T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2011-0002

HER CLOSED ALT MODÜLÜ DİREKT TOPLANAN OLAN MODÜLLERİN HARİTASI

Ömer ÜRÜN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN-2011

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2011-0002

HER CLOSED ALT MODÜLÜ DİREKT TOPLANAN OLAN MODÜLLERİN HARİTASI

Ömer ÜRÜN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN-2011

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Ömer ÜRÜN tarafından hazırlanan ”Her Closed Alt Modülü Direkt Toplanan Olan Modüllerin Haritası” başlıklı tez, 27.06.2011 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:	Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Üniversitesi	
Üye	:	Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:			
Üye	:			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

27.06.2011

Ömer ÜRÜN

ÖZET

HER CLOSED ALT MODÜLÜ DİREKT TOPLANAN OLAN MODÜLLERİN HARİTASI

Ömer ÜRÜN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2011, 61 sayfa

R birleşmeli ve birimli bir halka, M bir sağ R-modül olmak üzere M nin her kapalı (closed) alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye extending modül denir. Bu tanıma denk olan teorinin gelişimini sağlayan başka tanımlar da vardır. Ancak tarihi gelişim içinde kullanılan farklı terminolojiler bazen yeni araştırmacıların işini zorlaştırmaktadır. Biz burada sadece yukarıdaki tanımı temel alan erişebildiğimiz çalışmaları inceleyerek aralarındaki ilişkileri son bölümde şematik olarak verdik.

Anahtar Sözcükler
Extending modül, Modül sınıfları, Burulmalı (Torsion) teori, Esaslı (Essential) altmodül, Kapalı (Closed) alt modül.

ABSTRACT

MAPS OF MODULES THAT EVERY CLOSED SUBMODULES ARE DIRECT SUMMAND

Ömer ÜRÜN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2011, 61 pages

Let R be associative ring with identity and M be a right R-module. A module M is called extending if every closed submodule of M is a direct summand of M. There are other equivalent definitions which they improved the theory. But on the other hand, in the development of the theory some people used different terminology wrong way some how. This make cause for new researchers. In our work, we study all works that we could reach and based only the above definition, give the relations among them and show them with diagrams in the last section.

Key Words
Extending modules, Module classes, Torsion theory, Essential submodule, Closed submodule.

ÖNSÖZ

Değerli hocam sayın Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e,

bu süreç içerisinde yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen bölüm öğretim elemanlarına,

canım aileme,

ve bu imkanı sağlayan ülkeme minnettarım.

Ömer ÜRÜN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M_R	:	M bir sağ R-modül
$N \leq M$	:	N, M nin alt modülü
$Soc(M)$	:	M nin sokulu
ACC	:	Artan zincir koşulu
DCC	:	Azalan zincir koşulu
$r(X)$	:	X kümesinin sağ sıfırlayanı
$l(A)$	:	A kümesinin sol sıfırlayanı
$T(M)$	:	M nin torsion alt modülü
$N \leq_e M$	:	N, M nin essential alt modülü
$K \leq_{cl} M$	:	K, M de kapalı (closed) alt modül
$L \leq_c M$	:	L, M de komplement alt modül
Mod-R	:	Sağ R-modüllerin kategorisi
$\mathcal{X}$	:	R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{M}$	:	Bütün R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{I}$	:	İnjektif R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{U}_1$	:	Uniform R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{U}$	:	Sonlu uniform boyuta sahip R-modüllerin sınıfı
U-dim$(M) \leq n$	:	M sonlu n uniform boyuta sahip modül
$\mathcal{C}_1$	:	Basit (simple) R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{A}$	:	Artin R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{G}_1$	:	Devirli R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{G}$	:	Sonlu üreteçli R-modüllerin sınıfı
$Z(M)$	:	M nin singular alt modülü
$Z_2(M)$	:	M nin Goldie burulmalı alt modülü
$\mathcal{S}$	:	Singular R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{T}_G$	:	Goldie burulmalı R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{F}_G$	:	Goldie burulmasız (torsion free) R-modüllerin sınıfı
$\mathbb{E}$	:	Mod-R içinde kısa tam dizilerin bir sınıfı
$\mathcal{T}$	:	Burulmalı (torsion) R-modüllerin sınıfı
$\mathcal{F}$	:	Burulmasız (torsion free) R-modüllerin sınıfı
$\tau(M)$	:	M nin τ-torsion alt modülü
$\xi = (0, Mod\text{-}R)$	:	Trivial burulmalı (torsion) teori
$\chi = (Mod\text{-}R, 0)$	:	İmproper burulmalı (torsion) teori
$\mathcal{D}_\tau(M)$	:	M nin bütün τ-dense alt modüllerinin kümesi
$\mathcal{P}_\tau(M)$	:	M nin bütün τ-pure alt modüllerinin kümesi
$Cl_\tau^M(N)$	:	N nin M deki τ-pure kapanışı (closure)

1. GİRİŞ

Başlangıcı 1930'lu yıllarda von Neumann'a dayanan CS-modül kavramı, tarihi süreç içerisinde ona denk olan extending modül kavramı ile gelişimini sürdürmüştür. Halihazırda açık problemin çözümü için yapılan tanımlamalar ile bu iki tanımın farklılığı teorinin gelişimini sağlamıştır. Ancak tanımlardaki farklılık pek çok araştırmacı tarafından dikkate alınmadığından zaman zaman litaratürde bilgi kirliliği yaratmıştır. Çalışmamızda bu durum dikkate alınmıştır.

von Neumann, [37–41] çalışmalarında geometri terimini "lattice" manasında kullanmıştır. Bir R halkasının sağ esas ideallerinin kafesi (lattice) *üst sürekli* $(upper\quad continuous)$ ve *alt sürekli* $(lover\quad continuous)$ ise R ye *süreklidir (continuous)* denir. Yani I bir indis kümesi, R bir halka $i \in I$ için $b_i \in R$ olmak üzere $\{b_i\}_{i\in I}$ ve $a \in R$ yi göz önüne aldığımızda üst ve alt süreklilik;

(uc) $aR \cap (\sum\limits_{i\in I} b_iR)$=$\sum\limits_{i\in I}(aR \cap b_iR)$

(lc) $aR + (\bigcap\limits_{i\in I} b_iR) = \bigcap\limits_{i\in I}(aR + b_iR)$

biçimlerinde tanımlanır.

Bir R halkasına, her $r \in R$ için $rar = r$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa *von Neumann regülerdir* denir. von Neumann, "Bir R halkasının regüler olması için gerek ve yeter şart R nin her sağ esas idealinin bir direkt toplananı olmasıdır." ifadesine denk olarak "R nin her sol esaslı (essential) idealinin bir direkt toplananı olması" koşulunu ispat etmiştir.

Utumi 1960 da [33–36] "Regüler bir R halkasının sol sürekli (continuous) olması için gerek ve yeter şart $_RR$ nin extending olmasıdır." durumunu ispat etmiştir. Utumi aynı zamanda halka regüler olmadan da sürekli (continuous) ve yarı-sürekli (quasi-continuous) (yani π-injektif) konularında çalışmalar yapmıştır. Bu düşünce Jeremy [21, 22], Takeucchi [32] ve Mohamed-Bouhy [27] tarafından modüllere taşınmıştır.

1958-1960 yıllarında Goldie, [15, 16] gelişmeden bağımsız olarak bölüm halkaları ile ilgili çalışmalarında tümleyenleri (complement) düşündü. Bu durum öğrencisi Hajarnavis için sol CS-halkaları incelemeye ilham kaynağı olmuş ve Chatters ile bir çalışma yayınlanmıştır [4] .

1982 de Harada [18, 19] ve onun okulu tabir edilen araştırmacılar "lifting modül" kavramına dual olarak "extending modül" terimini kullanmışlardır. Teorinin gelişimine başta Okado [29], Kamal-Müller [24–26] ve Mohamed-Müller [28] olmak üzere pek çok araştırmacı katkı sağlamıştır. Günümüze kadarki gelişim içinde pek çok araştırmacıyı saymak mümkündür. Ancak Harmancı-Smith [20], modül sınıflarına ve torsion teoriye göre extending modül teori için Doğruöz-Smith [8, 9, 11, 12] çalışmaları dikkate değerdir.

Tanımlara göre ayrışım açısından Mohamed-Müller'in continuous ve quasi-continuous tanımlarındaki $C1$ şartının extending modüle denkliği de gelişim içinde önemli yer tutmaktadır. Şöyleki: "Bir M modülünün $C1$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şart M nin extending olmasıdır." Bu durumda

$$M \text{ sürekli (continuous)} \Rightarrow M \text{ yarı-sürekli (quasi-continuous)} \Rightarrow M \text{ extending}$$

olduğu açıktır. Modül sınıflarına göre continuous ve quasi-continuous modüllerin genelleştirmeleri için Doğruöz ve Smith'in [10] çalışmasına bakılabilir.

İlk olarak bir M modülü için aşağıdaki şatların denkliği hatırlatılabilir.

(1) M bir CS-modüldür.

(2) M nin her N alt modülü için N nin M deki her komplementi M nin bir direkt toplananıdır.

(3) M nin her kapalı (closed) alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

Yukarıdakine benzer şekilde aşağıdaki denklikten de bahsedilebilir.

(1) M bir extending modüldür.

(2) M nin her N alt modülü için N nin M deki her kapanışı M nin bir direkt toplananıdır.

(3) M nin her alt modülü M nin bir direkt toplananında essentialdır.

Açıkça "Bir modülün extending modül olabilmesi için gerek ve yeter şart o modülün

CS-modül olmasıdır.” durumu bilinen bir özelliktir.

Biz bu çalışmada orijinal tanımlamalardaki farklılığı dikkate alarak günümüze kadar yapılagelen ve erişebildiğimiz extending ağırlıklı çalışmaları inceleyerek aralarındaki ilişkiyi ortaya çıkarıp bir yol haritası oluşturduk. Buradan hareketle:

İkinci bölümde, bu konuyla ilgili olan ve diğer bölümlerde yeri geldikçe kullanılan temel kavramlar ve özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sırasıyla Doğruöz ve Smith’in [11] ve [12], Yücel ve Tercan’ın [42], Crivei’nin [5] ve [6], Zeng’in [43] çalışmaları incelenmiştir. İlk iki çalışmada modül sınıflarına göre Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül ve zayıf Tip 2 $\mathcal{X}-$extending modül kavramları tanımlanmış ve ilgili sonuçlara ulaşılmıştır. [42] de CS modüllerin bir genelleştirmesi olarak ECS-modüller tanımlanıp bu yeni modül sınıfının özellikleri araştırılmıştır. [5] ve [6] da modül sınıflarına göre ve modüllerin kısa tam dizilerinin sınıflarına göre extending modüllerin genelleştirmeleri incelenmiştir. [43] te ise genelleştirilmiş extending modüller tanımlanmış ve bu tanıma göre modüllerin özellikleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, Doğruöz’ün [8] ve [9], Charalambides’in [3], Özen’in [30], Çeken ve Alkan’ın [7] torsion teoride yaptıkları çalışmalar incelenmiş ve ilgili sonuçlar ortaya konmuştur.

Beşinci bölümde, tüm ilişkili modüller diyagramlar ile gösterilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Daha ayrıntılı bilgiler için (bakınız [1], [13] ve [17]).

2.1 Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1 R bir birleşmeli halka ve M bir toplamsal değişmeli grup olsun. Her $m, n \in M$ ve $r, s \in R$ için,

(1) $(m+n)r = mr + nr$

(2) $m(r+s) = mr + ms$

(3) $m(rs) = (mr)s$

olacak şekilde $(m, r) \mapsto mr$ ile tanımlı $M \times R \to M$ fonksiyonu varsa M ye bir *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir. Ayrıca R birimli bir halka ve 1_R, R nin birim elemanı olmak üzere her $m \in M$ için,

(4) $m1_R = m$

oluyorsa M ye bir *birimsel sağ R-modül* denir. Sol R-modül benzer şekilde tanımlanır. Birleşmeli R ve S halkaları için bir M değişmeli grubu sol S-modül ve sağ R-modül oluyorsa M ye *S-R-bimodül* denir ve ${}_SM_R$ ile gösterilir. Eğer R halkası değişmeli ise M hem sağ hem de sol R-modül olur.

Örnek 2.1.2 *R bir halka olmak üzere $\{0_R\}$ ve R, aşikar R-modüllerdir.*

Örnek 2.1.3 *Her değişmeli toplamsal grup, bir birimsel $\mathbb{Z}$-modüldür.*

Tanım 2.1.4 M ve N, bir R halkası üzerinde iki sağ R-modül olsun. Eğer $f : M \to N$ fonksiyonu her $a, b \in M$ ve $r \in R$ için,

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(ar) = f(a)r$$

koşullarını sağlarsa f ye bir *sağ R-modül homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.5 R bir halka, M bir sağ R-modül ve N, M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. N, M nin toplamsal bir alt grubu ve her $r \in R$, $n \in N$ için $nr \in N$ oluyorsa N ye M nin bir *alt modülü* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. 0_M ve M nin kendisi M nin *aşikar* alt modülleridir. M nin kendisinden ve sıfır modülünden farklı olan alt modüllerine M nin *öz alt modülleri* denir.

Tanım 2.1.6 M bir R-modül, M_1 ve M_2, M nin alt modülleri olsun.

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 : \ m_1 \in M_1, \ m_2 \in M_2\}$$

olmak üzere $M_1 + M_2 = M$ ise M bu iki alt modül tarafından *geriliyor* denir. Diğer yandan $M_1 \cap M_2 = 0$ ise M_1 ve M_2 alt modülleri *bağımsızdır* denir. $M_1 \times M_2$ kartezyen çarpım modülünden M ye,

$$(x_1, \ x_2) \mapsto x_1 + x_2 \qquad ((x_1, \ x_2) \in M_1 \times M_2)$$

şeklinde tanımlanan i kanonik R-homomorfizması için, $Im(i)$=$M_1 \times M_2$ ve $Ker(i)$=$\{(x, \ -x) \ : \ x \ \in \ M_1 \cap M_2\}$ şeklindedir. i nin örten olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2 alt modüllerinin M yi geriyor olması, i nin birebir olması için gerek ve yeter şart ise M_1 ve M_2 alt modüllerinin bağımsız olmasıdır. Eğer i kanonik homomorfizması bir izomorfizma ise (yani M_1 ve M_2, bağımsız ve M yi geriyor ise) M modülü M_1 ve M_2 alt modüllerinin bir (iç) *direkt toplamıdır* denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ şeklinde yazılır. Böylece $M = M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in M$ için $x = x_1 + x_2$ olacak şekilde $x_1 \in M_1$ ve $x_2 \in M_2$ elemanlarının tek türlü var olmasıdır. $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M nin bir M_2 alt modülü var ise M_1 alt modülüne M nin bir *direkt toplananı* denir. Aynı zamanda M_2 alt modülü de M nin bir direkt toplananıdır.

Tanım 2.1.7 M bir R-modül, A, B ve C, M nin alt modülleri olsunlar. $B \leq A$ ise

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C) \qquad \text{(Modülarite kuralı)}$$

dir.

Tanım 2.1.8 M bir sağ R-modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. M nin K alt modülüne göre yan kümelerinin (coset) kümesi, $M/K = \{x + K : \quad x \in M\}$, her $r \in R$ ve $x, y \in M$ için,

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K, \qquad (x + K)r = xr + K$$

biçiminde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir sağ R-modüldür. Toplamsal birim eleman ve ters eleman sırasıyla $K = 0 + K$ ve $-(x + K) = -x + K$ biçimindedir. M/K modülüne M nin bir *sağ R-bölüm modülü* denir.

Tanım 2.1.9 R bir halka, M bir R-modül ve X, M nin bir alt kümesi olsun. M nin X'i içeren altmodüllerinin arakesitine X *ile üretilen alt modül* denir. X sonlu ise X in ürettiği modüle *sonlu üreteçli modül*, $X = \{a\}$ ise X in ürettiği alt modüle *a ile üretilen devirli (alt)modül* denir. Eğer $X = \emptyset$ ise X, sıfır modülünü üretir.

Tanım 2.1.10 M bir R-modül olsun. M nin bir N alt modülü için N, M nin bir öz alt modülü ve M nin N yi kapsayan başka hiçbir öz alt modülü yoksa N ye M nin bir *maksimal alt modülü* denir.

Tanım 2.1.11 M, sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Eğer M, aşikar olmayan alt modüllere sahip değilse M ye *basit (simple) modül* denir.

Tanım 2.1.12 M bir R-modül ve Λ, indis kümesi olmak üzere $(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, M nin basit (simple) alt modüllerinin indislenmiş bir kümesi olsun. Eğer M, bu kümenin direkt toplamı ise bu taktirde

$$M = \bigoplus_{\Lambda} T_\alpha$$

M nin bir *yarıbasit (semisimple)* ayrışımıdır. Eğer M modülü bir semisimple ayrışıma sahipse M ye bir *semisimple modül* denir. Diğer bir ifade ile semisimple modül, simple modüllerin herhangi bir direkt toplamıdır. Her simple modülün semisimple modül olduğu açıktır.

Tanım 2.1.13 M bir R-modül olsun. M nin bütün basit (simple) alt modüllerinin toplamına M nin *sokulu* denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14 R bir halka, M bir sağ R-modül olsun. Λ bir indis kümesi olmak üzere M nin elemanlarının bir indislenmiş kümesi $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ olsun. M modülünün farklı elemanlarının her sonlu $x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots,\ x_{\alpha_n}$ dizisi ve $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n \in R$ için

$$x_{\alpha_1}r_1 + x_{\alpha_2}r_2 + \ldots + x_{\alpha_n}r_n = 0$$

iken $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ oluyorsa $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ya R de *doğrusal bağımsızdır* denir. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ indislenmiş doğrusal bağımsız üreteç kümesine sahip bir M sağ R-modülüne $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tabanlı bir *serbest modül* denir.

Tanım 2.1.15 $M,\ M',\ M''$ R-modüller olmak üzere $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ homomorfizma dizisine Imf=$Kerg$ olması durumunda M de *tamdır* denir. Son olarak (sonlu yada sonsuz) bir

$$\ldots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} \ldots$$

homomorfizmalar dizisi herbir M_n de tam ise *tamdır*; yani herbir ardışık f_n, f_{n+1} çifti için Imf_n=$Kerf_{n+1}$ olmalıdır. Ayrıca

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

şeklindeki tam dizilere *kısa tam dizi* denir. Burada f nin monomorfizma ve g nin epimorfizma olduğu açıktır.

Tanım 2.1.16 $f : M \to N$ ve $f' : N \to M$, $ff' = 1_N$ olacak şekilde sağ R-modül homomorfizmaları olsun. O zaman f ye bir *parçalanır (split) epimorfizma* denir ve $M - \overset{f}{\oplus} \to N \to 0$ ile gösterilir. f' ye ise bir *split monomorfizma* denir ve $0 \to N - \overset{f'}{\oplus} \to M$ ile gösterilir. f bir split monomorfizma ve g de bir split epimorfizma olması durumunda $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ kısa tam dizisine *split (yada tam split)* denir.

Tanım 2.1.17 M bir R-modül olsun. M nin alt modüllerinin her artan (azalan) $K_1 \leq K_2 \leq \ldots$ ($K_1 \geq K_2 \geq \ldots$) zinciri sonlu adımda sona eriyorsa M ye *artan zincir şartını (ACC)* (*azalan zincir şartını (DCC)*) *sağlar* denir. Bir modül alt modülleri için artan zincir şartını sağlıyorsa o modüle *Noether* denir. Bir modül alt modülleri için azalan zincir şartını sağlıyorsa o modüle *Artin* denir.

Tanım 2.1.18 M bir sağ R-modül olsun. O zaman her bir $X \subseteq M$ için,

$$r(X) = \{r \in R : \;\; xr = 0, \;\; her \;\; x \in X \; için\}$$

kümesine X in *sağ sıfırlayanı* denir. $X = \{m\}$ ise $r(m)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $r(X)$, R de bir sağ idealdir. Benzer şekilde her bir $A \subseteq R$ için,

$$l(A) = \{x \in M : \;\; xa = 0, \;\; her \;\; a \in A \, için\}$$

kümesine de A nın *sol sıfırlayanı* denir. $A = \{a\}$ ise $l(a)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $l(A)$, M nin bir alt modülüdür.

Tanım 2.1.19 R bir tamlık bölgesi (R, birimli ve sıfır bölensiz bir halka) ve M bir sağ R-modül olsun. M nin,
$T(M) = \{m \in M : \;\; r(m) \neq 0\} = \{m \in M : \;\; \exists 0 \neq r \in R \;\; için \;\; mr = 0 \;\; ise\}$
alt modülüne M nin *burulmalı (torsion) alt modülü* denir. Eğer $T(M) = M$ ise M ye *torsion modül*; eğer $T(M) = 0$ ise M ye *burulmasız (torsion free) modül* denir.

Tanım 2.1.20 R bir halka ve U bir sağ R-modül olmak üzere, her bir $\alpha : K \to M$ monomorfizması ve her bir $\beta : K \to U$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} & & U \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[u, dotted, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan (yani $\phi\alpha = \beta$ olacak şekilde) bir $\phi : M \to U$ homomorfizması var ise U ya M *ye göre injektif (injective) modül* (veya U, M*-injektif* tir) denir. Eğer U, bütün sağ R-modüllere göre injektif ise U ya bir *injektif modül* denir. $\{M_i : \ i \in I\}$, sağ R-modüllerin bir sınıfı olmak üzere her farklı $i, \ j$ çifti için M_i, M_j-injektif oluyorsa M_i modüllerine *aralarında injektif (relatively injective) modüller* denir.

Tanım 2.1.21 R bir halka ve U bir sağ R-modül olmak üzere her bir $\alpha : M \to N$ epimorfizması ve her bir $\beta : U \to N$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dotted, "\phi"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan (yani $\alpha\phi = \beta$ olacak şekilde) bir $\phi : U \to M$ homomorfizması var ise U ya M *ye göre projektif (projective) modül* (veya U, M*-projektif* tir) denir. Eğer U, her sağ R-modüle göre projektif ise U ya *projektif modül* denir.

2.2 Bazı Özel Modüller

Tanım 2.2.1 R bir halka, M bir R-modül ve N, M nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile N nin arakesiti sıfırdan farklı ise N ye M nin bir *esaslı (essential)* alt modülü denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir. Yani N, M nin bir essential alt modülü ise M nin bir K alt modülü için $N \cap K = 0$

olması $K = 0$ olmasını gerektirir. Açıkça sıfırdan farklı her modül kendisi içinde essentialdır.

Önerme 2.2.2 *M bir R-modül, N ve K, M nin $N \leq K \leq M$ olacak şekilde alt modülleri olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart $N \leq_e K$ ve $K \leq_e M$ olmasıdır.*

İspat. Öncelikle $N \leq_e M$ ise $N \leq_e K$ ve $K \leq_e M$ olduğu açıktır. Tersine $N \leq_e K \leq_e M$ ve M nin bir L alt modülü için $N \cap L = 0$ olsun. $N \cap (K \cap L) = N \cap L = 0$ ve $N \leq_e K$ olduğundan $K \cap L = 0$ elde edilir. Aynı zamanda $K \leq_e M$ olması $L = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $N \leq_e M$ olur. $\square$

Tanım 2.2.3 M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. N yi M de essential olarak içeren alt modüllerin içinde maksimal olan K alt modülüne N nin M de bir *kapanışı (closure)* denir. Zorn Lemma ile bir M modülünün her N alt modülü M de bir kapanışa sahiptir.

Tanım 2.2.4 M bir R-modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. K nın M de öz essential genişlemesi yoksa, yani $K \leq_e L \leq M$ iken $K = L$ ise K ya M de *kapalı (closed) alt modül* denir ve $K \leq_{cl} M$ ile gösterilir. Bir M modülünün her kapalı alt modülü M nin bir alt modülünün kapanışı olur. Bundan başka aşağıdaki sonuca da sahibiz.

Önerme 2.2.5 *M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. K, N nin M deki bir kapanışı ise K, M de closed alt modül olur.*

İspat. L, M de K yı essential olarak içeren bir alt modül olsun. Önerme 2.2.2 den L, N yi de essantial olarak içerir. Ancak, Tanım 2.2.3 den K, N yi essential olarak içeren maksimal alt modül idi. O halde $K = L$ dir. Yani K nın öz essential genişlemesi yoktur. Bu durumda K, M de closed alt modül olur. $\square$

Tanım 2.2.6 M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. $N \cap H = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir L altmodülüne N nin M deki *komplementi (complement)* denir ve $L \leq_c M$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.7 *M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. K, N nin M deki bir komplementi ise $N \oplus K$, M nin bir essential alt modülüdür.*

İspat. M nin bir L alt modülü için $(N \oplus K) \cap L = 0$ olsun. K, N nin M deki bir komplementi olduğundan $N \cap (K+L) \neq 0$ olacaktır. Buradan $0 \neq n \in N \cap (K+L)$ için $n = k + l$ olacak şekilde $k \in K$ ve $l \in L$ vardır. Böylece $n - k = l \in (N \oplus K) \cap L = 0$ olduğundan $l = 0$ elde edilir. Diğer yandan $n = k \in N \cap K = 0$ dan $n = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $N \cap (K + L) = 0$ dolayısıyla $K = K + L$ yani $L \leq K$ olur. $K \cap L \leq (N \oplus K) \cap L = 0$ dan $L = 0$ elde edilir. O halde $N \oplus K$, M nin bir essential alt modülü olur. □

Lemma 2.2.8 *M bir R-modül, N ve K, M nin alt modülleri olsun. N nin M deki komplementinin K olması için gerek ve yeter şart K nın M de closed ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde $N \oplus K$ nın M de bir essential alt modül olmasıdır.*

İspat. Dung vd. [13, p.6]. □

Lemma 2.2.9 *M bir R-modül, N ve K, M nin alt modülleri olsun. K, N de closed ve N de M de closed ise K, M de closed alt modül olur.*

İspat. Dung vd. [13, p.6, Properties (4)]. □

Tanım 2.2.10 Sıfırdan farklı her M modülü 0_M ve kendisi olmak üzere en az iki direkt toplanana sahiptir. Sıfırdan farklı bir M modülünün direkt toplananları sadece 0_M ve M nin kendisi ise M modülüne *ayrıştırılamaz (indecomposable) modül* denir.

Tanım 2.2.11 M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olmak üzere M nin sıfırdan farklı her alt modülü M de essential ise M ye *uniform modül* denir.

Tanım 2.2.12 R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Eğer M sıfırdan farklı alt modüllerinin bir sonsuz direkt toplamını içermez ise M ye *sonlu düzgün boyuta* (yada *Goldie sonlu boyuta*) *sahiptir* denir. Bu durumda M bir düzgün U alt modülünü içerir. Bundan başka n bir pozitif tam sayı ve U_i $(1 \leq i \leq n)$ ler M nin (lineer) bağımsız düzgün alt modülleri olmak üzere $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots U_n$, M nin bir essential alt modülüdür. Buradaki n tam sayısına M nin *düzgün boyutu* (yada *Goldie boyutu*) denir.

Tanım 2.2.13 R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Eğer M nin her closed alt modülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa M ye *extending modül* denir.

Bir M modülünün her alt modülü M nin bir direkt toplananında essential ise M, $C1$ *şartını sağlar* denir.

Bir M modülünün extending olması ile M nin $C1$ şartını sağlaması durumunun denkliği bilinen bir gerçektir (Bakınız [28]). Ancak bu durum extending modüllerin modül sınıflarına ve burulmalı teoriye göre tanımlamalarında her zaman doğru değildir. Denk şartlar bölümler içinde yeri geldikçe incelenmiştir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe birimsel sağ R-modül yerine R-modül kavramı kullanılacaktır.

3. MODÜL SINIFLARINA GÖRE EXTENDİNG MODÜLLER

3.1 Tip 2 Extending Modüller

Bu bölümde Doğruöz ve Smith' in [11] çalışması incelenmiş ancak burada R-modül sınıflarına göre tanımlanan extending modülün kapalı (closed) alt modüllerine göre yapılan tanımı ve ilgili sonuçları üzerinde durulmuştur.

R-modüllerin bir $\mathcal{X}$ *sınıfı*, sıfır modülünü içeren ve izomorfizmalar altında kapalı olan R-modüllerin bir ailesini göstersin. Burada izomorfizmalar altında kapalı olmaktan kasıt bir R-modül M, $\mathcal{X}$ sınıfına ait ise M ye izomorf olan her modül de $\mathcal{X}$ sınıfına aittir anlamındadır. $\mathcal{X}$ sınıfına ait olan bir modüle bir $\mathcal{X}$*-modül* denir. M bir R-modül olmak üzere M nin $\mathcal{X}$ e ait bir N alt modülüne, M nin bir $\mathcal{X}$*-altmodülü* denir. Bu kabüller altında ilk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.1 M bir R-modül ve $\mathcal{X}$, R-modüllerin bir sınıfı olsun. N, M nin bir $\mathcal{X}$-altmodülü olmak üzere N nin M deki her kapanışı, M nin bir direkt toplananı ise M ye *Tip 2* $\mathcal{X}$*-extending modül* denir.

Önerme 3.1.2 *M bir R-modül olsun. M extending modül ise Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür.*

İspat. M bir extending modül ve N, M nin bir $\mathcal{X}$-altmodülü olsun. Bu durumda hipotezden N nin M deki her kapanışı M nin bir direkt toplananı olacağından M Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül olur. □

Lemma 3.1.3 *$\mathcal{M}$, bütün R-modüllerin sınıfı olsun. M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) M, extending modüldür.

(ii) M, Tip 2 $\mathcal{M}$-extending modüldür.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. M bir extending modül olsun. Önerme 3.1.2 den M, Tip 2 $\mathcal{M}$-extending olur.

$(ii) \Rightarrow (i)$. M, Tip 2 $\mathcal{M}$-extending modül ve K, M nin bir closed alt modülü olsun. Bu durumda K, M nin bir N alt modülünün kapanışı olacaktır. N, alt modülü $\mathcal{M}$ sınıfına ait olduğundan K, M nin bir direkt toplananı olur. O halde M, bir extending modüldür. □

Lemma 3.1.4 *$\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$, R-modüllerin sınıfları ve $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ olsun. Bu durumda her Tip 2 $\mathcal{Y}$-extending modül, Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür.*

İspat. Açıktır. □

Lemma 3.1.5 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modülün her direkt toplananı da Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür.*

İspat. M bir R-modül olmak üzere M nin M_1 ve M_2 alt modülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ ve M, Tip 2 $\mathcal{X}$-extending olsun. N, M_1 in bir $\mathcal{X}$-alt modülü olmak üzere L de N nin M_1 de bir kapanışı olsun. Lemma 2.2.9 dan L, N nin M de bir kapanışı olur. O zaman hipotezden L, M nin bir direk toplananıdır. Yani $M = L \oplus L'$ olacak şekilde M nin bir L' alt modülü vardır. Buradan modülarite kuralı gereğince $L \leq M_1$ ile

$$M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (L \oplus L') = L \oplus (M_1 \cap L')$$

olduğundan L, M_1 in de bir direk toplananı olarak bulunur. O halde M_1 bir Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür. □

Lemma 3.1.6 *$\mathcal{I}$, injektif R-modüllerin sınıfı olmak üzere her R modül Tip 2 $\mathcal{I}$-extending modüldür.*

İspat. N, M nin bir injektif alt modülü ve K, N nin M de bir kapanışı olsun. Ancak N injektif olduğundan N, M de direkt toplanan olur. Yani $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin bir N' alt modülü vardır. Buradan N, M de komplement ve böylece N, M de kapalı (closed) alt modül olur. O halde N nin K da essential olması $N = K$ yı gerektirir. Buradan K, M nin direkt toplananı bulunur. □

$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olmak üzere bir $\mathcal{X}$-altmodülünü essential olarak içeren R modüllerin sınıfı $\mathcal{X}^e$ ile gösterildiğinde $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^e$ olduğu açıktır.

Önerme 3.1.7 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı, M bir R-modül olsun. M nin Tip 2 $\mathcal{X}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending olmasıdır.*

İspat. M, Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modül olsun. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^e$ olduğundan Lemma 3.1.4 den M, Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür. Tersine M, Tip 2 $\mathcal{X}$-extending ve N, M nin bir $\mathcal{X}^e$-altmodülü olsun. Bu nedenle N en az bir L essential $\mathcal{X}$-altmodülü içerir. N nin M deki kapanışı K olsun. O zaman K, L nin de M de bir kapanışı olacaktır. M, Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül olduğundan K, M nin bir direkt toplananıdır. O halde M, bir Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modüldür. □

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\mathcal{X}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ R-modül sınıflarını göz önüne alalım. Aşağıdaki biçimde tanımlanan

$$\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n = \{M : M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n, \quad M_i \in \mathcal{X}_i, \quad 1 \leq i \leq n\} \quad (3.1.1)$$

kümesi de bir R-modül sınıfı gösterir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.8 *$I = \{i : 1 \leq i \leq n, \ \ n \in \mathbb{Z}\}$ ve M bir R-modül olsun. M nin Tip 2 ($\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_n$)-extending olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için Tip 2 $\mathcal{X}_i$-extending olmasıdır.*

İspat. Doğruöz ve Smith [11, Theorem 3.2]. □

$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. (3.1.1) deki tanıma benzer şekilde $\mathcal{X}$-altmodüllerin sonlu sayıdaki direkt toplamları olan R-modüllerin sınıfı $\mathcal{X}^{\oplus}$ ile gösterilmiştir. Yani $\mathcal{X}^{\oplus}$=$\{M : \ M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n, \ \ M_i \in \mathcal{X}, \ \ 1 \leq i \leq n\}$ şeklindedir. O halde Teorem 3.1.8 nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.9 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. M nin Tip 2 $\mathcal{X}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{X}^{\oplus}$-extending olmasıdır.*

Yukarıdaki sonuç bazı özel modül sınıflarına aşağıdaki biçimde uygulanabilir.

Önerme 3.1.10 *$\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}$ sırasıyla uniform ve sonlu uniform boyuta sahip R-modüllerin sınıfını göstersin. M bir R-modül olmak üzere M nin Tip 2 $\mathcal{U}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{U}_1$-extending olmasıdır.*

İspat. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$, uniform modüllerin sonlu direkt toplamını essential olarak içeren R-modülerin bir sınıfı olduğundan Lemma 3.1.4 ten M Tip 2 $\mathcal{U}$-extending ise Tip 2 $\mathcal{U}_1$-extending olur. Tersine M, Tip 2 $\mathcal{U}_1$-extending olsun. Sonuç 3.1.9 dan M, Tip 2 $\mathcal{U}_1^{\oplus}$-extending olur. $\mathcal{U}_1^{\oplus} \subseteq \mathcal{U}$=$(\mathcal{U}_1^{\oplus})^e$ olduğundan Önerme 3.1.7 gereğince M Tip 2 $\mathcal{U}$-extending olur. □

Önerme 3.1.10 un sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1.11 *$\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{A}$ sırasıyla simple ve Artin R-modüllerin sınıfını göstersin. M bir R-modül olmak üzere M nin Tip 2 $\mathcal{A}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{C}_1$-extending olmasıdır.*

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere $\mathcal{X}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ler R-modüllerin sınıflarını göstersin.

$$\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_n = \{M : 0 = M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_n = M, \quad M_i/M_{i-1} \in \mathcal{X}_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

ile tanımlı $\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_n$, R-modüllerin bir sınıfı olacaktır. $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}$ olması durumunda $\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_n = \mathcal{X}^n$ ve $\mathcal{X}^w = \bigcup\limits_{n \geq 1} \mathcal{X}^n$ ile gösterilmiştir.

Teorem 3.1.12 *$n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$ ve $\mathcal{X}_i$ ler R-modül sınıfları ve $2 \leq i \leq n$ için $\mathcal{X}_i$ modül sınıfları ya alt modüller yada faktör modülleri altında kapalı olsun. M bir R-modül olmak üzere, M nin Tip 2 $\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_n$-extending olması için gerek ve yeter şart her $1 \leq i \leq n$ için Tip 2 $\mathcal{X}_i$-extending olmasıdır.*

İspat. Doğruöz ve Smith [11, Theorem 3.6]. □

Sonuç 3.1.13 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. $\mathcal{X}$ modül sınıfı ya alt modüller yada faktör modülleri altında kapalı ise M nin Tip 2 $\mathcal{X}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{X}^w$-extending olmasıdır.*

İspat. Teorem 3.1.12 den açıktır. □

$\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}$ sırasıyla faktör modülleri altında kapalı olan devirli ve sonlu üreteçli R-modüllerin sınıfını göstersin. $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G} \subseteq (\mathcal{G}_1)^w$ olduğundan Lemma 3.1.4 ve Sonuç 3.1.13 ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.1.14 *M bir R-modül olmak üzere M nin Tip 2 $\mathcal{G}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{G}_1$-extending olmasıdır.*

$\mathcal{U}$ ve $\mathcal{G}$ sırasıyla sonlu uniform boyuta sahip R-modüllerin ve sonlu üreteçli R-modüllerin sınıfını göstersin. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}^e$ olduğundan Lemma 3.1.4 ve Önerme 3.1.7 gereğince her Tip 2 $\mathcal{G}$-extending modül, Tip 2 $\mathcal{U}$-extending modül olacaktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 3.1.15 *M bir indecomposable R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M, uniform modüldür.
(ii) M Tip 2 $\mathcal{G}$-extending modüldür.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. M uniform modül olduğundan aynı zamanda extending modüldür. O halde M Tip 2 $\mathcal{G}$-extending modüldür.
$(ii) \Rightarrow (i)$. M bir Tip 2 $\mathcal{G}$-extending modül olsun. $0 \neq m \in M$ olmak üzere K, M de mR nin bir kapanışı (closure) olsun. Yani K, mR yi essential olarak içeren maksimal altmodüldür. Hipotezden K, M nin bir direk toplananıdır. Ancak M indecomposable olduğundan $K = M$ olmalıdır. Böylece her $0 \neq m \in M$ için mR, M de essential olur. O halde M uniform modüldür. □

R, bir tamlık bölgesi olmak üzere sıfırdan farklı her iki eleman için sıfırdan farklı ortak çarpımlar var ise R ye *sağ Ore* bölgesi denir. Başka bir ifadeyle her sıfırdan farklı $x, y \in R$ için $xr = ys \neq 0$ olacak şekilde $r, s \in R$ vardır.

Sonuç 3.1.16 *R bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdaki durumlar vardır.*

(i) *R_R, Tip 2 $\mathcal{U}$-extending modüldür.*

(ii) *Aşağıdaki ifadeler denktir.*

- (a) *R, sağ Ore bölgesidir*
- (b) *R_R, Tip 2 $\mathcal{G}$-extending modüldür.*

İspat. Doğruöz ve Smith [11, Corollary 3.10]. □

Eğer R bir Noether halka ise sonlu üreteçli R-modüllerin sınıfı $\mathcal{G}$, sonlu uniform boyuta sahip R-modüllerin sınıfı $\mathcal{U}$ tarafından içerilir. Bundan dolayı Lemma 3.1.4 ile M nin Tip 2 $\mathcal{U}$-extending olması için gerek ve yeter şartın Tip 2 $\mathcal{G}$-extending modül olması sonucuna ulaşılır.

M bir R-modül olsun. M nin

$$Z(M) = \{m \in M : R\, nin\, bir\, essential\, E\, ideali\, için\, mE = 0\}$$

ile tanımlı altmodülüne M nin *singular* altmodülü denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *singular* modül, $Z(M) = 0$ ise M ye *nonsingular* modül denir. M nin $Z(M)$ singular altmodülü için $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$ olacak şekilde M nin $Z_2(M)$ altmodülüne M nin *ikinci (second) singular (Goldie torsion) altmodülü* denir. $Z_2(M)$, M nin bir kapalı altmodülüdür. Eğer $Z_2(M)$=M ise M ye *Goldie torsion* modül, $Z_2(M) = 0$ ise M ye *Goldie torsion-free* modül denir. Aynı zamanda $Z(M)$=0 ise M, Goldie torsion-free modül olur.
$\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}_G$ sırasıyla singular ve Goldie torsion R-modüllerin sınıflarını göstersin. $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_G \subset \mathcal{S}^e$ olduğundan M nin Tip 2 $\mathcal{S}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 2 $\mathcal{T}_G$-extending olmasıdır (Bakınız Önerme 3.1.7 ve Lemma 3.1.4).

Önerme 3.1.17 *M nin Tip 2 $\mathcal{T}_G$-extending olması için gerek ve yeter şart $Z_2(M)$ nin extending modül ve M nin bir direkt toplananı olmasıdır.*

İspat. Doğruöz ve Smith [11, Theorem 4.1]. □

Sağ R-modüllerin Mod-R kategorisinde $\mathcal{F}_G$, Goldie torsion teoriye göre torsion free R-modüllerin sınıfını göstersin. Bu durumda aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1.18 *M nin Tip 2 $\mathcal{F}_G$-extending olması için gerek ve yeter şart $Z_2(M)$, M'-injektif olacak şekilde M nin bir M' extending alt modülü için M=$Z_2(M) \oplus M'$ olmasıdır.*

İspat. Doğruöz ve Smith [11, Theorem 4.3]. □

Teorem 3.1.12, Önerme 3.1.17 ve Önerme 3.1.18 gösteriyor ki M bir R-modül olmak üzere M nin extending olması için gerek ve yeter şart M nin Tip 2 $\mathcal{T}_G$-extending ve Tip 2 $\mathcal{F}_G$-extending olmasıdır. Ayrıca, Teorem 3.1.12 ile $\mathcal{T}_G$ ve $\mathcal{F}_G$ alt modüllere göre kapalı sınıflar olduğundan M nin Tip 2 $\mathcal{T}_G$-extending ve Tip 2 $\mathcal{F}_G$-extending olması için gerek ve yeter şart M nin Tip 2 $\mathcal{T}_G \cdot \mathcal{F}_G$-extending olmasıdır diyebiliriz.

Lemma 3.1.19 *M, sonlu uniform boyuta sahip bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M, extending modüldür.
(ii) M, Tip 2 $\mathcal{U}$-extending modüldür.
İspat. Doğruöz ve Smith [11, Lemma 4.6]. □

3.2 Zayıf Tip 2 Extending Modüller

Bu bölümde Doğruöz ve Smith'in [12] makalesi incelenmiştir.
$\mathcal{X}$, R-modüllerin bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. Eğer M nin her $\mathcal{X}$-altmodülü N, M nin bir direk toplananında essential ise (buna denk olarak M nin her N $\mathcal{X}$-altmodülünün M nin direk toplananı olacak şekilde bir kapanışı varsa) M ye *zayıf Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül* denir.

Önerme 3.2.1 [12, Proposition 2.1] *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. Bu durumda her Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül, zayıf Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür.*

Lemma 3.2.2 [12, Lemma 2.3] *$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, R-modüllerin sınıfları olsun. Bu durumda her zayıf Tip 2 $\mathcal{Y}$-extending modül, zayıf Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür.*

Lemma 3.2.3 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı, M bir R-modül olsun. M nin Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modül olması için gerek ve yeter şart zayıf Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modül olmasıdır.*

İspat. Önerme 3.2.1 den gerek şart sağlanır. Tersine M, zayıf Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modül, $N \in \mathcal{X}^e$ ve K, N nin M de bir kapanışı olsun. O halde N de essential olan bir N_1 $\mathcal{X}$-altmodülü vardır ve N_1, K da essential olur. Böylece $K \in \mathcal{X}^e$ dir. Böylelikle hipotez gereği K, M nin bir direk toplananında essentialdır. K, N nin M de bir kapanışı olduğundan K, M de closed olur. Bu durumda K, M nin bir direkt toplananıdır. O halde M bir Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modüldür. $\square$

Teorem 3.2.4 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı, M bir R-modül olsun. M nin Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül olması için gerek ve yeter şart zayıf Tip 2 $\mathcal{X}^e$-extending modül olmasıdır.*

İspat. Önerme 3.1.7 ve Lemma 3.2.3 ile açıktır. $\square$

$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{X}$ essential genişlemeler altında kapalı ise $\mathcal{X}$ sınıfına *essentially closed* denir. Yani bir R-modül M, $\mathcal{X}$ sınıfına ait ise M bir $\mathcal{X}$-altmodülünü essential olarak içerir. O halde $\mathcal{X}$ sınıfının essentially closed olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{X} = \mathcal{X}^e$ olmasıdır. Daha önce tanımlanmış olan $\mathcal{U}$ ve Goldie torsion R-modül sınıfı $\mathcal{T}_G$, essentially closed sınıflardır.

Sonuç 3.2.5 *$\mathcal{X}$, R-modüllerin essentially closed bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. M nin Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül olması için gerek ve yeter şart zayıf Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modül olmasıdır.*

İspat. Teorem 3.2.4 den açıktır. $\square$

M bir R-modül olsun. Eğer M nin her N altmodülü için M nin N yi essential olarak içeren bir tek kapalı K altmodülü varsa yani M nin her altmodülü bir tek kapanışa sahipse M ye *UC-modül* denir. Semisimple, uniform ve nonsingular modüller UC-modüllere örnek olarak verilebilir.

Önerme 3.2.6 [12, Proposition 2.10] *$\mathcal{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. Bu durumda her zayıf Tip 2 $\mathcal{X}$-extending UC modül, Tip 2 $\mathcal{X}$-extending modüldür.*

Önerme 3.2.7 *$\mathcal{M}$, bütün R-modüllerin sınıfı ve M bir R-modül olsun. M nin zayıf Tip 2 $\mathcal{M}$-extending modül olması için gerek ve yeter şart M nin extending modül olmasıdır.*

İspat. M, zayıf Tip 2 $\mathcal{M}$-extending modül ve K, M nin kapalı bir alt modülü olsun. O halde K, M nin bir direk toplananında essentialdır. Bu durumda K, M nin bir direk toplananı olur. O halde M extending modüldür.
Tersi her zaman doğrudur. □

Önerme 3.2.8 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M, zayıf Tip 2 $\mathcal{U}$-extending modüldür.
(ii) M, zayıf Tip 2 $\mathcal{U}_1$-extending modüldür.
(iii) M, Tip 2 $\mathcal{U}$-extending modüldür.
(iv) M, Tip 2 $\mathcal{U}_1$-extending modüldür.

İspat. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}_1$, R-modül sınıflarının her ikiside essentially closed olduğundan Sonuç 3.2.5 ve [10, Proposition 3.4] ten görülür. □

Önerme 3.2.9 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M, zayıf Tip 2 $\mathcal{T}_G$-extending modüldür.
(ii) M, Tip 2 $\mathcal{T}_G$-extending modüldür.
(iii) $Z_2(M)$ extending ve M nin bir direkt toplananıdır.

İspat. Doğruöz ve Smith [12, Proposition 3.9]. □

3.3 ECS-Modüller ve P-Extending Modüller

Bu bölümde Yücel ve Tercan'ın [42] makalesi ile Kamal ve Elmnophy'nin [23] makalesi incelenmiştir.

Tanım 3.3.1 M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer N, M de closed ve N, bir devirli alt modülü essential olarak içeriyorsa N ye M nin bir *ec-closed* alt modülü denir. Yani N, M de closed ve xR, N de essential olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N, M de ec-closed alt modül olur. Dikkat edilirse M nin bir ec-closed alt modülünün her direkt toplananının da ec-closed olduğu kolayca görülebilir. Eğer M nin her ec-closed alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye *ECS-modül* denir. Her extending modülün ECS-modül olduğu açıktır. Bundan başka M nin Tip 2 $\mathcal{G}_1^e$-extending modül olması için gerek ve yeter şartın M nin bir ECS-modül olması gerektiği gösterilecektir. Eğer M nin her devirli alt modülü bir direkt toplananında essential ise M ye *principally extending* (kısaca *P-extending*) modül denir (Bakınız [23]). Bu tanım gösteriyor ki M nin P-extending modül olması ile Doğruöz ve Smith'in [12] makalesindeki M nin zayıf Tip 2 $\mathcal{G}_1$-extending olması çakışmaktadır.

Şimdi aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.3.2 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M, ECS-modüldür.
(ii) M, Tip 2 $\mathcal{G}_1^e$-extending modüldür.
İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. M, ECS-modül ve N de M nin devirli bir alt modülünü essential olarak içeren bir alt modül olsun. Yani $N \in \mathcal{G}_1^e$ olsun. L, N nin M deki bir kapanışı olsun. O zaman $L \in \mathcal{G}_1^e$ ve L, M de kapalı alt modül olur. Hipotezden L, M nin bir direkt toplananıdır. Böylece M, Tip 2 $\mathcal{G}_1^e$-extendingdir.
$(ii) \Rightarrow (i)$. M, Tip 2 $\mathcal{G}_1^e$-extending ve N, M nin bir ec-closed alt modülü olsun. Yani $xR \leq_e N$ olacak şekilde M de bir x elemanı vardır ve N, M nin kapalı alt modülüdür. Böylece $N \in \mathcal{G}_1^e$ olur. N nin M de bir L kapanışını alırsak, $N = L$ bulunur. Hipotezden N nin M deki her kapanışı M nin bir direkt toplananı olacağından N, M nin bir direkt toplananı olur. Böylece M, ECS-modüldür. □

Sonuç 3.3.3 *M bir R-modül olmak üzere M nin ECS-modül olması için gerek ve yeter şart M nin Tip 2 $\mathcal{G}_1$-extending modül olmasıdır.*
İspat. Önerme 3.1.7 ile açıktır. □

Sonuç 3.3.4 *M, ECS-modül ise M zayıf Tip 2 $\mathcal{G}_1$-extending modüldür.*

İspat. Önerme 3.2.1 ve Sonuç 3.3.3 dan açıktır. □

Önerme 3.3.5 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki durumlar vardır.*
(1) M bir nonsingular modül olsun. M nin P-extending (yani zayıf Tip 2 $\mathcal{G}_1$-extending) olması için gerek ve yeter şart M nin ECS-modül olmasıdır.
(2) M bir sonlu uniform boyutlu modül olsun. M nin extending olması için gerek ve yeter şart M nin ECS olmasıdır.

İspat. Yücel ve Tercan [42, Proposition 1.2]. □

Lemma 3.3.6 [23, Proposition 2.14] *M bir indecomposable modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M, extending.
(ii) M, P-extending.
(iii) M, uniform.

Tanım 3.3.7 M bir R-modül olsun. M nin sonlu n uniform boyuta sahip her kapalı A alt modülü (U-dim$(A)\leq n$) M nin bir direkt toplananı ise M ye *n-extending modül* denir. Buna denk olarak sonlu uniform n boyuta sahip her A alt modülü M nin bir direkt toplananında essentialdir. Buradan, $n = 1$ için 1-extending modül kolayca tanımlanabilir.
Burada, bir R-modül M için M nin zayıf Tip 2 $\mathcal{U}$-extending olmasının M nin 1-extending modül olması ile çakıştığını kolayca söyleyebiliriz.

Sonuç 3.3.8 *M bir R-modül olsun. M nin zayıf Tip 2 $\mathcal{U}$-extending olması için gerek ve yeter şart M nin 1-extending olmasıdır.*

İspat. M zayıf Tip 2 $\mathcal{U}$-extending modül olsun. N, M nin U-dim$(N)\leq n$ olacak şekilde kapalı bir alt modülü olsun. O zaman M nin bir K direkt toplananı için N, K da essential olur. Ancak N, M de kapalı olduğundan $N = K$ dır. Buradan N, M nin direkt toplananı yani M, 1-extending modüldür.
Tersine M, 1-extending modül ve U-dim$(N)\leq n$ olacak şekilde N, M nin bir alt

modülü olsun. N nin M de bir K kapanışı her zaman vardır. Bununla birlikte bu K kapanışı M nin kapalı bir alt modülüdür. Diğer yandan $N \leq_e K$ ve U-dim(N)=U-dim(K) olduğundan, hipotez gereği K, M nin bir direkt toplananıdır. O halde M zayıf Tip 2 $\mathcal{U}$-extending olur. □

3.4 Göreceli Extending Modüller

Burada Crivei'nin [5] ve [6] makalelerinde yer alan $\mathbb{E}$-extending modül kavramı incelenmiştir.

$\mathcal{A}$, R-modüllerin bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. M nin her N alt modülü, $K/N \in \mathcal{A}$ olacak şekilde M nin bir K direk toplananında içerilsin. Bu özellikteki M modüllerinin sınıfı $d\mathcal{A}$ ile gösterilecektir. Yani $d\mathcal{A}$=$\{M \in Mod\text{-}R$: $her\ N \leq M$ $için\ K/N \in \mathcal{A}\ olacak\ şekilde\ en\ az\ bir\ K \leq_d M\ vardır\}$ şeklindedir.

Önerme 3.4.1 *$\mathcal{S}$ ve $\mathcal{E}$ sırasıyla singular ve extending modüllerin sınıflarını göstersin. $\mathcal{E}$ sınıfına ait olan her modül yani her extending modül, $d\mathcal{S}$ sınıfına aittir.*

İspat. M extending modül olsun. O halde M nin her N alt modülü M nin bir K direkt toplananında essentialdır. Bu durumda K/N singular olacağından $M \in d\mathcal{S}$ bulunur. □

Tanım 3.4.2 Sıfırdan farklı $\mathcal{A}$-alt modülü içermeyen tüm modüllerin sınıfı $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ sınıfına ait bir modüle gömülebilen sıfırdan farklı alt modül içermeyen tüm modüllerin sınıfı $\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ ile gösterilsin. Eğer $\mathcal{A}$ sınıfı alt modüllere göre kapalı ise $\mathcal{F}(\mathcal{A})$=$\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ dır.

M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. M nin bir K alt modülü için $M/K \in \mathcal{A}$ ise K ya M nin $\mathcal{A}$-*dense* alt modülü denir. Eğer $M/K \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ ise K ya M de $\mathcal{A}$-*closed* alt modül denir. Ayrıca M nin N yi içeren bir K alt modülü için N, K da $\mathcal{A}$-dense ve K, M de $\mathcal{A}$-closed ise K ye N nin M de bir $\mathcal{A}$-*closure* denir. Bu durumda K, M nin bir $\mathcal{A}$-closed alt modülü ise M nin en az bir N alt modülünün $\mathcal{A}$-closure olur.

Bu tanımlamalar ile biz aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.3 *$\mathcal{S}$, singuler modüllerin sınıfı ve M bir R-modül olsun. K, M de $\mathcal{S}$-closed alt modül ise K, M de closed alt modüldür.*

İspat. K, M de $\mathcal{S}$-closed alt modül ise $M/K \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ olur. $K \leq_e T \leq M$ olacak şekilde M nin bir T alt modülü var olsun. T/K singular yani $T/K \in \mathcal{S}$ ve $T/K \leq M/K$ olduğundan hipotez gereği $K = T$ olacaktır. Yani K nın M de essential genişlemesi yoktur. O halde K, M de closed olur. □

$\mathbb{E}$, Mod-R içinde kısa tam dizilerin bir sınıfı olsun. Eğer $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ tam dizisi $\mathbb{E}$ sınıfına ait ise f ye bir $\mathbb{E}$-*monomorfizması*, g ye bir $\mathbb{E}$-*epimorfizması* denir. Ayrıca Imf, L nin bir $\mathbb{E}$-*alt modülü* ve N de L nin $\mathbb{E}$-*homomorfik görüntüsü* olarak adlandırılır ([5, Definition 2.1]).

M bir R-modül ve $\mathbb{E}$, Mod-R içinde kısa tam dizilerin bir sınıfı olsun. M nin her K alt modülü M nin bir $\mathbb{E}$-alt modülü olacak şekilde bir L essential genişlemesine sahipse M ye $\mathbb{E}$-*extending* modül denir.

Aşağıdaki Lemmayı elemanter olarak ispatlayabiliriz.

Lemma 3.4.4 *M nin $\mathbb{E}$-extending modül olabilmesi için gerek ve yeter şart M nin her closed alt modülünün M nin bir $\mathbb{E}$-alt modülü olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}$-extending modül ve K, M de closed alt modül olsun. O halde K nın M de $\mathbb{E}$-alt modül olacak şekilde bir L essential genişlemesi vardır. Ancak K closed olduğundan $K = L$ dir. Böylece K, $\mathbb{E}$-alt modüldür.

Tersine M nin her closed alt modülü M nin bir $\mathbb{E}$-alt modülü olsun. N, M nin bir alt modülü olmak üzere N nin M deki closure K olsun. Bu durumda K, M de closed olacağından hipotezden K, M nin bir $\mathbb{E}$-alt modülü olur. O halde her N alt modülünün M de $\mathbb{E}$-alt modül olan bir K essential genişlemesi vardır. O halde M, $\mathbb{E}$-extendingdir. □

Lemma 3.4.5 *$\mathbb{E}_s$, Mod-R içinde bütün parçalanır (split) kısa tam dizilerin sınıfı olsun. M bir R-modül olmak üzere M nin $\mathbb{E}_s$-extending olması için gerek ve yeter şart M nin extending olmasıdır.*

İspat. M bir $\mathbb{E}_s$-extending modül ve N, M de kapalı bir alt modül olsun. Lemma 3.4.4 gereğince N, M nin bir $\mathbb{E}_s$-alt modülüdür. Böylece Imf=N olacak şekilde $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ parçalanır kısa tam dizisi vardır. O zaman N, M nin bir direkt toplananı olur. Bu durumda M extending modüldür.
Tersine M, extending modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. N nin M de L gibi bir kapanışı vardır. Burada L, M de kapalı alt modül olduğundan hipotezden L, M nin bir direkt toplananıdır. Böylece $0 \to L \to M \to M/L \to 0$ parçalanır kısa tam dizisini göz önüne alalım. Burada L, $\mathbb{E}_s$-alt modül olur. O halde M, $\mathbb{E}_s$-extending modüldür. □

M bir R-modül olsun. Eğer M nin closed alt modülleri, M nin $\mathbb{E}$-alt modülleri ile çakışırsa M ye *güçlü (strongly) $\mathbb{E}$-extending* modül denir.

Sonuç 3.4.6 *Her güçlü (strongly) $\mathbb{E}$-extending modül, $\mathbb{E}$-extending modüldür.*

İspat. Lemma 3.4.4 ten açıktır. □

Güçlü $\mathbb{E}_s$-extending, $\mathbb{E}_s$-extending ve extending modüllerin denkliği kolayca gözlenir.

Lemma 3.4.7 *M bir (güçlü) $\mathbb{E}$-extending modül ve K, M nin bir closed alt modülü olsun. O halde K ve M/K (güçlü) $\mathbb{E}$-extending modüllerdir.*

İspat. [5, Lemma 2.6, Lemma 2.10]. □

Sonuç 3.4.8 *$M = M_1 \oplus M_2$ ve M, $\mathbb{E}$-extending modül ise M_1 ve M_2 $\mathbb{E}$-extending modüllerdir.*

İspat. Lemma 3.4.7 den açıktır. □

3.5 Genelleştirilmiş Extending Modüller

Bu bölümde Zeng'in [43] çalışması incelenmiştir.

Tanım 3.5.1 M bir R-modül olsun. M nin her N alt modülü için M nin N yi içeren K/N singular olacak şekilde bir K direkt toplananı varsa M ye *genelleştirilmiş extending* modül denir. Her extending modül ve her singular modül, genelleştirilmiş extending modüldür. Eğer M, nonsingular ise M/N nin singular olması için gerek ve yeter şart N nin M de essential olmasıdır (Bakınız [17]). Benzer sonuç M nin projective olması ile de elde edilmektedir. $\mathcal{S}$, singular modüllerin sınıfı olmak üzere bir modülün, genelleştirilmiş extending modül olması ile $d\mathcal{S}$ sınıfına ait bir modül olması durumu kolayca görülebilir.

Önerme 3.5.2 [43, Proposition 2] *M nonsingular yada projektif olsun. O halde M nin extending olması için gerek ve yeter şart M nin genelleştirilmiş extending olmasıdır.*

Önerme 3.5.3 [43, Proposition 6] *M, genelleştirilmiş extending modül olsun. O zaman M nin her homomorfik görüntüsü de genelleştirilmiş extending modüldür.*

Sonuç 3.5.4 *(1) M bir genelleştirilmiş extending modül olsun. O halde M nin herhangi bir direkt toplananı da genelleştirilmiş extending modüldür.*
(2) M bir extending modül ise M nin nonsingular homomorfik görüntüsü de extending modüldür.

İspat. Zeng [43, Corollary 2]. □

4. BURULMALI (TORSİON) TEORİYE GÖRE EXTENDİNG MODÜLLER

Bu bölümde sırasıyla Doğruöz'ün [8] ve [9], Charalambides ve Clark'ın [3], Özen'in [30], Çeken ve Alkan'ın [7] makaleleri incelenerek kapalı (closed) alt modüllere göre yapılandırmaları göz önüne alınmıştır. Ancak daha önce torsion teori ile ilgili aşağıdaki kavramları verelim. Daha ayrıntılı bilgiler için (bakınız [14], [31]).

R-modüllerin sıfır modülüne sahip ve izomorfizmalar altında kapalı bir $\mathcal{T}$ sınıfı homomorfik görüntüler, direkt toplamlar ve kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalı ise bir *burulmalı (torsion)* sınıf oluşturur. Buna göre *torsion free* $\mathcal{F}$ sınıfı $\mathcal{F} = \{N \in Mod\text{-}R : Hom(M, N) = 0,\ \ her\ M \in \mathcal{T}\}$ biçiminde tanımlanır. Bu şekilde elde edilen $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ sistemine bir *burulmalı (torsion) teori* denir. Ayrıca burada $\mathcal{F}$ torsion free sınıfı alt modüllere, direkt çarpımlara ve kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalıdır. $\mathcal{T}$ sınıfına ait modüllere τ*-torsion* modül, $\mathcal{F}$ sınıfına ait modüllere τ*-torsion free* modül denir. Bir $\mathcal{C}$ sınıfı kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalı ise $0 \to N \to M \to N' \to 0$ kısa tam dizisi için $N, N' \in \mathcal{C}$ ise $M \in \mathcal{C}$ önermesi doğrudur.

Bundan başka $\mathcal{T}$ torsion sınıf alt modüllere göre kapalı oluyorsa $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ye bir *kalıtsal (hereditary)* torsion teori denir. M nin bütün τ-torsion alt modüllerinin toplamı $\tau(M)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\tau(M)$, M nin tek maksimal τ-torsion alt modülüdür ve $\tau(M/\tau(M))$=0 yani $M/\tau(M) \in \mathcal{F}$ dir. Başka bir ifadeyle $M/\tau(M)$ bir τ-torsion free modüldür. Eğer $\tau(M) = M$ ise M ye τ-torsion modül, $\tau(M) = 0$ ise M ye τ-torsion free modül de denir.

$Mod\text{-}R$ üzerinde tanımlı ρ ve τ torsion teorileri için, her ρ-torsion modül τ-torsion oluyorsa bu durum $\rho \leq \tau$ biçiminde gösterilir. Böylece torsion teoriler kısmi sıralanabilir.

4.1 Burulmalı Teoriye Göre Bir Extending Modül Yapısı

Tanım 4.1.1 τ bir torsion teori, M bir R-modül olsun. N, M nin bir alt modülü olmak üzere N, M de essential ve M/N τ-torsion ise N ye M nin *τ-esaslı (τ-essential)* alt modülü denir. K, M nin bir alt modülü olmak üzere eğer K nın M de bir öz τ-essential genişlemesi yoksa K ya M nin *τ-kapalı (τ-closed)* alt modülü denir. Yani K, M de τ-closed ve M nin bir L alt modülünde essential iken L/K, τ-torsion ise $K = L$ dir. Bundan başka her torsion teori τ için M nin her direkt toplananı M de τ-closed olur.
Bu tanımlamalar ile birlikte bir M modülünün her τ-closed alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye *τ-extending* modül denir.

Şimdi τ-extending ile ilgili bazı sonuçları ve karakterizasyonları verebiliriz.

Lemma 4.1.2 *τ bir torsion teori, N ve K bir M modülünün alt modülleri olsun. O zaman aşağıdaki özellikler vardır.*

(1) *N, M de τ-essential ise N, M de essential alt modüldür.*

(2) *N, K de τ-essential ve K de M de τ-essential ise N, M de τ-essential alt modüldür.*

(3) *N, M de closed ise N, M de τ-closed alt modüldür.*

(4) *M, τ-extending modül ise M extending modül olur.*

(5) *M, τ-extending modül olsun. N nin M de closed olması için gerek ve yeter şart N nin M de τ-closed olmasıdır.*

(6) *N, M de bir direkt toplanan ise N, M de τ-closed olur.*

İspat. (1) Tanım 4.1.1 den açıktır.

(2) N, K de τ-essential ve K de M de τ-essential olsun. Bu durumda, Önerme 2.2.2 den N, K de essential ve K de M de essential olacağından N, M de essential

olur. Diğer yandan K/N ve M/K τ-torsion modüller olduğundan $0 \to K/N \to M/N \to M/K \to 0$ kısa tam dizisi ile M/N de τ-torsion olur. O halde N, M de τ-essentialdır.

(3) N, M de closed olsun. N nin M de τ-closed olmadığını kabul edelim. Bu durumda N nin M de bir K öz τ-essential genişlemesi vardır. Buradan N, K da essential olacağından bu durum N nin M de closed olması ile çelişir. O halde N nin M de öz τ-essential genişlemesi yoktur. Yani N, M de τ-closed olur.

(4), (6) Tanım 4.1.1 ve (3) ten kolayca görülür.

(5) M, τ-extending olsun. (3) te her closed alt modülün τ-closed olduğu gösterilmiştir. Şimdi N, M de τ-closed olsun. Hipotezden N, M nin bir direkt toplananı olduğundan N, M de closed olur. □

Genel olarak Lemma 4.1.2; (2), (3), (4) ve (6) daki ifadelerin tersi her zaman doğru değildir (Bakınız [28, Example 2.9], [8, Example 3.3]).

Yukarıdaki tanımlamalar ve Crivei [5] den yazdığımız Tanım 3.4.2 ile aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 4.1.3 *$\mathcal{S}$, singuler modüllerin sınıfı ve M bir R-modül olsun. K, M de $\mathcal{S}$-closed altmodül ise K, M de τ-closed altmodüldür.*

İspat. Sonuç 3.4.3 ve Lemma 4.1.2 (3) ten görülür. □

Önerme 4.1.4 *τ bir torsion teori, M bir R-modül ve K, M nin bir alt modülü olmak üzere ya M/K, τ-torsion free ya da K, M de closed olsun. O zaman K, M de τ-closed olur.*

İspat. Öncelikle M/K, τ-torsion free olsun. K nın M nin bir L alt modülünde τ-essential olduğunu kabul edelim. Bu durumda L/K τ-torsion olur. Diğer yandan $L/K \leq M/K$ olduğundan L/K alt modül olarak τ-torsion free olur. O halde $K = L$ ve bu nedenle K, M nin τ-closed alt modülüdür. Diğer yandan Lemma 4.1.2; (3) gereğince her closed alt modülün τ-closed olduğu açıktır. □

Lemma 4.1.5 *τ bir hereditary torsion teori olsun . M nin bir K alt modülünün M de τ-closed olması için gerek ve yeter şart M nin $K \leq H \leq M$ olmak üzere K, H de closed ve $\tau(M/K) = H/K$ olacak şekilde bir H alt modülünün var olmasıdır.*

İspat. K, M nin τ-closed alt modülü ve M nin bir H alt modülü için $\tau(M/K) = H/K$ olsun. K nın H de closed olmadığını kabul edelim. Yani H de K yi essential olarak içeren bir K' alt modülü var olsun. O zaman $K'/K \leq H/K$ ve τ hereditary torsion teori olduğundan K'/K τ-torsion olur. Bu ise K nin K' de τ-essential olduğu anlamına gelir. K, M nin τ-closed alt modülü olduğundan $K = K'$ olmalıdır. Bu durumda K, H de closed olur.
Tersine $K \leq H \leq M$ olmak üzere K, H de closed ve $\tau(M/K) = H/K$ olsun. K nın M nin bir K' alt modülünde τ-essential olduğunu kabul edelim. O zaman K, K' de essential ve K'/K τ-torsion olur. Böylece $K'/K \leq H/K$ olacağından $K' \leq H$ ve K, H de closed olduğundan $K = K'$ bulunur. Bu durumda K, M nin τ-closed alt modülüdür. $\square$

Lemma 4.1.6 *τ bir hereditary torsion teori ve M bir R-modül olsun. M nin her N alt modülü, M nin bir τ-closed K alt modülü içinde τ-essentialdır.*

İspat. N, M nin bir alt modülü ve $\tau(M/N) = H/N$ olsun. O zaman M/H τ-torsion free olur. K, N yi essential olarak içeren ve H de closed olan bir alt modül olsun. $K/N \leq H/N$ ve H/N τ-torsion olduğundan K/N de τ-torsion olur. Böylece N, K de τ-essentialdır. K nın M nin bir V alt modülünde τ-essential olduğunu kabul edelim. Bu durumda V/K τ-torsion ve K, V de essential olur. O zaman K, $H \cap V$ de essential ve K, H de closed olduğundan $K = H \cap V$ olur. Bununla birlikte $(H + V)/H \cong V/(H \cap V) = V/K$ ve $(H + V)/H \leq M/H$ olduğundan V/K τ-torsion free olacaktır. Bu yüzden $K = V$ dir. O halde K, M nin τ-closed alt modülüdür. $\square$

Sonuç 4.1.7 *τ bir hereditary torsion teori ve M bir R-modül olsun. M nin τ-extending olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün M nin bir direkt toplananında τ-essential olmasıdır.*

İspat. M, τ-extending modül olsun. Lemma 4.1.6 ile M nin her N alt modülünü τ-essential olarak içeren M nin en az bir τ-closed K alt modülü vardır. Hipotezden K, M nin direkt toplananıdır.

Tersine M nin her alt modülü M nin bir direkt toplananında τ-essential olsun. K, M nin τ-closed alt modülü olmak üzere hipotezden M nin K yi τ-essential olarak içeren bir L direkt toplananı vardır. O zaman $K = L$ olmalıdır. Böylece M, τ-extending olur. □

Yukarıdaki sonuç genel teoride bir modülün extending olmasının $C1$-modül olmasına denk durumunun bir genelleştirmesidir.

Tanım 4.1.8 N, M nin bir alt modülü olmak üzere M nin N yi τ-essential olarak içeren bir τ-closed K alt modülüne N nin M içindeki *τ-kapanışı (τ-closure)* denir.

Dikkat edilirse τ bir hereditary torsion teori ise Lemma 4.1.6 e göre M nin her N alt modülünün M de bir τ-closure vardır.

Lemma 4.1.9 *τ bir hereditary torsion teori ve M nin M_1 ve M_2 alt modülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ olsun . O zaman aşağıdaki özellikler vardır.*

(1) *Eğer K, M_1 in τ-closed alt modülü ise K, M de τ-closed olur.*

(2) *Eğer M, τ-extending ise M_1 ve M_2 nin her ikisi de τ-extending olur.*

İspat. (1) K, M_1 in τ-closed alt modülü olsun. Lemma 4.1.5 den K, B_1 de closed ve $\tau(M_1/K) = B_1/K$ olacak şekilde en az bir $B_1 \leq M_1$ vardır. Burada M_1/B_1 τ-torsion free olacaktır. $\tau(M_2) = B_2$ olmak üzere $B = B_1 \oplus B_2$ olsun. Buradan Lemma 2.2.9 ile K, B de closed ve $M/B = M_1/B_1 \oplus M_2/B_2$ olacak şekilde τ-torsion free modüllerin bir direkt toplamıdır. Böylece M/B, τ-torsion free olur. O halde K, B de closed ve $\tau(M/K) = B/K$ olduğundan Lemma 4.1.5 ile K, M nin τ-closed alt modülüdür.

(2) M, τ-extending ve K, M_1 de τ-closed alt modül olsun. Lemma 4.1.9 (1) den K,

M nin de τ-closed alt modülü olacağından $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' alt modülü vardır. Buradan

$$M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (M_1 \cap K')$$

olduğundan K, M_1 in de bir direk toplananı olur. O halde M_1 bir τ-extending modüldür.
Benzer şekilde M_2 nin τ-extending olduğu da görülür. □

Lemma 4.1.10 *τ bir hereditary torsion teori ve M bir τ-torsion modül olsun. M nin extending olması için gerek ve yeter şart M nin τ-extending olmasıdır.*

İspat. Lemma 4.1.2 (4) den M, τ-extending ise M extending olur. M extending ve N, M nin τ-closed alt modülü olsun. K, N nin M de bir closure olsun. K, M nin bir closed alt modülü olacağından hipotezden M nin bir direkt toplananı olacaktır. Aynı zamanda τ bir hereditary torsion teori ve M bir τ-torsion modül olduğundan homomorfik görüntü olarak M/N, τ-torsion ve ayrıca K/N, τ-torsion olur. Bu durumda N, K da τ-essential ve böylece $N = K$ bulunur. O halde N, M nin direkt toplananıdır. Bu da M nin τ-extending olduğunu gösterir. □

Teorem 4.1.11 *τ bir hereditary torsion teori ve M bir R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i**)** *M, τ-extending modüldür.*

(ii**)** *M nin her alt modülü M nin bir direkt toplananında τ-essential olur.*

(iii**)** *M, extending ve eğer M/K, τ-torsion free olacak şekilde K, M nin bir alt modülü ise K, M nin direkt toplananıdır.*

İspat. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Sonuç 4.1.7 dan açıktır.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Lemma 4.1.2 ve Önerme 4.1.4 den görülür.
$(iii) \Rightarrow (i)$ N, M nin τ-closed alt modülü olsun. Lemma 4.1.5 ile $N \leq H \leq M$ olmak üzere N, H de closed ve $\tau(M/N) = H/N$ olacak şekilde M nin bir H alt

modülü vardır. Böylece $\tau(M/H) = 0$ ve (iii) den H, M nin direkt toplananı olur. Sonuç olarak M extending olduğundan, H de extending olacaktır. Bununla birlikte N, H nin direkt toplananı olduğundan M nin de direkt toplananı olur. O halde M, τ-extending modüldür. □

Teorem 4.1.12 *τ bir torsion teori, M bir R-modül ve her τ-torsion free modül projektif olsun. Bu durumda,*

(1) *M nin en az bir N alt modülü için $M = \tau(M) \oplus N$ dir.*

(2) *Eğer M, extending ise τ-extending olur.*

İspat. (1) $M/\tau(M)$, τ-torsion free olduğundan kabul gereği projektiftir. O halde $\tau(M)$, M nin direkt toplananıdır (Bakınız [1, Proposition 17.2]).
(2) M, extending modül ve K, M nin bir τ-closed alt modülü olsun. Zorn Lemma ile T, K nın M deki bir closure olsun. T, M de closed olacağından M nin direkt toplananı olacaktır. Eğer $K = T$ ise K, M nin direkt toplananı olacağından M, τ-extending olur. $K \neq T$ olsun. K, M de τ-closed olduğundan T/K, τ-torsion free modül olacaktır. Hipotezden T/K projektif olur. Bu durumda K, T nin direkt toplananı olacağından K, M nin de direkt toplananı olur. O halde M, τ-extending modüldür. □

4.2 τ-Extending Modüllerin Ayrışımları

Lemma 4.2.1 *M_1 ve M_2, M nin alt modülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) M_2, M_1-injektiftir.
(ii) M nin $N \cap M_2 = 0$ şartını sağlayan her N alt modülü için $M = M' \oplus M_2$ ve $N \subseteq M'$ olacak şekilde M nin bir M' alt modülü vardır.

İspat. Harmancı ve Smith [20, Lemma 5]. □

Teorem 4.2.2 *τ bir hereditary torsion teori, M bir R-modül ve M_1 ve M_2, M nin relatively injective alt modülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin τ-extending olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2 nin τ-extending olmasıdır.*

İspat. Doğruöz [8, Theorem 4.2]. $\square$

Teorem 4.2.3 *τ bir hereditary torsion teori, M bir R-modül olsun. Eğer M, τ-extending ise $M = \tau(M) \oplus N$ dir. Burada $\tau(M)$ ve N, aralarında injektif (relatively injective) τ-extending modüllerdir.*

İspat. Doğruöz [8, Theorem 4.3]. $\square$

Teorem 4.2.4 *τ bir torsion teori, M bir R-modül, N de M nin bir semisimple alt modülü olmak üzere $M = \tau(M) \oplus N$ olsun. Eğer $\tau(M)$ ve N, aralarında injektif (relatively injective) τ-extending modüller ise M τ-extending olur.*

İspat. Doğruöz [8, Theorem 4.4]. $\square$

Teorem 4.2.5 *τ bir torsion teori, M bir R-modül, M_1 ve M_2, M nin sırasıyla τ-torsion ve semisimple alt modülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Eğer M_1, τ-extending ve M_1 ile M_2 aralarında injektif (relatively injective) alt modüller ise M, τ-extending olur.*

İspat. Doğruöz [8, Corollary 4.5]. $\square$

Tanım 4.2.6 τ bir torsion teori, M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer M/N, τ-torsion free ise N ye M nin *τ-kapalı (τ-closed) alt modülü* denir. M nin K/N τ-torsion olacak şekilde bir τ-closed K alt modülüne N nin M de *τ-kapanışı (τ-closure)* denir. Bu durum Crivei [6] çalışmasındaki bir $\mathcal{A}$ sınıfı için $\mathcal{A}$-kapanışa ($\mathcal{A}$-closure) benzer durumdur. Diyagramda karışıklığa sebep olmamak için τ-closed ve τ-closure gösterimi yerine Septimiu' nun manasına gelecek τ_S-closed ve τ_S-closure gösterimini kullanacağız.

Sonuç 4.2.7 *M bir R-modül olmak üzere her τ_S-closed alt modül, τ-closed olur.*

İspat. N, M de τ_S-closed alt modül olsun. Bu durumda M/N, τ-torsion free olacağından Önerme 4.1.4 (Doğruöz [8, Proposition 3.4]) ile N, τ-closed alt modül olur. □

4.3 Goldie İlgili Koşullar

Bu bölümde iki farklı torsion teoriye göre τ-extending modüllerin karşılaştırmaları bulunmaktadır. Her τ-extending modül, extending iken bunun tersinin her zaman doğru olmadığı görülmüştür. Burada eğer bir torsion teori τ, Goldie torsion teori τ_G yi içeriyorsa her extending modülün τ-extending olduğu görülecektir. Goldie torsion teori, $\mathcal{T}_G$=$\{M \in Mod\text{-}R : Z_2(M) = M\}$ ve $\mathcal{F}_G$=$\{M \in Mod\text{-}R : Z_2(M) = 0\}$ olmak üzere $\tau_G = (\mathcal{T}_G, \mathcal{F}_G)$ ile tanımlıdır. M modülünün Goldie torsion alt modülü $\tau_G(M) = Z_2(M)$ dir. Goldie torsion teori, bir hereditary torsion teoridir.

Lemma 4.3.1 *τ_G, Goldie torsion teori olmak üzere her extending modül, τ_G-extending modüldür.*

İspat. M, extending modül ve N, M de bir τ_G-closed alt modül olsun. K nın N nin M deki essential genişlemesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda K/N singulardir. Diğer bir ifade ile K/N, τ_G-torsiondur. Böylece N, K da τ_G-essential olur. Bu durumda $N = K$ olmalıdır. Buradan N, M de closed alt modüldür. Böylece N, M nin direkt toplananı olur. Yani M, τ_G-extendingdir. □

Önerme 4.3.2 *M bir R-modül olsun. $\rho \leq \tau$ olmak üzere τ ve ρ torsion teorileri gözönüne alalım. Eğer M, ρ-extending ise M, τ-extending olur.*

İspat. M, ρ-extending ve K, M de bir τ-closed alt modül olsun. T, K nın M deki ρ-essential genişlemesi olsun. Bu durumda T/K, ρ torsion ve K, T de essential dır. $\rho \leq \tau$ olduğundan T/K, τ torsion ve K, M de τ-closed olduğundan $K = T$ dir. Bu nedenle K, M de ρ-closed olur. Hipotezden K, M de direkt toplanan ve böylece M, τ-extending bulunur. □

Teorem 4.3.3 *τ bir torsion teori ve $\tau_G \leq \tau$ olsun. M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.*

(i) *M, τ-extending modüldür.*

(ii) *M, extending modüldür.*

(iii) *M, τ_G-extending modüldür.*

İspat.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Lemma 4.1.2 (4).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Lemma 4.3.1.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Önerme 4.3.2. □

Aşağıdaki teorem torsion teorilerin τ-extending modüllerle bir karakterizasyonu olarak verilebilir.

Teorem 4.3.4 *τ, Mod-R üzerinde bir hereditary torsion teori olsun. Her extending modülün τ-extending olması için gerek ve yeter şart $\tau_G \leq \tau$ olmasıdır.*

İspat. Doğruöz [8, Theorem 5.5]. □

Torsion sınıfı sadece sıfır modülünden oluşan torsion teoriye *trivial* torsion teori denir ve ξ ile gösterilir. Torsion sınıfı bütün R-modüllerden oluşan torsion teoriye ise *improper* torsion teori denir ve χ ile gösterilir. O halde $\xi = (0, Mod\text{-}R)$ ve $\chi = (Mod\text{-}R, 0)$ şeklindedir.

Önerme 4.3.5 *ξ, trivial torsion teori, χ, improper torsion teori ve M bir R-modül olsun. Bu durumda,*

(1) *M nin ξ-extending olması için gerek ve yeter şart semisimple olmasıdır.*

(2) *M nin extending olması için gerek ve yeter şart χ-extending olmasıdır.*

(3) *M nin τ_G-extending olması için gerek ve yeter şart χ-extending olmasıdır.*

İspat.

(1) M, semisimple ve N, M de ξ-closed alt modül olsun. N, M nin direkt toplananı olduğundan M, ξ-extending olur. Tersine M, ξ-extending ve N, M de alt modül olsun. L nin, N nin M deki ξ-essential genişlemesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda L/N, ξ-torsion olduğundan $L/N = 0$ elde edilir. O halde N, M de ξ-closed alt modüldür. Hipotezden N, M de direkt toplanan ve böylece M semisimple olur.

(2) Lemma 4.1.2 (4) ten M, χ-extending ise extending olacaktır. Tersine M, extending ve N, M de χ-closed alt modül olsun. L, N nin M deki essential genişlemesi olsun. L/N bir R-modül olduğundan L/N, χ-torsion olur. O halde L, N nin M deki χ-essential genişlemesidir. N, M de χ-closed olduğundan $N = L$ olacaktır. Bu durumda N, M de closed alt modüldür. Hipotezden N, M nin direkt toplananı olduğundan M, χ-extending olur.

(3) Önerme 4.3.2 den M nin τ_G-extending ise χ-extending olduğu, (2) ve Lemma 4.3.1 den M nin χ-extending ise τ_G-extending olduğu kolayca görülür. □

Önerme 4.3.6 *τ cohereditary torsion teori yani torsion free sınıf $\mathcal{F}$ homomorfik görüntüler altında kapalı olsun. M bir R-modül olmak üzere eğer M, τ-torsion free ve τ-extending ise M, semisimple modüldür.*

İspat. N, M nin bir alt modülü olsun. M, τ-torsion free ve τ cohereditary torsion teori olduğundan M/N, τ-torsion free olacaktır. Önerme 4.1.4 ile N, M nin bir τ-closed alt modülüdür. Hipotezden N, M nin bir direkt toplananıdır. O halde M bir semisimple R-modüldür. □

Tanım 4.3.7 M bir R-modül olsun. L, X ve N, R-modüller ve de N bir τ-torsion modül olmak üzere her $0 \to L \to X \to N \to 0$ kısa tam dizisi için $Hom_R(X, M) \to Hom_R(L, M) \to 0$ dizisi tam ise M ye bir τ-*injective* modül denir.

Teorem 4.3.8 *τ ve τ_G sırasıyla Mod-R üzerinde hereditary torsion teori ve Goldie torsion teori olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.*

(1) $\tau_G \leq \tau$.

(2) *Her extending modül, τ-extending modüldür.*

(3) *Her τ-injective modül, injective modüldür.*

İspat. $(1) \Leftrightarrow (2)$ Doğruöz [8, Theorem 5.5]
$(1) \Leftrightarrow (3)$ Bland ve Smith [2, Theorem 2.1] □

4.4 Tip 2 τ-Extending Modüller

Bu bölümde Doğruöz' ün [9] çalışması incelenmiştir. Aksi belirtilmedikçe bütün torsion teoriler hereditary (kalıtsal) torsion teori kabul edilmiştir.

Tanım 4.4.1 τ bir torsion teori, M bir R-modül olsun. N, M nin bir alt modülü olmak üzere M/N τ-torsion ise N ye M nin *τ-dense* alt modülü denir. Eğer N, M de closed ve M/N τ-torsion ise N ye M nin *Tip 2 τ-closed* alt modülü denir. Önceki tanımlara benzer bir şekilde bir M modülünün her Tip 2 τ-closed alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye *Tip 2 τ-extending* modül denir.

Lemma 4.4.2 *Bir R-modül M için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(1) *N, M de Tip 2 τ-closed alt modül ise N, M de closed alt modüldür.*

(2) *N, K de Tip 2 τ-closed alt modül ve K, M de Tip 2 τ-closed alt modül ise N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olur.*

(3) *Eğer M, extending modül ise M, Tip 2 τ-extending modül olur.*

(4) *Eğer M, τ-torsion ve Tip 2 τ-extending modül ise M extending modül olur.*

(5) *Eğer M τ-torsion free ise M, Tip 2 τ-extending modül olur.*

(6) *Tip 2 τ-extending modülün her direkt toplananı da Tip 2 τ-extending modül olur.*

İspat. (1) Tanım 4.4.1 den açıktır.

(2) N, K da ve K da M de Tip 2 τ-closed olduklarından K/N ve M/K τ-torsion olacaktır. Torsion sınıf, genişlemeler altında kapalı olduğundan M/N de τ-torsion olur. Diğer yandan N, K da closed ve K da M de closed olduğundan Lemma 2.2.9 ile N, M de closed olacaktır. Buradan N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olur.

(3) M extending modül ve N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olsun. (1) den N, M de closed ve bu yüzden M nin bir direkt toplananıdır. Buradan M, Tip 2 τ-extending modül olur.

(4) M, τ-torsion ve Tip 2 τ-extending modül olsun. Eğer N, M de closed ise M/N, τ-torsion olacağından N, M de Tip 2 τ-closed olur. Kabulden N, M nin bir direkt toplananıdır. Buradan M, extending modüldür.

(5) M bir τ-torsion free R-modül ve N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olsun. Aynı zamanda N, M de closed (complement) olduğundan M de $N \cap K = 0$ ile N nin maksimal olduğu bir K alt modülü vardır. Burada K, M/N nin bir alt modülüne izomorf olacağından τ-torsion olur. M τ-torsion free olduğundan K τ-torsion free dolayısıyla $K = 0$ elde edilir. Buradan $M = N$ ve böylece M, Tip 2 τ-extending modül olur.

(6) M_1 ve M_2, M nin alt modülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ ve N de M_1 de Tip 2 τ-closed alt modül olsun. Böylece N, M_1 de closed ve M_1/N τ-torsion olur. $N' = N \oplus M_2$ olsun. $M/N' = (M_1 \oplus M_2)/(N \oplus M_2) \cong M_1/N$ olduğundan M/N' τ-torsion olacaktır. N' nün M de closed alt modül olduğunu görelim: Eğer N', M nin bir T alt modülünde essential ise N, $M_1 \cap T$ alt modülünde essential olur. Buradan $N = M_1 \cap T$ sonucu ile $M_2 \subseteq T$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olduğundan modülarite kuralından

$$T = T \cap (M_1 \oplus M_2) = M_2 \oplus (T \cap M_1) = M_2 \oplus N = N'$$

elde edilir. Böylece N', M de closed ve M/N', τ-torsion olduğundan N', M de Tip 2 τ-closed alt modül olur. Hipotezden M nin bir K alt modülü için $M = N' \oplus K$

yazılabilir. $M = N' \oplus K = N \oplus M_2 \oplus K$ olduğundan modülarite kuralı ile

$$M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (N \oplus M_2 \oplus K) = N \oplus [M_1 \cap (M_2 \oplus K)]$$

elde edilir. O halde M_1, Tip 2 τ-extending modül olur. □

Örnek 4.4.3 *ξ, trivial torsion teori olmak üzere her R-modül Tip 2 ξ-extending modüldür.*

İspat. N, M de Tip 2 ξ-closed alt modül olsun. Buradan M/N, ξ-torsion ve bu yüzden $N = M$ olacaktır. □

Örnek 4.4.4 *χ, improper torsion teori ve M bir R-modül olmak üzere M nin Tip 2 χ-extending modül olması için gerek ve yeter şart M nin extending modül olmasıdır.*

İspat. Yeter şart Lemma 4.4.2 (3) ten açıktır. Diğer yandan M Tip 2 χ-extending ve N, M de closed alt modül olsun. Her R-modül χ-torsion olacağından M/N de χ-torsion olur. Bu ise N nin M de Tip 2 χ-closed olduğunu gösterir. Kabulden N, M nin bir direkt toplananı olur. O halde M extending modüldür. □

Aşağıdaki örnek bir torsion teori τ için Tip 2 τ-extending iken extending olmayan ve closed alt modülleri Tip 2 τ-closed olmayan modüllerin varlığını göstermektedir.

Örnek 4.4.5 *F, bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$ halkasını göz önüne alalım. R nin idempotent $I = \begin{bmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ideali ile üretilen Mod-R üzerinde bir torsion teori τ_I ile gösterilsin. Burada τ_I-torsion teori için torsion sınıf $\mathcal{T}_I := \{N \in Mod\text{-}R : NI = 0\}$ ile tanımlıdır. $M := R_R$ olmak üzere M aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

(1) M Tip 2 τ_I-extending modüldür ancak extending modül değildir.

(2) M nin Tip 2 τ_I-closed olmayan direkt toplananları vardır.

(3) M nin τ_I-torsion alt modülü $\tau_I(M)$, M nin bir direkt toplananı değildir.

İspat. Doğruöz [9, Example 2.4]. □

Örnek 4.4.5 te torsion teori τ_I ya göre Tip 2 τ_I-extending olan M modülü aşağıdaki örnekte J ideali ile üretilen torsion teori τ_J ye göre Tip 2 τ_J-extending değildir. Bu örnek gösteriyorki bir modülün Tip 2 τ-extending olması modül kadar torsion teoriye de bağlıdır.

Örnek 4.4.6 *R ve M Örnek 4.4.5 daki şekliyle olmak üzere R nin idempotent ideali $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$ ile üretilen torsion teori τ_J ile gösterilsin. τ_J-torsion teori için torsion sınıf $\mathcal{T}_J := \{N \in Mod\text{-}R : \ NJ = 0\}$ olmak üzere M ne extending modül ne de Tip 2 τ_J-extending modüldür.*

İspat. Doğruöz [9, Example 2.5]. □

Aşağıda Tip 2 τ-extending modüllerin karakterizasyonu ile ilgili sonuçlardan bahsedilmektedir.

Önerme 4.4.7 *M bir R-modül olmak üzere M nin τ-dense alt modülü N yi essential olarak içeren M de Tip 2 τ-closed bir K alt modülü vardır.*

İspat. N, M nin bir τ-dense alt modülü olsun. Zorn Lemma ile N yi essential olarak içeren M nin bir closed K alt modülü bulunabilir. M/K, M/N nin homomorfik görüntüsü olduğundan M/K τ-torsion olacaktır. Böylece N yi essential olarak içeren bir Tip 2 τ-closed K alt modülü elde edilmiş olur. □

Lemma 4.4.8 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.*

(1) *M, Tip 2 τ-extending modüldür.*

(2) *M nin her τ-dense alt modülü N için N yi essential olarak içeren M nin bir A direkt toplananı vardır.*

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$. N, M nin τ-dense alt modülü olsun. Önerme 4.4.7 ile M de N yi essential olarak içeren bir Tip 2 τ-closed K alt modülü vardır. (1) den K, M

nin bir direkt toplananıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1). N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olsun. Böylece N, M nin hem τ-dense hem de closed alt modülü olur. (2) den N yi essential olarak içeren M nin bir A direkt toplananı vardır. N, M de closed olduğundan $N = A$ olacaktır. O halde M, Tip 2 τ-extending modüldür. □

Önerme 4.4.9 *M bir τ-torsion free R-modül ise aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(1) *M nin öz Tip 2 τ-closed alt modülü yoktur.*

(2) *M nin her τ-dense alt modülü M de essential alt modüldür.*

İspat. (1) N, M de Tip 2 τ-closed alt modül ise N, M nin hem τ-dense hem de closed alt modülü olur. Lemma 4.4.2 (5) ten M Tip 2 τ-extending modül olduğundan $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin bir N' alt modülü vardır. Burada N', τ-torsion alt modüldür. Ancak $\tau(M) = 0$ olduğundan $N' = 0$ elde edilir. O halde $M = N$ dir.

(2) N, M de τ-dense alt modül olsun. Önerme 4.4.7 den N yi essential olarak içeren M de Tip 2 τ-closed bir K alt modülü vardır. (1) den $K = M$ olmalıdır. O halde N, M de essential alt modüldür. □

Önerme 4.4.10 *N, M nin Tip 2 τ-closed alt modülü ise M de $N \cap K = 0$ ile N nin maksimal olduğu bir K alt modülü vardır. Bu durumda $N \oplus K$, M de τ-essential olur. Tersine eğer K, $N \cap K = 0$ ile N maksimal olacak şekilde M nin bir τ-torsion alt modülü ise N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olur.*

İspat. N, M nin Tip 2 τ-closed alt modülü ise N, M de τ-dense ve closed olur. N, M de closed olduğundan N, M de complement olur (Bakınız Dung vd. [13, s.6]). O halde M de $N \cap K = 0$ olacak şekilde N nin maksimal olduğu bir K alt modülü bulunabilir. Bu durumda Önerme 2.2.7 den $N \oplus K$, M de essential olur. Son olarak $M/(N \oplus K)$, M/N nin homomorfik görüntüsü olduğundan $M/(N \oplus K)$, τ-torsion olur. O halde $N \oplus K$, M de τ-essential alt modüldür.

Tersine K, $N \cap K = 0$ ile N maksimal olacak şekilde M de bir τ-torsion alt modül olsun. N nin M de closed olduğu açıktır. K ve $M/(N \oplus K)$ τ-torsion olduklarından

$$0 \to K \cong (K \oplus N)/N \to M/N \to M/(K \oplus N) \to 0$$

kısa tam dizisi M/N nin de τ-torsion olduğunu gösterir. O halde N, M de Tip 2 τ-closed alt modüldür. □

Aşağıdaki teorem Tip 2 τ-extending modüllerin sonlu direkt toplamlarının hangi koşullarda Tip 2 τ-extending olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.4.11 *M, bir R modül ve M_1 ve M_2, M nin relatively injective τ-torsion alt modülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M nin Tip 2 τ-extending olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2 nin her ikisinin de Tip 2 τ-extending olmasıdır.*

İspat. Doğruöz [9, Theorem 2.13]. □

4.5 Tip 2 τ_G-Extending Modüller

Bu bölümde Goldie torsion teori τ_G ye göre extending modüller incelenmiştir. Daha önceki bölümlerde bir R-modül M nin singular alt modülü $Z(M)$ ve Goldie torsion alt modülü $\tau_G(M) = Z_2(M)$ den bahsedilmişti. Eğer $Z_2(M) = M$ ise M, τ_G-torsion ve $Z_2(M) = 0$ ise M, τ_G-torsion free modüldür. Bununla birlikte M nin τ_G-torsion free olması için gerek ve yeter şart $Z(M) = 0$ olmasıdır. Burada τ bir torsion teori ve $\tau_G \leq \tau$ ise singular bir M modülünün Tip 2 τ-extending olması için gerek ve yeter şartın M nin Tip 2 τ_G-extending olması sonucuna ulaşılmıştır.

Önerme 4.5.1 *M, Tip 2 τ_G-extending modül ise $\tau_G(M)$, M nin bir direkt toplananıdır.*

İspat. M, Tip 2 τ_G-extending modül olsun. Eğer M, τ_G-torsion ise Lemma 4.4.2 (4) ten M extending olur. Böylece $\tau_G(M)$, M nin bir direkt toplananı olur. M, τ_G-torsion olmasın. $\tau_G(M)$ nin M deki complementi K olsun. Bu durumda

$K \oplus \tau_G(M)$, M de essential olur. [17, Proposition 3.26] dan $M/(K \oplus \tau_G(M))$ singulardir. Buradan $M/(K \oplus \tau_G(M))$, τ_G-torsion elde edilir. Bununla birlikte $\tau_G(M) \cong (K \oplus \tau_G(M))/K$ olduğundan

$$0 \to (K \oplus \tau_G(M))/K \to M/K \to M/(K \oplus \tau_G(M)) \to 0$$

kısa tam dizisiyle M/K, τ_G-torsion bulunur. O halde K, M de Tip 2 τ_G-closed alt modüldür. Hipotezden K, M nin direkt toplananıdır. Bu nedenle $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' alt modülü vardır. Böylece K, τ_G-torsion free (yani non-singular) ve $\tau_G(M) \leq K'$ elde edilir. Bununla birlikte $M/K \cong K'$ olduğundan K', τ_G-torsion olur. Fakat $\tau_G(M)$, M nin maksimal τ_G-torsion alt modülü olduğundan $\tau_G(M) = K'$ olacaktır. Böylece $M = K \oplus \tau_G(M)$ elde edilir. □

Önerme 4.5.2 *τ ve ρ torsion teoriler ve $\tau \leq \rho$ olsun. M bir R-modül olmak üzere M Tip 2 ρ-extending modül ise M Tip 2 τ-extending modüldür.*

İspat. N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olsun. Bu durumda N, M de closed ve M/N τ-torsion olur. $\tau \leq \rho$ olduğundan M/N ρ-torsion elde edilir. O halde N, M de Tip 2 ρ-closed alt modüldür. Kabulden N, M nin bir direkt toplananı olacağından M, Tip 2 τ-extending modül olur. □

Yukarıda verilen önermenin tersinin geçerli olmadığınına dair örnek [9, Example 3.3] de verilmiştir.

Sonuç 4.5.3 *τ bir torsion teori ve $\tau \leq \tau_G$ olsun. M bir R-modül olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *M non-singular modül ise M Tip 2 τ_G-extending modüldür.*

(2) *M Tip 2 τ_G-extending modül ise M Tip 2 τ-extending modüldür.*

(3) *M non-singular modül ise M Tip 2 τ-extending modüldür.*

İspat. (1) M non-singular modül ise $Z(M) = 0$ dır. Buradan $\tau_G(M) = 0$ olur. Böylece M, τ_G-torsion free olacağından Lemma 4.4.2 (5) ten M nin Tip 2 τ_G-extending modül olduğu elde edilir.

(2) Önerme 4.5.2 den açıktır.

(3) (1) ve (2) den kolayca görülür. □

Genel olarak Sonuç 4.5.3 (1) ve (3) ün tersi doğru değildir (Bakınız [9, Example 3.5]). (2) nin tersi ise hala açık bir soru olarak durmaktadır.

Teorem 4.5.4 *τ bir torsion teori ve $\tau_G \leq \tau$ olsun. M bir singular R-modül olmak üzere M nin Tip 2 τ-extending olması için gerek ve yeter şart M nin Tip 2 τ_G-extending olmasıdır.*

İspat. $\tau_G \leq \tau$ olduğundan Önerme 4.5.2 den M nin Tip 2 τ-extending ise Tip 2 τ_G-extending olacaktır. Tersine M Tip 2 τ_G-extending ve N, M de Tip 2 τ-closed bir alt modül olsun. Bu durumda N, M de closed ve N, M de τ-dense olacaktır. M singular olduğundan $Z(M) = M$ ve bu yüzden $\tau_G(M) = M$ dir. Böylece M, τ_G-torsion olduğundan M nin homomorfik görüntüsü M/N de τ_G-torsion olur. O halde N, M nin Tip 2 τ_G-closed alt modülüdür. Hipotezden N, M nin bir direkt toplananıdır. Bu nedenle M, Tip 2 τ-extending modül olur. □

4.6 Burulmalı Teoriye Göre CS Adlandırılmış Extending Modüller

Bu bölümde Charalambides ve Clark' ın "CS Modules Relative to a Torsion Theory" [3] adlı çalışması incelenmiştir. Bu bölümde bahsi geçen modüller birimsel sol R-modüller ve bütün homomorfizmalar R-modül homomorfizmalarıdır. Diğer yandan bütün sol R-modüllerin sınıfı R-Mod ile gösterilmiştir. Bundan başka $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ile R-Mod üzerinde bir hereditary torsion teori ifade edilmiştir. Ayrıca burada yapılacak olan τ-CS ve s-τ-CS modül tanımlarının sırasıyla Doğruöz'ün [9] ve [8] çalışmalarındaki Tip 2 τ-extending ve τ-extending tanımlarıyla aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Tanım 4.6.1 N, M nin bir alt modülü olmak üzere M/N τ-torsion (τ-torsion free) ise N ye M nin *τ-dense* (*τ-pure*) alt modülü denir. M modülünün bütün τ-dense alt modüllerinin kümesi $\mathcal{D}_\tau(M)$ ve bütün τ-pure alt modüllerinin kümesi $\mathcal{P}_\tau(M)$ ile gösterilsin. O halde $\tau(M)$ ve M, $\mathcal{P}_\tau(M)$ ye aittir. N, M nin bir alt modülü olmak üzere M nin N yi içeren bütün τ-pure alt modüllerinin arakesitine N nin M deki *τ-pure kapanışı (τ-pure closure)* denir ve $Cl_\tau^M(N)$ yada M ve τ biliniyorken N^c ile de gösterilir.

Lemma 4.6.2 [3, Lemma 2.2] *$M \in R$-Mod ve $K \leq L \leq M$ olsun. $K \in \mathcal{D}_\tau(M)$ olması için gerek ve yeter şart $K \in \mathcal{D}_\tau(L)$ ve $L \in \mathcal{D}_\tau(M)$ olmasıdır.*

Tanım 4.6.3 Bir M modülü tam olarak iki τ-pure alt modüle sahip ise yani $t_\tau(M)$ M nin tek öz τ-pure alt modülü ise M ye *τ-presimple* modül denir. Eğer M hem τ-presimple hem de τ-torsion free ise M ye *τ-simple* modül denir. O halde bir M modülünün τ-simple olması için gerek ve yeter şart M nin sıfırdan farklı, τ-torsion free bir modül ve M nin sıfırdan farklı her alt modülünün M de τ-dense olmasıdır. Eğer M nin sıfırdan farklı her alt modülü M de τ-dense ise M ye *τ-compact* modül denir. (0, τ-compact modüldür.)

Bu tanımlamalar ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 4.6.4 *M, τ-compact ve N, M nin bir alt modülü olsun. N nin M de closed olması için gerek ve yeter şart N nin M de Tip 2 τ-closed olmasıdır.*

İspat. N, M de closed olsun. M, τ-compact olduğundan M/N τ-torsion olacaktır. O halde Tanım 4.4.1 ile N, M de Tip 2 τ-closed alt modüldür. Tersine N, M de Tip 2 τ-closed ise Lemma 4.4.2 (1) den N nin M de closed olduğu açıktır. □

Böylece aşağıdaki yeni sonuç verilebilir.

Sonuç 4.6.5 *M, τ-compact olsun. M nin Tip 2 τ-extending olması için gerek ve yeter şart M nin extending olmasıdır.*

İspat. M Tip 2 τ-extending modül ve sıfırdan farklı bir K alt modülü M de closed olsun. Lemma 4.6.4 den K, M de Tip 2 τ-closed olur. Hipotezden K, M nin bir direkt toplananıdır. O halde M extending modüldür. Tersine Lemma 4.4.2 (3) ile M extending ise Tip 2 τ-extending olduğu açıktır. □

Önerme 4.6.6 *Bir M modülünün τ-compact olması için gerek ve yeter şart M nin ya τ-torsion ya da τ-simple olmasıdır. Sonuç olarak τ-compact modülün her alt modülü de τ-compact olur.*

İspat. Charalambides ve Clark [3, Proposition 2.4]. □

Tanım 4.6.7 N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer N, M de essential ve τ-dense ise N ye M nin τ*-essential* alt modülü denir ve $N \leq_{\tau-e} M$ ile gösterilir. Bu durumda M de N nin τ*-essential genişlemesi*dir. Eğer N nin M de öz (τ-)essential genişlemesi yoksa N ye M nin *(τ-)essentially closed* alt modülü denir.

Aşağıdaki Lemma, Doğruöz [8, Lemma 3.1 (3)] ile aynıdır.

Lemma 4.6.8 *Bir M modülünün her essentially closed (yani closed) alt modülü M nin τ-essentially closed (yani τ-closed) alt modülüdür. Sonuç olarak M nin her direkt toplananı, M de τ-essentially closed olur.*

İspat. Lemma 4.1.2, (3) ve (6) dan açıktır. □

Önerme 4.6.9 *M nin τ-dense ve τ-essentially closed olan her alt modülü M de essentially closed alt modüldür.*

İspat. N, M de τ-dense ve τ-essentially closed bir alt modül olsun. N nin M nin bir K alt modülünde essential olduğunu kabul edelim. Diğer taraftan M/N, τ-torsion olduğundan K/N de τ-torsion olacaktır. O halde N, K da τ-essential alt modüldür. Bu durumda $N = K$ elde edilir. Yani N nin M de öz essential genişlemesi olmadığından N, M nin essentially closed alt modülüdür. □

Önerme 4.6.9, Tanım 4.4.1 birlikte düşünüldüğünde Doğruöz'ün [9] çalışmasındaki tanıma göre aşağıdaki sonuça ulaşalabiliriz.

Sonuç 4.6.10 *N, M nin τ-dense ve τ-essentially closed bir alt modülü ise N, M nin Tip 2 τ-closed alt modülüdür.*

İspat. Önerme 4.6.9 dan N, M de closed ve hipotez gereği N, M de τ-dense olduğundan Tanım 4.4.1 ile N, M de Tip 2 τ-closed alt modül olur. □

Tanım 4.6.11 U, sıfırdan farklı bir R-modül olmak üzere U nun sıfırdan farklı her alt modülü U da τ-essential ise U ya τ-*uniform* modül denir.

Önerme 4.6.12 [3, Proposition 3.19] *U, bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) U, τ-uniform modüldür.

(2) U, uniform ve τ-compact modüldür.

(3) U ya τ-simple yada aynı zamanda uniform ve τ-torsion modüldür.

Tanım 4.6.13 Aşağıdaki koşullardan birine sahip olan bir M modülüne τ-CS modül denir.

(1) M nin her τ-dense alt modülü, M nin bir direkt toplananında essentialdır.

(2) M nin her τ-dense alt modülü, M nin bir direkt toplananında τ-essentialdır.

(3) M nin her τ-dense, τ-essentially closed alt modülü, M nin bir direkt toplananıdır.

(4) M nin her τ-dense, essentially closed alt modülü, M nin bir direkt toplananıdır.

Tanım 4.6.13 ile her extending modülün τ-CS modül olduğu açıktır. Bununla birlikte bir M modülünün (4) koşulu gereği Doğruöz'ün [9] çalışmasındaki Tip 2 τ-extending olması ile τ-CS olması çakışmaktadır.

Önerme 4.6.14 *M bir τ-CS R-modül olmak üzere M nin her τ-dense direkt toplananı da τ-CS modüldür.*

İspat. Charalambides ve Clark [3, Proposition 5.7]. □

Tanım 4.6.15 Aşağıdaki koşullardan birine sahip olan bir M modülüne *güçlü-τ-CS (strongly-τ-CS) modül* veya kısaca *s-τ-CS modül* denir.

(1) M nin her alt modülü, M nin bir direkt toplananında τ-essentialdır.

(2) M nin her τ-essentially closed alt modülü, M nin bir direkt toplananıdır.

Tanım 4.6.15 ile bir M modülünün (2) koşulu gereği Doğruöz'ün [8] çalışmasındaki τ-extending olması ile s-τ-CS olması çakışmaktadır.

Önerme 4.6.16 *M bir s-τ-CS R-modül olmak üzere M nin her τ-compact direkt toplananı da s-τ-CS modüldür.*

İspat. Charalambides ve Clark [3, Remark 5.9]. □

Önerme 4.6.17 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M, τ-uniform modüldür.

(2) M, s-τ-CS (yani τ-extending) ve indecomposable modüldür.

(3) M, CS (yani extending), indecomposable ve τ-compact modüldür.

(4) M, τ-CS (yani Tip 2 τ-extending), indecomposable ve τ-compact modüldür.

İspat. Charalambides ve Clark [3, Proposition 5.10]. □

Önerme 4.6.18 *Her τ-compact τ-CS modül, s-τ-CS ve böylece CS modüldür. Özel olarak Önerme 4.6.6 ile her τ-torsion τ-CS modülün CS modül olduğu söylenebilir.*

İspat. Charalambides ve Clark [3, Proposition 5.11]. □

4.7 Kalıtsal Burulmalı Teoriye Göre C1 Adlandırılmış Extending Modüller

Bu bölümde Özen'in [30] makalesi incelenmiştir. Burada torsion teori, torsion sınıf Γ ve torsion free sınıf $\digamma$ olmak üzere $\tau = (\Gamma, \digamma)$ biçiminde gösterilmiştir. $\tau = (\Gamma, \digamma)$, Mod-R üzerinde bir hereditary torsion teoridir.

Tanım 4.7.1 M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer M nin $M/A \in \Gamma$ olacak şekilde sıfırdan farklı her A alt modülü için $N \cap A \neq 0$ ise N ye M de τ-*essential* alt modül denir ve $N \leq^{\tau-ess} M$ ile gösterilir. O halde M nin her essential alt modülü bir τ-essential alt modüldür. Bundan başka M nin sıfırdan farklı her alt modülü M de τ-essential ise M ye τ-*uniform* modül denir. K, M nin bir alt modülü olmak üzere $K \leq^{\tau-ess} L$ olacak şekilde M nin bir L alt modülü yoksa K ya M de τ-*closed* alt modül denir ve $K \leq^{\tau-closed} M$ ile gösterilir. Dikkat edilirse K, M de τ-closed alt modül ise K, M de closed alt modüldür. $\tau(M)$, M nin [8] de olduğu gibi maksimal τ-torsion alt modülü olmak üzere K, M de τ-closed alt modül ise $K \leq \tau(M)$ yani K, bir τ-torsion alt modüldür.

Önerme 4.7.2 *Eğer* $K \leq^{\tau-closed} L \leq^{\tau-closed} M$ *ise* $K \leq^{\tau-closed} M$ *dir.*

İspat. Özen [30, Proposition 2.2]. □

Lemma 4.7.3 $K \leq_{cl} M$ *ve* $K \nleq^{\tau-ess} M$ *ise* $K \leq^{\tau-closed} M$ *dir.*

İspat. Özen [30, Lemma 2.3]. □

Tanım 4.7.4 M bir R-modül olsun. Eğer M nin her τ-closed alt modülü M de bir direkt toplanan ise M ye τ-$C1$ *modül* denir.

Lemma 4.7.5 M *bir* τ-*torsion free* R-*modül ise* M *bir* τ-$C1$ *modüldür.*

İspat. Özen [30, Lemma 2.4]. □

Lemma 4.7.6 *M, τ-$C1$ R-modül ise M nin her τ-torsion direkt toplananı da τ-$C1$ modüldür.*

İspat. Özen [30, Lemma 2.5]. □

Lemma 4.7.7 *M, τ-$C1$ R-modül ve $\tau(M)$ $\nleq^{\tau-ess}$ M ise M nin her direkt toplananı da τ-$C1$ modüldür.*

İspat. Özen [30, Lemma 2.6]. □

Sınıflandırmada karışıklığa sebep vermemek için τ-essential ve τ-closed alt modüller yerine sırasıyla T. Özen anlamında τ_T-essential ve τ_T-closed terminolojisini kullanacağız.
Yukarıdaki tanımlamalar ile M bir R-modül ve de N ve K, M nin alt modülleri olmak üzere aşağıdaki akış şemaları kolayca gözlenebilir.
(1) N, M de τ-essential $\Rightarrow$ N, M de essential $\Rightarrow$ N, M de τ_T-essential.
(2) K, M de τ_T-closed $\Rightarrow$ K, M de closed $\Rightarrow$ K, M de τ-closed.
(3) M, τ-extending $\Rightarrow$ M, extending $\Rightarrow$ M, τ-$C1$ modül.

4.8 τ_L-Extending Modüller

Çeken ve Alkan'ın [7] makalesinden elde edilen sonuçların yer aldığı bu bölümde kavramlar daha önce incelediğimiz tanımlardaki gibi adlandırılsalar da önceki bölümlerde yapılan tanımlardan farklıdır. Bu bölümde de torsion teori $\tau = (\mathcal{T},\ \mathcal{F})$, Mod-R üzerinde bir hereditary torsion teori olarak görülmektedir.

Tanım 4.8.1 M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer M nin bir W alt modülü için $N \cap W \leq \tau(M)$ olması $W \leq \tau(M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin *τ-large alt modülü* denir ve $N \trianglelefteq_\tau M$ ile gösterilir. τ-large alt modüller large (essential) alt modüllerden farklıdır. Ancak açıktır ki eğer M bir τ-torsion free modül ise τ-large alt modül kavramı ile large alt modül kavramı çakışmaktadır. Ayrıca M, τ-torsion modül ise M nin her alt modülü M de τ-large alt modüldür. Eğer N, M de τ-pure ve τ-large bir alt modül ise N, M de large alt modüldür.

Tanım 4.8.2 M bir R-modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Eğer M nin $K \trianglelefteq_\tau L$ olacak şekilde her L alt modülü için $K = L$ oluyorsa K ya M de τ-*closed* alt modül denir. N, M nin bir alt modülü olmak üzere eğer K, M nin $N \trianglelefteq_\tau K$ olacak şekilde bir τ-closed alt modülü ise K ye N nin M de bir τ-*closure* denir. Açıkça eğer M, τ-torsion modül ise M alt modüllerinin τ-closure olur. Bununla birlikte M nin bir τ-pure ve closed alt modülü M de τ-closed alt modüldür.

Karışıklığı önlemek adına bundan sonra bu bölümde ifade edilen τ-closed, τ-closure ve τ-extending kavramları yerine ”large” ile bağlantılı manasında sırasıyla τ_L-closed, τ_L-closure ve τ_L-extending kullanılacaktır.

Lemma 4.8.3 *Bir M modülünün τ-torsion alt modülü M de τ_L-closed alt modüldür.*

İspat. Çeken ve Alkan [7, Lemma 2.3]. □

Lemma 4.8.4 *M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. N, M de τ_L-closed alt modül ise N, M de τ-pure alt modül olur.*

İspat. Çeken ve Alkan [7, Lemma 2.4]. □

Sonuç 4.8.5 *M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer N, M de τ_L-closed alt modül ise N, M de [8] manada τ-closed alt modül olur.*

İspat. Lemma 4.8.4 ve Önerme 4.1.4 ile açıktır. □

Lemma 4.8.6 *M bir R-modül olmak üzere M nin her alt modülünün M de bir τ_L-closure vardır.*

İspat. Çeken ve Alkan [7, Proposition 2.5]. □

Tanım 4.8.7 M bir R-modül olmak üzere M nin her τ_L-closed alt modülü M de bir direkt toplanan ise M ye τ_L-*extending* modül denir.

Sonuç 4.8.8 *M bir R-modül olsun. Eğer M, [8] manada τ-extending modül ise M, τ_L-extending modül olur.*

İspat. Sonuç 4.8.5 ile açıktır. □

Sonuç 4.8.9 *M bir τ-torsion free R-modül olsun. Eğer M, τ_L-extending modül ise M, Tip 2 τ-extending modül olur.*

İspat. [7, Example (6)] ve Lemma 4.4.2 ile açıktır. □

Lemma 4.8.10 *M bir R-modül olsun. O zaman:*

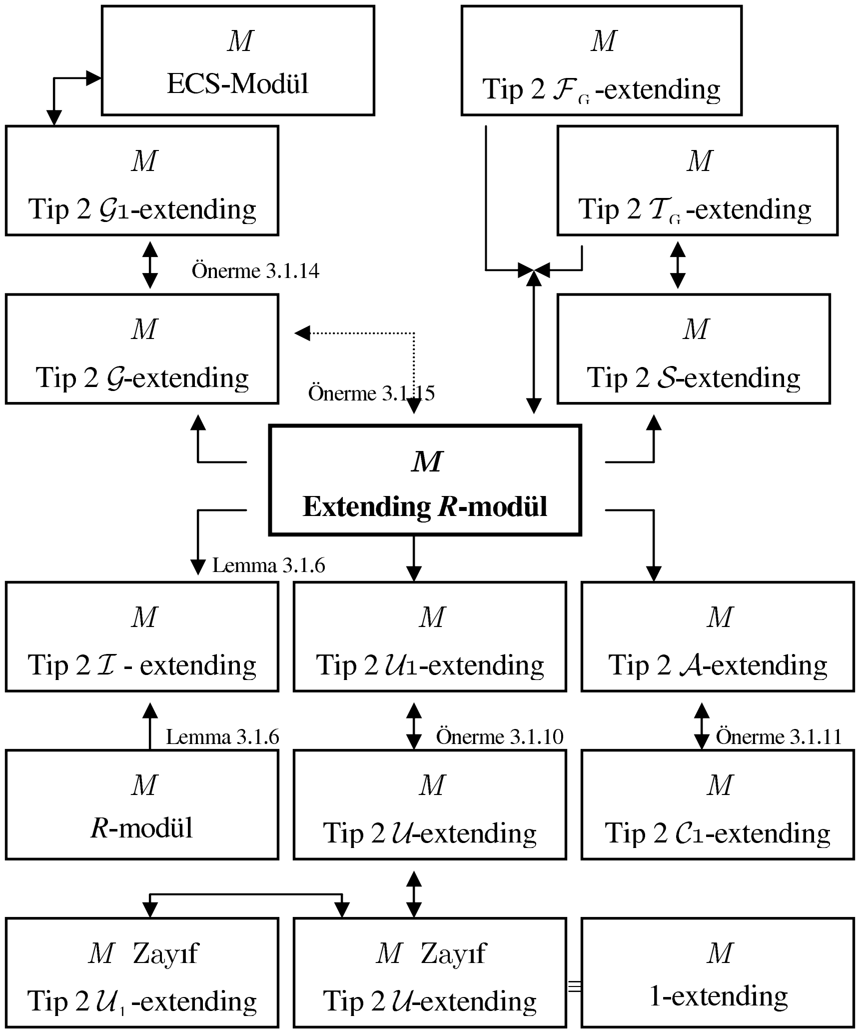
(1) M nin τ_L-extending modül olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün M nin bir direkt toplananında τ-large olmasıdır.

(2) Bir τ_L-extending modülün her direkt toplananı da τ_L-extending modüldür.

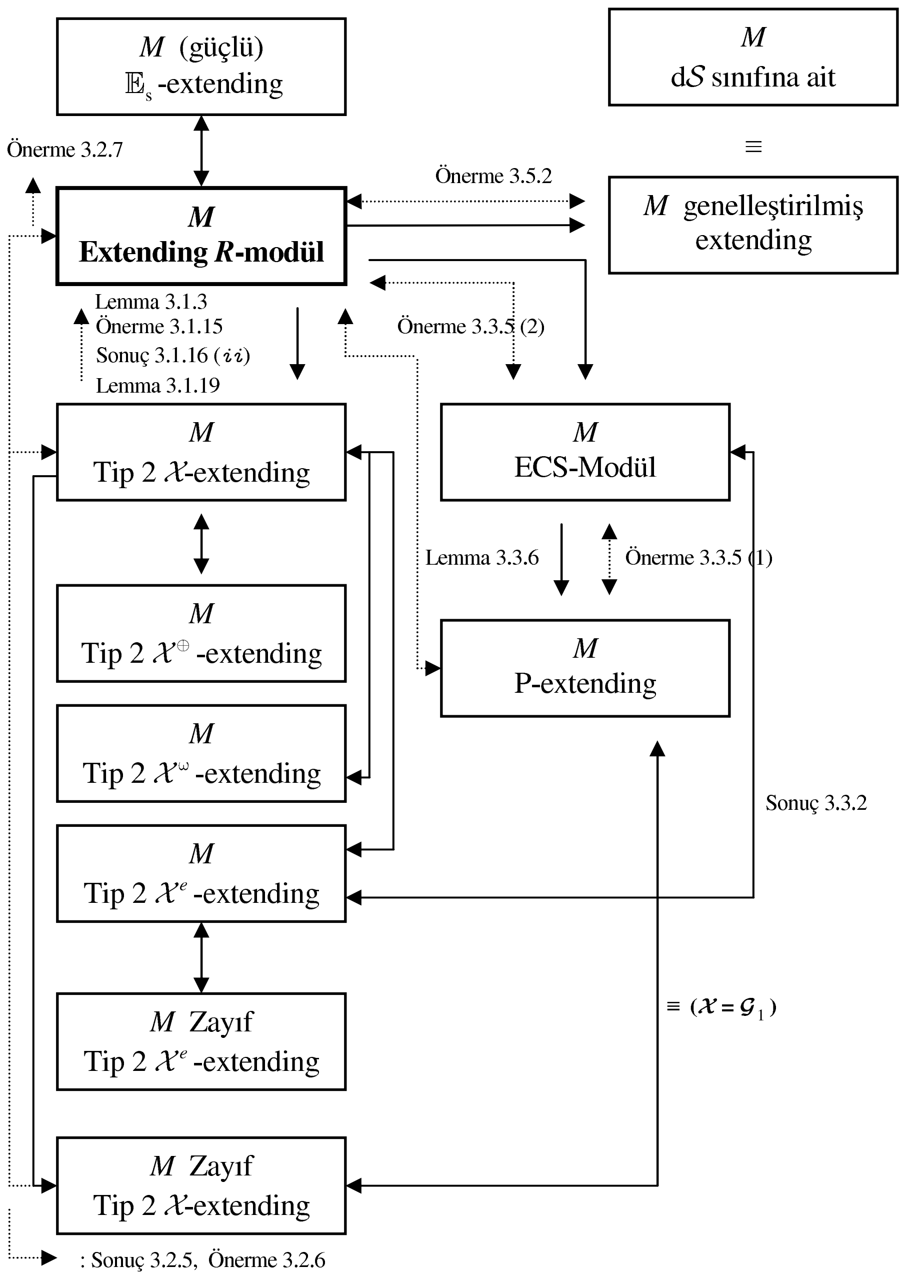
İspat. Çeken ve Alkan [7, Lemma 3.2]. □

5. TABLOLAR

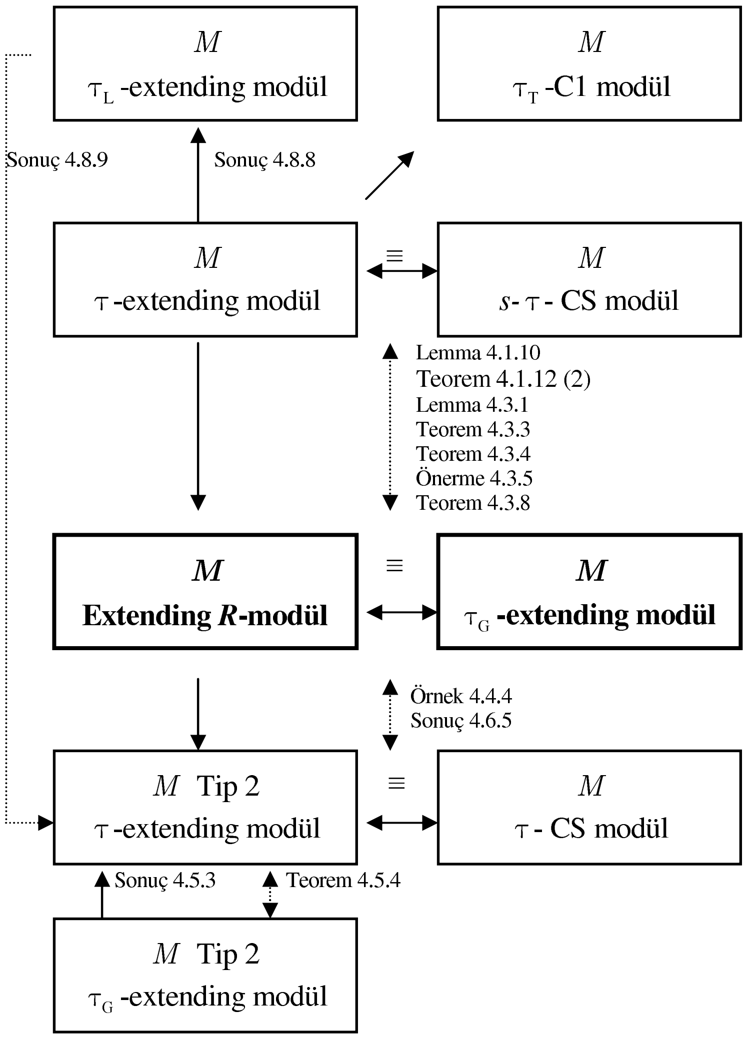
Bu bölümde farklı tanımlarla elde edilen extending modül ilişkileri şematik olarak verilmiştir.



Şekil 5.1: Özel modül sınıflarına göre extending modüller



Şekil 5.2: Genel modül sınıflarına göre extending modüller



Şekil 5.3: Torsion teoriye göre extending modüller

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F.W., Fuller, K.R. 1974. Rings and Categories of Modules. **Springer-Verlag, New York,** 372, New York.

[2] Bland, P.E., Smith, P.F. 2003. Injective and Projective Modules relative to a Torsion Theory. **New Zeland J. Math.,** 32(2): 105-115.

[3] Charalambides, S., Clark, J. 2007. CS Modules relative to a Torsion Theory. **Mediterr. J. Math.,** 4: 291-308.

[4] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R. 1977. Rings in Which Every Complement Right Ideal is a Direct Summand. **Quart. J. Math. Oxford,** 28(1): 61-80.

[5] Crivei, S. 2008. Σ-Extending Modules, Σ-Lifting Modules and Proper Classes. **Communications In Algebra,** 36: 529-545.

[6] Crivei, S. 2009. Relatively Extending Modules. **Springer Algebr Represent Theor,** 12: 319-332.

[7] Çeken, S., Alkan, M. 2010. On τ-Extending Modules. **Mediterr. J. Math.,** online.

[8] Doğruöz, S. 2006. Classes of Extending Modules associated with a Torsion Theory. **East-West J. Of Mathematics,** 8(2): 163-180.

[9] Doğruöz, S. 2008. Extending Modules relative to a Torsion Theory. **Czechoslovak Math. Journal,** 58(133): 381-393.

[10] Doğruöz, S., Smith, P.F. 1996. Quasi-continuous Modules relative to module Classes. **Vietnam Journel of Mathematics ,** 27(3): 241-251.

[11] Doğruöz, S., Smith, P.F. 1998. Modules which are Extending relative to Module Classes. **Communications In Algebra,** 26(6): 1699-1721.

[12] Doğruöz, S., Smith, P.F. 2000. Modules which Are weak Extending relative to Module Classes. **Acta Math. Hungar.,** 87(1-2): 1-10.

[13] Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F., Wisbauer, R. 1994. Extending Modules. **Longman, Harlow,** 224.

[14] Golan, J.S. 1986. Torsion Theories. **Pitman Monographs and Survays in Pure and Aplied Math., Longman Scientific and Technical,** 651.

[15] Goldie, A.W. 1958. The Structure of Prime Rings Under Ascending Chain Conditions. **Proc. London Math. Soc.,** 3-8(4): 589-608.

[16] Goldie, A.W. 1960. Semi-prime Rings With Maximum Condition. **Proc. London Math. Soc.,** 3-10(1): 201-220.

[17] Goodearl, K.R., Warfield, R.B. 1989. An İnroduction to Noncommutative Noetherian Rings. **London Math. Society Student Texts,** 326.

[18] Harada, M. 1982. On Modules with Lifting Properties. **Osaka J. Math.,** 19: 189-201.

[19] Harada, M. 1982. On Modules with Extending Properties. **Osaka J. Math.,** 19: 203-215.

[20] Harmancı, A., Smith, P.F. 1993. Finite Direct Sums of CS-Modules. **Houston Journal Of Mathematics,** 19(4): 523-532.

[21] Jeremy, L. 1971. Sur Les Modules et Anneaux Quasi-Continus. **C. R. Acad. Sci., Paris,** 273: 80-33.

[22] Jeremy, L. 1974. Modules et Anneaux Quasi-Continus. **Canad. Math. Bull.,** 17: 217-228.

[23] Kamal, M.A., Elmnophy, O.A. 2005. On P-Extending Modules. **Acta Math. Univ. Comenianae,** 74: 279-286.

[24] Kamal, M. A., Müller, B. J. 1988. Extending Modules over Commutative Domains. **Osaka J. Math.** 25: 531-538.

[25] Kamal, M.A., Müller, B.J. 1988. The Structure of Extending Modules over Noetherian Rings. **Osaka J. Math.,** 25: 539-551.

[26] Kamal, M. A., Müller, B. J. 1988. Torsion Free Extending Modules. **Osaka J. Math.** 25: 825-832.

[27] Mohamed, S., Bouhy, T. 1977. Continuous Modules. **Arabian J. Sci. Eng.,** 2: 107-122.

[28] Mohamed, S.H., Müller, B.J. 1990. Continuous And Discrete Modules. **London Math. Soc. Lecture Notes, Cambridge University Press,** 147.

[29] Okado, M. 1984. On the decomposition of Extending Modules. **Math. Japonica,** 29: 939-941.

[30] Özen, T. 2009. **C1** Modules with respect to Hereditary Torsion Theory. **Turk. J. Math.,** 33: 321-329.

[31] Stenström, B. 1975. Rings of Quotients. **Springer-Verlag, Berlin,** 309.

[32] Takeucchi, T. 1972. On Direct Modules. **Hokkaido Math. J.,** 1(2): 168-177.

[33] Utumi, Y. 1960. On Continuous Regular Rings and Semisimple Self-injective Rings. **Canad. J. Math.,** 12: 597-605.

[34] Utumi, Y. 1961. On Continuous Regular Rings. **Canad. Math. Bull.,** 4: 63-69.

[35] Utumi, Y. 1965. On Continuous Rings and Self-injective Rings. **Trans. Amer. Math. Soc.,** 118: 158-173.

[36] Utumi, Y. 1966. On The Continuity and Self İnjectivity of a Complete Regular Ring. **Canad. J. Math.,** 18: 404-412.

[37] von Neumann, J. 1932. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. **Springer, Berlin**.

[38] von Neumann, J. 1936. Continuous Geometry. **Proc. Nat. Acad. Sci.,** 22: 92-100.

[39] von Neumann, J. 1936. Examples of Continuous Geometries. **Proc. Nat. Acad. Sci.,** 22: 101-108.

[40] von Neumann, J. 1936. On Regular Rings. **Proc. Nat. Acad. Sci.,** 22: 707-713.

[41] von Neumann, J. 1960. Continuous Geometries. **Princeton Univ. Press**.

[42] Yücel, C.C., Tercan, A. 2009. Modules whose ec-closed Submodules are Direct Summand. **Taiwanese Journal Of Mathematics,** 13(4): 1247-1256.

[43] Zeng, Q.Y. 2007. On Generalized Extending Modules. **J. Zhejiang Univ. Sci. A,** 8(6): 939-945

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Ömer ÜRÜN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Ankara, 24.03.1978

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
- -SCI
- -Diğer

b) Bildiriler
- -Uluslararası
- -Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Milli Eğitim Bakanlığı, 1999-…
	:	

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	omerurun@ hotmail.com
Tarih	:	27.06.2011