil 4.16 ve Şekil 4.17 birim daire modeli esas alınarak çizilmiştir.)

\mathbb{H}/H bölüm uzayı bir yüzeydir ve şu şekilde elde edilir. $T \cup r_1(T)$ kümesi H grubu için bir temel bölge olduğundan, $T \cup r_1(T)$ temel kümesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse \mathbb{H}/H bölüm uzayı elde edilir. Elde edilen \mathbb{H}/H bölüm uzayı, üzerinden n tane nokta çıkarılmış bir küreye homeomorftur.



Şekil 4.16. G grubu için temel bölge



Şekil 4.17. H grubu için temel bölge

Üzerinden n tane nokta çıkarılmış bir hiperbolik kürenin alanı aşağıda verilen teorem yardımıyla hesaplanabilir.

Teorem 4.5.1 $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, hiperbolik düzlemde n tane limit rotasyon tarafından üretilen grubun bölüm yüzeyinin alanı $2(n-2)\pi$ dir.

İspat: $n=1$ ve $n=2$ için elde edilen yüzeyin alanının sonlu olmadığı bu bölümde görülmüştür. Dolayısıyla bu iki durum teoreme dâhil edilmemiştir.

$n \geq 3$ ve G grubu hiperbolik düzlemde n tane limit rotasyon tarafından üretilsin. Bu durumda, \mathbb{H}/G bölüm yüzeyi hiperbolik düzlemde iki tane n kenarlı asimptotik çokgenin uygun şekilde birleşiminden oluşmuştur. Her bir asimptotik çokgen $n-2$ tane asimptotik üçgene bölünebileceği için \mathbb{H}/G bölüm yüzeyi toplam $2(n-2)$ tane asimptotik üçgenden ibarettir. Teorem 3.6.2 gereğince her bir asimptotik üçgenin alanının π olduğu biliniyor. Böylece, \mathbb{H}/G bölüm yüzeyinin alanı $2(n-2)\pi$ olarak hesaplanır.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında hiperbolik düzlemde izometrilere olan limit rotasyonlar tanıtılmış ve bunlar tarafından üretilen Fuchs grupları incelenmiştir. Ayrıca, bu gruplar yardımıyla elde edilen bölüm yüzeylerinin bazı topolojik ve geometrik özellikleri üzerinde durulmuş ve $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, hiperbolik düzlemde n tane limit rotasyon tarafından üretilen bir grubun bölüm yüzeyinin n tane nokta çıkarılmış küreye homeomorf olduğu ve alanının $2(n-2)\pi$ olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Anderson, J. W. 1999. Hyperbolic Geometry. Springer-Verlag, London, Berlin, Heidelberg.
- Beardon, A.F. 1983. The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Beltrami, E. 1868. Teoria fondamentale delgi spazii di curvatura costante. **Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2** (2): 232-255.
- Churchill, R.V., Brown J.W. 1990. Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, New York.
- Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, Cambridge.
- Katok, S. 1992. Fuchsian Groups. The University of Chicago Press, Chicago, London.
- Silverman, R.A., 1972. Introductory Complex Analysis. Dover Puplications, NewYork.
- Stillwell, J. 1992. Geometry of Surfaces. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Eren GÜMÜŞALAN
Doğum Yeri ve Tarihi : Kars 08/08/1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
-SCI
-Diğer
- b) Bildiriler
-Uluslararası
-Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

- Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : 1) Hürmüs Ayaydın İlköğretim Okulu SSK Ücretli Matematik Öğretmenliği (2009-2010)
- 2) Mehmet Emin Ünal Kız Teknik ve Meslek Lisesi SSK Ücretli Matematik Öğretmenliği (2010-2011 Güz Dönemi)
- 3) 70. Yıl Anadolu Sağlık Meslek Lisesi SSK Ücretli Matematik Öğretmenliği (2010- 2011 Bahar Dönemi)

İLETİŞİM

E-posta Adresi : erengumusalan@hotmail.com
Tarih :