T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2011-0001

SOBOLEV'İN BULDUĞU FONKSİYON HIZLI DALGA DENKLEMİNİN GELİŞTİRİLMİŞİ VE GENELLEŞTİRİLMESİ

Gökhan METİN

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Gökhan METİN tarafından hazırlanan Sobolev'in Bulduğu Fonksiyon Hızlı Dalga Denkleminin Geliştirilmişi Ve Genelleştirilmesi başlıklı tez, 18.01.2011 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yard. Doç.Dr. Ali IŞIK	Adnan Menderes Ü.	
Üye :	Yard.Doç.Dr. Ali FİLİZ	Adnan Menderes Ü.	
Üye :	Yard.Doç.Dr. Salih YALÇINBAŞ	Celal Bayar Ü.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ……………………. Sayılı kararıyla ………. tarihinde onaylanmıştır.

Prof.Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

18/01/2011

Gökhan METİN

ÖZET

SOBOLEV'İN BULDUĞU FONKSİYON HIZLI DALGA DENKLEMİNİN GELİŞTİRİLMİŞİ VE GENELLEŞTİRİLMESİ

Gökhan METİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK
2011, 44 sayfa

Bu tezde fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemler için başlangıç değer problemi çalışılmıştır. Bu problemlerin çözümleri tekil çekirdeğe sahip, Volterra integral denklemini sağladığı ispatlanmıştır. Bu indirgemede gezgin zaman fonksiyonu $\tau(x,x^0)$ ve Sobolev fonksiyonu $\sigma(x,x^0)$ önemli rol oynar. Asimtotik koşulu ile gezgin zaman fonksiyonu $\tau(x,x^0) = O(|(x,x^0)|),\ x \to x^0$ Eikonel denklemin bir çözümüdür. Sobolev fonksiyonu $\sigma(x,x^0)$ taşıyıcı (transport) denklemin çözümüdür. Bu indirgemede taşıyıcı denklem yeniden yapılandırılmıştır. İntegral denklemler yaklaşık ardışıklar yöntemiyle ispatlanmıştır. Bu tezde Sobolev'in fonksiyon hızlı dalga denklemiyle ilgili sonuçların bir genellemesi yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler : Taşıyıcı denklem, Eikonal denklem, Sobolev fonksiyonu, ray, Volterra

ABSTRACT

THE GENERALIZE AND EXTEND SOBOLEV'S RESULT RELATİVE TO THE WAVE EQUATION WİTH THE FUNCTION VELOCITY

Gökhan METİN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematic
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ali IŞIK
2011, 44 pages

Initial value problems for hyperbolic equations with function coefficients are considered in this thesis. It was proved that the solutions of these problems satisfy Volterra integral equations with singular kernels. The travel time function $\tau(x, x^0)$ and so-called Sobolev's function $\sigma(x, x^0)$ play very important role in the procedure of this reduction. The travel time function is a solution of the eikonal equation with asymptotic condition $\tau(x, x^0) = O(|(x, x^0)|)$, $x \to x^0$ and Sobolev function is solution of the special transport equation with the asymtotic condition of the form $\sigma(x, x^0) = O\left(\frac{1}{|\lambda - \lambda^0|}\right)$, $x \to x^0$. This transport equation is constructed in the process of the equation. These Volterra integral equations were solved by the successive approximations. The result of the thesis generalize Sobolev's result relative to the wave equation with the function velocity.

Key words : Transport equation , Eikonal equation , Sobolev function , Ray , Volterra

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince hiçbir fedakarlıktan kaçınmayarak tüm bilgi birikimi ve tecrübesiyle bana destek olan danışman hocam sayın Yrd. Doç Dr. Ali IŞIK hocama teşekkür ederim. Ayrıca tüm yaşamımda daima yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Gökhan METİN

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bir f fonksiyonunun $\int_a^b |f(x)|^2 < \infty$ eşitsizliğinin sağlanması halinde (yani integral değeri mevcut ve sonlu ise) f fonksiyonuna $L_2(a,b)$ fonksiyonu denir.

Bu fonksiyonun temel özellikleri

a) L_2 ‘ ye ait herhangi fonksiyonun toplamı yine L_2 ‘ye aittir.
b) Kuadratik olarak integre edilebilir iki fonksiyonun çarpımı integre edilebilir bir fonksiyondur.
c) $f(x)\epsilon L_2$ ve λ herhangi bir sayı olmak üzere :

$$\lambda f(x) \in L_2$$

d) $f(x) \in L_2$ ve $g(x) \in L_2$ ise aşağıdaki Bunyokovsky-Schwarz eşitsizliği gerçeklenir.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2\,(x)dx \int_a^b g^2\,(x)dx$$

İkinci çeşit Volterra tipi integral denklemlerinin varlığı ve tekliği, $f(x)$ ve $K(x,y)$ fonksiyonları üzerine yüklenen sürekli olma koşulundan daha genel varsayımlar altında gerçeklenir. Bir integral denklemin çözümün tekliği ile ilgili soruların yanıtlanmasında çözümün arandığı fonksiyonların sınıfı (integre edilebilirlik sınıfı, süreklilik, v.s.) önemli bir rol oynar.

Bir Volterra integral denkleminin $K(x,y)$ çekirdeği $x \in (a,b)$ için sınırlı , yani M bir sabit olmak üzere

$$|K(x,y)| \leq M \quad , x \in (a,b)$$

$f(x)$'in sabit terimi (a, b) aralığında integre edilebilir ise her λ değeri için (a, b) aralığında Volterra integral denkleminin $u(x)$ gibi integre edilebilir bir tek çözümü vardır.

Bir mekanik problemin incelendiği 1823 yılında ABEL'in ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Karşılaştığı fiziksel problemin çözümünün

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}}$$

şeklinde lineer Volterra integral denklemine indirgenip bu denklemin çözümü yine abel tarafından 1826 yılında verilmiştir.

Bu çalışmada Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözümleri, varlık ve teklik teoremleri ispatlarıyla verilmiştir. Birinci mertebeden kısmi diferansiyel konularından eikonal denklem, ray, front, Riemann konuları hakkında bilgiler verilmiştir. Taşıyıcı denklemin çözümü, özellikleri incelenmiştir. Fonksiyon katsayılı Cauchy probleminin Volterra denklemine indirgenmesinde Sobolev uzaylarından yararlanılmıştır. Telegraf denklemi $[u(x,t)] = u(x, t-\tau)$ dönüşümüyle taşıyıcı denkleme indirgenmiş bu indirgemede Sobolev fonksiyonu σ önemli rol oynamıştır. Green formulü yardımıyla Volterra integral denklem elde edilmiştir. Bu denklem tekil integral denklem olup, Ray koordinatlarından Riemann koordinatlara dönüştürülmüştür ve integral denklem yaklaşık ardışıklar yardımıyla çözülmüştür.

Varlık ve teklik teoremleri incelenmiş, bunların belirli bölgede yakınsaklığı, sürekliliği, çözümü hakkında çalışılmıştır. Son olarak Maxwell sisteminin telegraf denklemine dönüşebileceği uygulaması yapılmıştır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Tanımlar

Tanım 2.1.1 λ sayısal bir parametre , $f(x)$ ve $K(x,y)$ bilinen fonksiyonlar , $u(x)$, bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

denklemi , ikinci çeşit Volterra lineer integral denklemi olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.2 $K(x,y)$ fonksiyonu Volterra denkleminin çekirdeği olmak üzere , $f(x) = 0$ ise

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

formunu alır ve ikinci çeşit homojen Volterra integral denklemi olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.3 $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

denklemi birinci çeşit Volterra integral denklem olarak isimlendirilir. (Lovitt1950)

Tanım 2.1.4 İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişkene sahip olan integral denkleme Volterra integral denklemi , sınırlarından her ikisi birden sabit olabileceği gibi biri veya her ikisi birden sonsuz olan denklemlere de Fredholm integral denklemleri denir. Bu tanıma göre Fredholm integral denklemine ait çekirdek $\{(x,y): a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ karesel bölgesi üzerinde, Volterra integral denklemine ait çekirdek $\{(x,y): a \leq y \leq x \leq b\}$ üçgensel bölgede tanımlanmıştır. (Romanov,1974)

Tanım 2.1.5 $K(x,y)$ çekirdek fonksiyonu $\{(a \leq x \leq b, a \leq y \leq b)\}$ aralığında sürekli ise integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemidir. Eğer $K(x,y)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem tekil (singüler) integral denklem adı verilir. (Lovitt,1950)

Örneğin,

$f(x) = \int_0^x \frac{u(y)dy}{(x-y)^\alpha}$ (Tekil olmayan integral denklemleridir)

$f(x) = \int_0^\infty sinxyu(y)dy$ (Tekil olan integral denklemidir)

2.2 Volterra İntegral Denklemleri

II. cins lineer integral denklemin çözümü , bilinen metodlar kullanılarak farklı şekilde elde edilmiştir. İlk önce C. Neumann , J. Liouville (1837) ve Volterra'nın ortaya koydukları metottur.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

İntegral denklemi ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun , λ'nın bir integral serisi şeklinde ifade edilebileceğini göstermişlerdir. Bu seride λ'nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları , x'in fonksiyonlarıdır. Bu seri ise λ'nın her değeri için yakınsaktır. Çözüm elde edilmesi için kullanılan yol ise ardışık yaklaştırma metodudur.

Volterra , önemli ve kullanışlı olan bu metodu , bir teorem halinde şu şekilde ifade etmiştir. Eğer $f(x)$ ve $K(x,y)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ise integral denklemi bu aralıkta her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaştırma metodu ile belirlenir.

Teorem 2.2.1: İkinci tip lineer Fredholm integral denklemi olarak bilinen

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy \tag{2.1}$$

denkleminde f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında , K fonksiyonu da $\{a \leq y \leq x \leq b\}$ üçgensel bölgede sürekli olsunlar. Bu takdirde

$$\Phi_0 = f(x)\,,\ \Phi_n(x)\int_a^b K(x,y)\,\Phi_{n-1}(y)dy\,, \quad n = 1,2,3\,... \tag{2.2}$$

olmak üzere (2.1) denkleminin düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) \qquad .(2.3)$$

serisi ile verilen bir tek u sürekli çözümü vardır. (Davis,1930)

İspat: (2.1) integral denkleminde λ = 0 için;

$$u(x) = f(x)$$

olup bunu $u_0(x)$ ile gösterelim. (2.1) denkleminde elde edilecek fonksiyonu u_1 ile gösterirsek

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)u_0(y)dy \tag{2.4}$$

olur. Buradaki integral x'in bir fonksiyonu olacağından, bunu

$$\Phi_1(x) = \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy \tag{2.5}$$

ile gösterirsek (2.4) denklemi

$u_1(x) = f(x) + \lambda\Phi_1(x)$

(2.6)

şeklinde yazılabilir. İlk yaklaşımı

$$u_1(x) = f(x) = \Phi_0(x) \qquad (2.7)$$

ile ifade edersek üçüncü yaklaşımı

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u_1(y)dy \qquad (2.8)$$

olacaktır. (2.6) ‘da (2.7) gereğince $f(x)$ yerine $\Phi_0(x)$ yazılırsa

$$u_1(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x)$$

olup,

(2.8)’de yerine konursa

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)[\Phi_0(y) + \lambda\Phi_1(y)]dy$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\Phi_0(y)dy + \lambda^2 \int_a^b K(x,y)\Phi_1(y)dy$$

Burada $f(x)$ yerine $\Phi_0(x)$ yazılır. O zaman buna uyularak

$$\Phi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\Phi_1(y)dy$$

$$u_2(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x)$$

yazılabilecektir. Bunu genelleştirirsek

$$u_n(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x) + \cdots + \lambda^n\Phi_n(x) \qquad (2.9)$$

şeklinde bir seri oluşacaktır.Burada

$$\Phi_0(x) = f(x)\,,\ \ \Phi_n(x) = \int_a^b K(x,y)\,\Phi_{n-1}(y)dy\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

buradan (2.1) denklemine gidilerek,

$$u(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x) + \cdots + \lambda^n\Phi_n(x) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) \qquad (2.10)$$

serisi elde edilir. Buna göre,

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

olur. λ'nın mutlak değeri yeteri kadar küçük olursa bu seri düzgün yakınsak olur. Çünkü $f(x)$'in tanım aralığındaki sınırı F, $K(x,y)$'nin tanım bölgesindeki sınırınıda K_0 ile gösterecek olursak

$$|\Phi_0(x)| = |f(x)| \le F$$

$$|\Phi_1(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)\,\Phi_0(y)dy\right|$$

$$\le \int_a^b |K(x,y)||\Phi_0(y)|dy$$

$$\le FK_0(b-a)$$

$$|\Phi_2(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)\,\Phi_1(y)dy\right|$$

$$\le \int_a^b |K(x,y)||\Phi_1(y)|\,dy$$

$$\le \int_a^b K_0F\,K_0(b-a)dy = F{K_0}^2(b-a)^2$$

$$|\Phi_3(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)\,\Phi_2(y)dy\right|$$

$$\leq \int_a^b |K(x,y)||\Phi_2(y)|dy$$

$$\leq \int_a^b K_0 F\, {K_0}^2 (b-a)^2 dy = F{K_0}^3 (b-a)^3$$

……………………………………………………

$$|\Phi_n(x)| \leq F{K_0}^n (b-a)^n$$

$$|\lambda^n \Phi_n(x)| \leq F(K_0|\lambda|(b-a))^n$$

bulunur. Genel terimi $(K_0|\lambda|(b-a))^n$ olan seri (bölüm kriteri) yakınsak olduğundan Weierstrass kriterinden $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x)$ serisi $[a,b]$ aralığında ve λ değeri için düzgün ve mutlak yakınsaktır. Terimlerin her biri sürekli olan bu serinin düzgün yakınsadığı fonksiyonu *u* ile gösterirsek *u* süreklidir.

$u(x)$ fonksiyonu (2.1) ile verilen denklemin bir çözümüdür.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(y)]dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x,y)\Phi_n(y)dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \Phi_{n+1}(x) = \Phi_0(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) = f(x)$$

olur ki bu (2.10) serisi yardımıyla verilen $u(x)$ denklemini sağladığını gösterir.

(2.1) nolu denklemin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ gibi birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

olmak üzere

$$v(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)v(y)dy$$

homojen integral denklemini verir. Schwartz eşitsizliği yardımıyla

$$|v(x)|^2 \leq |\lambda^2| \int_a^b |K(x,y)|^2 dy \int_a^b |v(y)|^2\, dy$$

x'e göre integre edilirse

$$\int_a^b |v(x)|^2\, dx < |\lambda^2| {K_0}^2 (b-a)^2 \int_a^b |v(y)|^2\, dy$$

elde edilir.

$$[1 - |\lambda^2|\, {K_0}^2 (b-a)^2] \int_a^b |v(x)|^2\, dx < 0$$

olur. $[1 - |\lambda^2|\, {K_0}^2 (b-a)^2] > 0$ olduğundan $\int_a^b |v(x)|^2\, dx < 0$ olmalıdır. Ancak bu ifade negatif olmayacağına göre $\int_a^b |v(x)|^2\, dx = 0$ olur ki $v(x) = 0$ olur ve $u_1(x) = u_2(x)$ sonucu görülür. O halde (2.1) denkleminin çözümü tektir.

2.3 Ardışık Yaklaştırma Yöntemiyle İntegral Denklemlerin Çözümü

Başlangıç ve sınır değer koşullarına sahip hiperbolik denklemler Volterra tipi integral denklemlere indirgenebilir. Bu denklemleri ardışık yaklaştırma yöntemiyle çözebiliriz. İkinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.11)$$

denkleminde

$$f(t) \in C[0,T], \ \ K(t,\tau) \in C \quad (0 \leq \tau \leq t \leq T) \quad (2.12)$$

olsunlar. $f(t)$, $K(t,\tau)$ fonksiyonları $[0,T]$ aralığında sürekli ise, integral denklemlerin bu aralıkta her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaştırma yöntemiyle belirlenir. Bu takdirde

$$u_0(t) = f(t), \ \ u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau, \qquad n = 1,2,3 \ldots$$

olmak üzere (2.11) denkleminin düzgün (ve mutlak) yakınsak

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(t) \quad (2.13)$$

serisi ile verilen bir tek sürekli çözümü vardır. Volterra , önemli ve kullanışlı olan bu metodu şu şekilde ifade etmiştir.

Teorem 2.3.1: (Varlık Teoremi)

$f(t) \in C[0,T]$, $K(t\,,\tau) \in C$ $(0 \leq \tau \leq t \leq T)$ koşulları altında $u(t) \in C[0,T]$ fonksiyonu (2.11) nolu denklemin çözümüdür. (Romanov V.G,1974)

İspat:

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara gereksinim vardır.

Lemma 2.3.1: Kabul edelim ki , $K_0 = max|K(t,\tau)|$, $F_0 = max|f(x)|$

$0 \leq \tau \leq t \leq T$ olsun. O zaman

$$|u_n(t)| \leq \frac{F_0(K_0 t)^n}{n!} \quad (2.14)$$

olur.

İspat: Tümevarım yöntemiyle $n = 0$ için $|u_0(t)| \leq$ F_0 'dır. $n = k$ için

$|u_k(t)| \leq \frac{F_0(K_0 t)^k}{k!}$ doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$, için

$|u_{k+1}(t)| \leq \frac{F_0(K_0 t)^{k+1}}{(k+1)!}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$|u_{k+1}(t)| = \left|\int_0^t K(t,\tau)u_k(\tau)d\tau\right|$$

$$\leq \int_0^t |K(t,\tau)||u_k(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq K_0 \int_0^t |u_k(\tau)| d\tau$$

$$\leq K_0 \int_0^t \frac{F_0(K_0\tau)^k}{K!} d\tau$$

$$= \frac{F_0 {K_0}^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k \, \mathrm{d}\tau = \frac{F_0 {K_0}^{k+1} t^{k+1}}{k!(k+1)} = \frac{F_0(K_0 t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Lemma 2.3.2:

(2.12) koşulları altında $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında yakınsaktır.

İspat:

1.Weierstrass teoreminden

$$|u_k(t)| \leq \frac{F_0(K_0 t)^k}{k!} \leq \frac{F_0(K_0 T)^k}{k!} \qquad \forall t \in [0,T] \tag{2.15}$$

yakınsaklığı görülür.

Lemma 2.3.3:

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

1. Weierstrass teoremi gereği $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında yakınsaktır. $u_k(t)$, $[0,T]$ aralığında süreklidir. O zaman $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ toplam fonksiyonu da $[0,T]$ aralığında süreklidir. 2. Weierstrass teoremi gereği ,

$$lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=0}^{N} u_k\,(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k\, dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} u\,(t)dt \quad , \qquad \forall[\alpha,\beta] \in [0,T]$$

Lemma 2.3.4:

$u(t)$ fonksiyonu (2.1.1) denkleminin bir çözümüdür.

İspat:

$$u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau \qquad , \; n = 1,2,3,\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau)\; \sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\tau)d\tau$$

$$u_0(t) = f(t)$$

eşitliğini her iki tarafına ekleyelim

$$u_0(t) + \sum_{n=1}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau)\; \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau + f(t)$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau)\; \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \; + f(t)$$

$n \to \infty$ limiti alınırsa

$$u(t) = lim_{n\to\infty} \int_0^t K(t,\tau) \ \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \ + \ f(t)$$

2. weierstrass teoremi gereği,

$$u(t) = \int_0^t K(t,\tau) \ \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \ + \ f(t)$$

$$u(t) = \int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau + f(t)$$

olur.

Teorem 2.3.2: (Teklik)

(2.11) denklemin çözümü tektir.

İspat: (2.11) denkleminin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u^1(t)$, $u^2(t)$ gibi

$$u^1(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau)u^1(\tau)d\tau$$

$$u^2(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau)u^2(\tau)d\tau$$

birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$u^1(t) - u^2(t) = \int_0^t K(t,\tau)[u^1(\tau) - u^2(\tau)]d\tau$$

olur.

$$u^1(t) - u^2(t) = \varphi(t)$$

olmak üzere,

$$\varphi(t) \quad = \quad \int_0^t K(t,\tau)\varphi\,(\tau)d\tau$$

homojen integral denklemini verir. $u^1(t) = |\varphi(\tau)|$ olmak üzere

$$|\varphi(t)| \;\; \leq \;\; K_0 \int_0^t |\varphi(\tau)| d\,\tau$$

$$\int_0^t |\varphi(\tau)| d\,\tau = u(t)$$

ise

$$u^1(t) \;\; \leq \;\; K_0 u(t)$$

$$u^1(t) - K_0 u(t) \leq 0$$

her iki tarafı $e^{-K_o t}$ ile çarparsak

$$e^{-K_o t} u^1(t) - K_0 e^{-K_o t} u \;\leq 0 \;\;,$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-K_o t} u(t)] \leq 0 \;\;,$$

0’ dan t’ye integral alınırsa

$$e^{-K_o t} u(t) - u(0) \leq 0 \quad ,$$

$$e^{-K_o t} u(t) \;\; \leq \;\; 0 \,,$$

$u(t) \leq 0$ ve $u(t) \geq 0$, ise $u(t) \equiv 0$. $\forall t \in [0,T]$ için $|\varphi(t)| \equiv 0$ olur.

$\varphi(t) = u^1(t) - u^2(t) = 0$ ise $u^1(t) = u^2(t)$ olur.

Sonuç: (2.13) ile belirtilen seri her λ değeri için düzgün yakınsak olduğundan ikinci tip Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı λ ‘dan bağımsızdır.

3. EİKONAL DENKLEM, RAY, FRONT VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem konularından eikonal denklem, ray, front, Riemann koordinatları hakkında temel bilgiler verilecektir.

3.1 Eikonal Denklem

$\tau(x, x^0)$ bir fonksiyon x^0 parametre olmak üzere

$$|\nabla\tau(x, x^0)|^2 = \frac{1}{c^2(x)} \quad , \quad n^2 = \frac{1}{c^2(x)} \quad x, x^0 \in R^3 \tag{3.1}$$

$$\tau(x, x^0) = O(|x - x^0|)\,, x \to x^0\,, \tag{3.2}$$

koşulları altında eikonal denklemini sağlar.

3.2 Ray Koordinatlar

x^0, R^3 ‘de sabit bir nokta ve x , R^3‘de keyfi bir nokta olsun. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ keyfi birim vektör olmak üzere α yönünde tanjant vektörüne sahip olan x^0’a giden bir ışını dikkate alalım. x , bu ışının keyfi bir noktası olsun. Bu nokta Riemann (Ray) koordinatlar ile aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$x = f(\zeta, x^0) \quad , \quad \zeta = \tau\alpha \quad , \quad (\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3))$$

R^3’deki her x^0, ζ nokta çifti arasındaki aşağıdaki bağıntı

$\left|\frac{\partial f(\zeta, x^0)}{\partial \zeta}\right| \equiv det\left(\frac{\partial f(\zeta, x^0)}{\partial \zeta}\right) \neq 0$ olmak üzere

$f(\zeta, x^0)$ fonksiyonu , $\zeta = g(x, x^0)$ şeklinde bir ters fonksiyona sahiptir. $g(x^0, x^0) = 0$ ve $J(x) \equiv \left|\frac{\partial g(x,x^0)}{\partial x}\right| = \left[\left|\frac{\partial f(\zeta,x^0)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=g(x,x^0)}\right]^{-1}$, $\left|\frac{\partial g(x,x^0)}{\partial x}\right|_{x=x^0} = 1$

$J(x)$, Kartezyen sistemden Riemann (ray) koordinat sistemine dönüşümün jakobiyenidir.

3.3 Eikonal Denklemin Çözümü

Lemma 3.3.1 :

c_0 pozitif sabit $c(x) = c_0$ olmak üzere $\tau(x, x^0) = |x - x^0|/c_0$ denklemi (3.1), (3.2) probleminin bir çözümüdür.

İspat:

$$\left|\nabla_x\left(\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\right| = \left|\nabla_x\left(\left[\frac{1}{c_0}\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]^{1/2}\right)\right| = \frac{1}{c_0}\left|\frac{x-x^0}{|x-x^0|}\right| = \frac{1}{c_0}$$

3.4 Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlere Ait Temel Bilgiler

Eikonel denklemin (3.1), (3.2) eşitliklerini dikkate alarak $\tau(x, x^0)$'ın x_k 'ya göre kısmi türevlerini alalım. $k = 1,2,3$ p, q, r sırasıyla

$$p = \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \;;\quad q = \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \;;\quad r = \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \;; \qquad (3.3)$$

$$F = p^2 + q^2 + r^2 \qquad (3.4)$$

olur. $F = 0$ hali (3.1) Eikonal denklemine karşılık gelir. Bu denklem için Euler denklem sistemi

$\frac{dx_1}{ds} = F_p = 2p\,, \qquad \frac{dx_2}{ds} = F_q = 2q\ , \frac{dx_3}{ds} = F_r = 2r\,,$ (3.5)

$\frac{d\tau}{ds} = pF_p + qF_q + rF_r = 2(p^2 + q^2 + r^2) = 2n^2(x)$ (3.6)

$\frac{dp}{ds} = -\left(F_\tau p + F_{x_1}\right) = -\left(-\frac{\partial n^2(x)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial n^2(x)}{\partial x_1}$

$\frac{dq}{ds} = \frac{\partial n^2(x)}{\partial x_2}, \qquad \frac{dr}{ds} = \frac{\partial n^2(x)}{\partial x_3},$ (3.7)

Kısaca $x = \big(x_1(s), x_2(s), x_3(s)\big), \quad p = (p_1, p_2, p_3),$

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \frac{d\tau}{ds} = 2n^2, \qquad \frac{dp}{ds} = 2n(x)\nabla_x(x) = 2n^2\frac{\nabla n}{n} = 2n^2\nabla_x lnn(x),$$

dir. Bu son sistemi $t = \tau\,,\ dt = 2n^2$ olmak üzere

$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{n^2}, \quad \frac{dp}{dt} = \nabla_x lnn(x)$ (3.8)

şeklinde yazılabilir ki bu sisteme Euler sisitemi denir. Yüzey $(\tau = sabit)$ ise dalga önü olarak adlandırılır.

$$\nabla\tau dx = (p, q, r)(dx_1, dx_2, dx_3) = pdx_1 + qdx_2 + rdx_3 = d\tau = 0$$

den dolayı $\nabla\tau = (p, q, r)$ vektörü eğri önünün normalidir.

Tanım 3.4.1 : $\tau(x, x^0) = t$ denklemi t zamanında x^0'daki kaynak noktasında ön dalgayı tanımlar. $\tau(x, x^0) = t$ yüzeyin karakteristik konoididir. $\tau(x, x^0) = t$ karakteristik konoid oluşturma metodu çift karakterli denilen farklı çizgiler oluşturmayı içerir. Bu farklı çizgiler konoidin üzerine yatar ve ortaklaşa bunu oluştururlar. X boşluğunun üstündeki çift karakterli projeksiyona ışın(ray) denir.

$\tau(x, x^0) = t$ yüzeyine bu ışınlar ortogonaldir. Işınları bulabilmek için Euler sisteminin çözülmesi gerekir.

$\nabla\tau$, $t = \tau(x, x_0)$ yüzeyine dikey, dalga önü, $t = \tau(x, x_0)$'ın yüzey seviyesi olduğundan

$$\frac{dx}{ds} = \left(\frac{dx_1(s)}{ds}, \frac{dx_2(s)}{ds} \frac{dx_3(s)}{ds}\right) = (2p, 2q, 2r) = 2\nabla\tau(x, x_0)$$

$$\frac{dx}{ds} = 2\nabla\tau(x, x_0) \tag{3.9}$$

$$\frac{d^2x}{ds} = 2\nabla n^2(x) \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 = 4n^2(x) \tag{3.11}$$

(3.10), (3.11) denklemlerine ray denklemleri denir.

σ , ray için eğri uzunluğunu göstermek üzere

$$d\sigma^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

$$d\sigma^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = 4(p^2 + q^2 + r^2)(ds^2)$$

ve

$$d\sigma = 2nds \tag{3.12}$$

olur.

$$\frac{d}{ds} = 2n\frac{d}{d\sigma} \tag{3.13}$$

Dalga boyunca τ ‘nun değişimi

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = n \tag{3.14}$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\tau}{d\sigma} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} n d\sigma$$

$$\tau\big(x(\sigma)\big) = \tau\big(x(\sigma_0)\big) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n\big(x(\sigma)\big)d\sigma \tag{3.15}$$

3.5 Taşıyıcı Denklemin Çözümü ve Özellikleri

Lemma 3.5.1 : c_0 pozitif sabit, q_0 sabit olsun. Fonksiyon ,

$$\sigma(x, x^0) = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{1}{2}\ q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}\right)$$

problemin çözümü

$$2\nabla\tau\nabla\sigma + \sigma\left(\Delta\tau - \frac{q_0}{c_0^2}\right) = 0 \tag{3.16}$$

$$\sigma(x, x^0) = O\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right)\ \ , x \to x^0 \tag{3.17}$$

İspat: $\sigma(x, x^0) = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{1}{2}\ q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}\right)$, $\tau(x, x^0) = |x - x^0|/c_0$

olsun. Bu fonksiyonlar (3.16) denklemini sağlar.

$|x - x^0| = r$ ise

$$\Delta\left(\frac{|x-x^0|}{c_0}\right) = \frac{2}{c_0|x-x^0|}.$$

Küresel koordinatları kullanarak ,

$$\Delta\tau = \Delta\left(\frac{r}{c_0}\right) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}(r)\right) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{r^2}2r = \frac{2}{c_0 r}.$$

gösterilmiş olur ve

$$\nabla_x(|x-x^0|) = \nabla_x\left(\left[\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x-x^0}{|x-x^0|},$$

$$\nabla_x\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right) = \nabla_x\left(\left[\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{x-x^0}{|x-x^0|^3},$$

olur.

$$\sigma\Delta\tau = \frac{1}{|x-x^0|}exp\ (\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0})\frac{2}{c_0|x-x^0|}$$

$$\begin{aligned}\nabla\sigma = \nabla\left(\frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\right) \\ &= \nabla\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right)exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right) \\ &+ \frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0}\nabla(|x-x^0|),\end{aligned}$$

$$\nabla\sigma = -\frac{x-x^0}{|x-x^0|^3}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right) + \frac{x-x^0}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0},$$

veya

$$\nabla\sigma = -\frac{x-x^0}{|x-x^0|^2}\sigma + \frac{x-x^0}{|x-x^0|}\frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0}\sigma.$$

$\nabla\sigma, \nabla\tau, \Delta\tau$ için bu bağıntılar (3.16) ‘da yerine konulursa

$2\nabla\tau\nabla\sigma + \sigma\Delta\tau - \frac{q_0\sigma}{c_0^2} = -\frac{2}{c_0|x-x^0|}\sigma + \frac{q_0\sigma}{c_0} + \frac{2}{c_0|x-x^0|}\sigma - \frac{q_0\sigma}{c_0} = 0$ elde edilir.

Lemma 3.5.2 :

$c(x) \equiv c_o\,, q(x) \equiv q_0$ olsun. $x \in \cup_\varepsilon(x^0) = \{x\colon |x-x^0| < \varepsilon\}$, olmak üzere (3.16) , (3.17) probleminin çözümü

$\sigma(x,x^0) = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{1}{2} q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}\right)$,

ise $\sigma(x,x^0)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(a) $lim_{r\to+0}\, \sigma(x,x^0)\tau(x,x^0) = \frac{1}{c_0}$, $r = |x-x^0|$;

(b) $\sigma_s(x,x^0)$ ikinci dereceden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyon eğer $x \neq x^0$. $|\Delta\sigma_s(x,x^0)| \leq \frac{K}{\tau(x,x^0)}$, $x \to x^0$ K sabit olmak üzere ;

(c) $\lim\limits_{r\to+0} \int_{|x-x^0|=r}\int \frac{\partial\sigma(x,x^0)}{\partial n} dS = -4\pi$;

(d) $\sigma(x,x^0) = \sigma(x^0,x)$

İspat:

(a) $\varepsilon > 0$, $x \in \cup_\varepsilon(x^0)$, $\tau(x,x^0) = |x-x^0|/c_0$ olsun. Eğer $x \in \cup_\varepsilon(x^0)$, alınırsa

$lim_{x\to x^0}\, \sigma(x,x^0)\tau(x,x^0) = \frac{1}{|x-x^0|}|x-x^0|/c_0 = \frac{1}{c_0}$ eşitliği elde edilir.

Eğer $x \in R^3 \setminus \cup_\varepsilon(x^0)$, $\tau(x,x^0) = |x-x^0|/c_0 + O(|x-x^0|^2)$,

$\sigma(x,x^0) = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{1}{2} q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}\right)$, alınırsa

$$lim_{x\to x^0}\, \sigma(x,x^0)\tau(x,x^0)$$

$$= \lim_{x\to x^0}\left\{\frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right).(|x-x^0|/c_0+O(|x-x^0|^2)\right\} = \frac{1}{c_0}$$

olur.

(b) $x \in \cup_\varepsilon(x^0)$ $x \to x^0$ için $\frac{K}{\tau(x,x^0)} = \frac{Kc_0}{|x-x^0|}$.

olmak üzere eğer

$x \in \cup_\varepsilon(x^0)\setminus\{x^0\}, r = |x-x^0|, \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0}$ ise

$$|\Delta\sigma(x,x^0)| = \left|\Delta_x\left(\frac{1}{r}exp\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right| = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}exp\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{a}+\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{r}{a}\right)^3\frac{1}{3!}+r^4\alpha(r)\right)\right)\right) \quad , \quad R(r) = r^4\alpha(r)$$

geri kalan kısım Taylor formülü ile ilgilidir. Langrange formülünden

$$R(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^4\frac{1}{4!}e^{\xi},\ 0 \le \xi \le r$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-1+\frac{r^2}{a^2 2!}+2r^3\alpha(r)+r^4\alpha'(r)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{2r}{a^2 2!}+6r^2\alpha(r)+4r^3\alpha'(r)+r^4\alpha''(r)\right)$$

$$= \frac{1}{a^2 r}+6\alpha(r)4r\alpha'(r)+r^2\alpha''(r)$$

$$= \frac{K}{r} \quad \lim_{r\to\infty} \alpha(r) = 0\,.$$

(c) $\lim\limits_{r\to+0} \int\int_{|x-x^0|=r} \frac{\partial\sigma(x,x^0)}{\partial n} dS = \lim\limits_{r\to+0} \int\int_{|x-x^0|=r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} exp\left(\frac{r}{a}\right)\right) dS$

$= \lim\limits_{r\to+0} \left\{-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2 2!} + 2r\alpha(r) + r^2\alpha'(r)\right\} \iint_{|x-x^0|=r} dS$

$= -4\pi.$

4. CAUCHY PROBLEMİNİN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNE İNDİRGENMESİ

$x = (x_1, x_2, x_3)$, c pozitif bir sabit, $q(x) \in C^2(R^3), g(x) \in C^2(R^3) \cap H^4(R^3)$,

$h(x) \in C^1(R^3) \cap H^3(R^3)$ olmak üzere homojen telegraf denklemi

$$u_{tt} = c^2(x)\Delta u + q(x)u_t \quad x \in R^3 \quad t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \quad u_t(x,0) = h(x) \quad , \tag{4.2}$$

olsun. Amacımız telgraf denklemi için bu Cauchy problemini çok katlı Volterra tipi integral denkleme indirgemektir. Bu integral denklemin çözümü için ardışık yaklaşımlar metodu kullanılacaktır.

Teorem 4.1 : (4.1) problemi (4.2) koşulları altında

$$\sigma_\varepsilon(x, x^0) = \frac{1}{|x^\varepsilon - x^0|}\sqrt{\frac{J(x^\varepsilon)}{c(x^\varepsilon)}\frac{c(x)}{J(x)}}exp\,(\frac{1}{2}\int_{\Gamma(x^0,x)} q(\xi)d\tau) .$$

$$F(x,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\tau(\xi,x)=t}\left\{\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial g(\xi)}{\partial n} - g(\xi)\frac{\partial \sigma_s(\xi,x)}{\partial n} + \sigma_s(\xi,x)\frac{\partial \tau(\xi,x)}{\partial n}h(\xi)\right\}dS$$

olmak üzere

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\xi, t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi \sigma_S(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau + F(x,t)$$

integeral denklemini sağlar.

İspat : $u(x,t)$, (4.1) ve (4.2) ‘in çözümü olsun.

$$[u(x,t)] = u(x,t-\tau) = u_1(x,t).$$

olmak üzere $[u(x,t)]$ fonksiyonu

$$[u_{tt}] = c^2(x)[\Delta u] + q(x)[u_t]. \tag{4.3}$$

$$grad_x u_1 = [gradu] - [u_t]grad\tau, \tag{4.4}$$

yardımıyla

$$\Delta u_1 = divgradu_1 = div[gradu] - div\{[u_t]grad\tau\},$$

$$div[gradu] = [\Delta u] - [gradu_t]grad\tau\ ,$$

$$div\{[u_t]grad\tau\} = [gradu_t]grad\tau - [u_{tt}](grad\tau)^2 + [u_t]\Delta\tau\ ,$$

(4.4)'den

$$\Delta u_1 = [\Delta u] - 2[gradu_t]grad\tau - [u_t]\Delta\tau + [u_{tt}](grad\tau)^2$$

$$\Delta u_1 = \frac{[u_{tt}] - q(x)[u_t]}{c^2(x)} - 2\left\{grad\frac{\partial u_1}{\partial t} + [u_{tt}]grad\tau\right\}grad\tau - [u_t]\Delta\tau + [u_{tt}]\frac{1}{c^2(x)}\ ,$$

veya

$$\Delta u_1 = \frac{-q(x)[u_t]}{c^2(x)} - 2grad\frac{\partial u_1}{\partial t}grad\tau - [u_t]\Delta\tau\ .$$

Son eşitliği $\sigma_s(x)$ sobolev fonksiyonuyla çarparsak ;

$$\sigma_s\Delta u_1 = -2\sigma_s grad\tau grad\frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(\sigma_s\Delta\tau - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$
(4.5)

$\sigma_s(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilirse

$$-2\sigma_s grad\tau grad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(\sigma_s \Delta\tau - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}\right) \frac{\partial u_1}{\partial t} = div(-\frac{\partial u_1}{\partial t} w) \qquad (4.6)$$

$w(x,t)$ düzgün fonksiyon olmak üzere

$$w = 2\sigma_s grad\tau\,, \qquad (4.7)$$

$$divw = \sigma_s \Delta\tau + \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}. \qquad (4.8)$$

(4.7) ‘i (4.8) denkleminde yerine koyduğumuzda

$$div(2\sigma_s grad\tau) = \sigma_s \Delta\tau + \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}$$

veya

$$2\nabla\tau\nabla\sigma_s + \sigma_s \left(\Delta\tau - \frac{q(x)}{c^2(x)}\right) = 0 \qquad (4.9)$$

$$|x - x^0|\sigma(x, x^0) = 1\ ,\ x \to x^0 \qquad (4.10)$$

elde edilir.

5. HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİ VE VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ

Lemma 5.1:

$x \in \cup_M(x^0)/\cup_\varepsilon(x^0)$, $\Gamma(x,x^0)$ x^0'ı x'e bağlayan ışın olsun. x^ε , $\Gamma(x,x^0)$ $S_\varepsilon(x^0)$ için arakesit noktası olsun.

$$\sigma_\varepsilon(x,x_0) = \frac{1}{|x^\varepsilon - x^0|}\sqrt{\frac{J(x^\varepsilon)c(x)}{c(x^\varepsilon)J(x)}}exp\,(\frac{1}{2}\int_{\Gamma(x,x^0)} q(\xi)d\tau),$$

$x \in \cup_M(x^0)/\cup_\varepsilon(x^0)$ için taşıyıcı denklemin (4.9) çözümüdür.

İspat: $2\nabla\tau\nabla\sigma_S + \sigma_S\nabla\tau - \frac{\sigma_S q(x)}{c^2(x)} = 0$ transport denklemini ele alalım. (3.9), (3.13) yardımıyla

$$2\nabla\tau\nabla\sigma_S = \frac{dx}{ds}\nabla\sigma_S = 2n\frac{dx}{d\sigma}\nabla\sigma_S = 2n\frac{d\sigma_S}{d\sigma} \quad \text{elde edilir.} \tag{5.1}$$

$x(\sigma)$ ışını boyunca σ_S fonksiyonunun yönlü türevi $\frac{d\sigma_S}{d\sigma}$ olmak üzere $\frac{dx}{ds}$ birim vektördür. (3.9)'dan

$$2n\frac{d\sigma_S}{d\sigma} + \sigma_S\Delta\tau - \frac{\sigma_S q(x)}{c^2(x)} = 0 \tag{5.2}$$

$\nabla\tau$ için R yanal olarak ışın tüpleri tarafından sınırlandırılmış bölge , S_0 ve S_1 olarak belirteceğimiz dalga önlerinin iki yanı tarafından örtülmüş olsun. R'nin yanal sınırını S_2 ile belirtilsin. Divergence teoreminden

$$\int_R \Delta\tau dV = \int_R div(\nabla\tau)dV$$

$$= \int_S \nabla\tau N dA$$

$$= \int_{S_0} \nabla\tau N dA + \int_{S_1} \nabla\tau N dA + \int_{S_2} \nabla\tau N dA \tag{5.3}$$

dV , R'nin bir parçası olmak üzere $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ olur. $\nabla\tau$, (3.24) ‘deki ışınlara paralel ve N'ye dik olmasından S_2 yüzeyi üzerinde $\nabla\tau N = 0$ olur. (3.9)'dan

$$\int_R \Delta\tau dV = \int_{S_0} \nabla\tau dA + \int_{S_1} \nabla\tau dA \tag{5.4}$$

dA yüzeydeki bir alandır. $\nabla\tau$, N ‘e göre $S_1(S_0)$ üzerinde sırasıyla aynı (zıt) yönlüdür. (3.1) S_1 üzerinde kullanılırsa

$$\nabla\tau N = \|\nabla\tau\|\|N\|cos0 = n \tag{5.5}$$

yazılabilir , böylece S_0 ,

$$\nabla\tau N = \|\nabla\tau\|\|N\|cos\pi = -n \tag{5.6}$$

(5.4) ‘den

$$\int_R \Delta\tau dV = \int_{S_1} ndA - \int_{S_0} ndA \quad . \tag{5.7}$$

Kartezyen koordinat sisteminden ray koordinat sistemine dönüşüm yapılırsa

$$dA = Jd\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \tag{5.8}$$

J Kartezyen koordinat sisteminden ray koordinat sistemine dönüşümün jakobiyeni olmak üzere

$$dV = dAd\sigma = Jd\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \frac{1}{n} d\tau \tag{5. 9}$$

$$\int_R \Delta\tau dV \approx \Delta\tau \frac{J}{n} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\tau \tag{5.10}$$

$$\int_{S_1} ndA = \int_{\tau+d\tau=const} ndA = \int_{\tau+d\tau=const} nJd\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \approx nJ|_{\tau+d\tau} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \qquad (5.11)$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_{S_0} ndA = \int_{\tau=const} ndA = \int_{\tau=const} nJd\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \approx nJ|_{\tau} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \qquad (5.12)$$

(5.7) ile

$$\int_{S_1} ndA - \int_{S_0} ndA = (nJ|_{\tau+d\tau} - nJ|_{\tau}) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \qquad (5.13)$$

(5.5), (5.6), (5.10), (5.13) kullanılarak

$$\Delta\tau = \frac{n\int_R \Delta\tau dV}{Jd\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\tau} = \frac{n(nJ|_{\tau+d\tau} - nJ|_{\tau}) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2}{Jd\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\tau} = \frac{n}{J}\left(\frac{nJ|_{\tau+d\tau} - nJ|_{\tau}}{d\tau}\right)$$

$$\Delta\tau \approx \frac{1}{J}\frac{d}{d\sigma}(nJ) \qquad (5.14)$$

elde edilir.

(5.2) ‘den

$$2n\frac{d\sigma_s}{d\sigma} + \sigma_s\Delta\tau - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)} = 2n\frac{d\sigma_s}{d\sigma} + \frac{1}{J}\frac{d}{d\sigma}(nJ)\sigma_s - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}$$

veya

$$\frac{2n}{\sqrt{nJ}}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma_s\sqrt{nJ}\right) - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)} = \sqrt{\frac{4}{Jc}}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma_s\sqrt{\frac{J}{c}}\right) - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)} = 0$$

$$\sqrt{\frac{4}{Jc}}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma_s\sqrt{\frac{J}{c}}\right)-\sigma_s\frac{q(x(\sigma))}{c^2(x(\sigma))}=0$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma_s\sqrt{\frac{J}{c}}\right)-\sqrt{\frac{Jc}{4}}\sigma_s\frac{q(x(\sigma))}{c^2(x(\sigma))}=0$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma_s\sqrt{\frac{J}{c}}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{J}{c}}\sigma_s\frac{q(x(\sigma))}{c^2(x(\sigma))}=0$$

$$\frac{\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma_s\sqrt{\frac{J}{c}}\right)}{\sigma_s\sqrt{\frac{J}{c}}}=\frac{1}{2}\frac{q(x(\sigma))}{c(x(\sigma))}$$

$x,\ x^0$ noktaları ve bu noktaları birleştiren ışını ele alalım. $|x-x^0|=\varepsilon$ yüzeyinin arakesit noktası x^ε ve ışın $\Gamma(x,x^0)$ olsun. Dalganın parametrik gösterimi $x=x(\sigma)$ ve $x(\sigma_0)=x_\varepsilon\,, x(\sigma_1)=x$ olmak üzere σ_0 ‘dan σ_1’e her iki tarafın integrali alınırsa

$$ln\left(\sigma_s\sqrt{\frac{J(\sigma_1)}{c(\sigma_1)}}\right)-ln(\,\sigma_s(x(\sigma_0)))\sqrt{\frac{J\big(x(\sigma_0)\big)}{c\big(x(\sigma_0)\big)}}=\frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\frac{q(x(\sigma))}{c(x(\sigma))}d\sigma$$

veya

$$\sigma_s\big(x(\sigma_1)\big)\sqrt{\frac{J(\sigma_1)}{c(\sigma_1)}}=\sigma_s\big(x(\sigma_0)\big)\sqrt{\frac{J\big(x(\sigma_0)\big)}{c\big(x(\sigma_0)\big)}}exp\ (\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\frac{q\big(x(\sigma)\big)}{c\big(x(\sigma)\big)}d\sigma)$$

$$\sigma_s\big(x(\sigma_1)\big)=\sigma_s\big(x(\sigma_0)\big)\sqrt{\frac{J\big(x(\sigma_0)\big)c(x(\sigma_1))}{c\big(x(\sigma_0)\big)J(x(\sigma_1))}}exp\ (\frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\frac{q(\xi(\sigma))}{c(\xi(\sigma))}d\sigma)$$

$d\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} d\xi_i^2}$

(3.14) kullanılarak ve σ_0 ‘nın yerine keyfi x^ε noktası ve σ’nın yerine x kullanılırsa eşitlik aşağıdaki hali alır.

$$\sigma_\varepsilon(x, x^0) = \frac{1}{|x^\varepsilon - x^0|} e^{\frac{1}{2}q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}} \sqrt{\frac{J(x^\varepsilon)}{c(x^\varepsilon)} \frac{c(x)}{J(x)}}\; exp\,(\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x^\varepsilon, x)} q(\xi) d\tau)\,,$$

veya

$$\sigma_\varepsilon(x, x^0) = \frac{1}{|x^\varepsilon - x^0|} \sqrt{\frac{J(x^\varepsilon)}{c(x^\varepsilon)} \frac{c(x)}{J(x)}}\, exp\,(\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x^0, x)} q(\xi) d\tau)\,.$$

Green formülünü

$\iiint_D (\sigma_s \Delta u_1 - u_1 \Delta \sigma_s) dx = \iint_S (\sigma_s \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma_s}{\partial n}) dS$,

ele alıp $x = (x_1, x_{2,} x_3)$, $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, n dış normal vektörü olmak üzere (4.6), (4.7), (4.8) ‘i uygularsak

$\iiint_D div(-\frac{\partial u_1}{\partial t} 2\sigma_s grad\tau) dx - \iiint_D u_1 \Delta \sigma_s dx = \iint_S (\sigma_s \frac{\partial u_1}{\partial n} - u \frac{\partial \sigma_s}{\partial n}) dS$,

integral altındaki divergence Ostrogradskii formülü ile

$$\iiint_D u_1 \Delta \sigma_s dx + \iint_S \left\{\sigma_s \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma_s}{\partial n} + 2\sigma_s \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial n}\right\} dS = 0\,,$$

elde edilir. u fonksiyonuna dönülürse

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial \tau}{\partial n},$$

aşağıdaki temel formüle ulaşılır ki

$$\iiint_D [u]\Delta\,\sigma_s dx + \iint_S \left\{\sigma_s\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial \sigma_s}{\partial n} + \sigma_s\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial \tau}{\partial n}\right\} dS = 0 \qquad (5.15)$$

burada $D = D_t = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \tau(x, x^0) \le t\}$,

$S = S_t = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \tau(x, x^0) = t\}$ ‘dir. Aşağıdaki temel özellikler

1) $lim_{x \to x_0}\, \sigma_s\ (x, x^0)\tau(x, x^0) = \frac{1}{c(x^0)}$ (5.16)

2) $\sigma(x, x^0) = \sigma_s\ (x^0, x)$; $x = x^0$ için iki defa türevlenebilir, (5.17)

3) $|\Delta\sigma_s\ (x^0, x)| \le \frac{K}{\tau^2(x,x^0)},\ \ x \to x^0$ (5.18)

4) Eğer S_1 , x^0 iç noktasını içeren kapalı yüzeyi ve n , S_1 ‘in dış yönlü normali olmak üzere

$$lim_{S_1 \to x^0} \int\int_{S_1} \frac{\partial \sigma_s(x,x^0)}{\partial n} dS = -4\pi \qquad (5.19)$$

ile (5.15)

$$\iint_S \left\{\sigma_s\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma_s \frac{\partial \tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\} dS + \iint_{S_\varepsilon} (\quad) dS + \iiint_{D'} [u]\Delta\sigma_s dv = 0, \qquad (5.20)$$

olur. S_ε ile sınırlı integral $\varepsilon \to 0$ iken $-4\pi u(x^0, t)$ olur.

$$u(x^0, t) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\sigma_s\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma_s \frac{\partial \tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\} dS + \frac{1}{4\pi}\iiint_{D'} [u]\Delta\sigma_s dv, \qquad (5.21)$$

(4.2) başlangıç koşulları ile

$$u(x^0,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\left\{\sigma_s\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial \sigma_s}{\partial n}+\sigma_s\frac{\partial \tau}{\partial n}h\right\}dS+\frac{1}{4\pi}\iiint_{D_t}[u]\Delta\sigma_s dx \qquad (5.22)$$

$$u(x^0,t)=F(x^0,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint_{D_t}[u]\Delta\sigma_s dx$$

$$u(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\tau(\xi,x)\le t}u\big(\xi,t-\tau(\xi,x)\big)\Delta_\xi\sigma_s(\xi,x)d\xi$$

$$F(x,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\tau(\xi,x)=t}\left\{\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial g(\xi)}{\partial n}-g(\xi)\frac{\partial \sigma_s(\xi,x)}{\partial n}+\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial \tau(\xi,x)}{\partial n}h(\xi)\right\}dS$$

Sürekli fonksiyonlar sınıfı içinde (5.22) integral denkleminin çözüm yöntemi vardır.

5.1 Sabit Katsayılı Başlangıç Değer Probleminin Volterra Tipi İntegral Denkleme Dönüşümü :

$$F(x,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\tau(\xi,x)=t}\left\{\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial g(\xi)}{\partial n}-g(\xi)\frac{\partial \sigma_s(\xi,x)}{\partial n}+\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial \tau(\xi,x)}{\partial n}h(\xi)\right\}dS$$

olmak üzere

$$u(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\tau(\xi,x)\le t}u\big(\xi,t-\tau(\xi,x)\big)\Delta_\xi\sigma_s(\xi,x)d\xi$$

Volterra integral denklemini alalım.

$\alpha=(cos\varphi sin\theta, sin\varphi sin\theta, cos\theta)$ $\quad (\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3))$ küresel koordinatlar yardımıyla

$$u(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(\xi,t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi\sigma_s(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau\,.$$

olur. T pozitif sayı olmak üzere $D(T) = \left\{(x,t): 0 \le t \le T - \frac{|x|}{M}\right\}$, tanım kümesinde (5.23) denkleminin tek sürekli çözümü vardır. Ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bu denklemin seri formunda bir çözümü elde edilir.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \ ,$$

$$u_0(x,t) = F(x,t) \ ,$$

$$u_n(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(\xi, t - \tau(\xi,x)) \frac{\Delta_\xi \sigma_S(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi = f(\tau\alpha, x)}} \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau, \qquad n \ge 1 \tag{5.23}$$

G, K sabitler olmak üzere

$$\left|\frac{1}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi = f(\tau\alpha, x)}}\right| \le G \ , \left|\Delta_\xi \sigma_S(\xi,x)\right| \le \frac{K}{\tau^2(\xi,x)} \ , \ \ \xi, x \in D(T).$$

$$\left|\frac{1}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi = f(\tau\alpha, x)}}\right| \le G \ .$$

Yukarıdaki eşitsizlik ve Sobolev fonksiyonu $\sigma_S(x, x^0)$ ‘ın özellikleri kullanılırsa

$$u_n(x,t) \le \frac{GK}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |u_{n-1}(\xi, t - \tau(\xi,x))| sin\theta d\theta d\varphi d\tau \ ,$$

$$|u_1(x,t)| \le \frac{GK}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_0 sin\theta d\theta d\varphi d\tau = GKF_0 t \ ,$$

$$|u_n(x,t)| \le F_0 (GK)^n \frac{t^n}{n!}$$ olur.

Lemma5.2:

$F_0 = max_{(x,t)\in D(T)}|F(x,t)|\,, \left|\frac{1}{\left|\frac{\partial g(\zeta,x)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=f(\tau\alpha,x)}}\right| \leq G$ koşulu ile

$$|u_n(x,t)| \leq F_0(GK)^n \frac{t^n}{n!} \tag{5.24}$$

dir.

İspat:

$|u_0(x,t)| \leq F_0$,

$|u_n(x,t)| \leq \frac{GK}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |u_{n-1}(\xi, t-\tau(\xi,x))| sin\theta d\theta d\varphi d\tau$, $n \geq 1$

$|u_n(x,t)| \leq GK \int_0^t (GK)^{n-1} F_0 t^{n-1} d\tau = (GK)^n F_0 \frac{t^n}{n!}$.

Lemma 5.3:

Belirtilen koşullar altında $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ serisi $D(T)$ ‘de düzgün yakınsaktır.

İspat:

$|u_n(x,t)| \leq F_0(KG)^n \frac{t^n}{n!} \leq F_0(KG)^n \frac{tT^n}{n!}$

Weierstrass teoremi yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ benzer şekilde $\overline{D(T)}$ üzerinde yakınsaktır.

Lemma 5.4:

Belirtilen koşullar altında, $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$ $\overline{D(T)}$ içinde sürekli fonksiyondur ve (5.23) integral denkleminin çözümü $u(x,t)$ ‘dir.

İspat:

$\forall(x,t)\in D(T)$, eşitlik düşünüldüğünde

$$u_n(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u_{n-1}(\xi,t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi\sigma_S(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau\ .$$

$\sum_{n=1}^{N}u_n(x,t)=$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{N}u_{n-1}(\xi,t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi\sigma_S(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

$lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=F(x,t)+$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}u_{n-1}(\xi,t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi\sigma_S(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

Bu fonksiyonun bir sonucu olarak

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$

denklemi sağlanır.

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(\xi,t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi\sigma_S(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau+F(x,t)$$

Böylece , son integral denklemi (5.23) denklemine eşdeğerdir.

6. MAXWELL SİSTEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ CAUCHY PROBLEMİNE İNDİRGENMESİ

D, B ve J vektörleri elektriksel yer değişkeni , manyetik indiksiyon ve akım yoğunluk vektörleri olmak üzere Maxwell sistemi

$$curl_x H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J \,, \tag{6.1}$$

$$curl_x E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \,, \tag{6.2}$$

$$div_x B = 0 \,, \tag{6.3}$$

$$div_x D = 4\pi\rho \,, \tag{6.4}$$

formundadır. ρ elektrik yükü yoğunluğu olmak üzere ρ ile J arasındaki bağıntı

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_x J = 0 \quad . \tag{6.5}$$

dır. Bundan dolayı (6.1) ve (6.2) eşitlikleri birbiriyle bağıntılıdır. Bu bağıntı elektrik yükünün korunduğunu ifade eder. B, D ve J terimleriyle E ve H arasındaki bağıntı

$$D = \varepsilon E \;, \qquad B = \mu H \quad , \quad J = \sigma E + j$$

(6.6)

şeklindedir ki burada ε , elektriksel geçirgenliği , μ manyetik geçirgenliği , σ iletkenliği , j akım yoğunluğu dış elektromanyetik güçlerin hareketi ifade eder.

$t = 0$ için

$$E = 0 \;,\; H = 0 \;,\; \rho = 0 \,,\; j = 0 \,, \tag{6.7}$$

dir. Bu $t = 0$ zamanında elektromanyetik alan , akım veya elektrik yükü olmadığı anlamına gelir. j vektör fonksiyonu , σ matris , ε, μ sabit , (6.1) – (6.7) denklemlerini sağlayan ρ fonksiyonu ve E, H vektör fonksiyon olmak üzere

$$EI_{t=0} = 0 \ , \ HI_{t=0} \ , \tag{6.8}$$

koşulları altında

$$curl_x H = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E) + \frac{4\pi}{c}\sigma E + \frac{4\pi}{c} j \, , \tag{6.9}$$

$$curl_x E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu H) \, , \tag{6.10}$$

$$div_x(\mu H) = 0 \tag{6.11}$$

$$div_x(\varepsilon E) = 0 \tag{6.12}$$

denklem sistemi elde edilir. Diferansiyel operatör $\frac{\partial}{\partial t}$ ‘i (6.9)’a uygulanırsa

$$curl_x \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E) + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t} j \, , \tag{6.13}$$

(6.10)’dan

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} curl_x E \tag{6.14}$$

(6.14)’ü (6.13)’ de yazarsak

$$curl_x(-\frac{c}{\mu} curl_x E\ ) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E) + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t} j \, , \tag{6.15}$$

$$-curl_x(curl_x E\ ) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E) + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} j \tag{6.16}$$

$curl_x(curl_x A) = \nabla_x divA - \Delta_x A$ özelliği kullanılırsa

$$graddivE + \Delta E = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E) + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} \tag{6.17}$$

(6.12)' dan

$\varepsilon div_x(E) = 0$ ise

$div_x(E) = 0$ ve $-curlcurlE = \Delta E$ ile

$q_i(x) = 4\pi\frac{\sigma_i(x)}{\varepsilon_i(x)}$, $c_i^2 = \frac{c}{\mu\varepsilon_i(x)}$, $f_i(x) = \frac{4\pi j_i}{\varepsilon_i(x)}$ $i = 1,2,3.$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} + q(x)\frac{\partial A_i}{\partial t} - c_i^2(x)\Delta_x A_i = f_i(x), \tag{6.18}$$

$$A_i I_{t=0} = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t}A_i I_{t=0} = 0\,, \tag{6.19}$$

telgraf denklemi elde edilir ki, her bir i değeri için, (6.18) , (6.19) problemi daha önceden tanımlanmış metot tarafından çözümlenir.

SONUÇ :

Tezin başlıca sonuçları şunlardır:

1) Sabit katsayılı ve fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemler Volterra integral denklemine dönüşmüştür.
2) Bu integral denklemler yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözümlenmiştir.
3) İntegral denklemlerin varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır.
4) Bu çalışmalar, ters problemin tekilliğinin ispatında kullanımında elverişlidir.

KAYNAKLAR

Erich Zauderer (1989).Partial Differential Equations of applied Mathematics.John Wiley Sons.

Evants,L. C.(1998).Partial Differential Equations.Providence,RI:American Mathematical Society.

Ikowa, M.(1997).Partial Differential Equations and Wave Phenomena.Providence , RI: American Mathematical Society.Kanwal ,R.P.(1971).Linear İntegral Equations.Academic Press,New York and London.

Işık,Ali (2004) Application of the Volterra type integral equations for problem of applied Mathematics

Kanwal, Ram P.,(1971). Linear Integral Equations Theory and Technique, Academic Press, New York

Lavrent'ev M.M, Savel'ev L.Ya.Linear operators and ill posed problems.New York, N.Y.Nauka Publishers.

Lawrence C. Evans(1998). Partial Differantial Equations. American Mathematical Society , Providence.

Lovitt, W. V.(1950). Linear Integral Equations, Dover Publications Inc., New York

Mizohata S.(1973).The Theory of Partial Differential Equations.Cambridge University Press.

Rakesh,(2003).An inverse problem for a layered medium with a point source.Problems 19,497-506.

Romanov, V.G.(1974).İntegral Geometry and İnverse Problems for Hyperbolic Equations.Springer Verlag.

Romanov, V.G.(1987).İnverse Problem of Mathematical Physics.VNU Science Press, The Netherlands.

Ross,Shepley L.(1984).Differential Equations.John Wiley and Sons.

Smirnov, V.I.(1963).A Course of Higher Mathematics.Permagon Press,Volume IV.

Sobolev, S.L.(1933).A Generalization of Kirchhoff's Formula.Dokl Akad.Nauk SSSR.Ser.6.

Sobolev, S.L. (1963) Application of Functional Analysis in Mathematical Physics. American Mathematical Society

Vladimirov ,V.S.(1971). Equations of Mathematical Physics. Marcel Dekker.

Volterra, Vito(1930). Theory of Functionals

Yakhno,V.G.(1998). Multidimensional İnverse Problems in Ray Formulations for Hyperbolic Equations.**Journal of İnverse and III Posed Problems V.6,N.4, VSP,Utrecth The Netherlands, pp.373-386.**

Yakhno, V.G.(2001).İnverse problems in Underwater Acoustics,Multidimensional İnverse Problems for Acoustic Equation in the Ray statement.**Springer-Verlag,New York ,2001,159-184.**

Yakhno, V.G. (2001), Sevimlican A. Fundamental Solution of the Cauchy Problem for an Anisotropic Electrodynamic System, Selçuk Journal of Applied Mathematics , v.2, N1, 83-94

Yakhno,V.G. (2002). III-Posed and İnverse problem, Multidimensional İnverse Problems for Hyperbolic equations with point sources.VSP,**The Netherlands,2002,443-468**

Yakhno, V.G. and Işık A.(2003).Volterra İntegral Equation Method for Solving Some Hyperbolic Equation problems,**V 4,N.2,Selcuk Journal of Appl.Math. pp.103-112**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gökhan METİN
Doğum Yeri ve Tarihi : Nazilli – 06.11.1981

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik
Yüksek Lisans Öğrenimi :
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
   -SCI
   -Diğer
b) Bildiriler
   -Uluslararası
   -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : MEB. 6yıl

İLETİŞİM

E-posta Adresi : gmetin09@yahoo.com

Tarih : 18.01.2011