1. GİRİŞ

İntegral denklemlerle ilk uğraşılar XIX. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve birtakım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir.

İntegral denklemler matematiksel fizik ve uygulamalı matematikteki birçok problemlerin dönüştüğü denklemlerdir.

1822 yılında Fourier, bazı özel integral dönüşümlerin inversiyon denklemlerini vermiştir.

Bir mekanik problemi incelediği 1823 yılında ABEL'in ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Karşılaştığı fiziksel problemin çözümünün

$$\Phi(x) = \int_a^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\,dy$$

şeklindeki birinci tip lineer Volterra integral denklemine indirgenip bu denklemin çözümü yine Abel tarafından 1826 yılında verilmiştir.

İntegral Denklem deneyimi Du Bois REYMOND'un CRELLE, Vol.103 (1888)' de yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır. İntegral denklemleri bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmaktadır.

İntegral sınırlarından birinin x değişkeni olmasıyla tanımlanan Lineer Volterra integral denklemlerine ait çalışmalar, ilk olarak 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada çeşitli tipten verilen integral denklemler, yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülmüştür. Problemin çözümünde varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. R de alınan homojen olmayan bir dalga denkleminin D'alambert formülüne indirgendiği, bu integral denklemin çözümünü yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözüleceği gösterilmiştir. R^2 ve R^3 de alınan homojen olmayan dalga denklemlerinin çözümlerinin Poisson ve Kirchhgoff integral denklemlerine indirgendiği, bu integral denklemlerin çözümlerinin de yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülebileceği gösterilmiştir.

Son olarak Fonksiyon katsayılı dalga denklemlerinin indirgendiği tekil Volterra integral denklemlerinin de aynı yöntemle çözülebileceği gösterilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Tanımlar

Tanım 2.1.1 Bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemlere integral denklemler denir.

Tanım 2.1.2 Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, verilmiş bir fonksiyon $\varphi(x)$, çekirdek fonksiyonu $K(x,y)$ olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

şeklindeki denklemlere I. cins integral denklem; bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ integralin hem içinde hem dışında olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

şeklindeki denklemlere II. cins integral denklem

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

şeklindeki denklemlere ise III. cins integral denklemler denir (Lovitt,1950).

Tanım 2.1.3 Bir f fonksiyonunun

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

eşitsizliğinin sağlanması halinde (yani integral değeri mevcut ve sonlu ise) f fonksiyonuna L_2 fonksiyonu denir (Kanwal,1971).

Tanım 2.1.4 Bilinmeyen fonksiyonun sadece birinci kuvvetini bulunduran bir integral denkleme de lineer integral denklem denir (Kanwal,1971).

Tanım 2.1.5 İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişkene sahip olan integral denkleme Volterra integral denklemi, sınırlarından her ikisi birden sabit olabileceği gibi biri veya her ikisi birden sonsuz olan denklemlere de Fredholm integral denklemleri denir.

2.1.5'de verilen tanıma göre Fredholm integral denklemine ait çekirdek $\{(x, y): a \leq x \leq b\,, a \leq y \leq b\}$ karesel bölgesi üzerinde, Volterra integral denklemine ait çekirdek $\{(x, y): a \leq y \leq x \leq b\ \}$ üçgensel bölgede tanımlanmıştır (Romanov,1974).

Tanım 2.1.6 $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy$

şeklinde verilen ve bilinmeyen fonksiyon u fonksiyonunun dışında f gibi bir fonksiyona sahip denkleme homojen olmayan integral denklem, $f = 0$ haline de homojen integral denklem denir (Kanwal,1971).

Tanım 2.1.7 $K(x, y)$ çekirdek fonksiyonu $\{a \leq x \leq b\,,\ a \leq y \leq b\}$ aralığında sürekli ise integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemidir. Eğer $K(x, y)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem tekil (singüler) integral denklem adı verilir (Lovitt,1950).

Örneğin,

$f(x) = \int_0^x \frac{u(y)dy}{(x-y)^{\propto}}$ (Tekil olmayan integral denklem)

$f(x) = \int_0^\infty sinxyu(y)dy$ (Tekil olan integral denklem)

2.2 Volterra İntegral Denklemleri

II. cins lineer integral denklemin çözümü, bilinen metodlar kullanılarak farklı şekilde elde edilmiştir. İlk önce C. Neumann, J. Liouville, (1837) ve Volterranın'nın ortaya koydukları metottur.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

integral denklemi ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun, λ nın bir integral serisi şeklinde ifade edilebileceğini göstermişlerdir. Bu seride λ nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları, x in fonksiyonlarıdır. Bu seri ise λ nın her değeri için yakınsaktır. Çözüm elde edilmesi için kullanılan yol ise ardışık yaklaştırma metodu'dur.

Volterra, önemli ve kullanışlı olan bu metodu, bir teorem halinde şu şekilde ifade etmiştir. Eğer $f(x)$ ve $K(x,y)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ise integral denklemi bu aralıkta her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaştırma metodu ile belirlenir.

Teorem 2.2.1 İkinci tip lineer Fredholm integral denklemi olarak bilinen

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy \tag{2.1}$$

denkleminde f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında, K fonksiyonu da $\{a \leq y \leq x \leq b\}$ üçgensel bölgede sürekli olsunlar. Bu takdirde

$$\Phi_0 = f(x),\ \Phi_n(x) \int_a^b K(x,y)\, \Phi_{n-1}(y)dy\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2}$$

olmak üzere (2.1) denkleminin düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) \quad (2.3)$$

serisi ile verilen bir tek u sürekli çözümü vardır (Davis,1930).

İspat: (2.1) integral denkleminde λ = 0 için;

$$u(x) = f(x)$$

olup bunu $u_0(x)$ ile gösterelim. (2.1) denkleminde elde edilecek fonksiyonu $u_1(x)$ ile gösterirsek

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) u_0(y) dy \quad (2.4)$$

olur. Buradaki integral x'in bir fonksiyonu olacağından, bunu

$$\Phi_1(x) = \int_a^b K(x,y) u_0(y) dy \quad (2.5)$$

ile gösterirsek (2.4)'ü

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \Phi_1(x) \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. İlk yaklaşımı

$$u_1(x) = f(x) = \Phi_0(x) \quad (2.7)$$

ile ifade edersek üçüncü yaklaşımı

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) u_1(y) dy \quad (2.8)$$

olacaktır. (2.6) da (2.7) gereğince $f(x)$ yerine $\Phi_0(x)$ yazılıp (2.8)'de yerine konursa

$$u_1(x) = \Phi_0(x) + \lambda \Phi_1(x)$$

olup,

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)[\Phi_0(y) + \lambda\Phi_1(y)]dy$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\Phi_0(y)dy + \lambda^2 \int_a^b K(x,y)\Phi_1(y)dy$$

Burada $f(x)$ yerine $\Phi_0(x)$ yazılır. O zaman buna uyularak

$$\Phi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\Phi_1(y)dy$$

$$u_2(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x)$$

yazılabilecektir. Bunu genelleştirirsek

$$u_n(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x) + \cdots + \lambda^n\Phi_n(x) \tag{2.9}$$

şeklinde bir seri oluşacaktır. Burada

$$\Phi_0(x) = f(x)\,,\ \ \Phi_n(x) \int_a^b K(x,y)\, \Phi_{n-1}(y)dy\,, \quad \text{n=1, 2, 3,…}$$

buradan (2.1) denklemine gidilerek,

$$u(x) = \Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x) + \cdots + \lambda^n\Phi_n(x) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\Phi_n(x) \tag{2.10}$$

serisi elde edilir. Buna göre,

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

dir. λ nın mutlak değeri yeteri kadar küçük olursa bu seri düzgün yakınsak olur. Çünkü $f(x)$‘ in tanım aralığındaki sınırı F, $K(x,y)$’nin tanım bölgesindeki sınırında K_0 ile gösterecek olursak

$$|\Phi_0(x)| = |f(x)| \leq F$$

$$|\Phi_1(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)\,\Phi_0(y)dy\right|$$

$$\leq \int_a^b |K(x,y)||\Phi_0(y)dy|$$

$$\leq FK_0(b-a)$$

$$|\Phi_2(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)\,\Phi_1(y)dy\right|$$

$$\leq \int_a^b |K(x,y)||\Phi_1(y)dy|$$

$$\leq \int_a^b K_0 F\, K_0(y-a)dy = FK_0{}^2\frac{(b-a)^2}{2!}$$

$$|\Phi_3(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)\,\Phi_2(y)dy\right|$$

$$\leq \int_a^b |K(x,y)||\Phi_2(y)dy|$$

$$\leq \int_a^b K_0 F\, K_0{}^2\frac{(b-a)^2}{2!}dy = FK_0{}^3\frac{(b-a)^3}{3!}$$

………………………………………………………

$$|\Phi_n(x)| \leq FK_0{}^n\frac{(b-a)^n}{n!}$$

$$|\lambda^n\Phi_n(x)| \leq F\frac{(K_0|\lambda|(b-a))^n}{n!}$$

bulunur. Genel terimi $\frac{(K_0|\lambda|(b-a))^n}{n!}$ olan seri (bölüm kriteri) yakınsak olduğundan Weierstrass kriterinden $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x)$ serisi $[a,b]$ aralığında ve λ değeri için düzgün ve mutlak yakınsaktır. Terimlerin her biri sürekli olan bu serinin düzgün yakınsadığı fonksiyonu u ile gösterirsek u süreklidir.

$u(x)$ fonksiyonu (2.1) ile verilen denklemin bir çözümüdür.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x)]dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x,y)\Phi_n(y)dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \Phi_{n+1}(x) = \Phi_0(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) = f(x)$$

olur ki bu (2.10) serisi yardımıyla verilen $u(x)$ denklemini sağladığını gösterir.

(2.1) nolu denklemin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ gibi birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

olmak üzere,

$$v(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)v(y)dy$$

homojen integral denklemini verir. Schwartz eşitsizliği yardımıyla

$|v(x)|^2 \leq \; |\lambda^2| \int_a^b |K(x,y)|^2 dy \int_a^b |v(y)|^2 \, dy$

x'e göre integre edilirse

$\int_a^b |v(x)|^2 \, dx \; < |\lambda^2| {K_0}^2 (b-a)^2 \int_a^b |v(y)|^2 \, dy$

elde edilir.

$[1 - |\lambda^2| \, {K_0}^2 (b-a)^2] \; \int_a^b |v(x)|^2 \, dx < 0$

olur. $[1 - |\lambda^2| \, {K_0}^2 (b-a)^2] > 0$ olduğundan $\int_a^b |v(x)|^2 \, dx < 0$ olmalıdır. Ancak bu ifade negatif olmayacağına göre $\int_a^b |v(x)|^2 \, dx = 0$ olur ki $v(x) = 0$ olur ve $u_1(x) = u_2(x)$ sonucu görülür. O halde (2.1) denkleminin çözümü tektir.

2.3 Ardışık Yaklaştırma Yöntemiyle İntegral Denklemlerin Çözümü

Başlangıç ve sınır değer koşullarına sahip hiperbolik denklemler Volterra tipi integral denklemlere indirgenebilir. Bu denklemleri ardışık yaklaştırma yöntemiyle çözebiliriz. İkinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t,\tau) u(\tau) d\tau \qquad (2.11)$$

denkleminde

$$f(t) \in C[0,T], \;\; K(t,\tau) \in \; C(0 \leq \tau \leq t \leq T) \qquad (2.12)$$

olsunlar. $f(t)$, $K(t,\tau)$ fonksiyonları $[0,T]$ aralığında sürekli ise, integral denklemlerin bu aralıkta her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaştırma yöntemiyle belirlenir. Bu takdirde

$$u_0(t) = f(t), \;\; u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau) u_{n-1}(\tau) d\tau, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

olmak üzere (2.11) denkleminin düzgün (ve mutlak) yakınsak

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(t) \tag{2.13}$$

serisi ile verilen bir tek sürekli çözümü vardır. Volterra, önemli ve kullanışlı olan bu metodu şu şekilde ifade etmiştir.

Teorem 2.3.1 (Varlık Teoremi)

$f(t) \in C[0,T]$, $K(t,\tau) \in C(0 \le \tau \le t \le T)$ koşulları altında $u(t) \in C[0,T]$ fonksiyonu (2.11) nolu denklemin çözümüdür (Romanov V.G,1974).

İspat:

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara gereksinim vardır.

Lemma 2.3.1 Kabul edelimki, $K_0 = max|K(t,\tau)|$, $F_0 = max|f(x)|$

$0 \le \tau \le t \le T$ olsun. O zaman

$$|u_n(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^n}{n!}$$

olur.

İspat: Tümevarım yöntemiyle $n = 0$ için $|u_0(t)| \le F_0$ 'dir. $n = k$ için

$|u_k(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^k}{k!}$ doğruluğunu kabul edip $n = k + 1$, için $|u_{k+1}(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^{k+1}}{(k+1)!}$ olduğunu göstermeliyiz

$$|u_{k+1}(t)| = \left|\int_0^t K(t,\tau) u_k(\tau) d\tau\right|$$

$$\le \int_0^t |K(t,\tau)||u_k(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq\ K_0\int_0^t |u_k(\tau)|d\tau$$

$$\leq K_0\int_0^t \frac{F_0(K_0\tau)^k}{K!}d\tau$$

$$=\frac{F_0{K_0}^{k+1}}{K!}\int_0^t \tau^k\,\mathrm{d}\tau\ =\ \frac{F_0{K_0}^{k+1}t^{k+1}}{K!(K+1)}=\frac{F_0(K_0t)^{k+1}}{(K+1)!}$$

Lemma 2.3.2

(2.12) koşulları altında $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında yakınsaktır.

İspat:

1.Weierstrass teoreminden

$$|u_k(t)|\leq\ \frac{F_0(K_0t)^k}{k!}\ \leq\frac{F_0(K_0T)^k}{k!}\qquad \forall t\in[0,T]$$

yakınsaklığı görülür.

Lemma 2.3.3

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

Birinci Weierstrass teoremi gereği $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında yakınsaktır $u_k(t)$ $[0,T]$ aralığında süreklidir. O zaman $u(t)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ toplam fonksiyonunda $[0,T]$ aralığında süreklidir. İkinci Weierstrass teoremi gereği,

$$lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{k=0}^{N} u_k(\mathrm{t})\mathrm{dt}\quad =\int_{\alpha}^{\beta}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N} u_k\mathrm{dt}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} u\,(t)dt, \qquad \forall[\alpha,\beta] \in [0,T]$$

Lemma 2.3.4

$u(t)$ fonksiyonu (2.1.1) denklemini bir çözümüdür.

İspat:

$$u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau) \;\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\tau)d\tau$$

$$u_0(t) = f(t)$$

eşitliğini her iki tarafına ekleyelim

$$u_0(t) + \sum_{n=1}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau) \;\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau + f(t)$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau) \;\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \; + f(t)$$

$n \to \infty$ limiti alınırsa

$$u(t) = lim_{n\to\infty} \int_0^t K(t,\tau) \;\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \; + \; f(t)$$

İkinci weierstrass teoremi gereği,

$$u(t) = \int_0^t K(t,\tau) \;\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \; + \; f(t)$$

$$u(t) = \int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau + f(t)$$

olur.

Teorem 2.3.2 (Teklik)

(2.11) denklemin çözümü tektir.

İspat: (2.11) denkleminin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u^1(t)$, $u^2(t)$ gibi

$$u^1(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau)u^1(\tau)d\tau$$

$$u^2(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau)u^2(\tau)d\tau$$

birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$u^1(t) - u^2(t) = \int_0^t K(t,\tau)[u^1(\tau) - u^2(\tau)]d\tau$$

olur.

$$u^1(t) - u^2(t) = \varphi(t)$$

olmak üzere,

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

homojen integral denklemini verir. $u^1(t) = |\varphi(\tau)|$ olmak üzere

$$|\varphi(t)| \leq K_0 \int_0^t |\varphi(\tau)|d\tau$$

$$\int_0^t |\varphi(\tau)|d\tau = u(t)$$

$$u^1(t) \leq K_0 u(t)$$

$$u^1(t) - K_0 u(t) \leq 0$$

her iki tarafı $e^{-K_o t}$ ile çarparsak

$$e^{-K_o t}\, u^1(t) - K_0\, e^{-K_o t} u(t) \ \leq \ 0,$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-K_o t}\, u(t)] \ \leq \ 0,$$

$t = 0$ dan $t = t$ integralini alırsak

$$e^{-K_o t}\, u(t) - u(0) \ \leq 0,$$

$$e^{-K_o t}\, u(t) \ \leq 0,$$

$u(t) \leq 0$ ve $u(t) \geq 0$, ise $u(t) \equiv 0$. $\forall t \in [0, T]$ için $|\varphi(t)| \equiv 0$ olur.

$\varphi(t) = u^1(t) - u^2(t) = 0$ ise $u^1(t) = u^2(t)$ olur.

Sonuç: (2.13) ile belirtilen seri her λ değeri için düzgün yakınsak olduğundan ikinci tip Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı λ‘ dan bağımsızdır.

3. SABİT KATSAYILI DALGA DENKLEMLERİN İNDİRGENDİĞİ İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1 D'alembert İntegral Denklemi

$u_{tt} = u_{xx} + q(x)u(x,t) + f(x,t) \quad x \in R,\ t > 0$

$$u(x,0) = g(x)\ ,\ \ u_t(x,0) = h(x)$$

Bu koşullar altında denklemin çözümü

$$u(x,t) = F(x,t) + \tfrac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\mathrm{u}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \qquad (3.1)$$

Burada,

$$F(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Kabul edelim ki,

$$q(x) \in C(R),\ g(x) \in C^2(R),\ h(x) \in C^2(R),\ f(x,t) \in C^1(R \times [0,T]), \qquad (3.2)$$

olsun. İntegral denkleminin bir çözümünün olduğuna ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemiyle bilinebilir. Bu takdirde,

$$u_0(x,t) = F(x,t)$$

$$u_n(x,t) = \tfrac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\, u_{n-1}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

olmak üzere (3.1) denkleminin düzgün (ve mutlak) yakınsak

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

serisi ile verilen bir tek $u(x,t)$ sürekli çözümü vardır. Volterra, önemli ve kullanışlı olan bu metodu şu şekilde ifade etmiştir

Teorem 3.1.1 (Varlık Teoremi)

$F(x,t) \in C(\Delta(t)), q(x) \in [-T,T], \; F_0 = max|F(x,t)|,$

koşulları altında $u(x,t) \in C(\Delta(t))$ fonksiyonu (3.1) integral denkleminin bir çözümüdür.

$\Delta(T) = \{(x,t): 0 \le t \le T \le T - |x|\}$

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara gereksinim vardır

Lemma 3.1.1 Kabul edelim ki, $q_0 = max|q(x)|\; x \in [-T,T]$, $F_0 = max|F(x,t)|$ $(x,t) \in \Delta(T)$ olsun. O zaman

$$|u_n(x,t)| \le F_0 (\tfrac{1}{2} q_0 T \mathrm{t})^{\mathrm{n}} \frac{1}{n!}$$

olur.

İspat:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\mathrm{u}_0(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$|u_1(x,t)| \le \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |q(\xi)|\,|u_0(\xi,\tau)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$|u_1(x,t)| \le \frac{1}{2} q_0 F_0 \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\xi d\tau$$

$$= \frac{1}{2} q_0 F_0 \int_0^t [x + (t-\tau) - x + (t-\tau)] d\tau$$

$$= \frac{1}{2} q_0 F_0 \int_0^t (2t - 2\tau)$$

$$\leq \frac{1}{2} q_0 F_0 T \int_0^t d\tau$$

$$= \frac{1}{2} q_0 F_0 T \frac{t}{1!}$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) \mathrm{u}_1(\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau$$

$$|u_2(x,t)| \leq \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{1}{2} q_0 F_0 T\right) T \int_0^t \tau d\tau$$

$$= \frac{1}{2^2} q^2 F_0 T^2 \ \frac{t^2}{2!}$$

$$= F_0 \ (\frac{1}{2} q_0 T \mathrm{t})^2 \frac{1}{2!}$$

$$|u_n(x,t)| \ \leq \frac{1}{2^n} q^n F_0 T^n \frac{t^n}{n!}$$

Lemma 3.1.2

(3.2) koşulları altında $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)$ serisi $\Delta(T)$ aralığında yakınsaktır.

İspat:

$$|u_n(x,t)| \leq F_0 (\frac{1}{2} q_0 T \mathrm{t})^{\mathrm{n}} \frac{1}{n!}$$

$$\leq F_0 (\frac{1}{2} q_0 T T)^n \ \frac{1}{n!}$$

yakınsaktır. Birinci weierstrass teoremi gereğince

$u_n(x,t) \leq \ a_n \quad \forall n = 0, 1, 2, 3$

$\sum_0^{\infty} a_n$ yakınsak olduğundan $\sum_0^{\infty} u_n \ (x,t)$ yakınsaktır.

$a_n = \mathrm{F}_0(\frac{1}{2} q_0 TT)^{\mathrm{n}} \frac{1}{n!}$ ise

$\sum_0^\infty a_n = \mathrm{F}_0(\frac{1}{2} q_0 T^2)^{\mathrm{n}} \frac{1}{n!}$

Lemma 3.1.3

$u(x,t) = \sum_{k=0}^\infty u_k(t)$ serisi $C(\Delta(t))$ da süreklidir.

İspat:

$$\sum_{n=1}^N u_n(x,t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$u_0(x,t) = F(x,t)$ eklenirse

$$u_0(x,t) + \sum_{n=1}^N u_n(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x,t)$$

$$= F(x,t) + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

İkinci weierstrass teoremine göre

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi) \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi) u(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

Lemma 3.1.4

$u(x,t)$ fonksiyonu (3.1) integral denkleminin bir çözümüdür.

İspat:

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\, u_{n-1}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n\,(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) \sum_{n=1}^{N} u_{n-1}\,(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

Her iki tarafa $u_0(x,t) = F(x,t)$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n\,(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) \sum_{n=1}^{N} u_{n-1}\,(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + F(x,t)$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n\,(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n\,(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + F(x,t)$$

$n \to \infty$ limiti alınırsa

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n\,(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + F(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n\,(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + F(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\, u(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + F(x,t)$$

Teorem 3.1.2 (Teklik)

(3.1) denklemin çözümü tektir.

İspat: (3.1) denkleminin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u^1(x,t)$, $u^2(x,t)$ gibi

$$u^1(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\, u^1(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$u^2(x,t) = F(x,t) \; + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\; u^2(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$

birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim

$\varphi(x,t) = u^1(x,t) - \; u^2(x,t)$

olmak üzere

$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)\varphi(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$

homojen integral denklemini verir.

$|\varphi(x,t)| \leq \; \frac{1}{2} q_0 \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |\varphi(\xi,\tau)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\,\tau$

olur. $u(t) = max|\varphi(x,t)|$ olmak üzere

$|\varphi(x,t)| \leq \;\; q_0 \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} u(\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\,\tau$

$= q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad \forall(x,t) \in \Delta(t)$

$u(t) = max|\varphi(x,t)| \leq q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau$

$u(t) \leq \; q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau$

$\leq q_0 \mathrm{t}\int_0^t |u(\tau)|\, d\tau$

olur. $u(t) = \int_0^t |u(\tau)|\, d\tau$ olmak üzere,

$u^1(t) - q_0 t u(t) \; \leq \; 0$

elde edilir. Her iki tarafı $e^{-\frac{q_o t^2}{2}}$ ile çarpılırsa

$$e^{-\frac{q_o t^2}{2}} u^1(t) - e^{-\frac{q_o t^2}{2}} q_0 t u(t) \le 0$$

$$\int_{t=0}^{t} \frac{d}{dt}[e^{-\frac{q_o t^2}{2}} u(t)] \le 0$$

$$e^{-\frac{q_o t^2}{2}} u(t) - u(0) \le 0$$

$$e^{-\frac{q_o t^2}{2}} u(t) \le 0$$

olur. $e^{-\frac{q_o t^2}{2}} > 0$ olduğundan $\forall t \in [0,T]$ için $u(t) \le 0$. Tanımdanda $\forall t \in [0,T]$ için $u(t) \ge 0$ dır. O zaman $\forall t \in [0,T]$ için $|u(t)| = 0$. $u(t) = max|\varphi(x,t)|$ olduğundan $\varphi(x,t) = 0$ ve

$$u^1(x,t) = u^2(x,t)$$

olur.

3.2 Poisson İntegral Denklemi

$$u_{tt} = u_{xx} + q(x)u(x,t) + f(x,t) \qquad x \in R^2,\ t > 0$$

$$u(x,0) = g(x)\ ,\ \ u_t(x,0) = h(x)$$

Bu koşullar altında denklemin çözümü;

$$u(x,y,t) = G(x,y,t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \iint_{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\ \le t-\tau} \frac{q(\xi,\eta)u(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}} \qquad (3.3)$$

Lemma 3.2.1 Kabul edelim ki, $\|G\| = max\|G(x,t)\|$, $Q = max_{|x|\le T} |q(x)|$

olsun. O zaman

$$u_n(x,y,t) \leq \frac{Q^n t^{2n}}{(2n)!} \|G\| \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

olur.

İspat:

$$\|u_0\| = \|G\|$$

$$\|u_1\| = \|G\| \frac{t^2}{2!} \|Q\|$$

$$\|u_n\| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{t-\tau} q(x + rcos\varphi, y + rsin\varphi) \frac{u_{n-1}(x+rcos\varphi, y+rsin\varphi, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} rdrd\varphi d\tau \right|$$

$$\leq \|Q\| \int_0^t \|G\| \|Q\|^{n-1} \frac{\tau^{2n-2}}{(2n-2)!} (t-\tau) d\tau$$

$$= \|G\| \|Q\|^n \frac{1}{(2n-2)!} \int_0^t [\tau^{2n-2}\, t - \tau^{2n-1}] d\tau$$

$$= \|G\| \|Q\|^n \frac{1}{(2n-2)!} \int_0^t [\frac{\tau^{2n-1}}{2n-1}\, t \,|_0^t - \frac{\tau^{2n}}{2n} |_0^t]$$

$$= \|G\| \|Q\|^n \frac{1}{(2n-2)!} [\frac{t^{2n}}{2n-1} - \frac{t^{2n}}{2n}]$$

$$= \|G\| \|Q\|^n \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)!} [t^{2n}]$$

$$= \|G\| \|Q\|^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$|u_n(x,y,t)| \leq \|G\| \|Q\|^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Lemma 3.2.2

$\sum_0^\infty u_n(x,y,t)$ yakınsaktır

İspat:

$\sum_0^\infty u_n(x,y,t) \le \|G\|\|Q\|^n \ \frac{T^{2n}}{(2n)!}$

$(x,y,t) \le a_n, \quad \forall n = 0,1,2,3,...$

Birinci weierstrass teoremi gereği $\sum_0^\infty a_n$ yakınsak olduğundan $\sum_0^\infty u_n(x,y,t)$ ifadesi yakınsak olur.

Lemma 3.2.3

$$u_n(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \iint_{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \le t-\tau} \frac{q(\xi,\eta)u(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}}$$

sürekli olduğu görülüyor.

Lemma 3.2.4

$u(x,y,t)$ integral denkleminin bir çözümüdür.

İspat:

$$u_n(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \iint_{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \le t-\tau} \frac{q(\xi,\eta)u(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}}$$

$$\sum_{n=1}^N u_n(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{t-\tau} \frac{q(\xi,\eta)\sum_{n=1}^N u_{n-1}\ (\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}}$$

Her iki tarafa $u_0(x,y,t) = G(x,y,t)$ eklersek,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{t-\tau}\frac{q(\xi,\eta)\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}\quad(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}} + G(x,y,t)$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{t-\tau}\frac{q(\xi,\eta)\sum_{n=0}^{N-1} u_n\quad(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}} +G(x,y,t)$$

$n \to \infty$ limiti alınırsa

$$u(x,y,t) = \quad lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{t-\tau}\frac{q(\xi,\eta)\sum_{n=0}^{N-1} u_n\quad(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}} \ + \ G(x,y,t)$$

$$u(x,y,t) = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{t-\tau}\frac{q(\xi,\eta)\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} u_n\quad(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}} \ + \ G(x,y,t)$$

$$\boxed{u(x,y,t) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{t-\tau}\frac{q(\xi,\eta)u(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}} \ + \ G(x,y,t)}$$

Teorem 3.2.1 (Teklik)

(3.2) denklemin çözümü tektir.

3.3 Kirchgoff İntegral Denklemi

$$u_{tt} = \Delta u + q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in R^3, \qquad t > 0$$

$$u|_{\,t=0} = g(x), \ u_t|_{\,t=0} = h(x)$$

Bu koşullar altında denklemin çözümü

$u(x,y,z,t)$= $G(x,y,z,t)$+

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\le t^2}\frac{q(\xi,\eta,\zeta).u\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi d\eta d\zeta \quad (3.4)$$

olur. Burada kabul edelim ki,

$$q(x)\in C(R^3),\, g(x)\in C^2(R^3),\ h(x)\in C^1(R^3),\, f(x,t)\in C^1(R^3\times[0,T]), \quad (3.5)$$

olsun. İntegral denkleminin bir çözümünün olduğu ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemiyle belirlenebilir. Bu takdirde,

$$u_0 = G(x,t)$$

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\le t^2}\frac{q(\xi,\eta,\zeta).u_{n-1}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi d\eta d\zeta$$

olmak üzere (3.4) denkleminin düzgün ve mutlak yakınsak

$u(x,t)$ = $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ ile verilen bir tek sürekli çözümü vardır.

Teorem 3.3.1

(3.5) koşullar altında $u(x,t)\in C(\Delta(T))$ fonksiyonu (2.6)'nın bir çözümüdür.

İspat: (3.4) denklemi

$$\xi = x + r cos\varphi sin\theta \qquad \xi = x + r v_1$$

$$\eta = y + r sin\varphi sin\theta \qquad \eta = y + r v_2$$

$$\zeta = z + r cos\varphi \qquad \zeta = z + r v_3$$

dönüşümü altında

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

olmak üzere,

$u(x, y, z, t) = G +$

$$\int_0^t \left(\frac{1}{4\Pi}\int_0^{2\Pi}\int_0^{\Pi} q(x + rv_1, y + rv_2, z + rv_3)\mathrm{u}(x + rv_1, y + rv_2, z + rv_3, t - r) r sin\theta d\theta d\varphi dr\right.$$

yazılabilir. Bu teoremi ispatlayabilmemiz için aşağıdaki yardımcı lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 3.3.1 Kabul edelim ki $\|G\| = max_{(x,t)\in\Delta(T)}\|G(x,t)\|$, $Q = max_{|x|\le T}|x|$ olsun. O zaman

$$u_n(x, y, t) \le \frac{Q^n t^{2n}}{(2n)!}\|G\|$$

olur.

İspat:

$$\frac{1}{4\Pi}\int_0^t \left(\int_0^{2\Pi} d\varphi \int_0^{\Pi} sin\Theta d\Theta\right) r dr = \frac{1}{4\Pi} 2\pi(-\cos\Theta)|_0^{\Pi} \int_0^t r dr$$

$$= \frac{4\pi}{4\pi} \cdot \frac{r^2}{2}|_0^t$$

$$= \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{1}{4\Pi}\left(\int_0^{2\Pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\Pi} sin\Theta d\Theta\right)\int_0^t (t-r)^{2n} r dr = \int_0^t \frac{\tau^{2n}}{2n!}(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{\tau^{2n}.t}{2n!}\,d\tau - \int_0^t \frac{\tau^{2n+1}}{2n!}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2n!}\left[\frac{\tau^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^t t - \frac{\tau^{2n+1}}{2n+1}\ |_0^t\right]$$

$$= \frac{1}{2n!}\left[\frac{\tau^{2n+1}}{2n+1} - \frac{\tau^{2n+1}}{2n+2}\right]$$

$$= \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

tümevarımla çözüleceği aşikardır.

Lemma 3.3.2

(3.5) koşulları altında $\sum_{n=0}^{\infty} u(x, y, z, t)$ serisi yakınsaktır.

İspat:

$$u(x, y, z, t) \leq \|G\|\|Q\|^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\leq \|G\|\|Q\|^n \frac{T^{2n}}{(2n)!}$$

$$u_n(x, y, z, t) \leq a_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \|G\| \sum_{n=0}^{\infty} \|Q\|^n \frac{T^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \|G\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\|Q\|.T^2)^n}{(2n)!} \to 0$$

$\sum_0^{\infty} a_n$ yakınsak olduğundan $\sum_0^{\infty} u_n(x, y, z, t)$ ifadesi yakınsak olur.

Lemma 3.3.3

$u(x, y, z, t)$ serisi C(Δ(t)) ‘da sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

$\forall(x, y, z, t) \in D(T)$

$u_n(x, y, z, t) \; = \sum_{n=0}^{N} u_n(x, y, z, t)$

$$u_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint \frac{q(\xi,\eta,\zeta).u_{n-1}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi d\eta d\zeta$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint \frac{q(\xi,\eta,\zeta).\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = G + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint \frac{q(\xi,\eta,\zeta).\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$= G + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint \frac{q(\xi,\eta,\zeta).\sum_{n=0}^{N-1} u_{n-1}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$

$$= G + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint \frac{q(\xi,\eta,\zeta).\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_{n-1}\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$u_n = G + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint \frac{q(\xi,\eta,\zeta).u\left(\xi,\eta,\zeta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

Teorem 3.3.2 (Teklik)

(3.4) denklemin çözümü tektir

İspat:

u_1 , u_2 iki farklı çözüm olsun

$\tilde{u} = u_1 - u_2$, $\overline{x} = (x, y, z)$, $\overline{v} = (v_1,\ v_2, v_3)$

$\tilde{u}_{tt} = \Delta\overline{u} + q(\overline{x})\tilde{u}(x,t)$ $\quad \tilde{u}|_{t=0} = 0$, $\tilde{u}_t|_{t=0} = 0$,

Kirchgoff förmülüne göre,

$$\tilde{u}(\overline{x}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} q(\overline{x} + r\overline{v})\,\tilde{u}(\overline{x} + r\overline{v}, t - r)\, r sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$t - r = \tau,\ max|q(x)| = Q$, $|x| \leq T$ olmak üzere

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} q(\overline{x} + (t-\tau)\overline{v})\,\tilde{u}(\overline{x} + (t-\tau)\overline{v}, \tau)(t - r)\, r sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$\mho(\tau) = max|\tilde{u}(\overline{x}, t)|$, $|\overline{x}| \leq T - \tau$, $\forall\, |\overline{x}| \leq T - \tau$ olmak üzere

$$|\tilde{u}(\overline{x}, t)| \leq \frac{Q}{4\Pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mho(\tau)\,(t-\tau)\, r sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$= \frac{Q}{4\Pi}\int_0^t\mho(\tau)(t-\tau)\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin\Theta d\Theta d\varphi\}\mathrm{dr}$$

$$= Q\int_0^t\mho(\tau)(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\mho(\mathrm{t}) \leq Q\int_0^t\mho(\tau)(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$|\mho(t)| \leq Q\int_0^t|\mho(\tau)|(t-\tau)\mathrm{d}\tau \leq \mathrm{t}\, Qt\int_0^t|\mho(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

$$V(t) = \int_0^t|\mho(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

olur. $V'(t)$ = $|\mho(\tau)|$ olduğundan

$$V'(t) \leq QtV(t)$$

$$V'(t) - QtV(t) \leq 0$$

her tarafı $e^{-\frac{Qt^2}{2}}$ ile çarpalım

$$e^{-\frac{Qt^2}{2}}V'(t) - e^{-\frac{Qt^2}{2}}QtV(t) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\frac{Qt^2}{2}}V(t)) \leq 0$$

$$e^{-\frac{Qt^2}{2}}V(t) - V(0) \leq 0$$

$$e^{-\frac{Qt^2}{2}}V(t) \leq 0$$

Buradan $V(t) \leq 0$ yada $V(t) \geq 0$ yani $V(t) = 0$ yani $\mho(t) = 0$.

Buradan da,

$$\tilde{u}(x, t) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

4. FONKSİYON KATSAYILI HOMOJEN DALGA DENKLEMİ

$u_{tt} = c^2(x)\Delta u,\ x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3,\ t > 0,$

$u(x,0) = g(x)\ ,\ \ u_t(x,0) = h(x)$

koşulları altında denklemimiz

$$u(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{4\pi}\iint_{\tau(\xi,x)\leq t} u(\xi, t-\tau(\xi,x))\Delta_\xi \sigma(\xi,x)d\xi \quad (4.1)$$

Volterra integral denklemine dönüşür. Burada $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, $\sigma(\xi,x)$ bir Sobolev fonksiyonu, K bir sabit olmak üzere,

$$|\Delta\sigma(\xi,x)| \leq \frac{K}{\tau(\xi,x)}$$

Tarafından sağlanır. ξ ise ray'da bir sabit olmak üzere Rieman koordinatları $\xi = f(\tau,x),\ \xi = \alpha\tau(\xi,x),\ \alpha = (cos\varphi sin\theta, sin\varphi sin\theta, cos\theta),\ \xi = (\xi_1\xi_2\xi_3)\ ve$

$\xi = f(\xi,x),$

$$d\xi = \left|\frac{\partial f(\xi,x)}{\partial\xi}\right| \frac{\partial}{\partial(\tau,\theta,\varphi)} = \frac{1}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|}\ \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

dır. Verilen koşullar altında integral denkleminin,

$$u(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\xi, t-\tau(\xi,x)) \frac{\Delta_\xi\sigma(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\ \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

(4.2)

olur ki bu denklem T pozitif bir sayı olmak üzere,

$$D(T) = \{(x,t): 0 \leq t \leq T - \tau(x,0)\}$$

bölgesinde sürekli bir çözüme sahiptir. (4.2) denkleminin düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

ile verilen sürekli bir çözümü vardır.

$$u_0(x,t) = F(x,t)$$

$$u_n(x,t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau(\xi,x) \leq t} \int u_{n-1}\left(\xi, t - \tau(\xi,x)\right) \Delta\sigma(\xi,x) d\xi, \qquad n \geq 1.$$

G bir sabit olmak üzere,

$$\left| \frac{1}{\left| \frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi} \right|_{\xi = f(\tau\alpha,x)}} \right| < G$$

ve Sobolev fonksiyon $\sigma(x,x^0)$ özelliklerini kullanarak

$$|u_n(x,t)| \leq F_0 (GK)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.1

$F_0 = max_{(x,t) \epsilon D(x,t)} |F(x,t)|$, $\left| \frac{1}{\left| \frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi} \right|_{\xi = f(\tau\alpha,x)}} \right| < G$ koşullar altında

$$|u_n(x,t)| \leq F_0 (GK)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

eşitlik sağlanır.

İspat:

$$|u_0| \leq F_0$$

$$|u_n(x,t)| \leq \frac{GK}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|u_{n-1}(\xi, t-\tau(\xi,x)|\tau sin\theta d\theta d\varphi d\tau, \qquad n \geq 1$$

$$|u_n| \leq GK\int_0^t (GK)^{n-1} F_0 \frac{\tau^{2n-2}}{(2n-2)!}(t-\tau)d\tau = (GK)^n F_0 \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Lemma 4.2.2

Verilen koşullar altında $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ serisi düzgün yakınsaktır.

İspat:

$$|u_n(x,t)| \leq F_0(KG)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq F_0(KG)^n \frac{T^{2n}}{(2n)!}$$

Birinci Weierstrass teoremi gereği $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ serisi yakınsak olduğundan $F_0|KG|^n \frac{T^{2n}}{(2n)!}$ seriside yakınsaktır.

Lemma 4.3.3

Verilen koşullar altında $\sum_{n=0}^{\infty} u(x,t)$ integral denkleminin bir çözümüdür.

İspat:

$\forall(x,t)\epsilon D(T)$ olmak üzere,

$$u_n(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_{n-1}(\xi, t-\tau(\xi,x)) \frac{\Delta_\xi \sigma(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}} \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\xi, t-\tau(\xi,x)) \frac{\Delta_\xi \sigma(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}} \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\xi, t-\tau(\xi,x)) \frac{\Delta_\xi \sigma(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}} \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau$$

$$u_n(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(\xi, t-\tau(\xi,x)) \frac{\Delta_\xi \sigma(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial \xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}} \tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau + F(x,t)$$

5.SONUÇ

Tezin başlıca sonuçları şunlardır:

1- Sabit katsayılı ve fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemleri Volterra integal denklemlerine dönüşmüştür.
2- Bu integral denklemler yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülmüştür.
3- İntegral denklemlerin varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır.
4- Bu çalışmalar ters problemin tekilliğinin ispatında kullanımı elverişlidir.

KAYNAKLAR

Davis, H.T. (1930). The Theory of the Volterra Integral Equation of Second Kind, Indiana University Studies, Vol. 17, America.

Erich Zauderer (1989). Partial Differential Equations of applied Mathematics. John Wiley Sons.

Evants, L. C. (1998). Partial Differential Equations. Providence, RI: American Mathematical Society.

Ikowa, M. (1997). Partial Differential Equations and Wave Phenomena. Providence, RI: American Mathematical Society, Kanwal, R.P. (1971). Linear İntegral Equations. Academic Press, New York and London.

Işık, Ali (2004). Application of the Volterra type integral equations for problem of applied Mathematics. Ph.D. Thesis

Kanwal, Ram P., (1971). Linear Integral Equations Theory and Technique, Academic Press, New York.

Lavrent'ev M.M, Savel'ev L.Ya. Linear operators and ill posed problems. New York, N.Y. Nauka Publishers.

Lovitt, W. V. (1950). Linear Integral Equations, Dover Publications Inc., New York.

Mizohata S. (1973). The Theory of Partial Differential Equations. Cambridge University Press.

Romanov, V.G. (1974). Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations. Springer-Verlag.

Romanov, V.G. (1987). İnverse Problem of Mathematical Physics. VNU Science Press, The Netherlands.

Rakesh, (2003). An inverse problem for a layered medium with a point source. Problems 19,497-506.

Ross, Shepley L. (1984). Differential Equations. John Wiley and Sons.

Sobolev, S.L. (1933). A Generalization of Kirchhoff's Formula. Dokl Akad. Nauk SSSR.Ser.6.

Smirnov, V.I. (1963). A Course of Higher Mathematics. Permagon Press, Volume IV.

Volterra, Vito (1930). Theory of Functionals. London and Glasgow.

Yakhno, V.G. (1998). Multidimensional Inverse Problems in Ray Formulations for Hyperbolic Equations. **Journal of Inverse and III Posed Problems V.6,N.4, VSP, Utrecth The Netherlands, pp.373-386.**

Yakhno, V.G. (2001). Inverse problems in Underwater Acoustics, Multidimensional Inverse Problems for Acoustic Equation in the Ray statement. **Springer-Verlag, New York, 2001, 159-184.**

Yakhno, V.G. (2002). III-Posed and Inverse problem, Multidimensional Inverse Problems for Hyperbolic equations with point sources. VSP, **The Netherlands, 2002, 443-468.**

Yakhno, V.G. and Işık A. (2003). Volterra Integral Equation Method for Solving Some Hyperbolic Equation problems, **V 4, N.2, Selcuk Journal of Appl. Math. pp. 103-112.**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Oğuzhan ÖZKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi	: Köln 16.08.1978

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	: Selçuk Üniversitesi
Yüksek Lisans Öğrenimi	: Adnan Menderes Üniversitesi
Bildiği Yabancı Diller	: Almanca, İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
   -SCI
   -Diğer
b) Bildiriler
   -Uluslararası
   -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	: MEB

İLETİŞİM

E-posta Adresi	: ozkayaoguzhan@hotmail.com
Tarih	: 25.01.2010