T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2010-0003

TÜREVLİ LIE HALKALARI

Berna ARSLAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN

AYDIN - 2010

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2010-0003

TÜREVLİ LIE HALKALARI

Berna ARSLAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN

AYDIN - 2010

İÇİNDEKİLER

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE AYDIN

Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Berna ARSLAN tarafından hazırlanan "Türevli Lie Halkaları" başlıklı tez, ../../.... tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	Adnan Menderes Ü.	
Üye :	Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Üniversitesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜNAYDIN	Adnan Menderes Ü.	
Üye :			
Üye :			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

İNTİHAL BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Berna ARSLAN
İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TÜREVLİ LIE HALKALARI

Berna ARSLAN

Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN

Bu tezde, birleşmeli bir R halkasının türevlerinin oluşturduğu $\mathrm{Der}\,(R)$ Lie halkasının yapısı üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalarda elde edilen bazı özelliklere yer verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tez konusu tanıtılmış ve bu konu ile ilgili yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir. İkinci bölümde, bu tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı temel tanım ve özelliklere değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lie halka yapısının ve bu konudaki çalışmaların daha iyi anlaşılması için [13] Herstein'ın 1969 da yayınladığı kitabının ilk kısmı esas olarak ele alınmış ve basit halkalar üzerinde Lie ve Jordan yapısına ilişkin bazı çalışmalar derlenmiştir.

Dördüncü bölümde, R halkasının türevlerinin $\mathrm{Der}\,(R)$ Lie halkasına ait özellikler, R nin değişmeli ve değişmeli olmadığı durumlar için ayrı ayrı incelenip, $\mathrm{Der}\,(R)$

Lie halkasının hangi koşullar altında asal olduğunu ifade eden teoremlere yer verilmiştir. Asal R halkası değişmeli olmadığında, R nin iç türevlerinin $I(R)$ Lie halkası yardımıyla $\mathrm{Der}(R)$ nin asallığı araştırılmıştır. Halkanın değişmeli olduğu durum incelenirken δ, R halkasının bir türevi ve $r \in R$ olmak üzere R halkasının $r\delta$ formundaki bütün türevlerinden oluşan $R\delta$ Lie halkasının özellikleri ayrıntılı olarak çalışılmış ve $R\delta$ nın $I(R)$ ile benzer özelliklere sahip olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, R halkası karakteristiği 2 den farklı ve birimli Noetherian bir halka olarak alınmış ve bu halka üzerindeki asallık şartı δ-asallığa zayıflatılarak $R\delta = \{r\delta \mid r \in R\}$ Lie halkasının asal olduğu kanıtlanmıştır.

Beşinci bölümde, R halkasının yalnızca değişmeli olduğu durum göz önüne alınarak bir önceki bölümde verilen teoremlerin ışığında birimli ve 2-burulmasız R halkası üzerinde δ-asallık koşulundan başka bir koşul belirtilmeden $R\delta$ Lie halkasının asal olduğuna ilişkin teorem sunulmuştur.

2010, 91 sayfa

Anahtar Sözcükler

Basit halka, Lie ideal, adi türev, Lie halka, δ-asal.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

LIE RINGS WITH DERIVATION

Berna ARSLAN

Adnan Menderes University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN

In this thesis, some properties from works which have been done up till now about structure of the Lie ring of derivations of an associative ring R, denoted $\mathrm{Der}\,(R)$, are given.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, subject of the thesis is introduced and a short summary of works which are related this subject is shortly given. In the second chapter, some basic definitions and properties are mentioned to make easy understanding of the thesis.

In the third chapter, the first section of Herstein [13]'s book which is published in 1969 is taken essentially to understand the structure of the Lie ring and works which are related with this subject and some of works about Lie and Jordan structures in simple rings are gathered.

In the fourth chapter, the properties of Lie ring $\mathrm{Der}\,(R)$ of derivations of R are investigated for the cases where R is commutative and non-commutative seperately, the theorems which are expressed the Lie ring $\mathrm{Der}(R)$ under which conditions is prime are given. Unless R is commutative, the primeness of $\mathrm{Der}(R)$ is investigated by approach is via the study of the structure of $I(R)$, the Lie ring of inner derivations of the prime ring R. In the commutative case, the approach is via the Lie structure of the Lie ring $R\delta$ of all derivations of the form $r\delta$ where $r \in R$ and δ is a given derivation of R. The properties of $R\delta$ are worked in detail and it's seen that $R\delta$ and $I(R)$ have similar properties. Furthermore, the hypothesis of primeness on R which is a Noetherian ring of characteristic not 2 with identity is weakened to δ-primeness and it is proved that $R\delta = \{r\delta \mid r \in R\}$ is a prime Lie ring.

In the fifth chapter, a theorem is presented in the light of the theorems given in the previous chapter by taking R only as a commutative ring. In this theorem, the primeness of the Lie ring $R\delta$ is proved without assuming any further condition except from the δ-primeness of R which is a 2-torsion free ring with identity.

2010, 91 pages

Key Words:

Simple ring, Lie ideal, derivation, Lie ring, δ-prime.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman, her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN'a; tezin düzeltme aşamasında yorumlarıyla sağlamış oldukları bilimsel katkılarından dolayı değerli hocalarım Prof. Dr. Hatice KANDAMAR ve Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ'a; tezin yazımı ve biçimlenmesinde emeği geçen bölümdeki tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma; özellikle de Araş. Gör. Okan ARSLAN'a eşsiz katkılarından dolayı yürekten teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca her şartta desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER DİZİNİ

$Z(R) = Z$	:	R halkasının merkezi
$l(S)$	:	S kümesinin sol sıfırlayanı
$r(S)$	:	S kümesinin sağ sıfırlayanı
$\otimes$	:	Tensör çarpım
$\mathrm{Ker}\, f$	:	f dönüşümünün çekirdeği
$\mathrm{char}\, R$	:	R halkasının karakteristiği
$[x, y]$	:	$= xy - yx$ (kommütatör çarpım)
$x \circ y$	:	$= xy + yx$ (Jordan çarpım)
$\mathrm{Der}(R)$	:	R halkasının bütün türevlerinin kümesi
$Ann_l(M)$	:	M sol R-modülünün sol sıfırlayanı
$\dim_D V$	:	D-vektör uzayı V nin boyutu
$M_n(D)$	:	D bölümlü halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası
$Hom_R(A, B)$	:	$A \to B$ tüm R-modül homomorfizmalarının kümesi
$C(M)$	:	R halkasının M R-modülü üzerindeki değişmeli halkası
i_a	:	Bir halkanın a elemanı ile belirlenen iç türevi
$I(R)$	:	R halkasının bütün iç türevlerinin kümesi
id_R	:	R halkasının birim dönüşümü

1. GİRİŞ

Asal halkaların türevleri üzerine ilk çalışma 1957'de E. C. Posner [28] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmasında Posner, herhangi bir halkada türev tanımını; "R bir halka ve d, R halkasının toplamsal bir dönüşümü olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise o zaman d, R halkasının bir adi türevidir." şeklinde vererek asal halkaların yapısını, özellikle halkanın değişmeliliğini, türev koşulu altında incelemiştir.

Günümüze kadar türev konusuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. 1978'de Herstein [15], 1981'de Giambruno ve Herstein [8] ve 1995 de Bresar [5] tarafından yapılmış çalışmalar bu konudaki ilk çalışmalar arasında yer almaktadır.

Teorinin gelişimiyle beraber daha sonraki yıllarda Jordan türev, Lie türev, (σ,τ)-türev, Jordan (σ,τ)-türev gibi farklı türev kavramları da tanımlanmış ve asal halkalarda bu türevlerin sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca asal halkalarda elde edilen sonuçlar, yarı asal halkalara genişletilmeye çalışılmıştır.

Daha sonra, belli bir özdeşlik sağlayan asal halkaların yanısıra halkanın idealleri ve Lie idealleri üzerinde sağlanan özdeşlikler de incelenerek önemli yapısal sonuçlar elde edilmiştir.

Bir R halkasında, $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanı komütatör çarpım olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. X ve Y, R halkasının iki altkümesi olsun. $[X, Y]$ ile $xy - yx$, $x \in X$, $y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal altgrup gösterilir. Eğer herhangi bir L halkası (birleşmeli olması gerekmez), aşağıdaki iki koşulu sağlarsa L ye bir Lie halka denir [22]. Her $a, b, c \in L$ için,

(i) $a^2 = 0$ (anti-commutativity)

(ii) $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (Jacobi identity)

Birleşmeli bir R halkasının $[x, y] = xy - yx$ işlemi ile bir Lie halka olduğu kolaylıkla görülür.

C. R. Jordan ve D. A. Jordan [19], “Lie Rings of Derivations of Associative Rings” başlıklı makalesinde, bir halkanın türevlerinin Lie halkaları ile ilgili bazı ilginç sonuçlar elde etmişlerdir. R değişmeli olmayan karakteristiği 2 den farklı asal bir halka olduğunda R halkasının tüm türevlerinin Lie halkası olan $\mathrm{Der}\,(R)$ nin asal bir Lie halka olduğunu ispatlamışlardır. Bu ispatın ışığında, karakteristiği 2 den farklı R halkasının değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olduğu durumda da $\mathrm{Der}\,(R)$ nin asal bir Lie halka olacağı sonucuna varılmıştır. Ayrıca R halkası karakteristiği 2 den farklı, birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olmak üzere R nin sıfırdan farklı her δ türevi için $R\delta = \{r\delta \mid r \in R\}$ Lie halkasının asal olduğu kanıtlanmıştır.

Elde edilen tüm bu sonuçlara ek olarak, C. R. Jordan ve D. A. Jordan aynı çalışmada R halkası üzerindeki asallık şartını δ-asallığa zayıflatarak R halkasının değişmeli ve birimli Noetherian bir halka olduğunu kabul etmişler ve bu durumda R nin sıfırdan farklı her δ türevi için $R\delta$ nın asal bir Lie halka olduğunu ispatlamışlardır. C. R. Jordan ve D. A. Jordan’ın bu makalesi dördüncü bölümde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Daha sonra aynı yazarlar [20], birimli ve değişmeli bir R halkası asal halka ya da Noetherian δ-asal halka olduğunda $R\delta$ Lie halkasının $[R\delta, R\delta]$ idealinin de asal bir Lie halka olduğunu ispatlamışlardır.

A. Nowicki [27], 1985 yılında R halkası üzerindeki bazı koşulları zayıflatarak [19] ve [20] de elde edilen sonuçları genelleştirmiştir.

Son zamanlarda M.A. Chebotar ve P.H. Lee [7], R halkasının δ-asallığının yanında daha başka varsayımlar olmaksızın $R\delta$ nın asal bir Lie halka olduğunu kanıtlamışlardır. Bu teoremin ispatı, Teorem 5.2 de verilmiştir.
D, $\mathrm{Der}\,(R)$ nin bir Lie althalkası ve bir R-altmodülü olsun. D.A. Jordan [21], R D-basit bir halka iken D nin basit bir Lie halka olduğunu göstermiştir.

M.A. Chebotar ve P.H. Lee tarafından [7] de R, sıfırdan farklı nilpotent elemanlar içermeyen D-asal bir halka olduğunda D nin asal bir Lie halka olacağı ispatlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada R nin D-asal bir halka olmasının yanında başka koşullar belirtilmeden D nin asal bir Lie halka olup olamayacağı sorusuna yanıt aranmıştır.

Daha sonra [24] de P.H. Lee ve C.K. Liu tarafından R, D-asal bir halka iken D ve D ile birlikte her bir idealinin de asal Lie halka olduğu ispatlanmıştır. Aynı çalışmada R, δ-asal bir halka olduğu sürece yalnız $[R\delta, R\delta]$ idealinin değil aynı zamanda $R\delta$ Lie halkasının her idealinin kendi başına asal bir Lie halka olduğu gösterilmiştir.

Herhangi bir halkanın türevlerinin Lie halkasının yapısını ve bu konudaki çalışmaları anlamak için, öncelikle halkada Lie ve Jordan yapıları iyi bir şekilde anlaşılmalıdır. Bu amaçla Herstein [13]'ın 1969 yılında yayınladığı kitabının bu konuyla ilgili ilk kısmı üçüncü bölümde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

I. N. Herstein, [10] ve [11] de basit halkalar ile bu halkalar üzerindeki Lie ve Jordan yapılarını incelemiştir. Daha sonra bu çalışmalarını [13] deki kitabına dahil etmiştir.

Bir birleşmeli R halkası üzerinde özel iki cebirsel yapı, R halkasının elemanları ve R üzerindeki işlemler kullanılarak tanımlanabilir. Bu yapıların ilki, R nin Jordan halkası olarak adlandırılır ve buradaki çarpma işlemi her $x, y \in R$ için $x \circ y = xy + yx$ ile tanımlıdır. Diğer yapı da, daha önce tanımı verilen R nin Lie halkasıdır ve bu halkadaki çarpma işlemi genelde her $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ şeklindedir.

[10] daki çalışmasında Herstein, R karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka olduğunda R nin Jordan halkasının da basit olduğunu göstermiştir. Çalışmasının geri kalanında ise R halkasının Lie idealleri ile ilgili sonuçlar üzerinde durmuştur. Bununla ilgili olarak ilk elde ettiği sonuç, R karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka ve U, R halkasının herhangi bir Lie ideali ve althalkası iken $U = R$

veya $U \subset Z$ olduğudur. Ayrıca R bir basit halka ve U, R halkasının bir Lie ideali ise o zaman ya $U \subset Z$ ya da R nin karakteristiği 2 ve R merkezi üzerinde 4-boyutlu olmadıkça $U \supset [R, R]$ dir teoremi bu makalede ayrıntılı olarak incelenen bir başka sonuçtur. Bu sonuçların involüsyonlu basit halkalara bir genellemesi üçüncü bölümde verilmiştir.

R halkasının her $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanları tarafından üretilen toplamsal altgrubu $[R, R]$, komütatör çarpımı ile bir Lie halkadır. $[R, R]$ halkasının bir U toplamsal altgrubu için; $[U, [R, R]] \subset U$ oluyorsa U, $[R, R]$ halkasının bir Lie idealidir. Eğer $U \neq [R, R]$ ise o zaman U, $[R, R]$ halkasının bir Lie özideali olur.

Herstein'ın [11] deki makalesinde ispatladığı "R halkası, karakteristiği ne 2 ne de 3 olan bir basit halka ve U, $[R, R]$ halkasının bir Lie özideali ise o zaman U, R halkasının merkezi tarafından kapsanır." teoremi için 1956 yılında W. E. Baxter [8], halkanın karakteristiğinin 2 ya da 3 olduğu durumları ayrı ayrı ele alarak açık bir problemi çözmüştür. Üçüncü bölümde Baxter'ın bu çalışmasının detaylı ispatları verilmiştir. Ayrıca I. N. Herstein, yine aynı makalede Brauer-Cartan-Hua teoreminin bir genellemesi olarak R bir basit halka olduğunda R nin tüm otomorfizmaları altında değişmez kalan öz althalkalarının R nin merkezi tarafından içerileceği savını ortaya atmıştır. Fakat daha sonra S. A. Amitsur [1], bunun genel durumda doğru olamayacağını karşıt bir örnekle göstermiştir. Amitsur, bu karşıt örneği henüz [1] deki makalesinde yayınlamadan W. E. Baxter [3], basit halkalarda Lie yapısına ait sonuçları kullanarak azalan zincir kuralını sağlayan sonlu boyutlu merkezi basit cebirler için Herstein'ın varsayımını genelleştirmiştir.

Daha sonra S. A. Amitsur [1] deki çalışmasında, Baxter'ın genelleştirmiş olduğu bu teoremi benzer bir metod ile en az bir $e \neq 0, 1$ idempotent eleman içeren basit cebirlerin invaryant altuzaylarını tanımlamak için ispatlamıştır.

[11], [3] ve [1]'de yapılan tüm bu çalışmaların daha genel bir sonucu olarak Herstein [13]'de "R, centroidi $F \neq GF(2)$ olan bir basit halka olsun. R nin

$e \neq 0, 1$ şeklinde idempotent eleman ihtiva ettiğini ve herhangi bir altuzayının, tüm özel iç otomorfizmaları altında değişmez kaldığını kabul edelim. O zaman R nin bu altuzayı ya (0) dır ya Z dir ya da $[R, R]$ yi kapsar. R nin tüm özel iç otomorfizmaları altında değişmez kalan R nin altcebirleri yalnızca (0) , Z ve R dir." teoremini vermiştir. Bu teorem, üçüncü bölümde incelenen son teoremdir.

2. TEMEL TANIMLAR VE BAZI TEOREMLER

Bu bölümde tezin kolay okunabilirliğini sağlamak için halkalar teorisinde iyi bilinen bazı temel kavram ve sonuçlar hatırlatılacaktır. Bu çalışma boyunca halka kavramı ile daima 'birleşmeli halka' anlaşılacaktır.

2.1 Genel Bilgiler

Tanım 2.1 [23] R bir halka ve P, R halkasının bir ideali olsun. $P \neq R$ ve R halkasının herhangi I, J idealleri için $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ oluyorsa P idealine R halkasının bir *asal ideali* denir.

Önerme 2.2 [23, Önerme 10.2] R bir halka olsun. R halkasının bir $P \neq R$ ideali için aşağıdakiler denktir:

(i) P asal idealdir.

(ii) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) R halkasının I, J sağ (sol) idealleri için $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

Tanım 2.3 (0) ideali asal ideal olan halkaya *asal halka* denir.

Örnek 2.4 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde 2×2 tipindeki matrislerden oluşan $M_{2\times2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi matrislerdeki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli bir halkadır. Aynı zamanda bu halka bir asal halkadır.

Önerme 2.5 [16, Önerme 9.4.3] R bir halka olsun. P, R nin asal bir ideali ise R/P asal bir halkadır.

Tanım 2.6 R bir halka ve S, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olmak üzere
$l(S) = \{x \in R \mid xS = (0)\}$ kümesine S kümesinin *sol sıfırlayanı,*
$r(S) = \{x \in R \mid Sx = (0)\}$ kümesine S kümesinin *sağ sıfırlayanı* denir.

Önerme 2.7 R bir halka olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R asal bir halkadır.

(ii) $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(iii) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(iv) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 2.8 [23] R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olsun. R halkasının herhangi bir I ideali için $I^2 \subseteq Q$ iken $I \subseteq Q$ oluyorsa o zaman Q idealine R halkasının bir *yarı asal ideali* denir. Asal bir ideal her zaman yarı asal bir idealdir.

Önerme 2.9 [23, Önerme 10.9] R bir halka olsun. R halkasının bir Q ideali için aşağıdakiler denktir:

(i) Q yarı asal idealdir.

(ii) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(iii) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(iv) R halkasının bir I sağ (sol) ideali için $I^2 \subseteq Q$ ise $I \subseteq Q$ dur.

Tanım 2.10 R bir halka olsun. $a \in R$ için $aRa = (0)$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına *yarı asal halka* denir. Her asal halka bir yarı asal halkadır.

Lemma 2.11 R bir yarı asal halka olsun. a, R halkasının bir elemanı olmak üzere $a \in Z$ ve $a^2 = 0$ ise $a = 0$ dır.

Tanım 2.12 R bir halka olsun.

(1) $\forall a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı varsa bu özelliği sağlayan n sayılarının en küçüğüne R halkasının *karakteristiği* denir ve $\operatorname{char} R = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n sayısı yok ise R halkasının karakteristiği sıfırdır denir.

(2) $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın *nilpotent elemanı* denir.

(3) B, R halkasının bir ideali olsun. B idealinin her elemanı nilpotent ise B ye R halkasının *nil ideali* denir.

(4) A, R halkasının bir ideali olsun. Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $A^n = 0$ eşitliği sağlanıyor ise A idealine R halkasının *nilpotent ideali* denir. Her nilpotent ideal nil idealdir.

Lemma 2.13 R herhangi bir halka olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı sağ nilpotent ideali var ise o zaman R nin sıfırdan farklı nilpotent ideali vardır.

İspat. Diyelim ki J, R halkasının sıfırdan farklı nilpotent sağ ideali olsun. R halkasının J sağ ideali ile üretilmiş $I = J + RJ$ ideali sıfırdan farklıdır ve n sabit bir tamsayı olmak üzere her $j \in J$ ve $r \in R$ için $(j + rj)^n = 0$ bulunur. Dolayısıyla I, R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir ideali olur. Böylece R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali vardır ve istenen ispatlanmış olur. $\square$

Tanım 2.14 [16, Teorem 8.2.5] R değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. R nin I yı içeren bütün asal ideallerinin arakesiti, R halkasının bir idealidir. Bu ideale I nın *radikali* denir. (0) idealinin radikaline, R halkasının *nil radikali* ya da asal radikali adı verilir.

Teorem 2.15 [26, Teorem 4.11] R bir halka ve Q, R nin bir ideali olsun. Eğer Q, R nin yarı asal bir ideali ise o zaman R/Q halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.

Önerme 2.16 [23, Önerme 10.16] Herhangi bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) R yarı asal bir halkadır.

(ii) R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.

(iii) R halkasının sıfırdan farklı nilpotent sağ (sol) ideali yoktur.

Tanım 2.17 R bir halka ve n bir tamsayı olsun. $x \in R$ için $nx = 0$ olduğunda $n = 0$ veya $x = 0$ oluyorsa R halkasına *n-burulmasız halka* denir.

Tanım 2.18 [26, Tanım 1.6] R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ var ise a elemanına *sol sıfır bölen*; $ca = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c \in R$ var ise a elemanına *sağ sıfır bölen* denir. Eğer a hem sol hem de sağ sıfır bölen ise a elemanına sıfır bölen denir. Sıfırdan farklı sıfır bölen bulundurmayan halkaya *sıfır bölensiz halka* denir.

Tanım 2.19 R bir halka ve M, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun. $Z(M) = \{r \in R \mid rm = mr, \forall m \in M\}$ kümesine M nin R deki *merkezleyeni* denir. Özel olarak $M = R$ alınırsa $Z(R) = \{z \in R \mid zx = xz, \forall x \in R\}$ kümesine de R halkasının *merkezi* denir ve kısaca Z ile gösterilir. Z, R halkasının althalkasıdır.

Teorem 2.20 [26] Birimsiz herhangi bir halka birimli bir halka içine gömülebilir.

Tanım 2.21 R herhangi bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $a \circ b = ab + ba$ ile tanımlanan ifadeye a ile b elemanlarının *Jordan çarpımı* ; $[a, b] = ab - ba$ ifadesine de a ile b elemanlarının *Lie çarpımı* denir.

Lemma 2.22 R herhangi bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ biçiminde tanımlı komütatör (Lie) çarpımı, her $a, b, c \in R$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

(i) $[a+b, c] = [a, c] + [b, c]$

(ii) $[a, b+c] = [a, b] + [a, c]$

(iii) $[ab, c] = a\,[b, c] + [a, c]\,b$

(iv) $[a, bc] = [a, b]\,c + b\,[a, c]$

(v) $[[a, b]\,, c] + [[b, c]\,, a] + [[c, a]\,, b] = 0$

Özel olarak, (v) deki özdeşliğe, *Jacobi özdeşliği* adı verilir.

Lemma 2.23 [25, Lemma 1] R bir asal halka ve $a, b \in R$ olsun. Z, R halkasının merkezi olmak üzere her $r \in R$ için $b\,[a, r] = 0$ ise o zaman $b = 0$ dır veya $a \in Z$ dir.

Tanım 2.24 R bir halka ve A, R halkasının toplamsal bir altgrubu olsun. Her $a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ $(ab + ba \in A)$ oluyorsa A ya R halkasının *Lie (Jordan) althalkası* denir.

Tanım 2.25 R bir halka, A R halkasının bir Lie (Jordan) althalkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. Her $a \in A$ ve her $u \in U$ için $[u, a] = ua - au \in U$ $(u \circ a = ua + au \in U)$ ise U kümesine A nın bir *Lie (Jordan) ideali* denir.

Tanım 2.26 R bir halka ve V, W kümeleri R halkasının herhangi iki toplamsal altgrubu olsun. R halkasının $[V, W]$ ile gösterilen toplamsal alt grubu, $v \in V$ ve $w \in W$ olmak üzere bütün $vw - wv$ elemanları tarafından üretilir. Bu altgrup, V kümesi ile W kümesinin komütatör çarpımı olarak adlandırılır.

Tanım 2.27 Tanım 2.26 ye göre R halkasının V toplamsal altgrubu için $[V, R] \subseteq V$ koşulu sağlanıyorsa V kümesine R halkasının bir *Lie ideali* denir.

Tanım 2.28 [19] L bir Lie halka ve I, L halkasının bir ideali olsun. L halkasının her A, B idealleri için $[A, B] \subseteq I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa I idealine L halkasının *asal ideali* denir.

Tanım 2.29 [19] L bir Lie halka ve J, L halkasının bir ideali olsun. L halkasının her A ideali için $[A, A] \subseteq J$ iken $A \subseteq J$ oluyorsa o zaman J idealine L halkasının *yarı asal ideali* denir.

Tanım 2.30 [19] (0) ideali asal (yarı asal) ideal olan Lie halkaya *asal (yarı asal) Lie halka* denir.

Tanım 2.31 [16] R ve R' herhangi iki halka, $f : R \rightarrow R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x) f(y)$ ise f dönüşümüne bir *halka homomorfizması,* özel olarak $R = R'$ ise f dönüşümüne R halkasının bir *endomorfizması* denir.

Tanım 2.32 R ve R' herhangi iki halka ve $f : R \rightarrow R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x \in R$ için $f(x^2) = f(x) f(x)$ ise f dönüşümüne bir *Jordan homomorfizması,* her $x, y \in R$ için $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ ise f dönüşümüne bir *Lie homomorfizması denir.*

Tanım 2.33 [16] R birimli bir halka olsun. Eğer u, R halkasının tersinir bir elemanı ise her $r \in R$ için $r \mapsto uru^{-1}$ ile verilen $f : R \rightarrow R$ dönüşümü R halkasının bir otomorfizmasıdır. R halkasının bu tip otomorfizmalarına u elemanı tarafından belirlenmiş *iç otomorfizmalar* denir.

Tanım 2.34 [13] R bir halka ve $a \in R$, $a^2 = 0$ olsun. Her $x \in R$ için $\phi(x) = (1+a)\,x\,(1-a) = x + ax - xa - axa$ ile tanımlı dönüşüm R nin bir otomorfizmasıdır. R halkasının bu tip otomorfizmalarına *özel iç otomorfizmalar* denir.

Tanım 2.35 [16] R bir halka, A toplamsal değişmeli bir grup olsun. Her $r, s \in R$ ve $a, b \in A$ için,

(i) $r.(a+b) = r.a + r.b$

(ii) $(r+s).a = r.a + s.a$

(iii) $r.(s.a) = (r.s).a$

olacak şekilde $(r, a) \longmapsto r.a$ ile tanımlı $R \times A \rightarrow A$ fonksiyonu varsa A ya bir *sol R-modül* denir.
Ayrıca R nin 1_R birim elemanı var ve her $a \in A$ için,

(iv) $1_R.a = a$

ise A ya bir *birimsel sol R-modül* denir. R bir bölüm halkası ise o zaman bir birimsel (sol) R-modül bir *(sol) vektör uzayı* olarak adlandırılır.
Benzer şekilde bir sağ R-modül tanımlanabilir. A hem sağ hem de sol R-modül ise A ya kısaca *R-modül* denir.

Tanım 2.36 [16] R bir halka, A bir R-modül ve B, A nın boş olmayan bir altkümesi olsun. B, A nın toplamsal bir altgrubu ve her $r \in R$, $b \in B$ için $r.b \in B$ oluyorsa B ye A nın *altmodülü* denir. Bir bölüm halkası üzerinde bir vektör uzayının bir altmodülü bir *altuzay* olarak adlandırılır. Bir altmodülün kendisi de bir modüldür. Aynı zamanda bir halka üzerinde bir birimsel modülün bir altmodülü de birimsel olmak zorundadır.

Tanım 2.37 [16] R bir halka, A ve B iki sağ (sol) R-modül olsun. Toplamsal bir $f : A \rightarrow B$ dönüşümü her $r \in R$ ve her $a \in A$ için $f(ar) = f(a)r$ $(f(ra) = rf(a))$ şartını sağlıyorsa f dönüşümüne bir *sağ (sol) R-modül homomorfizması* denir. Eğer R bir bölüm halkası ise, bir R-modül homomorfizması bir *lineer transformasyon* olarak adlandırılır.

Tanım 2.38 [12] R herhangi bir halka ve M bir R-modül olsun. $a \in R$ ve her $m \in M$ için $T_a(m) = ma$ olarak tanımlanan $T_a : M \rightarrow M$ R-modül homomorfizmalarının kümesi $E(M)$, fonksiyonlardaki toplama ve bileşke işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya M nin toplamsal grubunun *endomorfizmalar halkası* adı verilir. O zaman $C(M) = \{\theta \in E(M) \mid T_a\theta = \theta T_a, \forall a \in R\}$ kümesi, $E(M)$ nin bir althalkasıdır. $C(M)$ ye R nin M üzerindeki *değişmeli halkası* denir.

Tanım 2.39 [16] A, bir sol R-modül olsun. $RA \neq (0)$ ve A nın hiçbir öz altmodülü yoksa A ya *basit (indirgenemez) modül* denir. R bir halka, $R^2 \neq (0)$ ve R nin iki yanlı hiçbir öz ideali yoksa R ye *basit halka* denir.

Teorem 2.40 [12] (Schur's Lemma) Eğer M basit bir R-modül ise o zaman $C(M)$ bir bölümlü halkadır.

Tanım 2.41 [12] R herhangi bir halka olsun. R yi kendi üzerinde bir modül olarak düşünelim. $E(R)$, R halkasının toplamsal grubunun endomorfizmalar halkası olsun. $r \in R$ olmak üzere $T_r(x) = xr$ ile verilen $T_r : R \rightarrow R$ ve $L_r(x) = rx$ ile verilen $L_r : R \rightarrow R$ dönüşümleri $E(R)$ nin içindedir. $r, s \in R$ olmak üzere $B(R)$, T_r ve L_s endomorfizmaları ile üretilen $E(R)$ nin althalkası olsun. R, $B(R)$ üzerinde bir modüldür. Buna göre $\{\alpha \in E(R) \mid \alpha\beta = \beta\alpha, \forall\beta \in B(R)\}$ kümesine R halkasının *centroidi* denir.

Tanım 2.42 [16] K birimli, değişmeli bir halka ve A herhangi bir halka olsun. $(A,+)$, bir birimli K-modül ve her $a \in K$; $s,t \in A$ için $a(st) = (as)t = s(at)$ eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman A yapısına bir K-*cebir* veya A, K değişmeli halkası üzerinde bir *cebir*dir denir. Bir A K-cebir, halka olarak bölümlü ise o zaman A ya *bölümlü cebir* denir.

Teorem 2.43 [12] Eğer R basit bir halka ise o zaman R nin centroidi bir cisimdir ve R halkası, bu cisim üzerinde bir cebirdir. Üstelik R halkasının merkezi (0) dan farklı ise R nin centroidi ile merkezi çakışır.

Tanım 2.44 [16] F bir cisim ve S kümesi F nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. S kendi başına F cismindeki işlemlere göre bir cisim oluyor ise S ye F nin bir *altcismi* denir. Eğer F cismi bir K cisminin altcismi ise K ya F nin bir *cisim genişlemesi* denir. Ayrıca F ile K iki cisim ve $F \subset K$ ise Tanım 2.35 gereği K yı F üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.45 Her p asal sayısı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için tek türlü belirli olarak var olan, p^n elemanlı sonlu cisme p^n *elemanlı Galois cismi* denir ve $GF(p^n)$ ya da F_{p^n} ile gösterilir.

Tanım 2.46 [16] R bir halka ve A bir sol R-modül, B A nın boştan farklı bir altkümesi olsun.

$$Ann_l(B) = \{r \in R \mid rb = 0,\ \forall b \in B\}$$

kümesine B altkümesinin *sol sıfırlayanı* denir. $Ann_l(B)$, R halkasının bir sol idealidir. Eğer B, A nın bir altmodülü ise o zaman $Ann_l(B)$, R halkasının bir ideali olur. Sağ sıfırlayan da benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.47 [16] A, bir sol R-modül olsun. $Ann_l(A) = (0)$ ise A ya *sol faithful modül* denir. Basit bir (sol) faithful R-modülü varsa R halkasına *(sol) primitif halka* denir. Birimli basit bir halka primitiftir. Primitif bir halka asaldır.

Tanım 2.48 [16, Tanım 9.1.8] V, bir D bölümlü halkası üzerinde bir (sol) vektör uzayı ve R, $Hom_D(V,V)$ endomorfizmalar halkasının bir althalkası olsun. Her n pozitif tamsayısı için, $\{u_1,\ldots,u_n\}$, V vektör uzayının lineer bağımsız vektörlerinin kümesi ve $\{v_1,\ldots,v_n\}$ de V vektör uzayının herhangi vektörlerinin kümesi olmak üzere $\theta(u_i) = v_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, olacak şekilde bir $\theta \in R$ varsa o zaman R halkasına V vektör uzayının *endomorfizmalarının yoğun halkası* denir.

Teorem 2.49 [16, Teorem 9.1.12] (Jacobson Yoğunluk Teoremi) R bir primitif halka ve A bir faithful basit R-modül olsun. A R-modülünü, $D = Hom_R(A,A)$ bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı olarak alalım. O zaman R halkası, A D-vektör uzayının endomorfizmalarının bir yoğun halkasına izomorftur.

Teorem 2.50 [16, Teorem 9.1.9] R, bölümlü bir D halkası üzerindeki bir V sol (sağ) vektör uzayının endomorfizmalarının bir yoğun halkası olsun. O zaman R bir sol (sağ) Artinian halkadır ancak ve ancak $dim_D V$ sonludur. Bu durumda $R = Hom_D(V,V)$ dir.

Teorem 2.51 [16] R sol Artinian, basit bir halka ise, uygun bir n tamsayısı ve uygun bir D bölümlü halkası için $R \cong M_n(D)$ dir.

Tanım 2.52 A birimli ve değişmeli bir halka üzerinde bir cebir olsun. A nın sıfır ve kendisinden başka alt cebiri yok ise o zaman A ya bir *basit cebir* denir.

Tanım 2.53 [17] K bir cisim ve A bir basit K-cebir olsun. A nın merkezi C bir cisimdir. Eğer A nın merkezi $C = K.1$ ise A ya K üzerinde *merkezi basit cebir* denir.

Tanım 2.54 A, bir F cismi üzerinde bir cebir ve U, A nın bir altuzayı olsun. Eğer A nın her σ iç otomorfizması için $\sigma(U) \subseteq U$ oluyorsa U ya A nın *invaryant (değişmez) altuzayı* denir.

Teorem 2.55 [12, Teorem 6.3.1] (Kaplansky Teoremi) A bir primitif cebir olsun. Eğer A nın her elemanı, derecesi d olan bir polinom özdeşliği sağlıyorsa o zaman A, merkezi üzerinde en fazla $[d/2]^2$-boyutlu bir basit cebirdir. Özel olarak, A nın her elemanı, merkezi üzerinde bir kuadratik eşitlik sağlıyorsa o zaman A, merkezi üzerinde en çok 4-boyutludur.

Tanım 2.56 [16] R bir halka, A bir sağ R-modül ve B bir sol R-modül olsun. F, $A \times B$ üzerinde serbest değişmeli grup olsun. K, F nin aşağıdaki formda verilen bütün elemanları ile üretilen bir altgrubu olsun.
Her $a, a' \in A$; $b, b' \in B$ ve $r \in R$ için,

(i) $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$

(ii) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$

(iii) $(ar, b) - (a, rb)$

F/K bölüm grubuna A ve B nin R üzerindeki *tensör çarpımı* denir ve $A \otimes_R B$ ile gösterilir. F de bir (a, b) elemanının $(a, b) + K \in F/K$ koseti $a \otimes b$ ile gösterilir. $F/K = A \otimes_R B$ bölüm grubu $a \in A$, $b \in B$ için $a \otimes b$ biçimindeki tüm elemanlar (kosetler) tarafından üretilir. F nin tipik elemanları $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i (a_i, b_i)$; $n_i \in Z$, $a_i \in A$, $b_i \in B$ toplamıdır ve $A \otimes_R B = F/K$ da bu elemanın kosetleri $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i (a_i \otimes b_i)$ biçimindedir.

Teorem 2.57 Eğer A, bir K cismi üzerinde bir merkezi basit cebir ve B, birimli bir basit K-cebir ise o zaman $A \otimes_K B$ basit bir K-cebirdir.

İspat. [16, Teorem 9.6.2] □

Lemma 2.58 A, bir K cismi üzerinde birimli bir cebir ve F, K yı içeren bir cisim olsun. O halde $A \otimes_K F$ bir F-cebirdir öyle ki $\dim_K A = \dim_F (A \otimes_K F)$ olur.

İspat. [16, Teorem 9.6.4] □

2.2 Adi Türevli Halkalar

Türevli asal halkalar üzerindeki ilk çalışmalar 1957 yılında E. C. Posner tarafından başlatılmıştır [28]. Posner bu çalışmasında aşağıdaki türev tanımını vererek türevli asal halkaların değişmeliliğini incelemiştir. Geçen 50 yıl boyunca, bu konu üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda asal ve yarı asal halkalar üzerine ilk önemli yapısal sonuçlara, bu halkaların belli polinom özdeşlikleri veya diferansiyel özdeşlikleri sağladığı durumlarda ulaşılmıştır. Teori farklı türev kavramlarının tanımlanmasıyla gelişimine devam etmiştir.

Tanım 2.59 [28] R herhangi bir halka ve δ, R halkasının toplamsal bir dönüşümü olsun. Her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ ise o zaman δ dönüşümüne R halkasının *adi türevi* veya kısaca *türevi* denir.

Tanım 2.60 R herhangi bir halka ve a, R nin sabit bir elemanı olmak üzere $i_a : R \to R$ dönüşümü her $x \in R$ için $i_a(x) = [a, x]$ olarak tanımlansın. i_a dönüşümüne, R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş *iç türevi* denir.

Örnek 2.61 $\mathbb{R}$ reel sayılar halkasındaki türev; $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası üzerinde her $x \in R$ için $\delta(x) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlı toplamsal dönüşüm adi türeve birer örnektir.

Herhangi bir halka üzerinde türevin varlığı araştırılabilir. Ancak türev ile ilgili teoremler oluşturulurken halka olarak asal halka ele alınır. Asal halkaları çalışmaktaki amaç, özdeşlik şeklinde kullanılan ifadelerde cisim veya tamlık bölgesinde yapılan kısaltmalara benzer kısaltmalar yapabilmektir.

Teorem 2.62 [28] R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve δ_1, δ_2 R halkasının iki türevi olsun. $\delta_1\delta_2$, R halkasının bir türevi ise o zaman δ_1 ve δ_2 türevlerinden en az biri sıfırdır.

$0 : R \rightarrow R$ dönüşümünün, R halkasının bir türevi olduğu göz önüne alınır ve Teorem 2.62 de $\delta_1$ve δ_2 türevleri yerine $a \in R$ tarafından belirlenmiş i_a iç türevi alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.63 R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, $a \in R$ ve i_a, R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş iç türevi olsun. Eğer $i_a^2 = 0$ ise o zaman $i_a = 0$ dır. Başka bir ifadeyle, her $x \in R$ için $[a, [a, x]] = 0$ ise $a \in Z$ dir.

Teorem 2.64 [28] R bir asal halka ve δ, R halkasının bir türevi olsun. Her $x \in R$ için $[\delta(x), x] \in Z$ ise o zaman $\delta = 0$ veya R halkası değişmelidir.

Ram Awtar [2], x elemanını R halkası yerine onun bir Lie (Jordan) idealinden alarak Teorem 2.64 in daha genel hali olan aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır.

Teorem 2.65 [2] R halkası, karakteristiği 2 ve 3 den farklı olan bir asal halka, δ R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, \delta(u)] \in Z$ ise o zaman $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.66 [2] R halkası, karakteristiği 2 olan bir asal halka, δ R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. U, R halkasının bir althalkası ve Lie (Jordan) ideali olmak üzere her $u \in U$ için $[u, \delta(u)] \in Z$ ise o zaman U değişmelidir.

Tanım 2.67 [19] R bir halka ve $\mathrm{Der}(R)$, R halkasının bütün türevlerinden oluşan bir küme olsun. Bu küme,

$$\{\delta : R \rightarrow R \mid \delta(r+s) = \delta(r) + \delta(s) \;\; ve \;\; \delta(rs) = \delta(r)s + r\delta(s), \forall r, s \in R\}$$

şeklinde gösterilir. $\delta, \gamma \in \mathrm{Der}(R)$ olmak üzere her $x \in R$ için $(\delta + \gamma)(x) = \delta(x) + \gamma(x)$ ve $[\delta, \gamma](x) = \delta(\gamma(x)) - \gamma(\delta(x))$ şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathrm{Der}(R)$, R halkası üzerinde bir Lie halka belirtir. Ayrıca R değişmeli bir halka iken $\mathrm{Der}(R)$ bir sol R-modüldür. Çünkü $r \in R$ ve $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ olmak üzere $r\delta : R \to R$ ile verilen dönüşüm $x \in R$ için $(r\delta)(x) = r\delta(x)$ ile tanımlıdır ve bu dönüşüm R halkasının bir türevidir.

Tanım 2.68 [19] $I(R)$, R halkasının bütün iç türevlerini içeren bir küme olsun. O halde $I(R)$, $r \in R$ olmak üzere her $s \in R$ için $i_r(s) = rs - sr$ ile tanımlı $i_r : R \to R$ dönüşümlerinden oluşmaktadır. Aynı zamanda $I(R)$, $\mathrm{Der}(R)$ nin bir Lie althalkasıdır.

Tanım 2.69 [19] R bir halka ve $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. R halkasının boş olmayan bir S altkümesi, $\delta(S) \subseteq S$ şartını sağlıyorsa S altkümesine *δ-invaryant* adı verilir. R halkasının δ-invaryant olan bir ideali varsa o ideale *δ-ideal* denir.

Tanım 2.70 [19] R halkasının sıfırdan farklı iki δ-idealinin çarpımı sıfırdan farklı ise o zaman R ye *δ-asal halka* adı verilir.

Her asal halka bir δ-asal halkadır, fakat tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.71 [19] R halkasının (0) ve R den başka hiçbir δ-ideali yoksa o zaman R ye *δ-basit halka* denir.

δ-basit bir R halkasının δ-asal olması için gerek ve yeter şartın $R^2 \neq 0$ olduğu açıkça görülür.

Lemma 2.72 R bir halka, S R nin boş olmayan bir altkümesi ve δ, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer R halkasının S altkümesi δ-invaryant ise o zaman S nin R deki sol sıfırlayan kümesi $l(S)$ ile S nin R deki sağ sıfırlayan kümesi $r(S)$ de δ-invaryant olur.

İspat. $a \in l(S)$ olsun. O halde her $s \in S$ için $as = 0$ dır ve buradan $0 = \delta(as) = \delta(a)s + a\delta(s)$ eşitliği sağlanır. S, R halkasının boştan farklı δ-invaryant bir altkümesi olduğundan $\delta(s) \in S$ dir ve $l(S)$ kümesinin tanımından $a\delta(s) = 0$ olduğu görülür. Bu durumda her $s \in S$ için $\delta(a)s = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\delta(a) \in l(S)$ olur. Yani $\delta(l(S)) \subseteq l(S)$ dir ve buradan $l(S)$ nin δ-invaryant olduğu sonucuna varılır.
Benzer şekilde, S nin R deki sağ sıfırlayan kümesi $r(S)$ nin de δ-invaryant olduğu görülür. $\square$

Sonuç 2.73 R bir halka ve $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. R halkasının δ-asal olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sıfırdan farklı her δ-idealinin sol sıfırlayanının (ya da sağ sıfırlayan) sıfır olmasıdır.

3. BASİT HALKALARDA LIE VE JORDAN YAPILARI

Bu bölümde esas olarak I. N. Herstein'ın [13] "Topics in Ring Theory" adlı kitabının ilk kısmı incelenecektir.

Lemma 3.1 *R bir halka ve ρ da R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. n sabit bir tamsayı olmak üzere her $a \in \rho$ için $a^n = 0$ ise o zaman R halkasının sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.*

İspat. Bu lemmayı n üzerinden tümevarım yaparak ispat edelim. Eğer $n = 2$ ise o zaman her $a \in \rho$ için $a^2 = 0$ dır ve buradan istenilen elde edilir.
$m < n$ olacak şekilde her $a \in \rho$ için $a^m = 0$ ise R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir ideale sahip olduğunu kabul edelim. Her $a \in \rho$ için $a^n = 0$ ise R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir ideali olacağını gösterelim.
$a^2 = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in \rho$ alalım ve R halkasının $A = a\rho = \{ax \mid x \in \rho\}$ şeklinde bir althalkasını tanımlayalım. Aynı zamanda A, R halkasının bir sağ idealidir.
$A \neq (0)$ olsun. Eğer $x \in R$ ise $a + ax \in \rho$ olacağından $(a + ax)^n = 0$ dır. $ax \in \rho$ için,

$$(a + ax)^2 = (ax)^2 + (ax)\,a\ ,\ \ (a + ax)^3 = (ax)^3 + (ax)^2\,a\ , \ldots,$$

$$0 = (a + ax)^n = (ax)^n + (ax)^{n-1}\,a$$

eşitlikleri sağlanır. $(ax)^n = 0$ olduğundan $(ax)^{n-1}\,a = 0$ bulunur. Buradan $(ax)^{n-1}\,a\rho = (0)$ olur. Yani $(ax)^{n-1}\,A = (0)$ dır. Şimdi de A halkasının bir $T = \{x \in A \mid xA = (0)\}$ altkümesi tanımlansın. T, A halkasının bir idealidir. Aynı zamanda $A = a\rho$ olduğundan, her $y \in A$ için $y = ak$ olacak şekilde en az bir $k \in \rho$ elemanı vardır. Ayrıca y , A halkasının elemanı iken, y^{n-1} de A halkasının elemanı olur. Bu durumda her $y \in A$ için,

$$y^{n-1}A = (ak)^{n-1}\,A = (0)$$

olacağından $y^{n-1} \in T$ elde edilir. O halde $T \neq (0)$ dır.
$A = T$ ise $A^2 = (0)$ bulunur ve buradan A, R halkasının sıfırdan farklı nilpotent

sağ ideali olur.

Diyelim ki $A \neq T$ olsun ve $\overline{A} = A/T$ halkası tanımlansın. $\overline{y} \in \overline{A}$ ise $\overline{y} = y + T$ olacak şekilde $y \in A$ vardır. Her $y \in A$ için $y^{n-1} \in T$ olduğundan,

$$\overline{y}^{n-1} = (y+T)^{n-1} = y^{n-1} + T = T = 0_{\overline{A}}$$

bulunur. Buna göre, her $\overline{y} \in \overline{A}$ için $\overline{y}^{n-1} = 0_{\overline{A}}$ dir.

Tümevarım hipotezine göre, $\overline{A}$ halkası sıfırdan farklı nilpotent ideale sahiptir. Diyelim ki $\overline{U}$, $\overline{A}$ halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir ideali olsun. Şimdi de $\overline{U}$ yardımıyla, R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir idealine ulaşalım. O halde,

$$\begin{aligned} \theta : A &\rightarrow \overline{A} \\ y &\mapsto y + T \end{aligned}$$

olacak şekilde bir dönüşüm tanımlansın. Her $y, y' \in A$ için $y = y'$ olduğunda $y + T = y' + T$ olacağından θ dönüşümü iyi tanımlıdır. Üstelik her $x, y \in A$ için,

$$\theta(x+y) = (x+y) + T = (x+T) + (y+T) = \theta(x) + \theta(y)$$

ve

$$\theta(xy) = (xy) + T = (x+T)(y+T) = \theta(x)\theta(y)$$

eşitlikleri sağlandığından θ bir halka homomorfizmasıdır. Ayrıca $\forall y + T \in \overline{A}$ için $\theta(y) = y + T$ olacak şekilde bir $y \in A$ varolduğundan θ dönüşümü bir halka epimorfizmasıdır. U, $\overline{U}$ kümesinin θ altındaki ön görüntü kümesi olsun. Yani $\theta^{-1}\left(\overline{U}\right) = U = \left\{a \in A \mid \theta(a) \in \overline{U}\right\}$ olarak verilsin. O halde U, A halkasının bir idealidir.

$\overline{U}$, $\overline{A}$ halkasının nilpotent ideali olduğundan $\overline{U}^k = (0_{\overline{A}})$ olacak şekilde en az bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $\overline{U}^k = (U+T)^k = U^k + T = T$ olacağından $U^k \subset T$ dir. Böylece $U^{k+1} \subset TU \subset TA = (0)$ olur. Bu durumda $U^{k+1} = (0)$ elde edilir. Sonuç olarak U nun A halkasına ait bir nilpotent ideal olduğu görülür.

Aynı zamanda $\overline{U} \neq (0_{\overline{A}})$ olduğu için $U + T \neq T$ dir ve bu durumda $U \nsubseteq T$ olur. $U \nsubseteq T$ ise $UA \neq (0)$ dır. Böylece $U \supset UA \neq (0)$ elde edilir. U, A halkasının bir nilpotent ideali olduğundan $UA = Ua\rho \neq (0)$, R halkasının nilpotent bir sağ idealidir.

Diğer taraftan $A = a\rho = (0)$ olduğunu kabul edelim. $a^2 = 0$ olacak şekilde bir $a \in \rho$ alalım. $n > 1$ olmak üzere her $x \in \rho$ için $x^n = 0$ olduğundan $\left(x^{n-1}\right)^2 = x^{n-1}.x^{n-1} = x^n.x^{n-2} = 0$ olur. Yani, $\left(x^{n-1}\right)^2 = 0$ dır. Buradan $\left(x^{n-1}\right)\rho = (0)$ bulunur.

Şimdi de $W = \{x \in \rho \mid x\rho = (0)\}$ kümesi tanımlayalım. O zaman W, ρ nun bir idealidir. Aynı zamanda $\left(x^{n-1}\right)\rho = (0)$ olacak şekilde bir $x^{n-1} \in \rho$ var olduğundan $x^{n-1} \in W$ dur. Dolayısıyla $W \neq (0)$ olur.

$W = \rho$ ise $\rho^2 = (0)$ olacağından ρ, R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir sağ ideali olur.

$W \neq \rho$ ise $\overline{\rho} = \rho/W$ halkasına ait her $\overline{x}$ elemanı için $\overline{x}^{n-1} = (0_{\overline{\rho}})$ dir. Çünkü her $x \in \rho$ için $x^{n-1} \in W$ dur. Tümevarım hipotezi gereği $\overline{\rho}$ halkası, sıfırdan farklı nilpotent ideale sahiptir. $\overline{V} \neq (0)$, $\overline{\rho}$ halkasının nilpotent bir ideali olsun.

$$\begin{aligned} \varphi : \rho &\longrightarrow \overline{\rho} \\ x &\longmapsto x + W \end{aligned}$$

olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan φ dönüşümü bir halka epimorfizmasıdır. V, $\overline{V}$ kümesinin φ altındaki ön görüntü kümesi olsun. Yani $\varphi^{-1}\left(\overline{V}\right) = V$ olarak verilsin. O halde V, ρ halkasının bir idealidir.

$\overline{V}$, $\overline{\rho}$ halkasının nilpotent ideali olduğundan $\overline{V}^m = (0_{\overline{\rho}})$ olacak şekilde en az bir $m \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Buradan $\overline{V}^m = (V + W)^m = V^m + W = W$ olacağından $V^m \subset W$ bulunur. Buna göre, $V^{m+1} \subset WV \subset W\rho = (0)$ dır ve buradan V, ρ halkasının nilpotent bir ideali olur.

Aynı zamanda $\overline{V} \neq (0_{\overline{\rho}})$ olduğu için $V + W \neq W$ dir ve bu durumda $V \nsubseteq W$ olur. Buradan $V \supset V\rho \neq (0)$ elde edilir. V, ρ halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir ideali olduğundan $V\rho \neq (0)$, R halkasının nilpotent bir sağ idealidir.

Her iki durumda da R halkasının nilpotent sağ ideale sahip olduğu sonucuna varıldı. Eğer R nin sıfırdan farklı sağ nilpotent ideali varsa Lemma 2.13 gereği R nin sıfırdan farklı nilpotent ideali vardır ve istenen ispatlanmış olur. $\square$

Herhangi bir birleşmeli R halkası verildiğinde R nin elemanlarını ve R üzerinde tanımlı olan işlemleri kullanarak iki yeni halka tanımlayabiliriz. Bu halkaların ilkinde çarpma işlemi her $x, y \in R$ için $x \circ y = xy + yx$ ile tanımlıdır ve *Jordan çarpım* olarak adlandırılır. Buradaki x ile y elemanları arasındaki işlem, xy, R de bilinen çarpma işlemidir. Bu halkaya R nin *Jordan halkası* denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Diğer halkadaki çarpma işlemi her $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ ile tanımlıdır ve *Lie çarpım* (ya da komütatör çarpımı) olarak adlandırılır. Bu çarpım ile tanımlanan halkaya da R nin *Lie halkası* denir ve $L(R)$ ile gösterilir. Elde edilen bu halkaların birleşmeli olması gerekmez.

Tanım 3.2 R herhangi bir halka olsun. A, R halkasının toplamsal bir altgrubu olmak üzere her $a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ oluyorsa A ya R halkasının *Lie althalkası* veya $L(R)$ halkasının althalkası denir.

Tanım 3.3 R herhangi bir halka olsun. B, R halkasının toplamsal bir altgrubu olmak üzere her $c, d \in B$ için $cd + dc \in B$ oluyorsa B ye R halkasının *Jordan althalkası* veya $J(R)$ halkasının althalkası denir.

Tanım 3.4 R bir halka ve A, R halkasının bir Lie (Jordan) althalkası olsun. Her $a \in A$ ve her $u \in R$ için $[u, a] = ua - au \in A$ ($u \circ a = ua + au \in A$) ise A ya R halkasının *Lie (Jordan) ideali* veya $L(R)$ ($J(R)$) halkasının ideali denir.

Lemma 3.5 *R bir halka ve U, R halkasının bir Jordan ideali olsun. Her $a, b \in U$ ve $x \in R$ için,*

$$(ab + ba)x - x(ab + ba) \in U$$

dur.

İspat. Her $b \in U$ ve her $x \in R$ için $xb - bx \in R$ dir. U, R halkasının Jordan ideali olduğundan her $a \in U$ ve her $x \in R$ için,

$$a(xb - bx) + (xb - bx)a \in U$$

olur. Bu ifade açılırsa,

$$\begin{aligned} a(xb-bx)+(xb-bx)a &= \{(ax-xa)b+b(ax-xa)\}+ \\ &\quad \{x(ab+ba)-(ab+ba)x\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda eşitliğin sol tarafındaki ifade ile eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin ilk terimleri U idealinin elemanları olacağından,

$$x(ab+ba)-(ab+ba)x \in U$$

bulunur. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır. □

Teorem 3.6 *R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x=0$ iken $x=0$ olan bir halka olsun. O halde R nin sıfırdan farklı Jordan ideali, R nin sıfırdan farklı (birleşmeli) bir idealini kapsar.*

İspat. $U \neq (0)$, R halkasının bir Jordan ideali ve $a,b \in U$ olsun. $c = ab+ba$ alalım. O zaman her $x \in R$ için Lemma 3.5 gereği $xc-cx \in U$ olur. Aynı zamanda $c \in U$ ve U Jordan ideal olduğundan her $x \in R$ için $xc+cx \in U$ elde edilir ve buradan her $x \in R$ için,

$$(xc-cx)+(xc+cx) = 2xc \in U \tag{3.1}$$

bulunur. Böylece her $y \in R$ için $(2xc)y+y(2xc) \in U$ olur. Ayrıca $x,y \in R$ olduğu için (3.1) deki eşitlikte x yerine yx yazılırsa $(yxc-cyx)+(yxc+cyx) = 2yxc$ elde edilir ve buradan $2yxc$ de U nun elemanı olur. Bu durum her $x,y \in R$ için $2xcy \in U$ olmasını gerektirir. Yani $2RcR \subset U$ olur. Teoremi ispatlamak için U nun kapsadığı R halkasına ait sıfırdan farklı idealin $2RcR$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$2RcR = \left\{2\sum\limits_{i=1}^{n} r_i c s_i \mid r_i, s_i \in R\right\}$ kümesinin, R halkasının bir ideali olduğunu görelim. $a_i, b_i, m_i, n_i \in R$ olmak üzere $\alpha = 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c b_i$ ve $\beta = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i c n_i$ elemanları, $2RcR$ kümesindedir. Buradan $\alpha-\beta = 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c b_i + 2\sum\limits_{i=1}^{n}(-m_i)cn_i \in 2RcR$ bulunur.

Ayrıca her $r \in R$ ve her $\alpha \in 2RcR$ için $r\alpha = r2\sum_{i=1}^{n} a_i c b_i = 2\sum_{i=1}^{n} r a_i c b_i \in 2RcR$ ve benzer şekilde $\alpha r \in 2RcR$ olur. Dolayısıyla $2RcR$, R halkasının bir idealidir.
Eğer $2RcR \neq (0)$ ise o zaman teoremin ispatı biter. Diyelim ki $2RcR = (0)$ olsun. Hipotez gereği $RcR = (0)$ bulunur. Buradan $(Rc)^2 = (0)$ elde edilir. Dolayısıyla Rc, R halkasının nilpotent bir ideali olur. Hipotez gereği R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olamayacağından $Rc = (0)$ olmalıdır. Bu durumda $c \in U$ ile üretilen ideal sıfıra eşittir ve buradan $c = 0$ bulunur.
$a, b \in U$ için $c = 0$ olduğundan,

$$ab + ba = 0 \tag{3.2}$$

olur. $0 \neq a \in U$ olarak alınsın ve $x \in R$ için $b = ax + xa \in U$ şeklinde tanımlansın. O halde (3.2) denkleminden,

$$a\,(ax + xa) + (ax + xa)\,a = 0$$

bulunur. Son ifade açılırsa,

$$a^2x + xa^2 + 2axa = 0 \tag{3.3}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2) denklemi $b = a \in U$ için düzenlenirse, $aa + aa = 2a^2 = 0$ olduğu görülür ve hipotez gereği $a^2 = 0$ bulunur. Elde edilen bu eşitlik, (3.3) denkleminde kullanılırsa her $x \in R$ için $2axa = 0$ olur. Hipotez gereği her $x \in R$ için $axa = 0$ dır. Sonuç olarak $aRa = (0)$ olur. Buradan $(aR)^2 = (0)$ dır. O halde aR, R halkasının nilpotent bir sağ idealidir. Ayrıca $0 \neq a \in U$ olduğu için $aR \neq (0)$ dır. Dolayısıyla Lemma 2.13 den R halkasının sıfırdan farklı nilpotent bir ideali vardır. Ancak hipotez gereği bu durum mümkün değildir. Çelişki, $2RcR = (0)$ olarak alınmasından kaynaklandı. O halde $2RcR \neq (0)$ olmalıdır. Sonuç olarak R halkasının $(0) \neq U$ Jordan ideali, R halkasının $2RcR \neq (0)$ idealini kapsar. □

Sonuç 3.7 *Eğer R, karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka ve U, R halkasının bir Jordan ideali ise o zaman ya $U = (0)$ dır ya da $U = R$ dir. Başka bir deyişle, R, Jordan halka olarak da basittir.*

Şimdi de R halkasının Lie idealleri ile ilgili sonuçlar üzerinde duralım.

R bir halka olsun. A ve B, R halkasının iki alt kümesi ise her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $ab - ba$ elemanları tarafından üretilen R nin toplamsal altgrubunu $[A, B]$ ile gösterelim.

Lemma 3.8 *R halkası, sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x = 0$ iken $x = 0$ olan bir halka olsun. $U \neq (0)$, R halkasının bir Lie ideali ve althalkası ise o zaman $U \subset Z(R)$ dir veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.*

İspat. Kabul edelim ki U althalkası değişmeli olmasın. O halde $xy - yx \neq 0$ olacak şekilde $x, y \in U$ elemanları vardır. $x \in U$ olduğundan her $r \in R$ için $x(yr) - (yr)x \in U$ olur. Buradan,

$$x(yr) - (yr)x = (xy - yx)r + y(xr - rx) \in U$$

dur. Bu ifadede $y, xr - rx \in U$ ve U althalka olduğundan $y(xr - rx) \in U$ olur. Böylece her $r \in R$ için $(xy - yx)r \in U$ bulunur. Yani,

$$(xy - yx)R \subset U \tag{3.4}$$

dur. U Lie ideal olduğundan her $r, s \in R$ için,

$$((xy - yx)r)s - s((xy - yx)r) \in U$$

olur. Bu ifadenin ilk terimi, (3.4) deki bağıntıdan U nun elemanıdır. Böylece $R(xy - yx)R \subset U$ elde edilir. Bu durumda U, R halkasının bir ideali olan $R(xy - yx)R$ yi kapsamış olur.

Eğer $R(xy - yx)R = (0)$ ise o zaman $(R(xy - yx))^2 = (0)$ bulunur. Dolayısıyla $R(xy - yx)$, R halkasının nilpotent bir ideali olur. Ancak R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığı için $R(xy - yx) = (0)$ dır. Buna göre $(xy - yx)$ ile üretilen ideal sıfıra eşit olacağından $xy - yx = 0$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $R(xy - yx)R \neq (0)$ dır. Sonuç olarak U althalkası değişmeli olmadığında R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Şimdi de kabul edelim ki U değişmeli althalka olsun. Bu durumda $U \subset Z$ olduğu gösterilirse ispat biter. $a \in U$, $x \in R$ için $ax - xa \in U$ ve U değişmeli halka olduğundan $[a, ax - xa] = 0$ bulunur. Yani $a\,(ax - xa) - (ax - xa)\,a = 0$ dır. Buradan $x, y \in R$ olmak üzere son eşitlikte x yerine xy yazılırsa,

$$a\,(a\,(xy) - (xy)\,a) = (a\,(xy) - (xy)\,a)\,a \tag{3.5}$$

elde edilir. Ayrıca $a \in U$ ve $x, y \in R$ için,

$$a\,(xy) - (xy)\,a \mp xay = (ax - xa)\,y + x\,(ay - ya) \in U$$

dur. (3.5) de bu eşitlik kullanılırsa,

$$[a, (ax - xa)\,y + x\,(ay - ya)] = 0 \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) daki ifade U althalkasının değişmeli olduğu kullanılarak açılırsa her $x, y \in R$ için $2\,(ax - xa)\,(ay - ya) = 0$ elde edilir. Hipotezden, her $x, y \in R$ için $(ax - xa)\,(ay - ya) = 0$ dır. Bu ifadede $r \in R$ olacak şekilde y yerine rx yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= (ax - xa)\,(a\,(rx) - (rx)\,a) \\ &= (ax - xa)\,[(ar - ra)\,x + r\,(ax - xa)] \\ &= (ax - xa)\,(ar - ra)\,x + (ax - xa)\,r\,(ax - xa) \\ &= (ax - xa)\,r\,(ax - xa) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece her $x \in R$ için $(ax - xa)\,R\,(ax - xa) = (0)$ elde edilir. Yani her $x \in R$ için $((ax - xa)\,R)^2 = (0)$ bulunur. $(ax - xa)\,R$, R halkasının nilpotent bir ideali olur. R halkasında sıfırdan farklı nilpotent ideal bulunmadığından her $x \in R$ için $(ax - xa)\,R = (0)$ dır. Buna göre $(ax - xa)$ ile üretilen ideal de sıfıra eşit olacağından her $x \in R$ için $ax - xa = 0$ olur. Böylece $a \in Z$ olduğu görülür. Bunu her $a \in U$ için yapabileceğimizden $U \subset Z$ bulunur.
$\square$

Lemma 3.9 *R halkası, sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x = 0$ iken $x = 0$ olan bir halka olsun. Eğer R halkasının bir a elemanı, her $x \in R$ için $ax - xa$ ile değişmeli ise o zaman a, R halkasının merkezindedir.*

İspat. Lemma 3.8 in ispatının son kısmında yapılanlar, bu lemmanın ispatını verir. □

Sonuç 2.63 de asal halkaların türevleri kullanılarak yukarıdaki lemmanın farklı bir ifadesi verilmiştir. Ayrıca 1970 yılında Herstein, [27] deki makalesinde "R halkası 2-burulmasız yarı asal bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer R halkasının bir t elemanı, her $u \in U$ için $tu - ut$ ile değişmeli ise o zaman t, U.nun bütün elemanlarıyla değişmelidir." teoremini vererek R halkasının bir Lie ideali için yukarıdaki lemmanın bir genellemesini yapmıştır.

Lemma 3.8 in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.10 *R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka olsun. U, R halkasının herhangi bir Lie ideali ve althalkası ise o zaman $U = R$ dir veya $U \subset Z$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki U althalkası değişmeli olmasın. O halde $ab - ba \neq 0$ olacak şekilde $a, b \in U$ elemanları mevcuttur. U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $x \in R$ olmak üzere $a(bx) - (bx)a \in U$ dur. Buradan,

$$a(bx) - (bx)a = (ab - ba)x + b(ax - xa) \in U$$

eşitliği sağlanır. U, R nin bir althalkası olduğundan, $b(ax - xa) \in U$ dur. Böylece her $x \in R$ için $(ab - ba)x \in U$ elde edilir. Yani her $a, b \in U$ için,

$$(ab - ba)R \subset U \tag{3.7}$$

bulunur. U, R nin Lie ideali olduğundan her $a, b \in U$ ve her $x, y \in R$ için,

$$((ab - ba)x)y - y((ab - ba)x) \in U \tag{3.8}$$

olur. (3.8) deki ifadenin ilk terimi (3.7) deki bağıntıdan U dadır. O halde her $a, b \in U$ için $R(ab - ba)R \subset U$ elde edilir. Sonuç olarak U, R halkasının sıfırdan farklı $R(ab - ba)R$ idealini kapsar. R bir basit halka olduğundan $R(ab - ba)R = R$ dir. Buradan da $U = R$ olduğu görülür.

Şimdi de kabul edelim ki U değişmeli althalka olsun. Bu kısım için yapılacak olan ispat, Lemma 3.8 in ispatının son kısmındaki yolu izler. Buradan da $U \subset Z$ olduğu sonucuna varılır. $\square$

R herhangi bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $T(U) = \{x \in R \mid [x, R] \subset U\}$ şeklinde bir küme tanımlayalım.

Lemma 3.11 *R herhangi bir halka olsun. Eğer U, R halkasının bir Lie ideali ise o zaman $T(U)$, R nin hem Lie ideali hem de althalkasıdır. Üstelik, $U \subset T(U)$ olur.*

İspat. U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $U \subset T(U)$ bulunur. $[T(U), R] \subset U \subset T(U)$ olacağı için $T(U)$, R halkasının bir Lie idealidir.
Şimdi kabul edelim ki $a, b \in T(U)$ olsun. Her $r \in R$ için,

$$(a+b)r - r(a+b) = (ar - ra) + (br - rb)$$

ve

$$(ab)r - r(ab) = \{a(br) - (br)a\} + \{b(ra) - (ra)b\}$$

eşitlikleri sağlanır. Eğer bu eşitliklerde $a, b \in T(U)$ olduğu kullanılırsa sırasıyla $[a+b, R] \subset U$ ve $[ab, R] \subset U$ olduğu görülür. Buradan da $a+b$, $ab \in T(U)$ elde edilir. Yani $T(U)$, R nin bir althalkası olur. $\square$

Teorem 3.12 *R, karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka olsun. U, R halkasının bir Lie ideali ise o zaman ya $U \subset Z$ dir ya da $U \supset [R, R]$ olur.*

İspat. Lemma 3.11 gereği $T(U)$, R nin hem Lie ideali hem de althalkasıdır. Buna göre, Teorem 3.10 dan $T(U) \subset Z$ dir veya $T(U) = R$ olur.

$T(U) = R$ ise $T(U)$ kümesinin tanımı gereği $[R, R] \subset U$ bulunur.
$T(U) \subset Z$ ise $U \subset T(U)$ olduğundan $U \subset Z$ elde edilir. □

Sonuç 3.13 *R halkası değişmeli olmayan karakteristiği 2 den farklı bir basit halka ise o zaman $[R, R]$ tarafından üretilen althalka, R nin kendisidir.*
İspat. U, R halkasının $[R, R]$ yi kapsayan toplamsal bir altgrubu olmak üzere,

$$[[R, R], R] \subset [U, R] \subset [R, R] \subset U$$

olduğundan $[U, R] \subset U$ dur. R halkasının $[R, R]$ yi kapsayan herhangi bir toplamsal altgrubunun, R nin bir Lie ideali olduğu açıktır. Böylece $[R, R]$ tarafından üretilen althalka aynı zamanda R nin Lie ideali olur. O halde Teorem 3.10 gereği bu althalka ya R nin merkezindedir ya da R nin kendisidir. Eğer $[R, R]$ tarafından üretilen althalka, R nin merkezinde ise $[R, R] \subset Z$ bulunur.
O halde her $a \in R$ elemanı, her $x \in R$ için $ax - xa$ ile değişmeli olur. Lemma 3.9 gereği $a \in Z$ elde edilir. Buradan $R \subset Z$ olduğu görülür. Ancak bu durum hipotezle çelişir. O halde $[R, R]$ tarafından üretilen althalka, R nin kendisine eşittir. □

Şimdi ise Teorem 3.10 da verilen halkanın karakteristiğinin 2 olduğunu kabul edelim. Buna göre F_2, karakteristiği 2 olan bir F cismi üzerindeki tüm 2×2 tipinde matrislerin halkası ve $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$ olsun. U, F_2 nin hem Lie ideali hem de althalkasıdır. Ancak ne $U \subset Z(F_2)$ dir ne de $U = F_2$ olur. O halde Teorem 3.10 un hipotezinde yer alan karakteristik koşulu değiştirilemez. Amacımız, bu örneğin geçerli tek karşıt örnek olduğunu göstermektir.

R halkası karakteristiği 2 olan bir basit halka olsun. U, R nin hem Lie ideali hem de althalkası olmak üzere $U \neq R$ ve $U \nsubseteq Z$ olduğunu kabul edelim.
U althalkası değişmeli değil ise Lemma 3.8 in ispatındaki (3.4) bağıntısından her $x, y \in U$ için $(xy + yx) R \subset U$ bulunur. U, R nin Lie ideali olduğundan

her $x, y \in U$ ve her $r, s \in R$ için $((xy - yx)\, r)\, s - s\, ((xy - yx)\, r) \in U$ dur ve buradan $R\,(xy + yx)\, R \subset U$ elde edilir. Sonuç olarak U althalkası değişmeli olmadığında U, R halkasının sıfırdan farklı $R\,(xy + yx)\, R$ idealini kapsar. R basit halka olduğundan bu ideal R ye eşittir. Böylece $U = R$ olduğu görülür ki bu da kabul ile çelişir. Bu durumda U, R nin değişmeli bir althalkası olarak kabul edilmelidir. O halde her $x, y \in U$ için $xy + yx = 0$ şeklinde alınabilir.
Aynı zamanda $U \nsubseteq Z$ olarak kabul ettiğimizden Z de olmayan bir $a \in U$ elemanı mutlaka vardır. U, R halkasının Lie ideali olduğundan her $s \in R$ için $as + sa \in U$ olur ve buradan $a\,(as + sa) + (as + sa)\, a = 0$ elde edilir. Bu eşitlik, R nin karakteristiği 2 olan bir halka olduğu kullanılarak açılırsa $a^2 \in Z$ bulunur. O halde her $r \in R$ için $ar + ra \in U$ olduğunda $(ar + ra)^2 \in Z$ olacağı açıkça görülür.
$Z = (0)$ ise her $r \in R$ için $(ar + ra)^2 = 0$ olur. Yani,

$$0 = (ar + ra)^2 = arar + arra + raar + rara$$

dır. Aynı zamanda $a^2 = 0$ olacağından her $r \in R$ için $arar + arra + rara = 0$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafı sağdan ar ile çarpılır ve tekrar $a^2 = 0$ olduğu kullanılırsa her $r \in R$ için $(ar)^3 = 0$ elde edilir. Böylece R halkasının bir sağ ideali olan aR nin her elemanının kübü sıfır olur. O halde Lemma 3.1 gereği R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali vardır. Ancak bu durum R nin basit halka oluşuyla çelişir. Bu yüzden $Z \neq (0)$ olarak alınmalıdır.

Yukarıda yapılanları özetlersek, R halkası karakteristiği 2 olan bir basit halka olduğunda $0 \neq a^2 \in Z$ ve her $r \in R$ için $(ar + ra)^2 \in Z$ olacak şekilde R halkasının bir $a \in U$, $a \notin Z$ elemanı vardır. R halkasının yapısını tam olarak belirleyebilmek için aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.14 *R halkası, karakteristiği 2 olan bir basit halka olsun. $a^2 \in Z$ ve her $x \in R$ için $(ax + xa)^2 \in Z$ olacak şekilde bir $a \in R$, $a \notin Z$ bulunduğunu varsayalım. Bu durumda R, Z üzerinde 4-boyutlu olur.*

İspat. $Z = (0)$ ise hipotez gereği hem $a^2 = 0$ dır hem de her $x \in R$ için $(ax + xa)^2 = 0$ olur. Böylece her $x \in R$ için $(ax)^3 = a(ax + xa)^2 x = 0$ elde edilir. Buradan aR sağ ideali, her $u \in aR$ için $u^3 = 0$ şartını sağlar. Lemma 3.1 gereği R halkası sıfırdan farklı nilpotent ideal içerir. Ancak bir basit halkada bu durum mümkün olamayacağından $Z \neq (0)$ olarak alınmalıdır.

R bir basit halka ve $Z \neq (0)$ olduğundan Teorem 2.43 gereği R halkasının merkezi bir cisimdir. O halde R halkası birimlidir.

$a \in R$ için $a^2 = 0$ ise R halkasının $b^2 = 1$ ile her $x \in R$ için $(bx + xb)^2 \in Z$ şartlarını sağlayan bir $b = a + 1$ elemanı mevcuttur. Ayrıca $b \in R$, $b \notin Z$ dir ve $b^2 = 1$ olduğundan $b^2 \in Z$ olur. Ancak $a^2 = 0$ iken $b \in R$ ile başlangıç koşullarına geri dönmüş olduk. Bu durumda $0 \neq a^2 \in Z$ alabiliriz.

Eğer Z', Z nin bir cisim genişlemesi ise o zaman Teorem 2.57 den de görüleceği gibi $R' = R \otimes_Z Z'$ basit halka olur. Üstelik Lemma 2.58 gereği R' nün Z' üzerindeki boyutu ile R nin Z üzerindeki boyutu aynıdır. Yani $\dim_{Z'} R' = \dim_Z R$ dir. Böylece R halkası üzerindeki koşullar R' halkasına taşınmış olur. O halde tüm işlemleri R' halkasında yapabiliriz.

$0 \neq a^2 = \alpha \in Z$ ve $Z' = Z(\sqrt{\alpha})$ olsun. R' halkasında $\beta^2 = \alpha$ ve $\beta \in Z'$ olacak şekilde bir $b = a/\beta$ elemanı, $b^2 = 1$ ve her $x' \in R'$ için $(bx' + x'b)^2 \in Z'$ şartlarını sağlar. O halde, genelliği bozmadan, her $x \in R$ için $(ax + xa)^2 \in Z$ ve $a^2 = 1$ şartlarını sağlayan bir $a \in R$, $a \notin Z$ elemanının varlığını kabul edebiliriz.

R halkası birimli ve basit olduğundan primitif halkadır. O halde R halkasının bir basit faithful R-modülü vardır. V yi R halkasının bir faithful basit R-modülü olarak alalım. Schur's lemmadan (Teorem 2.40) $D = Hom_R(V, V)$ bir bölümlü halkadır. Aynı zamanda V yi D bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünebiliriz. Böylece Teorem 2.49 gereği R, bir bölümlü D halkası üzerindeki bir V vektör uzayının lineer transformasyonlarının bir yoğun halkasına izomorf olur.

İlk olarak amacımız, V vektör uzayının D üzerinde 2-boyutlu olduğunu göstermektir.

R halkasında bir $a+1 \neq 0$ elemanı için $(a+1)^2 = a^2+1 = 0$ olduğundan R halkası sıfır bölenli bir halka olur. V vektör uzayı D üzerinde 1-boyutlu olsa, Teorem 2.50 ve Teorem 2.51 gereği $R \cong D$ bulunur. Ancak R halkasında sıfır bölen bulunduğundan R nin bir bölüm halkası olması beklenemez. Dolayısıyla V vektör uzayı, D üzerinde en az 2-boyutlu olur. Diyelim ki $\dim_D V > 2$ olsun.

Öncelikle, V vektör uzayının v_1, $v_2 = v_1 a$, v_3, $v_4 = v_3 a$ vektörleri, D üzerinde lineer bağımsız olacak şekilde $v_1, v_3 \in V$ bulunabileceğini kabul edelim.

R halkası V nin endomorfizmalarının yoğun bir halkası olduğundan $v_1 x = 0$, $v_2 x = 0$, $v_3 x = v_3$, $v_4 x = v_1$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Böylece $v_1(ax+xa) = v_1 ax + v_1 xa = v_2 x + 0 = 0$ elde edilir. $(ax+xa)^2 \in Z$ ve $v_1(ax+xa)^2 = 0$ olduğundan $(ax+xa)^2 = 0$ dır. Bununla birlikte $v_3(ax+xa) = v_3 ax + v_3 xa = v_4 x + v_3 a = v_1 + v_4$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} 0 &= v_3(ax+xa)^2 = v_3(ax+xa)(ax+xa) = (v_1+v_4)(ax+xa) \\ &= v_1 ax + v_1 xa + v_4 ax + v_4 xa = v_2 x + 0 + v_3 x + v_1 a \\ &= 0 + 0 + v_3 + v_2 = v_3 + v_2 \end{aligned}$$

bulunur. Ancak v_2 ile v_3 vektörleri D üzerinde lineer bağımsız olduklarından $v_3 + v_2 \neq 0$ dır. Bu durumda çelişki elde edilir. Çelişkinin nedeni ise V vektör uzayından alınan v_1, v_2, v_3, v_4 şeklindeki dört vektörün de D üzerinde lineer bağımsız olarak seçilmesidir.

O halde V vektör uzayının yalnızca $v_1, v_2 = v_1 a$ ve v_3 vektörleri D üzerinde lineer bağımsız olsun. $v_4 = v_3 a \in V$ vektörü ise lineer bağımsız v_1, v_2, v_3 vektörlerinin bir lineer birleşimi şeklinde yazılsın. Yani $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in D$ olmak üzere,

$$v_3 a = v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + v_3\lambda_3 \tag{3.9}$$

eşitliği sağlansın. D, R halkasının V üzerindeki değişmeli halkası olduğundan ve $a^2 = 1$ alındığından (3.9) denklemi a ile sağdan çarpılırsa,

$$v_3 = (v_1 a)\lambda_1 + (v_2 a)\lambda_2 + (v_3 a)\lambda_3$$

elde edilir. $v_2 = v_1 a$ ve $v_2 a = v_1 a^2 = v_1$ olduğundan,

$$v_3 = v_2\lambda_1 + v_1\lambda_2 + v_3 a\lambda_3 \tag{3.10}$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$v_3 a + v_3 = v_1\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) + v_2\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) + v_3\left(1 + \lambda_3\right) + v_3 a\left(1 + \lambda_3\right)$$

olur ve buradan $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = 1$ bulunur. Böylece $v_3 a = \left(v_1 + v_2\right)\lambda + v_3$ elde edilir. Her $v \in V$ için $\lambda\left(v\right) \in D$ olmak üzere,

$$va = \left(v_1 + v_2\right)\lambda\left(v\right) + v$$

olur. Ayrıca $\left(ay + ya\right)^2 \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in R$ elemanı mevcuttur. Aksi halde ispatın başında olduğu gibi çelişkiye varılır. Bu durumda $\left(ay + ya\right)^2 \neq 0 \in Z$ ise $\left(ay + ya\right)^2 = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde $y \in R$ olmak üzere,

$$v\left(ya\right) = \left(v_1 + v_2\right)\lambda\left(vy\right) + vy$$

ile

$$v\left(ay\right) = \left(\left(v_1 + v_2\right)\lambda\left(v\right) + v\right)y = \left(v_1 + v_2\right)\lambda\left(v\right)y + vy$$

eşitlikleri toplandığında elde edilen son eşitlik,

$$v\left(ay + ya\right) = \left(v_1 + v_2\right)\lambda\left(vy\right) + \left(v_1 + v_2\right)\lambda\left(v\right)y$$

şeklinde olur. Buradan,

$$v = v\left(ay + ya\right)^2 = \left(v_1 + v_2\right)\left(ay + ya\right)\lambda\left(vy\right) + \left(v_1 + v_2\right)y\left(ay + ya\right)\lambda\left(v\right)$$

dir. Bu durumda $u_1 = \left(v_1 + v_2\right)\left(ay + ya\right)$ ile $u_2 = \left(v_1 + v_2\right)y\left(ay + ya\right)$ vektörleri, V nin D üzerinde bir bazını oluşturur. Ancak bu durum v_1, v_2 ve v_3 vektörlerinin D üzerinde lineer bağımsız oluşuyla çelişir.

Şimdi de $v, w \in V$ alınsın. O halde V vektör uzayının v, va ve w elemanları D üzerinde lineer bağımlıdır. $\lambda \in D$ için $va \neq v\lambda$ olacak şekilde bir $v \in V$ elemanı vardır. Aksi halde herhangi bir $v \in V$ için $v = va^2 = \left(v\lambda\right)a = \left(va\right)\lambda = v\lambda^2$

olur ve buradan $\lambda^2 = 1$ bulunur. R halkasının karakteristiği 2 olduğundan $\lambda = 1$ dir. $\lambda = 1$ olması $a = 1$ olmasını gerektirir. Bu ise hipotezdeki $a \notin Z$ koşulu ile çelişir. O halde $\lambda \in D$ için $va \neq v\lambda$ olacak şekilde en az bir $v \in V$ elemanı vardır. Yani V nin v ile va vektörleri D üzerinde lineer bağımsız olur. Üstelik V nin v, va ve w vektörleri D üzerinde lineer bağımlı olduklarından her $w \in V$ vektörü lineer bağımsız v ve va vektörlerinin bir lineer birleşimi şeklinde yazılır. O halde $\{v, va\}$ kümesi, V nin D üzerinde bir bazını oluşturur. Böylece V vektör uzayı, D üzerinde 2-boyutludur.

Teorem 2.50 ve Teorem 2.51 gereği R, D üzerindeki tüm 2×2 tipinde matrislerin halkası olur.

İspatın tamamlanabilmesi için sadece D nin değişmeli olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a^2 = 1$ ve her $x \in R$ için $(ax + xa)^2 \in Z$ olacak şekilde R halkasından bir $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ elemanı alınsın. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in D$ dir.

Eğer $r, s \in D$ için $x = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ olarak seçilirse o zaman,

$$ax + xa = \begin{pmatrix} \alpha r + r\alpha + s\gamma & \alpha s + r\beta + s\delta \\ \gamma r & \gamma s \end{pmatrix}$$

bulunur ve buradan $(ax + xa)^2$ hesaplandığında elde edilecek matrisin 2. satır, 1. sütunundaki eleman $\gamma r\alpha r + \gamma r^2\alpha + \gamma rs\gamma + \gamma s\gamma r$ şeklinde olur.

$(ax + xa)^2 \in Z$ olduğundan her $r, s \in D$ için,

$$\gamma r\alpha r + \gamma r^2\alpha + \gamma rs\gamma + \gamma s\gamma r = 0 \tag{3.11}$$

olmalıdır. Son eşitlikte özel olarak $s = 0$ alırsak $\gamma r\alpha r + \gamma r^2\alpha = 0$ olur. Buna göre (3.11) eşitliğinden her $r, s \in D$ için,

$$\gamma rs\gamma + \gamma s\gamma r = 0 \tag{3.12}$$

bulunur. Eğer $0 \neq \gamma \in D$ ise o zaman $\gamma^{-1} \in D$ dir ve $\gamma^{-1}\gamma rs\gamma + \gamma^{-1}\gamma s\gamma r = 0$ olur. Buradan da $rs\gamma + s\gamma r = 0$ elde edilir. Her $r, s\gamma \in D$ için $rs\gamma = s\gamma r$

olacağından D halkası değişmelidir.

Şimdi ise $\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim. Yani R halkasından alınan bir a elemanı $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ şeklinde olsun. Burada $\alpha, \beta, \delta \in D$ dir.

$r, s \in D$ için $x = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ alınırsa, $ax + xa = \begin{pmatrix} \alpha r + r\alpha & \alpha s + r\beta + s\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bulunur ve buradan,

$$(ax + xa)^2 = \begin{pmatrix} (\alpha r + r\alpha)^2 & (\alpha r + r\alpha)(\alpha s + r\beta + s\delta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $(\alpha r + r\alpha)^2 \neq 0 \in Z$ olacağından $(ax + xa)^2 \notin Z$ olur. O halde $\alpha, \beta, \delta \in D$ olmak üzere $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in R$ elemanı ile $r, s \in D$ için $x = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \in R$ elemanını alalım. Bu durumda $ax + xa = \begin{pmatrix} \alpha r + \beta s + r\alpha & r\beta \\ \delta s + s\alpha & s\beta \end{pmatrix}$ olur ve $(ax + xa)^2$ hesaplandığında elde edilecek matrisin 1. satır, 2. sütunundaki eleman $\alpha rr\beta + \beta sr\beta + r\alpha r\beta + r\beta s\beta$ şeklindedir.

$(ax + xa)^2 \in Z$ olduğundan her $r, s \in D$ için,

$$\alpha rr\beta + \beta sr\beta + r\alpha r\beta + r\beta s\beta = 0 \tag{3.13}$$

olmalıdır. Burada özel olarak $s = 0$ alırsak, $\alpha rr\beta + r\alpha r\beta = 0$ buluruz. (3.13) daki eşitlikten her $r, s \in D$ için $\beta sr\beta + r\beta s\beta = 0$ olur.

Eğer $0 \neq \beta \in D$ alınırsa o zaman $\beta^{-1} \in D$ mevcuttur ve böylece $\beta sr\beta\beta^{-1} + r\beta s\beta\beta^{-1} = 0$ olur ki bu da bize her $r, s \in D$ için $\beta sr = r\beta s$ olduğunu söyler. Buna göre her $r, \beta s \in D$ için $(\beta s) r = r (\beta s)$ dir. O halde D halkası değişmelidir.

Eğer $0 = \beta \in D$ ise o zaman R halkasının bir a elemanı $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ şeklinde seçilir. Burada $\alpha, \delta \in D$ dir. $a^2 = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bulunur. Buradan $\alpha^2 = \delta^2 = 1$ olduğu görülür. R halkasının karakteristiği 2 olarak alındığı için $\alpha = \delta = 1$ olmalıdır. Bu da $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ olmasını gerektirir. Oysa $a \notin Z$

olması gerekiyordu. O halde $\beta = 0$ olarak alamayız.
Sonuç olarak D nin bir cisim olduğunu göstermiş olduk. Dolayısıyla R halkası Z üzerinde 4-boyutlu olur. $\square$

Yukarıda elde edilen son üç teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi oluşturalım.

Teorem 3.15 *R bir basit halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. R halkasının karakteristiği* 2 *ve* $\dim_Z R = 4$ *olmadıkça $U \subset Z$ ya da $U \supset [R, R]$ dir.*

Sonuç 3.16 *Eğer R değişmeli olmayan bir basit halka ise o zaman $[R, R]$ tarafından üretilen althalka R nin kendisidir.*

Yukarıda elde edilenlerin bir genellemesi olarak involüsyonlu basit halkalar ile ilgili iki teorem ispatlanacaktır.

Tanım 3.17 R herhangi bir halka olsun. $* : R \to R$ ile tanımlı bir dönüşüm her $a, b \in R$ için,

(i) $a^{**} = a$

(ii) $(a + b)^* = a^* + b^*$

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$

koşullarını sağlıyor ise bu dönüşüme *involüsyon* adı verilir. Üzerinde böyle bir $*$ dönüşümü bulunan halkaya *involüsyonlu halka* denir.

R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka olsun. $S = \{a \in R \mid a^* = a\}$ ve $K = \{a \in R \mid a^* = -a\}$ kümeleri tanımlansın. S, R halkasının simetrik elemanlarının kümesi, K ise R halkasının yarı-simetrik elemanlarının kümesidir.

Her $x \in R$ için,

$$(x + x^*)^* = x^* + (x^*)^* = x^* + x = x + x^*$$

olduğundan $x + x^* \in S$ dir ve

$$(x - x^*)^* = x^* - (x^*)^* = x^* - x = -(x - x^*)$$

olduğundan $x - x^* \in K$ dır. R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan involüsyonlu bir basit halka olduğunda R nin bir $2R$ ideali, R ye eşit olur. Buna göre her $x \in R$ için,

$$x = \frac{x + x^*}{2} + \frac{x - x^*}{2}$$

şeklinde ifade edilebileceğinden $R = S + K$ ve $S \cap K = (0)$ dır. Üstelik S, R halkasının toplamsal bir altgrubu olmak üzere her $r, s \in S$ için,

$$\begin{aligned}(rs + sr)^* &= (rs)^* + (sr)^* \\ &= s^* r^* + r^* s^* \\ &= sr + rs = rs + sr\end{aligned}$$

olacağından $rs + sr \in S$ dir. Böylece S, R halkasının bir Jordan althalkasıdır. K da R halkasının toplamsal bir altgrubu olmak üzere her $m, n \in K$ için,

$$\begin{aligned}(mn - nm)^* &= (mn)^* - (nm)^* \\ &= n^* m^* - m^* n^* \\ &= (-n)(-m) - (-m)(-n) \\ &= nm - mn = -(mn - nm)\end{aligned}$$

olacağından $mn - nm \in K$ dır. O halde K, R halkasının bir Lie althalkasıdır. Ayrıca $s \in S$ ve $m \in K$ ise,

$$\begin{aligned}(sm - ms)^* &= (sm)^* - (ms)^* = m^* s^* - s^* m^* \\ &= (-m)\, s - s\,(-m) = -ms + sm \\ &= sm - ms\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $sm - ms \in S$ olur.

Teorem 3.18 *R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan involüsyonlu bir basit halka ve S, R halkasının simetrik elemanlarının kümesi olsun. S kümesi tarafından üretilen $\overline{S}$, R nin bir althalkasıdır. O halde R merkezi üzerinde 4 (veya 4 den daha az) boyutlu olmadıkça $\overline{S}$, R halkasına eşit olur.*

İspat. Öncelikle $\overline{S}$ nin R halkasının bir Lie ideali olduğunu gösterelim. $\left[\overline{S}, S\right] \subset \overline{S}$ olduğu açıktır. $k \in K$ ve $\overline{s} \in \overline{S}$ alınsın. Buna göre $i = 1, 2, \ldots$ için $s_i \in S$ olacak şekilde $\overline{S}$ kümesinin bir $\overline{s} = s_1 s_2 \ldots s_n$ elemanını seçerek her $k \in K$ için $[\overline{s}, k] \in \overline{S}$ olduğunu gösterelim.

$$[s_1 s_2 \ldots s_n, k] = [s_1, k]\, s_2 \ldots s_n + s_1 [s_2, k]\, s_3 \ldots s_n + \ldots + s_1 \ldots s_{i-1} [s_i, k]\, s_{i+1} \ldots s_n$$

$$+ \ldots + s_1 s_2 \ldots s_{n-1} [s_n, k] \in \overline{S}$$

dir. Böylece $\left[\overline{S}, K\right] \subset \overline{S}$ olur. $R = S + K$ olduğundan,

$$\left[\overline{S}, R\right] = \left[\overline{S}, S + K\right] = \left[\overline{S}, S\right] + \left[\overline{S}, K\right] \subset \overline{S}$$

bulunur. Bu durumda $\overline{S}$, R halkasının bir Lie idealidir. Hipotezden $\overline{S}$ aynı zamanda R nin althalkasıdır. Buna göre Teorem 3.10 gereği ya $\overline{S} = R$ dir ya da $\overline{S} \subset Z$ olur.

İlk olarak $\overline{S} \subset Z$ olduğu durumu ele alalım. $S \subset \overline{S}$ olduğundan $S \subset Z$ bulunur. $s \in S \subset Z$ ve $k \in K$ olmak üzere R halkasının bir $a = s + k$ elemanı verilsin. Buradan $(a - s)^2 = (s + k - s)^2 = k^2$ dir. Her $k \in K$ için $(kk)^* = k^* k^* = (-k)(-k) = kk$ olacağından $(a - s)^2 = k^2 \in S \subset Z$ dir. Sonuç olarak,

$$a^2 - a\,(2s) + \left(s^2 - k^2\right) = 0$$

bulunur. Böylece R halkasının her a elemanı, Z üzerinde kuadratik bir eşitlik sağlar. Burada $Z \neq (0)$ alınmalıdır. Aksi halde $\overline{S} \subset Z$ oluşu anlamsız kalır. R bir basit halka olduğundan Teorem 2.43 gereği Z bir cisimdir. O halde her elemanı, merkezi üzerinde 2. dereceden bir eşitlik sağlayan R halkası, birimli ve basit olduğundan primitif halkadır. Bu durumda Teorem 2.55 gereği R halkası Z üzerinde en çok 4-boyutlu olur. □

Teorem 3.19 *R halkası, merkezi $Z = (0)$ şeklinde olan veya* $\dim_Z R > 4$ *olan involüsyonlu bir basit halka ise o zaman tüm simetrik elemanlarla değişmeli olan elemanlar, sadece Z de bulunan elemanlardır.*

İspat. Her $s \in S$ için $[a, s] = 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ elemanı verilsin. Eğer R halkasının karakteristiği 2 den farklı ise $\dim_Z R > 4$ olduğu durumda Teorem 3.18 gereği $\overline{S} = R$ olur.

S kümesi tarafından üretilen $\overline{S}$ kümesinden bir $\overline{s}$ elemanı alalım. Bu eleman $i = 1, 2, \ldots, n$ için $s_i \in S$ olacak şekilde $\overline{s} = s_1 s_2 \ldots s_n$ şeklinde olsun. Her $\overline{s} \in \overline{S}$ için,

$$\begin{aligned} [a, \overline{s}] &= [a, s_1 s_2 \ldots s_n] \\ &= [a, s_1]\, s_2 \ldots s_n + s_1\, [a, s_2]\, s_3 \ldots s_n + \ldots + s_1 \ldots s_{n-1}\, [a, s_n] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\overline{S} = R$ olduğundan her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ dır. Dolayısıyla $a \in Z$ olur ve istenen elde edilir. Şimdi de kabul edelim ki R halkasının karakteristiği 2 olsun. $T = \{r \in R \mid rs = sr,\ s \in S\}$ kümesi tanımlansın. T, R nin bir althalkasıdır.

$x \in R$ ve $a \in T$ verilsin. $(x + x^*)^* = x^* + (x^*)^* = x^* + x$ olduğundan $x + x^* \in S$ dir. $a \in T$ olduğundan $a\,(x + x^*) = (x + x^*)\,a$ eşitliği sağlanır. Buradan $ax + ax^* = xa + x^*a$ elde edilir. R halkasının karakteristiğinin 2 olduğu kullanılırsa son eşitlikten,

$$ax + xa = ax^* + x^*a \tag{3.14}$$

bulunur.

Şimdi de T kümesinin R nin bir Lie ideali olduğunu gösterelim. Bunun için $a \in T$, $y \in R$ ve $s \in S$ verilsin. O halde,

$$\begin{aligned} (ay + ya)\, s &= ays + yas = ays + ysa \\ &= a\,(ys + sy^*) + asy^* + ysa \\ &= (ys + sy^*)\, a + say^* + ysa \\ &= ysa + sy^*a + say^* + ysa \\ &= sy^*a + say^* \\ &= s\,(y^*a + ay^*) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. (3.14) deki eşitlikten $(ay+ya)\,s = s\,(y^*a + ay^*) = s\,(ya+ay)$ bulunur. Böylece T kümesi, R halkasının hem Lie ideali hem de althalkası olur. $\dim_Z R$ üzerindeki varsayımımız gereği Teorem 3.15 ile Sonuç 3.16 dan $T \subset Z$ veya $T = R$ olur.

$T = R$ ise T kümesinin tanımından $S \subset Z$ bulunur. Bu da $\dim_Z R \leq 4$ olmasını gerektirir. Ancak bu durum hipotezle çelişir. O halde $T \subset Z$ olmalıdır. Dolayısıyla R halkasının karakteristiği 2 olduğunda da $a \in Z$ sonucuna varılır. □

R halkasının her $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanları tarafından üretilen toplamsal altgrubu $[R, R]$ ile R halkasının $[R, R]$ yi içeren toplamsal her altgrubu, R halkasının Lie idealleridir. Şimdi ise $[R, R]$ halkasının Lie yapısı araştırılacaktır.

Lemma 3.20 *R halkası, sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan bir halka olsun. O halde $[R, R]$ nin tüm elemanları ile değişmeli olan R halkasının herhangi bir elemanı, R nin merkezindedir.*

İspat. $a \in R$ verilsin ve a elemanı, $[R, R]$ nin tüm elemanları ile değişmeli olsun. Her $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx \in [R, R]$ olmak üzere $a \in R$, $xy - yx$ ile değişmelidir.

Aynı zamanda $a \in R$, $[x, xy] = x\,(xy) - (xy)\,x = x\,(xy - yx) \in [R, R]$ ile de değişmelidir. Yani $[a, x\,(xy - yx)] = 0$ dır. Bu ifade her $x, y \in R$ için $[a, xy - yx] = 0$ olduğu kullanılarak açılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= ax\,(xy-yx) - x\,(xy-yx)\,a \\ &= ax\,(xy-yx) - xa\,(xy-yx) \\ &= (ax-xa)\,(xy-yx) \end{aligned} \tag{3.15}$$

bulunur. Son eşitlikte y yerine ya yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= (ax-xa)\,(x\,(ya) - (ya)\,x) \\ &= (ax-xa)\,((xy-yx)\,a + y\,(xa-ax)) \\ &= (ax-xa)\,(xy-yx)\,a + (ax-xa)\,y\,(xa-ax) \end{aligned}$$

olur. (3.15) eşitliği kullanılarak her $y \in R$ için $(xa - ax)\, y\, (xa - ax) = 0$ sonucuna varılır. Yani $(xa - ax)\, R\, (xa - ax) = 0$ dır. Buradan $((xa - ax)\, R)^2 = (0)$ olur. O halde $(xa - ax)\, R$, R halkasının nilpotent bir sağ idealidir. Hipotez gereği R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olamayacağından $(xa - ax)\, R = (0)$ olmalıdır. Buna göre $(xa - ax)$ ile üretilen ideal sıfıra eşit olacağından her $x \in R$ için $xa - ax = 0$ bulunur. Böylece a, R halkasının merkezinde olur. □

Teorem 3.21 *R bir basit halka olsun. Eğer R halkası karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu değil ise o zaman,*

$$[[R, R], [R, R]] = [R, R]$$

olur.

İspat. R halkası değişmeli ise sonuç aşikardır. Diyelim ki R halkası değişmeli olmasın. $[R, R]$, R halkasının her $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanları tarafından üretilen toplamsal bir altgrubu ve Lie idealidir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} [[[R, R], [R, R]], R] &\subset [[[R, R], R], [R, R]] + [[R, R], [[R, R], R]] \\ &\subset [[R, R], [R, R]] \end{aligned}$$

olacağından $[[R, R], [R, R]]$, R halkasının bir Lie idealidir.
Teorem 3.15 gereği ya $[[R, R], [R, R]] \subset Z$ dir ya da $[[R, R], [R, R]] \supset [R, R]$ olur.
Kabul edelim ki $[[R, R], [R, R]] \subset Z$ olsun.
Eğer $[R, R] \subset Z$ ise Sonuç 3.16 gereği R halkası değişmeli bir halka olur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde $[R, R] \nsubseteq Z$ olarak alınmalıdır. Buna göre $a \in [R, R]$, $a \notin Z$ ve $x \in R$ olsun. $\alpha = [a, [a, x]]$ ve $\beta = [a, [a, ax]]$ elemanları, $[[R, R], [R, R]]$ kümesinin elemanlarıdır. Kabul gereği bu elemanların her ikisi de Z dedir. O halde her $a \in [R, R]$, $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} \beta &= [a, [a, ax]] = [a, a\,(ax) - (ax)\,a] = [a, a\,(ax - xa)] \\ &= [a, a\,[a, x]] = a\,(a\,[a, x]) - (a\,[a, x])\,a \\ &= a\,(a\,[a, x] - [a, x]\,a) = a\,[a, [a, x]] = a\alpha \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Eğer $\alpha \neq 0$ ise o zaman $\alpha^{-1} \in Z$ dir ve $\beta = a\alpha$ eşitliğinden $a \in Z$ olduğu görülür. Ancak $a \in [R, R] \nsubseteq Z$ olarak alındığından çelişki elde edilir. O halde $\alpha = 0$ dır. Böylece her $x \in R$ için $[a, [a, x]] = 0$ olur.

R halkasının karakteristiği 2 den farklı alınırsa Lemma 3.9 gerçeklenir ve buradan $a \in Z$ olduğu görülür. Bu durum ise $a \in [R, R] \nsubseteq Z$ oluşuyla çelişir. O halde R halkasının karakteristiği 2 olarak alınmalıdır.

Eğer R halkasının karakteristiği 2 ise o zaman $[a, [a, x]] = 0$ olması $a^2 \in Z$ olmasını gerektirir. Çünkü R halkası karakteristiği 2 olan bir halka olduğunda her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= [a, [a, x]] = [a, ax - xa] = a\,(ax - xa) - (ax - xa)\,a \\ &= a^2x - axa - axa + xa^2 = a^2x - 2axa + xa^2 = a^2x + xa^2 \end{aligned}$$

ve $a^2x = xa^2$ eşitlikleri sağlanır. Böylece her $a \in [R, R]$ için $a^2 \in Z$ olur. Ayrıca her $x \in R$ için $ax - xa \in [R, R]$ olduğundan $(ax - xa)^2 \in Z$ dir. O halde R halkası karakteristiği 2 olan bir basit halka olduğunda $a^2 \in Z$ ve her $x \in R$ için $(ax + xa)^2 \in Z$ olacak şekilde bir $a \in R$, $a \notin Z$ vardır. Böylece Teorem 3.14 gereği $\dim_Z R = 4$ dür. Ancak hipotez gereği R halkası, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4 boyutlu olamaz. Buradaki çelişki $[[R, R], [R, R]] \subset Z$ ifadesinin doğruluğunu kabul etmemizden kaynaklandı. Bu nedenle $[[R, R], [R, R]] \supset [R, R]$ dir ve böylece teorem ispatlanır. □

U, $[R, R]$ halkasının bir Lie ideali olsun ve $T(U) = \{x \in R \mid [x, R] \subset U\}$ kümesi tanımlansın. $T(U)$, R nin bir althalkasıdır. $T(U)$ althalkası ile U Lie ideali arasındaki ilişkiyi aşağıdaki lemma ve teoremler yardımıyla araştıralım.

Lemma 3.22 *U, $[R, R]$ halkasının bir Lie ideali ise o zaman*

(i) $[U, U] \subset T(U)$

(ii) $[U, T(U)] \subset T(U)$

(iii) $[[R, T(U)], T(U)] \subset T(U)$

(iv) $[[T(U), T(U)], R] \subset T(U)$

şartları sağlanır.

İspat. Her şıkkın ispatı Jacobi özdeşliği kullanılarak benzer yollarla yapılır.

(i) $x, y \in U$ ve $a \in R$ olsun. Jacobi özdeşliğinden, $[[x, y], a] = [x, [y, a]] + [y, [a, x]]$ elde edilir. $x \in U$, $[y, a] \in [R, R]$ ve U, $[R, R]$ halkasının Lie ideali olduğundan $[x, [y, a]] \in U$ bulunur. Benzer şekilde $[y, [a, x]] \in U$ olduğu görülür. Böylece $[[U, U], R] \subset U$ olur ve $T(U)$ kümesinin tanımından $[U, U] \subset T(U)$ elde edilir.

(ii) $[[U, T(U)], R] \subset [[U, R], T(U)] + [U, [T(U), R]] \subset U$ dur ve böylece $[U, T(U)] \subset T(U)$ olur.

(iii) $[R, T(U)] \subset U$ bağıntısı ile birlikte (ii) şıkkı kullanılarak,

$$[[R, T(U)], T(U)] \subset [U, T(U)] \subset T(U)$$

elde edilir.

(iv)
$$\begin{aligned} [[T(U), T(U)], R] &\subset [[T(U), R], T(U)] + [T(U), [T(U), R]] \\ &\subset [U, T(U)] + [T(U), U] \end{aligned}$$

olur ve buradan (ii) gereği $[[T(U), T(U)], R] \subset T(U)$ bulunur. □

$A = [T(U), T(U)]$ olsun.

Lemma 3.23 $R[A, A]R \subset U + T(U)$ *dur.*

İspat. $a, b \in A$ olsun. Her $r \in R$ için,

$$[a, b]r = [a, br] - b[a, r] \tag{3.16}$$

eşitliği sağlanır. Lemma 3.22 (iv) gereği $[a, r] \in [[T(U), T(U)], R] \subset T(U)$ olur ve $T(U)$, R nin bir althalkası olduğundan $b[a, r] \in T(U)$ dur. Ayrıca her $r \in R$

için $br \in R$ olacağından $[a, br] \in T(U)$ olur. O halde (3.16) daki eşitliğin sol tarafındaki terim $T(U)$ kümesinin elemanıdır. Yani,

$$[a, b]\, r \in [A, A]\, R \subset T(U)$$

bulunur. Aynı zamanda her $r \in R$ için,

$$r\,[a, b] = [a, rb] - [a, r]\, b$$

eşitliği de sağlanır ve bu eşitlikten benzer şekilde $R\,[A, A] \subset T(U)$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $[R, [A, A]\, R] = R\,[A, A]\, R - [A, A]\, RR$ eşitliği kullanılarak,

$$R\,[A, A]\, R \subset [T(U), R] + [A, A]\, R \subset U + T(U)$$

elde edilir. □

Teorem 3.24 *R bir basit halka ve $U \neq [R, R]$, $[R, R]$ nin bir Lie ideali olsun. R halkası, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu değil ise o zaman*

$$[[[U, U], [U, U]], [[U, U], [U, U]]] = (0)$$

dır.

İspat. $U \neq [R, R]$ olduğundan $T(U) \not\supseteq [R, R]$ olmalıdır. Aksi halde Teorem 3.21 den,

$$U \supset [T(U), R] \supset [[R, R], R] = [R, R]$$

olur. Lemma 3.22 gereği,

$$\begin{aligned}
[U + T(U), U + T(U)] &= [U, U + T(U)] + [T(U), U + T(U)] \\
&= [U, U] + [U, T(U)] + [T(U), U] + [T(U), T(U)] \\
&\subset [U, U] + [U, T(U)] + [T(U), T(U)] \\
&\subset T(U)
\end{aligned}$$

elde edilir ve $T(U) \not\supseteq [R, R]$ olması $U + T(U) \neq R$ olmasını gerektirir. Bir önceki lemmadan $R\,[A, A]\, R \subset U + T(U)$ şartını sağlayan $R\,[A, A]\, R$, aynı zamanda R halkasının bir idealidir. R halkası bir basit halka ve $U+T(U)\neq R$ olduğundan $R[A,A]R=(0)$ dır. Böylece $[A,A]=(0)$ olur. $[U,U]\subset T(U)$ ve $A=[T(U),T(U)]$ olduğu bilindiğinden,

$$\begin{aligned}[[[U,U],[U,U]],[[U,U],[U,U]]] &\subset [[T(U),T(U)],[T(U),T(U)]]\\ &= [A,A]=(0)\end{aligned}$$

elde edilir ve teoremin ispatı biter. □

Lemma 3.25 *R bir basit halka ve $\lambda\neq(0)$, R halkasının bir sol ideali ise o zaman $\lambda+[R,R]=R$ dir.*

İspat. $\lambda+[R,R]\supset\lambda+[\lambda,R]$ olduğu açıktır. $a\in\lambda$, $r\in R$ ise o zaman $ar=(ar-ra)+ra\in\lambda+[\lambda,R]$ olur. Yani $\lambda R\subset\lambda+[\lambda,R]\subset\lambda+[R,R]$ dir. R bir basit halka olduğundan R halkasının λR ideali ya (0) dır ya da R nin kendisine eşittir. $\lambda\neq(0)$ olduğu için $\lambda R\neq(0)$ olacağından $R=\lambda R$ dir ve buradan $R\subset\lambda+[R,R]$ olur. Böylece $\lambda+[R,R]=R$ elde edilir. □

Lemma 3.26 *R bir basit halka ve $U\neq(0)$, $[R,R]$ nin bir Lie ideali olsun. O halde $x\in R$ için $xU=(0)$ ise $x=0$ dır.*

İspat. $\lambda=\{x\in R\mid xU=(0)\}$ kümesi tanımlansın. λ, R halkasının bir sol idealidir. $x\in\lambda$, $a\in[R,R]$ ve $u\in U$ olsun. Buradan,

$$[x,a]u=(xa-ax)u=xau=x(au-ua)=0$$

olacağından $[\lambda,[R,R]]\subset\lambda$ dır. λ, R nin bir sol ideali olduğundan $\lambda[R,R]\subset\lambda$ elde edilir. Eğer $\lambda\neq(0)$ ise, bir önceki lemmadan $R=\lambda+[R,R]$ olur. Böylece $\lambda R=\lambda(\lambda+[R,R])=\lambda^2+\lambda[R,R]\subset\lambda$ bulunur. Dolayısıyla λ, R halkasının iki yanlı idealidir. R halkası basit olduğundan ve $\lambda\neq(0)$ olarak kabul edildiğinden $\lambda=R$ olur. Buradan da $RU=(0)$ olduğu görülür. Ancak bu durum $U\neq(0)$ oluşu ile çelişir. O halde $\lambda=(0)$ olarak alınmalıdır. Bu da $x=0$ olmasını gerektirir. □

Teorem 3.27 *R bir basit halka ve $[U,U]=(0)$ olacak şekilde U, $[R,R]$ nin bir Lie ideali olsun. O halde,*

(i) R halkasının karakteristiği 2 den farklı ise, $U \subset Z$ dir.

(ii) R halkasının karakteristiği 2 ise, her $u \in U$ için $u^2 \in Z$ olur.

İspat. $u \neq 0 \in U$ ve $x \in R$ için $d(x) = ux - xu = [u,x]$ olsun. U nun $[R,R]$ halkasının Lie ideali olduğu kullanılırsa $x,y \in R$ için $[u,[x,y]] \in U$ olacağından ve

$$d(d([x,y])) = d([u,[x,y]]) = [u,[u,[x,y]]] \in [U,U] = (0)$$

eşitlikleri sağlandığından,

$$d^2([x,y]) = 0 \tag{3.17}$$

elde edilir. $z \in R$ ve $v \in U$ olmak üzere (3.17) deki eşitlikte y yerine zv yazılırsa ve $d(v)=0$ ile $d^2([x,z])=0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= d^2([x,zv]) = d^2([x,z]v + z[x,v]) \\
&= d^2([x,z]v) + d^2(z[x,v]) \\
&= d(d([x,z])v + [x,z]d(v)) + d^2(z[x,v]) \\
&= d^2([x,z])v + d([x,z])d(v) + d^2(z[x,v]) \\
&= d^2(z[x,v]) \\
&= d(d(z)[x,v] + zd([x,v])) \\
&= d^2(z)[x,v] + d(z)d([x,v]) + d(z)d([x,v]) + zd^2([x,v]) \\
&= d^2(z)[x,v] + 2d(z)d([x,v]) + zd^2([x,v]) \\
&= d^2(z)[x,v] + 2d(z)d([x,v])
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $x \in [R,R]$ ise $[x,v] \in U$ dur ve buradan $d([x,v]) = 0$ bulunur. Böylece her $z \in R$ için $d^2(z)[U,[R,R]] = (0)$ elde edilir.

Eğer $[U,[R,R]] \neq (0)$ olarak alınırsa $[U,[R,R]]$, $[R,R]$ nin bir Lie ideali olacağından Lemma 3.26 gereği $d^2(z) = 0$ sonucuna varılır.

Her $z \in R$ için $d^2(z) = 0$ olduğundan $[u,[u,z]] = 0$ bulunur ve buradan $u \in U$ elemanı, tüm $uz - zu$ elemanları ile değişmeli olur. Bununla birlikte R halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğunda Lemma 3.9 gereği $U \subset Z$ dir. Eğer R halkasının karakteristiği 2 alınırsa, $u(ux+xu) = (ux+xu)u$ olacağından her

$x \in R$ için $u^2x = xu^2$ eşitliği elde edilir ve buradan her $u \in U$ için $u^2 \in Z$ bulunur.

Diğer taraftan eğer $[U, [R, R]] = (0)$ ise Lemma 3.20 gereği zaten $U \subset Z$ olacaktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Yukarıdaki teoremi kesinleştirmek için aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.28 *R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka olsun. Eğer $[U, U] \subset Z$ olacak şekilde U, $[R, R]$ nin bir Lie ideali ise o zaman $U \subset Z$ dir.*

İspat. U Lie ideali değişmeli iken yani $[U, U] = (0)$ olduğunda Teorem 3.27 gereği $U \subset Z$ bulunur. Diyelim ki $[U, U] \neq (0)$ olsun. Buna göre, $\alpha = [u, v] \neq 0$ olacak şekilde $u, v \in U$ elemanları mevcuttur. Üstelik hipotez gereği $\alpha \in Z$ dir.

İspatı olmayana ergi metodu ile yapalım. $U \nsubseteq Z$ olsun. $x \in R$ olmak üzere $d(x) = ux - xu$ olarak tanımlansın. Hipotez gereği $d(v) = \alpha \neq 0 \in Z$ dir. Her $x \in R$ için $d^2(x) \neq 0$ dır. Aksi halde her $x \in R$, $v \in U$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(xv) = d([u, xv]) \\ &= d([u, x]v + x[u, v]) = d(d(x)v + xd(v)) \\ &= d^2(x)v + 2d(x)d(v) + xd^2(v) = 2\alpha d(x) \end{aligned}$$

olur. $0 \neq 2\alpha \in Z$ olacağından bu eleman tersinirdir ve böylece yukarıdaki eşitlikten her $x \in R$ için $d(x) = 0$ bulunur. Ancak bu durum $d(v) = \alpha \neq 0$ oluşu ile çelişir. O halde her $x \in R$ için $d^2(x) \neq 0$ alınmalıdır.

Şimdiki iddiamız ise her $x \in R$ için $d^2(x) \notin Z$ olmasıdır. Bunun için $y \in R$ olmak üzere $d^2(y) = \beta \neq 0 \in Z$ olduğunu kabul edelim. O halde $u \in U$, $y \in R$ için,

$$\begin{aligned} d^2(uy) &= d(d(u)y + ud(y)) = d^2(u)y + 2d(u)d(y) + ud^2(y) \\ &= ud^2(y) = u\beta \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Z bir cisim ve $\beta \neq 0 \in Z$ olduğundan $\beta^{-1} \in Z$ dir. Böylece $u\beta \in Z$ bağıntısından $u \in Z$ bulunur. Ancak bu durum $U \nsubseteq Z$ oluşuyla çelişir.

O halde her $x \in R$ için $d^2(x) \notin Z$ alınmalıdır.

Aynı zamanda U, $[R,R]$ nin bir Lie ideali olduğundan $d^2(x) \in U$ olur. Buradan hipotez gereği $[u, d^2(x)] = \gamma \in [U,U] \subset Z$ olduğu görülür. Benzer şekilde $[v, d^2(ux)] = \delta \in Z$ ve $[v, d^2(x)] = \theta \in Z$ dir. Her $x \in R$ için $d^2(x) \notin Z$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \delta &= \left[v, d^2(ux)\right] = \left[v, ud^2(x)\right] = [v,u]\, d^2(x) + u\left[v, d^2(x)\right] \\ &= -\alpha d^2(x) + \theta u \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha \neq 0 \in Z$ olmak üzere $\lambda = \theta/\alpha \neq 0 \in Z$ ve $\mu = -\delta/\alpha \neq 0 \in Z$ için son eşitlik her $x \in R$ için $d^2(x) = \mu + \lambda u$ şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde $\mu_1, \lambda_1 \in Z$ için $d^2(ux) = \mu_1 + \lambda_1 u$ şeklindedir. Ancak,

$$\mu_1 + \lambda_1 u = d^2(ux) = ud^2(x) = u(\mu + \lambda u) = \lambda u^2 + \mu u$$

eşitlikleri sağlandığından ve burada $\lambda \neq 0 \in Z$ olduğundan uygun $\sigma, \tau \in Z$ elemanları için $u^2 + \sigma u + \tau = 0$ dır. Böylece $u \in U$ ve $\sigma, \tau \in Z$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[u^2 + \sigma u + \tau, v\right] = \left[u^2, v\right] + [\sigma u, v] + [\tau, v] \\ &= \left[u^2, v\right] + \sigma[u,v] + [\sigma, v]\, u \\ &= \left[u^2, v\right] + \sigma[u,v] = u[u,v] + [u,v]\, u + \sigma[u,v] \\ &= 2\alpha u + \alpha\sigma \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \neq 2\alpha \in Z$ olduğundan $u \in Z$ bulunur. Ancak bu durum kabul ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır ve $U \subset Z$ dir. □

Teorem 3.29 *R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan bir basit halka olsun. O halde $[R,R]$ nin herhangi bir Lie ideali ya $[R,R]$ ye eşittir ya da R halkasının merkezi tarafından kapsanır.*

İspat. $U \neq [R,R]$, $[R,R]$ nin bir Lie ideali olsun. Teorem 3.24 gereği $[[[U,U],[U,U]],[[U,U],[U,U]]] = (0)$ dır. Böylece Teorem 3.27(i) den

$[[U,U],[U,U]] \subset Z$ bulunur. Teorem 3.28 gereği $[U,U] \subset Z$ dir ve tekrar aynı teoreme göre $U \subset Z$ elde edilir. Böylece teorem ispatlanır. $\square$

[3] deki çalışmasında W. E. Baxter, R basit halkasının karakteristiğinin 2 ve 3 olduğu durumları ayrı ayrı ele almıştır. Yazar bu incelemeyi, Herstein'ın [11] deki makalesinde ispatladığı "R halkası, karakteristiği ne 2 ne de 3 olan bir basit halka ve U, $[R,R]$ nin bir Lie özideali ise o zaman U, R halkasının merkezi tarafından kapsanır." teoremini genelleştirmek için yapmıştır.

Lemma 3.30 *R halkası, karakteristiği 2 olan bir basit halka ve U, $[R,R]$ halkasının $[U,U] \subset Z$ şartını sağlayan bir Lie ideali ise o zaman R, merkezi üzerinde 4-boyutlu bir basit cebir olmadıkça $U \subset Z$ dir.*

İspat. Olmayana ergi metodunu kullanalım. $a \in U$, $a \notin Z$ ve $x \in [R,R]$ olsun. U, $[R,R]$ nin Lie ideali olduğundan $ax + xa \in U$ dur. Hipotez gereği $[U,U] \subset Z$ dir ve buradan $a(ax+xa) + (ax+xa)a \in Z$ elde edilir. Yani her $x \in [R,R]$ için $a^2x + xa^2 \in Z$ dir.

Şimdi de $T = \{t \in R \mid [t,[R,R]] \subset Z\}$ kümesi tanımlayalım. Her $x \in [R,R]$ için $[a^2,x] \in Z$ olduğundan $a^2 \in T$ olur.

Aynı zamanda T, R halkasının bir Lie idealidir. Bunu göstermek için $t \in T$, $x \in R$ ve $y \in [R,R]$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}(tx+xt)y + y(tx+xt) &= \{t(xy+yx) + (xy+yx)t\} \\ &\quad + \{x(ty+yt) + (ty+yt)x\}\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. $xy + yx \in [R,R]$ olduğundan T kümesinin tanımı gereği $t(xy+yx) + (xy+yx)t \in Z$ dir. Ayrıca $t \in T$, $y \in [R,R]$ için $ty + yt \in Z$ olduğu kullanılırsa, $x(ty+yt) + (ty+yt)x = 0$ elde edilir. Buna göre (3.18) deki eşitlikten $[tx+xt,[R,R]] \subset Z$ olur ve buradan $tx + xt \in T$ bulunur. O halde T, R halkasının bir Lie idealidir.

Böylece Teorem 3.15 gereği ya $T \subset Z$ dir ya da $T \supset [R,R]$ olur. Eğer $T \subset Z$ ise o zaman $a^2 \in T$ olduğundan $a^2 \in Z$ dir.

Diğer taraftan $T \supset [R, R]$ alınırsa $a \in U \subset [R, R]$ olması, $[a, [R, R]] \subset Z$ olmasını gerektirir. Özel olarak, her $x \in R$ için $c = a\,(ax + xa) + (ax + xa)\,a$ elemanı, Z dedir. Burada x yerine ax dersek,

$$c = a\,(a\,(ax) + (ax)\,a) + (a\,(ax) + (ax)\,a)\,a = ac \in Z$$

olur. Eğer $c \neq 0$ ise $c^{-1} \in Z$ dir ve buradan $a = ac.c^{-1} \in Z$ bulunur. Ancak bu durum kabulümüzle çelişir. O halde $c = 0$ olarak alınmalıdır. Böylece $a\,(ax + xa) = (ax + xa)\,a$ elde edilir. Buradan da her $x \in R$ için $a^2x = xa^2$ bulunur. Dolayısıyla $a^2 \in Z$ dir.

Sonuç olarak, $a \in U$, $a \notin Z$ olduğunda $a^2 \in Z$ bulundu. Ayrıca $a \in U \cap Z$ ise $a^2 \in Z$ dir. Bu yüzden her $a \in U$ için $a^2 \in Z$ olarak alabiliriz.

$a \in U$, $x, y \in R$ ise U, $[R, R]$ nin Lie ideali olduğundan $a\,(xy + yx) + (xy + yx)\,a$ elemanı, U dadır. Burada y yerine ax yazarsak,

$$a\,(x\,(ax) + (ax)\,x) + (x\,(ax) + (ax)\,x)\,a \in U$$

olur ve buradan $(ax)^2 + a^2x^2 + (xa)^2 + ax^2a \in U$ elde edilir. Son bağıntıda her $a \in U$ için $a^2 \in Z$ olduğu kullanılırsa, $(ax)^2 + a^2x^2 + (xa)^2 + ax^2a = (ax + xa)^2$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten her $x \in R$ için $(ax + xa)^2 \in U$ olduğu görülür. O halde yukarıda elde edilenlerden, her $x \in R$ için $(ax + xa)^4 \in Z$ dir. Bu durumda Teorem 3.14 gereği R, Z üzerinde 4 boyutlu olur. □

Yukarıda elde edilenlerin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.31 *R bir basit halka ve U, $[R, R]$ nin bir Lie özideali olsun. R halkasının karakteristiği* 2 *ve R, Z üzerinde* 4*-boyutlu basit cebir olmadıkça $U \subset Z$ dir.*

İspat. U, $[R, R]$ nin bir Lie özideali olduğundan Teorem 3.24 gereği,

$$[[[U, U]\,, [U, U]]\,, [[U, U]\,, [U, U]]] = (0)$$

dır. Buradan Lemma 3.30 gereği $[[U,U],[U,U]] \subset Z$ bulunur. Burada tekrar Lemma 3.30 uygulanırsa $[U,U] \subset Z$ olduğu görülür ve yine aynı yolla $U \subset Z$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.31 in ispatı, R halkasının karakteristiğinin 3 olduğu durum için de incelenmelidir.

Lemma 3.32 *R halkası, karakteristiği 3 olan bir basit halka ve U, $[R,R]$ halkasının $[U,U] \subset Z$ şartını sağlayan bir Lie ideali ise o zaman $U \subset Z$ dir.*

İspat. Olmayana ergi metodunu kullanalım. $a \in U$, $a \notin Z$ olsun. U, $[R,R]$ halkasının bir Lie ideali olduğundan her $x \in R$ için $b = a(ax - xa) - (ax - xa)a \in U$ dur. Burada x yerine ax yazılırsa $a, b \in U$ için,

$$\begin{aligned} a(a(ax) - (ax)a) - (a(ax) - (ax)a)a &= a(a(ax - xa) - (ax - xa)a) \\ &= ab \in U \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $b, c \in U$ için hipotez gereği $bc - cb \in Z$ dir. O halde R halkasının karakteristiği 3 olduğundan,

$$c^2b + cbc + bc^2 = c(cb - bc) - (cb - bc)c = 0 \tag{3.19}$$

eşitliği sağlanır.

$a, b \in U$ için $ab \in U$ olduğu kullanılarak (3.19) daki eşitlikte b yerine ab yazılırsa,

$$c^2(ab) + c(ab)c + (ab)c^2 = 0$$

olur ve buradan,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(c^2a + cac + ac^2\right)b - cacb - ac^2b + cabc + abc^2 \qquad (3.20) \\ &= 0 + ca(bc - cb) + a\left(bc^2 - c^2b\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda $bc - cb \in Z$ olduğundan,

$$\begin{aligned} bc^2 - c^2b &= c(bc - cb) + c(bc - cb) = 2c(bc - cb) \\ &= -c(bc - cb) \end{aligned}$$

dir. Buna göre (3.20) deki eşitlik,

$$\begin{aligned} 0 &= ca(bc - cb) + a\left(bc^2 - c^2b\right) = ca(bc - cb) - ac(bc - cb) \\ &= (ca - ac)(bc - cb) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir basit halkanın merkezi, sıfırdan farklı ise bir cisimdir ve bir cisimde sıfır bölen olamayacağından her $c \in U$ için $ac = ca$ veya $bc = cb$ olur. Ancak $a, b \in U$, $a \notin Z$ olduğundan $[a, U] \neq (0)$ dır ve buradan $[b, U] = (0)$ bulunur.

$T = \{t \in U \mid [t, U] = (0)\}$ kümesi tanımlansın. T nin $[R, R]$ halkasının bir Lie ideali olduğunu gösterelim. $t \in T$, $u \in U$ ve $y \in [R, R]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (ty - yt)u - u(ty - yt) &= \{t(yu - uy) - (yu - uy)t\} - \\ &\quad \{y(tu - ut) - (tu - ut)y\} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $u \in U$ ve $y \in [R, R]$ için $yu - uy \in U$ olduğundan T kümesinin tanımı gereği $t(yu - uy) - (yu - uy)t = 0$ ve yine T kümesinin tanımlanışından $tu - ut = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $u \in U$ için,

$$(ty - yt)u - u(ty - yt) = 0$$

olur. Yani $[ty - yt, U] = (0)$ dır. Buradan $ty - yt \in T$ elde edilir. O halde T, $[R, R]$ nin bir Lie idealidir. $T \subset U$ olduğundan $[T, T] = (0)$ dır. Böylece Teorem 3.27 gereği $T \subset Z$ bulunur. Buna göre $b \in T$ olduğundan $b \in Z$ dir. Bu durumda her $x \in R$ için $b = a(ax - xa) - (ax - xa)a \in Z$ olur. Burada x yerine ax yazılırsa $ab \in Z$ olduğu görülür. Eğer $b \neq 0$ ise o zaman Z bir cisim ve $b \in Z$ olduğundan $b^{-1} \in Z$ dir. Böylece her $a \in U$ için $ab.b^{-1} = a \in Z$ olur ki bu çelişkidir. Öyleyse $b = 0$ alınmalıdır. Bu durumda her $x \in R$ için,

$$0 = a(ax - xa) - (ax - xa)a \tag{3.21}$$

olur. Yani $a \in U$ elemanı, $ax - xa$ ile değişmelidir.

Eğer $[U, U] = (0)$ ise yani U Lie ideali değişmeli ise o zaman Teorem 3.27 gereği $U \subset Z$ dir.

Diyelim ki U Lie ideali değişmeli olmasın. Yani $au - ua \neq 0$ olacak şekilde $a \in U$, $u \in U$ elemanları var olsun. (3.21) deki eşitlikte x yerine ux yazılırsa,

$$a\left(a\left(ux\right) - \left(ux\right)a\right) = \left(a\left(ux\right) - \left(ux\right)a\right)a$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik,

$$a\left\{\left(au - ua\right)x + u\left(ax - xa\right)\right\} = \left\{\left(au - ua\right)x + u\left(ax - xa\right)\right\}a \tag{3.22}$$

şeklinde de yazılabilir. $a \in U$ elemanı, $ax - xa$ ile değişmeli ve hipotez gereği $au - ua \in Z$ olduğundan (3.22) deki eşitlik,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(au - ua\right)ax + au\left(ax - xa\right) - \left(au - ua\right)xa - ua\left(ax - xa\right) \\ &= \left(au - ua\right)\left(ax - xa\right) + \left(au - ua\right)\left(ax - xa\right) \\ &= 2\left(au - ua\right)\left(ax - xa\right) \end{aligned}$$

haline gelir. $2\left(au - ua\right) \neq 0$ ve $2\left(au - ua\right) \in Z$ olduğundan her $x \in R$ için $ax - xa = 0$ elde edilir. Ancak bu durum $au - ua \neq 0$ oluşu ile çelişir. O halde $[U, U] = (0)$ olarak alınmalıdır. Böylece $U \subset Z$ elde edilir. □

Sonuç 3.33 *R bir basit halka ve U, $[R, R]$ nin bir Lie özideali olsun. R halkasının karakteristiği 3 olduğunda $\dim_Z R = 4$ değil ise $U \subset Z$ dir.*

İspat. U, $[R, R]$ nin bir Lie özideali olduğundan Teorem 3.24 gereği,

$$\left[\left[\left[U, U\right], \left[U, U\right]\right], \left[\left[U, U\right], \left[U, U\right]\right]\right] = (0)$$

dır. Buradan Lemma 3.32 gereği $\left[\left[U, U\right], \left[U, U\right]\right] \subset Z$ bulunur. Burada tekrar Lemma 3.32 uygulanırsa $[U, U] \subset Z$ olur ve yine aynı yolla $U \subset Z$ elde edilir. □

$[T, [R, R]] \subset T$ olacak şekilde T, R halkasının toplamsal bir altgrubu olsun. $T \nsubseteq [R, R]$ olduğunda bile Teorem 3.31 i T altgrubuna uyarlamak mümkündür.

Teorem 3.34 *R bir basit halka ve Z, R halkasının merkezi olsun. T, R halkasının $[T,[R,R]] \subset T$ şartını sağlayan bir altgrubu ise o zaman ya $T \supset [R,R]$ dir ya da R halkasının karakteristiği 2 olduğunda $\dim_Z R = 4$ değil ise $T \subset Z$ olur.*

İspat. $S = [T,[R,R]]$ olsun. T üzerindeki hipotez gereği $[S,[R,R]] \subset [T,[R,R]] = S$ olacağından S, $[R,R]$ halkasının bir Lie idealidir. Buna göre, Teorem 3.31 den ya $S \supset [R,R]$ dir ya da $\operatorname{char} R = 2$ olduğunda $\dim_Z R = 4$ değil ise $S \subset Z$ dir.
Eğer $S \supset [R,R]$ ise o zaman $T \supset S$ olduğundan $T \supset [R,R]$ elde edilir.
Diğer taraftan $S \subset Z$ olsun. $W = \{x \in R \mid [x,[R,R]] \subset Z\}$ kümesi tanımlayalım.
W nun R halkasının bir Lie ideali olduğu kolaylıkla görülür. Böylece Teorem 3.15 gereği ya $W \subset Z$ ya da $W \supset [R,R]$ olur.
$[R,R] \not\subseteq Z$ ve Teorem 3.21 gereği $[[R,R],[R,R]] = [R,R]$ olduğundan $W \not\supseteq [R,R]$ dir. Buradan $W \subset Z$ olduğu görülür. $T \subset W$ olduğundan $T \subset Z$ elde edilir. □

Şimdi de herhangi bir halkadaki Lie idealler ile ilgili genel bir sonuç üzerinde duralım. Bu sonucu, otomorfizmaların uygun bir kümesi altında değişmez (invaryant) kalan bir basit halkanın altuzayları ile ilgili Amitsur [3]' un bir teoremini oluşturmak için kullanacağız.

Tanım 3.35 R halkasının bir e elemanı, $e^2 = e$ şartını sağlıyor ise bu elemana *idempotent eleman* denir.

Lemma 3.36 *R herhangi bir halka olsun. R halkasının idempotent elemanları tarafından üretilen R nin toplamsal altgrubu E , R nin bir Lie idealidir.*

İspat. e, R halkasının herhangi bir idempotent elemanı ve x, R halkasının herhangi bir elemanı olarak verilsin. $e \in R$ tarafından üretilen R halkasının $f_1 = e + xe - exe$ ile $f_2 = e + ex - exe$ elemanları birer idempotent elemandır.
E, R halkasının idempotent elemanları tarafından üretilen R nin toplamsal bir

altgrubu olduğundan $f_1,\ f_2 \in E$ dir ve dolayısıyla $f_1 - f_2 = xe - ex \in E$ olur. Öyleyse E, R halkasının bir Lie idealidir. $\square$

Sonuç 3.37 *R, $e \neq 0, 1$ olan idempotent bir elemana sahip bir basit halka ise o zaman $E \supset [R, R]$ dir.*

İspat. R halkasının merkezi, Z , R bir basit halka olduğunda ya (0) dır ya da bir cisimdir. Hipotez gereği $e \notin Z$ dir ve böylece $E \nsubseteq Z$ olduğu görülür. Lemma 3.36 dan E, R halkasının bir Lie idealidir. O halde Teorem 3.15 gereği R, karakteristiği 2 olan Z üzerinde 4-boyutlu olmadıkça $E \supset [R, R]$ şartı sağlanır.

Diyelim ki Z nin karakteristiği 2 ve $\dim_Z R = 4$ olsun. Bu durumda Teorem 2.50 ve Teorem 2.51 gereği $R \cong M_n(D)$ dir. Ancak R halkası, aşikar olmayan bir idempotent eleman içeren bir basit halka olduğundan R bölümlü halka olamaz. Bu yüzden $n \geq 2$ olmak zorundadır. Z_2, Z üzerindeki 2×2 tipinde matrislerin halkasını belirtmek üzere $R \cong Z_2$ bulunur. Buna göre $[R, R]$ halkasının, izi 0 olan matrislerden oluştuğunu gösterelim. Bu matrisler $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ için $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ formundadır. Çünkü bu tipteki bir matris için $\dot{I}zA = 2\alpha$ dır ve char $Z = 2$ olarak alındığından $\dot{I}zA = 0$ olur. $R \cong Z_2$ olduğundan $i = 1, 2, 3, 4$ için $a_i, b_i \in Z$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in R$ dir.

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 & a_1b_2 + a_2b_4 - b_1a_2 - b_2a_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 - b_3a_1 - b_4a_3 & a_3b_2 - b_3a_2 \end{pmatrix} \in [R, R]
\end{aligned}
$$

olur. Burada $\dot{I}zB = 0$ dır ve B matrisinin köşegen elemanları aynıdır. Bu yüzden $[R, R]$ halkasının elemanları da, A tipinde yazılabilir.

Buna göre $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve

$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+\alpha+\gamma & 1 \end{pmatrix}$ elemanları, R halkasının idempotent elemanları olsun.

$\operatorname{char} Z = 2$ olduğundan $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = A$ elde edilir. Yani A matrisi, $[R, R]$ halkasının bir elemanı iken $A \in E$ bulundu. O halde $E \supset [R, R]$ dir. □

Sonuç 3.38 *R halkası, $e \neq 0, 1$ olan idempotent bir elemana sahip bir basit halka ise o zaman $[E, R] \supset [R, R]$ dir.*

İspat. R halkası, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu değil ise o zaman $E \supset [R, R]$ olduğundan Teorem 3.21 gereği,

$$[E, R] \supset [E, [R, R]] \supset [[R, R], [R, R]] = [R, R]$$

elde edilir. Böylece $[E, R] \supset [R, R]$ olduğu görülür.

Diğer taraftan R halkası, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu ise bir önceki lemmanın ispatında olduğu gibi $R \cong Z_2$ olur. Böylece $[R, R]$ halkası, izi 0 olan ve $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ için $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ formunda yazılan matrislerden oluşur ve buradan $[[R, R], R] = [R, R]$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu durumda $E \supset [R, R]$ olması $[E, R] \supset [[R, R], R] = [R, R]$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $[E, R] \supset [R, R]$ dir. □

[11] de Herstein, Brauer-Cartan-Hua teoreminin bir genellemesi olarak, R bir basit halka olduğunda R nin tüm otomorfizmaları altında değişmeden kalan öz althalkalarının, R nin merkezi tarafından içerildiğini varsaymıştır. Aynı zamanda varsayımının gerçeklenebilmesi için Lie ideal özelliklerinin kullanılması gerektiğini belirten bir fikir öne sürmüştür.

Ancak daha sonra Amitsur [1], Herstein' ın bu varsayımının genel halde doğru olamayacağını karşıt bir örnekle göstermiştir. Amitsur, bu karşıt örneği henüz makalesinde yayınlamadan Baxter [3], basit halkalardaki Lie yapısına ait sonuçları kullanarak basit halkaların bir sınıfı için Herstein'ın bu varsayımını genelleştirmeye çalışmıştır.

[9] da Hattori, N. Iwahori' nin aşağıdaki teoremi ispatladığını belirtmiştir.

Teorem 3.39 *A, karakteristiği 0 olan bir F cismi üzerinde bir merkezi basit cebir olup sol idealler üzerinde azalan zincir kuralını sağlıyorsa o zaman A nın invaryant altuzayları yalnızca (0), F, A ve $[A,A] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i - b_i a_i) \, ; a_i, b_i \in A \right\}$ dır.*

Baxter da [3] deki çalışmasında, Herstein'ın [11] varsayımını genelleştirebilmek için yukarıdaki teoremin bir genellemesini yapmıştır:

Teorem 3.40 *A, $F \neq GF(2)$ cismi üzerinde merkezi basit cebir olsun ancak bölümlü cebir olmasın. Eğer A, sol idealler üzerinde azalan zincir kuralını sağlıyorsa o zaman A nın invaryant altuzayları sadece (0), F, A, $[A,A]$ dır ve A nın $GF(2)$ üzerindeki 2×2 tipinde matrislerin kümesi olmadığı durumda A nın invaryant altuzayları $[A,A]$ yı içerir.*

İspat. [3, Teorem 2] $\square$

Baxter, basit halkalardaki Lie yapısına ait sonuçları kullanarak ispatlamış olduğu bu teorem ile birlikte sol idealler üzerinde azalan zincir kuralını sağlayan basit halkalar için Herstein ın varsayımını genelleştirmiştir.
Daha sonra Amitsur, [1] deki çalışmasında Baxter'ın oluşturduğu bu teoremi benzer bir metod ile basit halkaların daha geniş bir sınıfı için ispatlamıştır. Böylece son iki teoremde verilen basit halka, en az bir $e \neq 1$ idempotent eleman içeren basit halkalara genişletilmiştir.

Teorem 3.41 *A, $F \neq GF(2)$ cismi üzerinde $\neq 1$ idempotent bir elemana sahip bir basit cebir ve A, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu olmayan* *bir cebir ise o zaman A nın invaryant altuzayları ya $[A,A]$ yı içerir ya da A nın merkezi tarafından kapsanır. A nın invaryant altcebirleri ise yalnızca (0), F ve A dır.*

İspat. [1, Teorem 1 ve 2] □

Teorem 3.42 *R, centroidi $F \neq GF(2)$ olan bir basit halka olsun. R nin $e \neq 0,1$ olan bir idempotent elemanını ihtiva ettiğini ve R nin herhangi bir altuzayının, R nin tüm özel iç otomorfizmaları altında değişmez kaldığını kabul edelim. O zaman R nin bu altuzayı ya (0) dır ya Z dir ya da $[R,R]$ yi kapsar. R nin tüm özel iç otomorfizmaları altında değişmez kalan R nin altcebirleri yalnızca (0), Z ve R dir.*

İspat. W, R halkasının tüm özel iç otomorfizmaları altında değişmez kalan bir altuzayı olsun. $a^2 = 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ elemanı alınsın. O halde her $w \in W$ için $(1+a)w(1-a) = w + aw - wa - awa \in W$ olur. Buradan da W bir altuzay olduğundan,

$$aw - wa - awa \in W \tag{3.23}$$

elde edilir.

$\alpha^2 \neq \alpha$ şartını sağlayan bir $\alpha \in F$ elemanı verilsin. $a \in R$ için $(\alpha a)^2 = 0$ olduğundan (3.23) deki ifade $\alpha a \in R$ ve $w \in W$ için $(\alpha a)w - w(\alpha a) - (\alpha a)w(\alpha a) \in W$ şeklinde de yazılabilir. Yani

$$\alpha(aw - wa) - \alpha^2 awa \in W \tag{3.24}$$

olur. (3.23) deki ifade α^2 ile çarpıldığında elde edilen ifadeden (3.24) deki ifade çıkarılırsa $(\alpha^2 - \alpha)(aw - wa) \in W$ elde edilir. $F \neq GF(2)$ olduğundan $\alpha^2 - \alpha \neq 0$ olacak şekilde bir $\alpha^2 - \alpha \in F$ vardır. Böylece W bir altuzay olduğundan $aw - wa \in W$ olduğu görülür.

e, R halkasının idempotent bir elemanı ise o zaman $a = xe - exe \in R$ olarak alındığında her $x \in R$ için $a^2 = 0$ eşitliği sağlanır. Buradan $(xe - exe)w - w(xe - exe) \in W$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $a = ex - exe \in R$ olduğunda da her $x \in R$ için $a^2 = 0$ eşitliği sağlanacağından $(ex - exe)\,w - w\,(ex - exe) \in W$ elde edilir. W bir altuzay olduğundan

$$\begin{aligned} &(ex - exe)\,w - w\,(ex - exe) - (xe - exe)\,w + w\,(xe - exe) \\ &= (ex - xe)\,w - w\,(ex - xe) \in W \end{aligned}$$

olur. Böylece $[[E, R], W] \subset W$ olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç 3.38 gereği $[E, R] \supset [R, R]$ olduğundan $[[R, R], W] \subset W$ bulunur.

Eğer R halkası, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu değil ise o zaman Teorem 3.34 gereği ya $W \subset Z$ dir ya da $W \supset [R, R]$ olur. W, R nin centroidi üzerinde bir altuzay olduğundan $W \subset Z$ olması ya $W = (0)$ ya da $W = Z$ olmasını gerektirir. Böylece R, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu olmayan bir halka olduğunda teoremin ispatı biter.

Şimdi de kabul edelim ki R halkası, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 4-boyutlu olsun. R halkası, aşikar olmayan idempotent bir elemana sahip olduğundan R, bölümlü bir halka olamaz. Dolayısıyla Z_2, Z üzerindeki 2×2 tipinde matrislerin halkasını göstermek üzere $R \cong Z_2$ dir. Burada $F = Z$ olarak alınabildiğinden $Z \neq GF(2)$ dir ve $W \subset Z_2$ altuzayı, Z_2 nin tüm iç otomorfizmaları altında invaryanttır.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ olmak üzere bir $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in W$ elemanı alalım. $a \in W$ ve $(e_{12})^2 = 0$ şartını sağlayan $e_{12} \in Z_2$ için $e_{12}a + ae_{12} \in W$ ve $a + e_{12}a + ae_{12} + e_{12}ae_{12} \in W$ dur. W bir altuzay olduğundan $e_{12}ae_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ elde edilir. Eğer $\gamma \neq 0$ ise $e_{12}ae_{12} = \gamma e_{12} \neq 0$ olacağından $e_{12} \in W$ bulunur.

$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Z_2$ olsun. W altuzayı, Z_2 nin tüm iç otomorfizmaları altında invaryant olduğundan $xe_{12}x^{-1} = e_{21} \in W$ olur. $e_{12}, e_{21} \in W$ ve W bir altuzay olduğundan $e_{12} + e_{21} \in W$ dur. $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2$ alındığında benzer şekilde $ye_{12}y^{-1} = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} \in W$ olduğu görülür. $e_{12} + e_{21} \in W$ ve W bir altuzay olduğundan $e_{11} + e_{22} \in W$ elde edilir. Buradan $e_{11} + e_{22} = e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12} \in W$ olur. Böylece $W \supset [R, R]$ olduğu sonucuna varılır.

Eğer $W \not\supseteq [R, R]$ ve $W \neq (0)$ ise o zaman W altuzayının bir a elemanını $\gamma = \beta = 0$ olacak şekilde seçmemiz gerekir. Yani W, diagonal matrislerden oluşmalıdır. Buna göre $\alpha, \delta \in Z$ için $a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in W$ şeklinde seçelim. Her $a \in W$ için $\alpha = \delta$ ise o zaman $W \subset Z$ olur ki bu da teoremin ispatını bitirir. Eğer $\alpha \neq \delta$ olarak alınırsa $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2$ için $yay^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \delta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in W$ elde edilir. Ancak bu durum W kümesinin seçimi ile çelişir. O halde $W \not\supseteq [R, R]$ ve $W \neq (0)$ olduğunda $\alpha = \delta$ seçilirse $W = Z$ elde edilir. Böylece R nin bir althalkası olan W, ya (0) dır ya Z dir ya da $[R, R]$ yi kapsar. Buna ek olarak Sonuç 3.16 nın ışığında W, ya (0) dır ya Z dir ya da R dir. $\square$

4. BİRLEŞMELİ HALKALARIN TÜREVLERİNİN LIE HALKALARI

Bu bölümde esas olarak C.R. Jordan ve D.A. Jordan'ın [19] "Lie Rings of Derivations of Associative Rings" adlı çalışması incelenecektir.
R bir birleşmeli halka ve Z, R halkasının merkezi olsun. R halkasının Lie halkası $L(R)$ ile gösterilsin.

Lemma 4.1 *Her $r \in R$ için $\theta(r) = i_r$ ile tanımlı $\theta : L(R) \to I(R)$ dönüşümü bir Lie epimorfizmasıdır. $Ker\theta = Z$ dir. Dolayısıyla Z, $L(R)$ nin bir ideali ve $L(R)/Z \cong I(R)$ olur.*

Bu bölümde sıkça kullanılacak olan aşağıdaki lemma ispatsız olarak verilecektir.

Lemma 4.2 *(i) Eğer $r \in R$ ve $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ ise o zaman $[\delta, i_r] = i_{\delta(r)}$ dir. Bu yüzden $I(R)$, $\mathrm{Der}(R)$ nin bir Lie ideali olur.*

(ii) Eğer $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ ise o zaman $\delta(Z) \subseteq Z$ dir.

(iii) Eğer $\delta \in \mathrm{Der}(R)$, $r \in Z$ ve $r\delta : R \to R$ dönüşümü $s \in R$ için $(r\delta)(s) = r\delta(s)$ ile tanımlı ise o zaman $r\delta \in \mathrm{Der}(R)$ dir.

(iv) Eğer $\delta, \gamma \in \mathrm{Der}(R)$ ve $r \in Z$ ise o zaman $[r\delta, \gamma] = r[\delta, \gamma] - \gamma(r)\delta$ dır.

(v) Eğer $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ ve $r, s \in Z$ ise o zaman $[r\delta, s\delta] = (r\delta(s) - s\delta(r))\delta$ dır.

4.1 Değişmeli Olmayan Halkaların Türevlerinin Lie Halkaları

R. Awtar [2], asal halkalarda türev konusunu çalışmış ve burada Posner'ın bir teoremini (Teorem 2.64), R halkasının Lie ve Jordan idealleri için genelleştirmiştir. Awtar'ın bu çalışmasındaki ana teoremin (Teorem 2.65) daha da zayıflatılmış ve ispatının basitleştirilmiş hali aşağıdaki lemmada verilecektir.

Lemma 4.3 *R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, δ R nin bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $\delta(U) \subseteq Z$ ise o zaman ya $U \subseteq Z$ dir ya da $\delta = 0$ dır.*

İspat. Kabul edelim ki $\delta(U) \subseteq Z$ olsun. $u \in U$ ve $r \in R$ alalım. U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $[u,r] \in U$ olur ve buradan $\delta([u,r]) \in Z$ elde edilir. Son ifade açılırsa,

$$\begin{aligned} \delta(ur - ru) &= \delta(u) r + u\delta(r) - \delta(r) u - r\delta(u) \\ &= [u, \delta(r)] + [\delta(u), r] \in Z \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ancak $\delta(u) \in Z$ olduğundan $[\delta(u), r] = 0$ dır ve her $u \in U$, $r \in R$ için,

$$[u, \delta(r)] \in Z \tag{4.1}$$

elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki $u \notin Z$ olsun. O halde Lemma 3.9 gereği $[u,[u,a]] \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır. Buna göre (4.1) deki bağıntıda r yerine au yazılarak, $[u, \delta(au)] \in Z$ bulunur. Bu ifade, komütatör özellikleri ve $\delta(u) \in Z$ olduğu kullanılarak açılırsa,

$$\begin{aligned} [u, \delta(a) u + a\delta(u)] &= [u, \delta(a) u] + [u, a\delta(u)] \\ &= \delta(a)[u,u] + [u, \delta(a)] u + a[u, \delta(u)] + [u,a]\delta(u) \\ &= [u, \delta(a)] u + [u,a]\delta(u) \in Z \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$[u,a]\delta(u) + [u,\delta(a)] u$ toplamını v ile ifade edelim. O halde,

$$0 = [u,v] = [u,a][u,\delta(u)] + [u,[u,a]]\delta(u) + [u,\delta(a)][u,u] + [u,[u,\delta(a)]] u$$

eşitliğinde $\delta(u) \in Z$ olduğu ve (4.1) gereği $[u, \delta(a)] \in Z$ olduğu kullanılırsa, her $u \in U$ için $[u, [u, a]]\, \delta(u) = 0$ elde edilir. $\delta(u) \in Z$, $[u, [u, a]] \neq 0$ ve R asal bir halka olduğundan Lemma 2.23 gereği $\delta(u) = 0$ bulunur. Böylece $u \in U$ için,

$$ya\ u \in Z\ dir\ ya\ da\ \delta(u) = 0\ olur. \tag{4.2}$$

Diyelim ki $U \nsubseteq Z$ ve $w \in U \backslash Z$ olsun. $x \in U$ alalım. Eğer $x \notin Z$ ise o zaman (4.2) den $\delta(x) = 0$ dır. Eğer $x \in Z$ ise o zaman $w + x \in U \backslash Z$ olur. (4.2) den, $\delta(w + x) = 0$ ve $\delta(w) = 0$ dır. Bu yüzden $\delta(x) = 0$ bulunur.
Kabul edelim ki $\delta(U) = 0$ olsun. Bu durumda her $u \in U$, $r \in R$ için $\delta(ur - ru) = 0$ dır. Yani her $u \in U$ için $\delta i_u = 0$ olur. Teorem 2.62 gereği, $\delta \neq 0$ ise o zaman her $u \in U$ için $i_u = 0$ bulunur. Yani $U \subseteq Z$ elde edilir. Buna göre ya $\delta = 0$ dır ya da $U \subseteq Z$ olur. □

Lemma 4.4 *R, karakteristiği* 2 *den farklı asal bir halka olsun. O halde* Z, $L(R)$ *nin asal bir idealidir. Buna denk olarak,* $I(R)$ *asal bir Lie halkadır.*

İspat. A ve B, $L(R)$ halkasının $[A, B] \subseteq Z$ şartını sağlayan iki ideali olsun. $B \nsubseteq Z$ olduğunu kabul edelim. Buna bağlı olarak bir $b \in B \setminus Z$ elemanı alalım. O halde $i_b \neq 0$ dır. Ayrıca $i_b(A) \subseteq Z$ dir. Lemma 4.3 gereği $A \subseteq Z$ bulunur. Böylece Z, $L(R)$ nin asal bir ideali olur. O halde Lemma 2.5 den $L(R)/Z$ bir asal halkadır. Aynı zamanda Lemma 4.1 den $L(R)/Z \cong I(R)$ olur ve buradan $I(R)$, asal bir Lie halkadır. □

Lemma 4.5 *R, değişmeli olmayan karakteristiği* 2 *den farklı asal bir halka ve* $0 \neq A$, Der(R) *Lie halkasının bir ideali olsun. O halde* $A \cap I(R) \neq (0)$ *dır.*

İspat. $0 \neq \delta \in A$ seçelim. Lemma 4.3 gereği, $\delta(r) \notin Z$ olacak şekilde bir $r \in R$ elemanı vardır. Yani, $i_{\delta(r)} \neq 0$ dır. Lemma 4.2(i) den $i_{\delta(r)} = [\delta, i_r] \in A$ olur. Böylece $i_{\delta(r)} \in A \cap I(R)$ olacağından $A \cap I(R) \neq (0)$ elde edilir. □

Lemma 4.4 ve Lemma 4.5 in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6 *R, değişmeli olmayan karakteristiği 2 den farklı asal bir halka olsun. O halde* $\mathrm{Der}(R)$*, asal bir Lie halkadır.*

R halkasının yarı asal halka olduğu duruma geçmeden önce, $R = 2R$ şartını sağlayan R halkası için $L(R)$ nin asal ideallerini tanımlayalım.

Teorem 4.7 *R halkası, değişmeli olmayan ve $R = 2R$ şartını sağlayan bir halka olsun. P, R halkasının bir asal ideali olmak üzere $Z_R(P) = \{r \in R \mid [r,s] \in P, \forall s \in R\}$ kümesi tanımlansın. O halde $Z_R(P)$, $L(R)$ halkasının bir asal idealidir ve $L(R)$ halkasının her asal ideali bu formdadır.*

İspat. Kabul edelim ki Q, $L(R)$ halkasının bir ideali ve P, Q tarafından içerilen R deki en büyük ideal olsun. A ve B, R halkasının $AB \subseteq P \subseteq Q$ şartını sağlayan iki ideali olarak alınsın. O halde $(BA)^2 \subseteq P \subseteq Q$ olur ve buradan $[BA, BA] \subseteq Q$ olduğu görülür. Amacımız, Q nun $L(R)$ halkasının bir asal ideali olduğunu göstermektir. Bunun için olmayana ergi metodunu kullanalım. Diyelim ki Q ideali asal olmasın. O halde $BA \nsubseteq Q$ dur. Bu da P asal idealinin Q tarafından içerilen R deki en büyük ideal olması nedeniyle $BA \nsubseteq P$ olmasını gerektirir. Bu ise bir çelişkidir. O halde Q, $L(R)$ halkasının bir asal idealidir.

Şimdi de $Q = Z_R(P)$ olduğunu iddia edelim. $\overline{R} = R/P$, $\overline{Q} = Q/P$ ve $\overline{Z_R(P)} = Z_R(P)/P$ olsun. $T(\overline{Q}) = \{\overline{r} \in L(\overline{R}) \mid [\overline{r}, L(\overline{R})] \subseteq \overline{Q}\}$ kümesi tanımlansın. Lemma 3.11 gereği $T(\overline{Q})$, $\overline{R}$ halkasının hem Lie ideali hem de althalkasıdır. Üstelik, $\overline{Q} \subset T(\overline{Q})$ dir. Ayrıca $\overline{Q}$, $L(\overline{R})$ nin asal bir idealidir ve $[T(\overline{Q}), L(\overline{R})] \subseteq \overline{Q}$ dir. Bu yüzden $\overline{Q} = T(\overline{Q})$, $\overline{R}$ nin bir althalkası olur. Lemma 3.8 gereği ya $\overline{Q} \subseteq \overline{Z_R(P)}$ dir veya $\overline{Q}$, $\overline{R}$ halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Eğer $\overline{Q}$, $\overline{R}$ halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsarsa o zaman $P \subset P' \subseteq Q$ olacak şekilde R halkasının bir P' ideali bulunabilir. Ancak bu durum P nin seçimi ile çelişir. O halde $\overline{Q} \subseteq \overline{Z_R(P)}$ olmalıdır. Yani buradan $Q \subseteq Z_R(P)$ dir. Diğer taraftan $Z_R(P) \subseteq Q$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $Q = Z_R(P)$ dir ve böylece istenen elde edilir. □

Lemma 4.8 *R, 2-burulmasız bir yarı asal halka olsun. O halde Z, $L(R)$ halkasının yarı asal bir idealidir. Buna denk olarak $I(R)$, yarı asal bir Lie halkadır.*

İspat. A, $L(R)$ halkasının $[A,A] \subseteq Z$ şartını sağlayan bir ideali olsun. $A \nsubseteq Z$ olduğunu kabul edelim. Buna göre bir $a \in A \setminus Z$ elemanı alalım. O halde $i_a \neq 0$ dır. $i_a \neq 0$ ve $A \nsubseteq Z$ olduğundan Lemma 4.3 yardımıyla $i_a(A) \nsubseteq Z$ elde edilir. Ancak bu durum $[A,A] \subseteq Z$ oluşu ile çelişir. O halde $A \subseteq Z$ dir. Böylece Z, $L(R)$ nin bir yarı asal ideali olur. Bu durumda Teorem 2.15 den $L(R)/Z$ halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. O halde Önerme 2.16 gereği $L(R)/Z$ bir yarı asal halkadır. Aynı zamanda Lemma 4.1 den $L(R)/Z \cong I(R)$ olur ve buradan $I(R)$, bir yarı asal Lie halkadır. □

Lemma 4.9 *R, 2-burulmasız yarı asal bir halka ve $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. Eğer $\delta(R) \subseteq Z$ ve $\delta^2 = 0$ ise o zaman $\delta = 0$ dır.*

İspat. $a \in R$ olsun. O halde $\delta^2(a) = 0$ dır ve bu yüzden $0 = \delta^2(a^2) = 2\delta(a)\delta(a)$ olur. $\delta(a) \in Z$ ve R, 2-burulmasız yarı asal bir halka olduğundan Lemma 2.11 gereği $\delta(a) = 0$ elde edilir. □

Teorem 4.10 *R, değişmeli olmayan 2-burulmasız yarı asal bir halka olsun. O halde $\mathrm{Der}(R)$, yarı asal bir Lie halkadır.*

İspat. $0 \neq A$, $\mathrm{Der}(R)$ halkasının $[A,A] = 0$ şartını sağlayan bir Lie ideali olsun. $0 \neq \delta \in A$ alalım. Eğer $\delta(R) \nsubseteq Z$ ise o zaman $\delta(r) \notin Z$ olacak şekilde bir $r \in R$ elemanı vardır. Lemma 4.2(i) gereği $0 \neq i_{\delta(r)} \in A \cap I(R)$ olur. Ancak Lemma 4.8 e göre, $A \cap I(R) = (0)$ olmalıdır. Bu yüzden $\delta(R) \subseteq Z$ olarak alınır.
$z \in Z$ olsun ve $z\delta : R \to R$ dönüşümü $s \in R$ için $(z\delta)(s) = z\delta(s)$ ile tanımlansın. Lemma 4.2(iii) gereği $z\delta \in \mathrm{Der}(R)$ dir ve buradan $[\delta, z\delta] \in A$ bulunur. Yani Lemma 4.2(iv) den, $\delta(z)\delta \in A$ elde edilir. Böylece $[\delta, \delta(z)\delta] \in [A,A] = 0$ olduğu görülür. Burada tekrar Lemma 4.2(iv) uygulanırsa $\delta^2(z)\delta = 0$ sonucuna varılır. Özel olarak, $\delta^2(z)\delta^2(z) = 0$ alalım. $\delta^2(z) \in Z$ ve R yarı asal bir halka

olduğundan Lemma 2.11 gereği $\delta^2(z) = 0$ dır. Lemma 4.9 un bir uygulaması olarak δ, Z ye kısıtlanırsa o zaman $\delta(Z) = 0$ olur. Böylece $\delta(R) \subseteq Z$ olduğundan $\delta^2(R) = 0$ elde edilir. Lemma 4.9 gereği $\delta = 0$ olur ki bu da $0 \neq \delta \in A$ olarak alınmasıyla çelişir. O halde $A = (0)$ olmalıdır. Buradan da $\mathrm{Der}(R)$, yarı asal bir Lie halka olur. □

Aşağıdaki örnek, Lemma 4.4 ve Lemma 4.8 ile Teorem 4.6, 4.7 ve 4.10 daki 2-burulmasızlık koşulunun kaldırılamayacağını gösterir:

Örnek 4.11 K, 2 elemanlı bir cisim ve S, K üzerindeki tüm 2×2 tipinde matrislerin halkası olsun. $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}$ kümesi tanımlansın. T, S halkasının $[T, T] = 0$ şartını sağlayan bir Lie idealidir. Ancak $T \nsubseteq Z(S)$ dir. Aynı zamanda $\mathrm{Der}(S) = I(S)$ dir.

Benzer şekilde Lemma 4.4 ve 4.8 ile Teorem 4.7, R halkasının Jordan yapısı için ispatlanarak bu kısım bitirilecek ve daha sonraki kısımda değişmeli halkaların türevlerinin Lie halkaları incelenecektir.

Literatürde asal Jordan idealler ile ilgili iki tanım bulunmaktadır.

Tanım 4.12 [6] J, $\circ$ işlemi ile birlikte bir Jordan halka ve I, J halkasının bir ideali olsun. J halkasının her A, B idealleri için $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere $a \circ b \in I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa I idealine J halkasının *BM-asal ideali* denir. Eğer (0) ideali, J halkasının bir BM-asal ideali ise o zaman J ye *BM-asal Jordan halka* denir.

Tanım 4.13 [29] J, $\circ$ işlemi ile birlikte bir Jordan halka ve I, J halkasının bir ideali olsun. J halkasının her A, B idealleri için $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere $2a \circ (a \circ b) - (a \circ a) \circ b \in I$ iken $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa I idealine J

halkasının *T-asal ideali* denir. Eğer (0) ideali, J halkasının bir T-asal ideali ise o zaman J ye *T-asal Jordan halka* denir.

$J(R)$, R halkasının birleşmeli Jordan halkası olsun. $J(R)$ halkasının elemanları, R halkasının elemanlarıdır ve bu halkadaki çarpma işlemi her $a, b \in R$ için $a \circ b = ab + ba$ ile verilir. a ile b elemanları arasındaki işlem, ab, ise R de bilinen çarpma işlemidir. Ayrıca $2a \circ (a \circ b) - (a \circ a) \circ b = 4aba$ eşitliği sağlanır.

Teorem 4.14 *R, 2-burulmasız bir halka olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) R, asal bir halkadır.

(ii) $J(R)$, T-asal bir Jordan halkadır.

(iii) $J(R)$, BM-asal bir Jordan halkadır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: Kabul edelim ki R asal bir halka ve A ile B, $J(R)$ halkasının her $a \in A$, $b \in B$ için $4aba = 0$ şartını sağlayan idealleri olsun. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olarak alınsın. O halde Teorem 3.6 gereği R halkasının $B' \subseteq B$ şartını sağlayan bir $B' \neq 0$ ideali vardır.
$0 \neq a \in A$ seçelim. $B' \neq 0$, R halkasının bir ideali ve $a \neq 0$ olduğundan kabul gereği $aB'a = 0$ dır. Ancak bu durum R asal bir halka olarak alındığından mümkün değildir. O halde ya $A = 0$ dır ya da $B = 0$ olur. Buradan da $J(R)$ nin T-asal bir Jordan halka olduğu sonucuna varılır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $J(R)$, T-asal bir Jordan halka ve A ile B, $J(R)$ halkasının her $a \in A$, $b \in B$ için $ab + ba = 0$ şartını sağlayan idealleri olsun. $a \in A$, $b \in B$ olduğundan $2a^2 \in A$ dır ve buradan $2a^2b + 2ba^2 = 0$ eşitliği sağlanır. R halkası 2-burulmasız olduğu için $a^2b + ba^2 = 0$ bulunur. Aynı zamanda $a(ab + ba) + (ab + ba)a = 0$ olduğundan $a^2b + ba^2 + 2aba = 0$ dır. Böylece $2aba = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $4aba = 0$ dır. Buna göre $J(R)$, T-asal bir

Jordan halka olduğundan ya $A = 0$ dır ya da $B = 0$ olur. Buradan da $J(R)$ nin BM-asal bir Jordan halka olduğu görülür.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $J(R)$, BM-asal bir Jordan halka ve A ile B, R halkasının $AB = 0$ şartını sağlayan idealleri olsun. O halde A ile B, $J(R)$ halkasının da idealleridir. Eğer A ve B idealleri sıfırdan farklı ise o zaman $J(R)$, BM-asal bir Jordan halka olarak alındığı için $ab + ba \neq 0$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ elemanları mevcuttur. Böylece BA, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olur. BA, aynı zamanda $J(R)$ halkasının da sıfırdan farklı bir idealidir. Ancak kabulden, $(BA)^2 = 0$ olur ve böylece $x, y \in BA$ ise $xy + yx = 0$ bulunur. Bu ise, $J(R)$ nin BM-asal Jordan halka oluşu ile çelişir. Bu yüzden ya $A = 0$ ya da $B = 0$ olmalıdır. Buradan da R halkası asal bir halka olur. □

Sonuç 4.15 *R birimli bir halka ve 2, R halkasının tersinir bir elemanı olsun. I, $J(R)$ halkasının bir ideali ise o zaman aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) I, $J(R)$ halkasının T-asal bir idealidir.

(ii) I, $J(R)$ halkasının BM-asal bir idealidir.

(iii) I, R halkasının asal bir idealidir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: İspat, Teorem 4.14 deki (ii) iken (iii) gerektirmesi ile kolaylıkla görülür.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: I, $J(R)$ halkasının BM-asal bir ideali ve P, I tarafından içerilen R deki en büyük ideal olsun. P, R halkasının asal bir idealidir. Ayrıca $\frac{1}{2} \in R$ olduğundan R/P halkasının karakteristiği 2 den farklıdır. Teorem 3.6, R/P halkasına uyarlanırsa ya R halkasının $P \subset Q \subseteq I$ şartını sağlayan bir Q idealinin var olduğu ya da $P = I$ olduğu görülür. Böylece P idealinin seçiminden, $P = I$ elde edilir. Buradan I, R halkasının asal bir ideali olur.

$(iii) \Rightarrow (i)$: İspat, Teorem 4.14 deki (i) iken (ii) gerektirmesi ile açıkça görülür. □

4.2 Değişmeli Halkaların Türevlerinin Lie Halkaları

Bir önceki kısımda, değişmeli olmayan R halkası için "R, karakteristiği 2 den farklı asal bir halka ise $\mathrm{Der}(R)$ asal bir Lie halkadır." ve "R, 2-burulmasız yarı asal bir halka ise $\mathrm{Der}(R)$ yarı asal bir Lie halkadır." ifadeleri ispatlanmıştır.
Bu kısımda, yukarıda verilen ifadelerin R halkası değişmeli bir halka olduğu durumda da doğru olduğu ispatlanacaktır. Bu yüzden bu kısım boyunca R değişmeli bir halka olarak alınacaktır.
R değişmeli bir halka ve δ, R halkasının bir türevi olmak üzere $r \in R$ için R halkasının $r\delta : x \mapsto r\delta(x)$ şeklindeki bütün türevlerinden oluşan kümeyi $R\delta$ ile gösterelim.

Lemma 4.16 *$\delta \in \mathrm{Der}(R)$ ve $R\delta = \{r\delta : r \in R\}$ olsun. O halde $R\delta$, $\mathrm{Der}(R)$ nin bir Lie althalkasıdır.*

İspat. $R\delta$, $\mathrm{Der}(R)$ nin toplamsal bir altgrubudur. R değişmeli bir halka, $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ ve $R\delta$, $x \in R$ için $(r\delta)(x) = r\delta(x)$ ile tanımlı $r\delta : R \to R$ dönüşümlerinden oluşan bir küme olduğundan Lemma 4.2(ii) gereği $r\delta \in \mathrm{Der}(R)$ dir.
Her $r\delta$, $s\delta \in R\delta$ ve $x \in R$ için,

$$\begin{aligned}
[r\delta, s\delta](x) &= r\delta(s\delta(x)) - s\delta(r\delta(x)) \\
&= r\delta(s)\delta(x) + rs\delta^2(x) - s\delta(r)\delta(x) - sr\delta^2(x) \\
&= (r\delta(s) - s\delta(r))\delta(x) \in R\delta
\end{aligned}$$

olduğundan $R\delta$, $\mathrm{Der}(R)$ nin bir Lie althalkasıdır. □

Notasyon 4.17 δ, R halkasının bir türevi ve I, $R\delta$ Lie halkasının bir ideali olmak üzere bir $\mu(I) = \{a \in R \mid a\delta \in I\}$ kümesi tanımlayalım. $\mu(I)$ kümesi, R halkasının toplamsal bir altgrubudur.

Teorem 4.18 *R halkası, karakteristiği 2 den farklı olan birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. Eğer $0 \neq \delta \in \mathrm{Der}(R)$ ise o zaman $R\delta$ asal bir Lie halkadır.*

İspat. I, $R\delta$ Lie halkasının bir ideali ve $i \in \mu(I)$ olsun. O halde her $r \in R$ için $[i\delta, r\delta] \in I$ dır ve buradan Lemma 4.2(v) gereği her $r \in R$ için $i\delta(r) - r\delta(i) \in \mu(I)$ bulunur. Son ifadede $r = -1$ alınırsa her $i \in \mu(I)$ için,

$$\delta(i) \in \mu(I) \ ; \tag{4.3}$$

$r = i^2$ alınırsa her $i \in \mu(I)$ için,

$$i^2\delta(i) \in \mu(I) \tag{4.4}$$

elde edilir.

A ve B, $R\delta$ halkasının $[A, B] = 0$ şartını sağlayan idealleri olsun. $a \in \mu(A)$ ve $b \in \mu(B)$ alalım. Buradan $a\delta \in A$ ve $b\delta \in B$ olur. O halde Lemma 4.2(v) gereği $0 = [a\delta, b\delta] = (a\delta(b) - b\delta(a))\delta$ dır. R sıfır bölensiz bir halka ve $\delta \neq 0$ olduğundan,

$$a\delta(b) - b\delta(a) = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. $a \in \mu(A)$ ve (4.3) deki bağıntıya göre $\delta(a) \in \mu(A)$ olduğundan (4.5) deki denklemde a yerine $\delta(a)$ yazılırsa $\delta(a)\delta(b) - b\delta^2(a) = 0$ olduğu görülür. Son eşitlikte her iki taraf soldan a^2 ile çarpılırsa,

$$a^2\delta(a)\delta(b) - a^2b\delta^2(a) = 0 \tag{4.6}$$

olur. Benzer şekilde (4.4) deki bağıntı göz önünde bulundurularak, (4.5) deki eşitlikte a yerine $a^2\delta(a)$ yazılırsa $a^2\delta(a)\delta(b) - b\delta(a^2\delta(a)) = 0$ bulunur. Son ifade açılırsa,

$$0 = a^2\delta(a)\delta(b) - a^2b\delta^2(a) - 2ba(\delta(a))^2$$

elde edilir. Burada (4.6) daki eşitlik kullanılırsa $2ba(\delta(a))^2 = 0$ olduğu görülür. Böylece sıfır bölensiz R halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan ya $A = 0$ dır ya $B = 0$ dır ya da her $a \in \mu(A)$ için $\delta(a) = 0$ dır.

Kabul edelim ki her $a \in \mu(A)$ için $\delta(a) = 0$ olsun. Lemma 4.2(v) den her $a \in \mu(A)$ ve $r \in R$ için $a\delta(r) = a\delta(r) - r\delta(a) \in \mu(A)$ dır ve böylece kabulümüz gereği $\delta(a\delta(R)) = 0$ olur. Yani her $a \in \mu(A)$ için $a\delta^2(R) = 0$ dır. R sıfır bölensiz bir halka olduğundan ya $A = 0$ dır ya da $\delta^2 = 0$ olur. Ancak Lemma 4.9 gereği $\delta^2 = 0$ olması $\delta = 0$ olmasını gerektirir. Hipotezden δ, $\mathrm{Der}(R)$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir türevi olduğu için $A = 0$ olmalıdır. Bu durumda ya $A = 0$ ya da $B = 0$ olduğu sonucuna varılır. Böylece $R\delta$ asal bir Lie halkadır. □

Yukarıda elde edilen sonucu, $\mathrm{Der}(R)$ Lie halkasına uyarlamadan önce Teorem 4.18 de verilen R halkası üzerindeki asallık şartını zayıflatarak değişmeli ve birimli Noetherian halkalar için $R\delta$ Lie halkasının asal olduğunu gösterelim.
$R\delta$ Lie halkasının bir A ideali için $\mu(A) = \{a \in R \mid a\delta \in A\}$ kümesini oluşturalım. Eğer R halkası birimli ise o zaman $\mu(A)$ kümesi δ-invaryanttır. Çünkü $a \in \mu(A)$ iken $a\delta \in A$ olur. Bu da R birimli bir halka iken $\delta(a)\delta = [\delta, a\delta] \in A$ olmasını gerektirir. Böylece $\delta(a) \in \mu(A)$ olur ki bu da bize R birimli bir halka olduğunda $\mu(A)$ altkümesinin δ-invaryant olduğunu gösterir.

Aşağıdaki lemma genellikle verilen bir idealden bir δ-ideal inşa etmek için kullanılır.

Lemma 4.19 [18, Lemma 1.2] *R bir halka olsun. I, R halkasının bir ideali ve δ da R halkasının bir türevi ise o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n(I)$, I yı içeren R deki en küçük δ-idealdir.*

İspat. $J = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n(I)$ olsun. J nin R halkasının I yı içeren δ-invaryant bir toplamsal altgrubu olduğu açıkça görülür. J aynı zamanda R halkasının bir idealidir. Bunu öncelikle her $n = 0, 1, 2, ...$ için,

$$\delta^n(I)R \subseteq \sum_{k=0}^{n} \delta^k(I)$$

ile tümevarımdan yararlanarak göstermek gerekir. $n = 0$ için, $IR \subseteq I$ dır. I, R halkasının bir ideali olduğundan $n = 0$ için ispata gerek yoktur.

n için bu ifadenin doğruluğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için,

$$\begin{aligned}
\delta^{n+1}(I)\,R &\subseteq \delta\left(\delta^{n}(I)\,R\right) + \delta^{n}(I)\,\delta(R) \\
&\subseteq \delta\left(\sum_{k=0}^{n}\delta^{k}(I)\right) + \delta^{n}(I)\,R \\
&\subseteq \sum_{k=1}^{n+1}\delta^{k}(I) + \sum_{k=0}^{n}\delta^{k}(I) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\delta^{k}(I)
\end{aligned}$$

sağlanır.

O halde, $JR \subseteq J$ dir, yani J, R halkasının bir sağ idealidir. Aynı zamanda J, R halkasının bir sol ideali olur. Sonuç olarak J, R halkasının bir idealidir.

Kabul edelim ki J', R nin I yı içeren bir δ-ideali olsun. O halde her $n = 0, 1, 2, ...$ için $\delta^{n}(I) \subseteq \delta^{n}(J') \subseteq J'$ olduğu kullanılırsa $J \subseteq J'$ elde edilir. Böylece J, R nin I yı içeren en küçük δ-idealidir. $\square$

Uyarı 4.20 R bir halka olsun. I, R halkasının bir ideali ve δ, R halkasının bir türevi ise o zaman $\bigcap_{i=0}^{\infty}\delta^{-i}(I)$, I tarafından içerilen R deki en büyük δ-idealdir.

Aşağıdaki önerme, D. A. Jordan'ın [18], 1975'de yayınladığı makalesinin ikinci kısmındaki değişmeli halkalar ile ilgili sonuçların özel bir halidir.

Önerme 4.21 *R halkası değişmeli bir Noetherian halka ve R, δ-asal olacak şekilde $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. N, R halkasının nil radikali olsun. O halde N, R halkasının asal bir idealidir, $\bigcap_{i=0}^{\infty}\delta^{-i}(N) = 0$ dır ve N, R halkasının her bir sıfır bölenini içerir.*

Lemma 4.22 *R birimli bir halka ve R, δ-asal olacak şekilde $0 \neq \delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. O halde $r \in R$ için $r\delta = 0$ ise $r = 0$ dır.*

İspat. $\delta(R)R$ nin R halkasının bir δ-ideali olduğu açıkça görülür. Buradan $\delta(R)R$ nin sol annihilatörü I, aynı zamanda bir δ-idealdir. Böylece $\delta(R)R = (0)$ dır veya $I = (0)$ olur. Her $x \in R$ için $r\delta(x) = 0$ ise o zaman $r \in I$ dır ve buradan $r = 0$ elde edilir. □

Teorem 4.23 *R halkası karakteristiği 2 den farklı olan birimli, değişmeli bir Noetherian halka ve R, δ-asal olacak şekilde $0 \neq \delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. O halde $R\delta$ bir asal Lie halkadır.*

İspat. A ve B, $R\delta$ Lie halkasının $[A, B] = 0$ şartını sağlayan iki ideali olsun. $a \in \mu(A)$ ve $b \in \mu(B)$ alalım. Buradan $a\delta \in A$ ve $b\delta \in B$ olur. O halde Lemma 4.2(v) den $0 = [a\delta, b\delta] = (a\delta(b) - b\delta(a))\delta$ dır. R birimli ve δ-asal halka olduğundan Lemma 4.22 gereği $a\delta(b) - b\delta(a) = 0$ elde edilir. Daha sonra Teorem 4.18 in ispatındaki yol izlenirse, her $a \in \mu(A)$ ve her $b \in \mu(B)$ için $2ba(\delta(a))^2 = 0$ elde edilir. Hipotezden, $ba(\delta(a))^2 = 0$ dır.

R birimli bir halka iken R nin $\mu(A)$ ve $\mu(B)$ altkümelerinin her ikisinin de δ-invaryant olduğunu daha önce belirtmiştik. Bu durumda $\mu(A)$ ve $\mu(B)$, R halkasının δ-invaryant altkümeleridir.

N, R halkasının nil radikali olsun. O halde Önerme 4.21 den $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \delta^{-i}(N) = 0$ dır. Eğer $\mu(B) \subseteq N$ ise $\delta(\mu(B)) \subseteq \mu(B)$ olduğu kullanılarak Uyarı 4.20 gereği $\mu(B) \subseteq \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \delta^{-i}(N) = 0$ bulunur. Buradan $\mu(B) = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $B \neq 0$ olsun. O halde $\mu(B) \nsubseteq N$ dir. Bu durumda Önerme 4.21 gereği $\mu(B)$, sıfır bölen olmayan bir eleman içerir. O halde sıfır bölen olmayan en az bir $0 \neq x \in \mu(B) \setminus N$ elemanı mevcuttur. Aynı zamanda her $a \in \mu(A)$ için $xa(\delta(a))^2 = 0$ eşitliği sağlanır. x elemanı sıfır bölen olmadığından her $a \in \mu(A)$ için $a(\delta(a))^2 = 0$ bulunur.

Diğer taraftan her $a \in \mu(A)$ için $\delta(a) \notin N$ olduğunu kabul edelim. Önerme 4.21 gereği $\delta(a)$ sıfır bölen olamaz. Böylece $a\delta(a)\delta(a) = 0$ eşitliğinden $a = 0$ elde edilir ki bu da $\delta(a) = 0 \in N$ olmasını gerektirir. O halde her $a \in \mu(A)$ için $\delta(a) \in N$ dir. Yani $\delta(\mu(A)) \subseteq N$ olur. Bu durumda $\delta(\mu(A)) \subseteq \mu(A)$ olduğu kullanılarak Uyarı 4.20 gereği $\delta(\mu(A)) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} \delta^{-i}(N) = 0$ elde edilir ve buradan $\delta(\mu(A)) = 0$ olduğu görülür. Böylece her $a \in \mu(A)$ için $\delta(a) = 0$ dır. Teorem 4.18 in ispatının son kısmında yapıldığı gibi her $a \in \mu(A)$ için $a\delta^2(R) = 0$ elde edilir.

$A \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde yukarıda elde edilenlerden $\mu(A) \nsubseteq N$ dir ve böylece Önerme 4.21 gereği $\delta^2(R) = 0$ bulunur. O halde her $r, s \in R$ için,

$$0 = \delta^2(rs) = \delta^2(r)s + 2\delta(r)\delta(s) + r\delta^2(s) = 2\delta(r)\delta(s)$$

eşitliği sağlanır ve hipotezden her $r \in R$ için $\delta(r)\delta = 0$ bulunur. Böylece Lemma 4.22 gereği $\delta(R) = 0$ dır ki bu da hipotezle çelişir. O halde ya $A = 0$ dır ya da $B = 0$ olur. □

Teorem 4.24 *R halkası karakteristiği 2 den farklı olan birimli, değişmeli bir Noetherian halka ve R, δ-basit olacak şekilde $0 \neq \delta \in \mathrm{Der}(R)$ olsun. O halde $R\delta$ bir basit Lie halkadır.*

İspat. $1_R \in R$ ise her $r \in R$ için $r = 1_R.r \in R^2$ eşitliği sağlandığından $R^2 = R$ dir. K ve L, R halkasının sıfırdan farklı δ-idealleri ise R δ-basit halka olduğundan K ve L sadece R olabilir. Buna göre $KL = R^2 = R$ olduğundan $KL \neq 0$ bulunur. O halde δ-basit bir halka olan birimli R halkası aynı zamanda δ-asaldır. Bu yüzden Teorem 4.23 gereği $R\delta$ asal bir Lie halkadır. Böylece $[R\delta, R\delta] \neq 0$ olur. A, $R\delta$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. O halde $R\delta$ asal bir Lie halka olduğundan Lemma 4.2(v) gereği $[a\delta, b\delta] = (a\delta(b) - b\delta(a))\delta \neq 0$ olacak şekilde $a, b \in \mu(A)$ elemanları vardır. $r \in R$ olsun. O halde $[a\delta, br\delta] + [ar\delta, b\delta] \in A$ dır. Bu ifade düzenlenirse, $(a\delta(br) - br\delta(a) + ar\delta(b) - b\delta(ar))\delta \in A$ elde edilir. Buradan,

$$a\delta(br) - br\delta(a) + ar\delta(b) - b\delta(ar) \in \mu(A)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Son ifade açılır ve δ nın R halkasının türevi olduğu kullanılırsa her $r \in R$ için,

$$2(a\delta(b) - b\delta(a))r \in \mu(A)$$

elde edilir. Böylece $\mu(A)$ kümesi, R halkasının sıfırdan farklı $I = 2(a\delta(b) - b\delta(a))R$ idealini içermiş olur. R birimli bir halka iken $\mu(A)$ kümesinin δ-invaryant olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\delta(\mu(A)) \subseteq \mu(A)$ dır ve buradan her $n = 0, 1, 2, ...$ için $\delta^n(I) \subseteq \mu(A)$ olur. $\mu(A)$, R halkasının toplamsal bir altgrubu olduğundan R halkasının bir $J = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^n(I)$ ideali, $\mu(A)$ kümesi tarafından içerilir. Aynı zamanda Lemma 4.19 dan J, R halkasının sıfırdan farklı bir δ-idealidir. Bu durumda R halkasının δ-basit olduğu kullanılırsa, $J = R$ olduğu görülür. Böylece $R \subseteq \mu(A)$ olur. Diğer taraftan $\mu(A)$ kümesi, R halkasının toplamsal bir altgrubu olduğu için $\mu(A) \subseteq R$ dir. Dolayısı ile $\mu(A) = R$ olur ve buradan $A = R\delta$ olduğu görülür. O halde $R\delta$ basit bir Lie halkadır. □

Teorem 4.25 *R halkası karakteristiği* 2 *den farklı olan değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. O halde* $\mathrm{Der}(R)$ *asal bir Lie halkadır.*

İspat. Eğer R halkası birimli değil ise Teorem 2.20 gereği R halkası, birimli bir R^1 halkası içine gömülebilir. Burada $R^1 = \{(a,i) \mid a \in R, i \in \mathbb{Z}\}$ kümesi her $a, b \in R$, $i, j \in \mathbb{Z}$ için,

$$(a,i) + (b,j) = (a+b, i+j)$$

ve

$$(a,i)(b,j) = (ab + ib + ja, ij)$$

işlemlerine göre birimli halkadır. Ayrıca $\varphi : R \to R^1$, $a \mapsto (a,0)$ ile tanımlanan dönüşüm de söz konusu halka monomorfizmasıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{Der}(R) &\to \mathrm{Der}(R^1) \\ \delta &\mapsto \theta(\delta) \end{aligned}$$

ve her $\delta \in \mathrm{Der}(R)$ için,

$$\begin{aligned} \theta(\delta) : R^1 &\to (R^1) \\ (a,i) &\mapsto (\theta(\delta))(a,i) = \varphi(\delta(a)) = (\delta(a), 0) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşümler yardımıyla $\mathrm{Der}(R)$ Lie halkası, $\mathrm{Der}(R^1)$ Lie halkası içine gömülebilir. Bu yüzden R halkasının birimli bir halka olduğu durumu incelemek yeterli olacaktır.

Eğer $\mathrm{Der}\,(R) = 0$ ise sonuç aşikardır. O halde $\mathrm{Der}\,(R) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. A ve B, $\mathrm{Der}\,(R)$ halkasının $[A, B] = 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı iki ideali olsun. $0 \neq \delta \in A$, $0 \neq \gamma \in B$ ve $\gamma\,(r) \neq 0$ olacak şekilde bir $r \in R$ elemanı alalım. $0 \neq \delta \in A \cap R\delta$ dır. Aynı zamanda $[r\delta, \gamma] \in B$ dir ve buradan Lemma 4.2(iv) gereği $r\,[\delta, \gamma] - \gamma\,(r)\,\delta \in B$ bulunur. $[\delta, \gamma] \in [A, B] = 0$ olduğundan $\gamma\,(r)\,\delta \in B$ dir. R sıfır bölensiz bir halka olduğundan $0 \neq \gamma\,(r)\,\delta \in B \cap R\delta$ dır ki bu da Teorem 4.18 gereği bir çelişkidir. O halde $\mathrm{Der}\,(R)$ asal bir Lie halkadır. □

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.25 in değişmeli olmayan bir halkaya bir genellemesidir.

Teorem 4.26 *S halkası karakteristiği 2 den farklı asal bir halka olsun ve bir $K\,(S) = \{\delta \in \mathrm{Der}\,(S) \mid \delta\,(Z\,(S)) = 0\}$ kümesi tanımlansın. O halde $K\,(S)$, $\mathrm{Der}\,(S)$ Lie halkasının bir asal idealidir.*

İspat. S halkasının birimli bir halka olduğu durumu incelemek yeterli olacaktır. Her $\delta, \gamma \in K(S)$ ve her $r \in Z(S)$ için $(\delta + \gamma)(r) = \delta(r) + \gamma(r) = 0 + 0 = 0$ olduğundan $\delta + \gamma \in K(S)$ dir. Aynı zamanda her $\delta \in K(S)$, $\gamma \in \mathrm{Der}(S)$ ve her $r \in Z(S)$ için $[\delta, \gamma](r) = \delta(\gamma(r)) - \gamma(\delta(r))$ dir ve burada her $r \in Z(S)$ için $\delta(r) = 0$ olduğu kullanılırsa Lemma 4.2(ii) gereği $[\delta, \gamma](r) = 0$ bulunur. Böylece $[\delta, \gamma] \in K(S)$ elde edilir. O halde $K(S)$, $\mathrm{Der}(S)$ Lie halkasının bir idealidir.

A ve B, $\mathrm{Der}\,(S)$ Lie halkasının $[A, B] \subseteq K\,(S)$ şartını sağlayan iki ideali olsun. $A \nsubseteq K\,(S)$ ve $B \nsubseteq K\,(S)$ olduğunu kabul edelim. $\delta \in A \backslash K\,(S)$ ve $\gamma \in B \backslash K\,(S)$ alalım.

δ türevinin $Z\,(S)$ ye kısıtlanışını $\widehat{\delta}$ ile gösterelim. O zaman Lemma 4.2(ii) gereği $0 \neq \widehat{\delta} \in \mathrm{Der}\,(Z\,(S))$ dir ve Teorem 4.18 gereği $Z\,(S)\,\widehat{\delta}$ asal bir Lie halka olur.

$\theta\,(A) = \left\{a\widehat{\delta} \mid a \in Z\,(S) \text{ ve } a\delta \in A\right\}$ kümesi ve benzer şekilde $\theta(B)$ kümesi tanımlansın. Her $a\widehat{\delta}, b\widehat{\delta} \in \theta(A)$ için $a + b \in Z(S)$ ve $a\delta + b\delta \in A$ olduğundan $a\widehat{\delta} + b\widehat{\delta} = (a + b)\widehat{\delta} \in \theta(A)$ dır. Aynı zamanda her $a\widehat{\delta} \in \theta(A)$ ve $b\widehat{\delta} \in Z(S)\widehat{\delta}$ için $a\widehat{\delta}(b) - b\widehat{\delta}(a) \in Z(S)$ dir ve A, $\mathrm{Der}(S)$ Lie halkasının ideali olduğundan

Lemma 4.2(v) gereği $(a\delta(b) - b\delta(a))\delta = [a\delta, b\delta] \in A$ bulunur. Dolayısıyla Lemma 4.2(v) den $(a\widehat{\delta}(b) - b\widehat{\delta}(a))\widehat{\delta} = [a\widehat{\delta}, b\widehat{\delta}] \in \theta(A)$ elde edilir. Buna göre $\theta(A)$ ve benzer şekilde $\theta(B)$, $Z(S)\widehat{\delta}$ Lie halkasının sıfırdan farklı idealleridir ancak her $a\widehat{\delta} \in \theta(A)$, $b\widehat{\gamma} \in \theta(B)$ için $[a\delta, b\gamma] \in [A, B] \subseteq K(S)$ olduğundan her $r \in Z(S)$ için $[a\widehat{\delta}, b\widehat{\gamma}](r) = 0$ dır. Yani $[\theta(A), \theta(B)] = 0$ olur. $Z(S)\widehat{\delta}$ asal bir Lie halka olduğundan bu durum mümkün değildir ve böylece ya $A \subseteq K(S)$ dir ya da $B \subseteq K(S)$ olur. Buradan da $K(S)$ nin, $\operatorname{Der}(S)$ halkasının asal bir ideali olduğu görülür. □

Teorem 4.27 *R halkası değişmeli ve 2-burulmasız bir yarı asal halka olsun. O halde,*

(i) $\operatorname{Der}(R)$ *yarı asal bir Lie halkadır.*

(ii) Her $\delta \in \operatorname{Der}(R)$ için $R\delta$ yarı asal bir Lie halkadır.

İspat. (i) I, $\operatorname{Der}(R)$ Lie halkasının $[I, I] = 0$ şartını sağlayan bir ideali ve $0 \neq \delta \in I$ olsun. $r \in R$ alalım. O halde $[\delta, r\delta] \in I$ dır. Yani Lemma 4.2(iv) gereği $\delta(r)\delta \in I$ olur. Böylece $[\delta(r)\delta, \delta] \in [I, I] = 0$ dır ve buradan Lemma 4.2(iv) gereği $\delta^2(r)\delta = 0$ elde edilir. Özel olarak, $\delta^2(r)\delta^2(r) = 0$ dır. Böylece R değişmeli ve yarı asal bir halka olduğundan $\delta^2 = 0$ bulunur. Buradan Lemma 4.9 kullanılarak $\delta = 0$ olduğu görülür. O halde $\operatorname{Der}(R)$ yarı asal bir Lie halkadır.

(ii) Bu şıkkın ispatı da benzer bir şekilde yapılır. □

Örnek 4.28 K, iki elemanlı bir cisim ve $T = K[x]$, K üzerinde bir polinomlar halkası olsun. δ, T halkasının d/dx şeklinde bir türevi olduğunda $\operatorname{Der}(T) = T\delta$ olur. $A = Ker\delta = K[x^2]$ olsun ve $A\delta = \{a\delta \mid a \in A\}$ kümesi tanımlansın. O halde $\delta^2 = 0$ olduğundan $A\delta$, $T\delta$ halkasının bir ideali olur. Ancak burada $[A\delta, A\delta] = 0$ dır. Bu yüzden Teorem 4.18, 4.23, 4.25 ve 4.27 de verilen halkaların 2-burulmasız olma koşulu kaldırılamaz.

5. DEĞİŞMELİ δ-ASAL VE δ-BASİT HALKALARIN TÜREVLERİNİN LIE HALKALARI

Bir önceki bölümde C.R Jordan ve D.A.Jordan'ın [16], birimli ve değişmeli R halkası asal halka ya da Noetherian δ-asal halka olduğunda R nin sıfırdan farklı her δ türevi için $R\delta = \{r\delta \mid r \in R\}$ Lie halkasının asal olduğunu gösterdiklerinden bahsedilmiştir.

Bu bölümde esas olarak Mikhail A. Chebotar ve Pjek-Hwee Lee' nin "Prime Lie Rings of Derivations of Commutative Rings" adlı çalışması incelenecektir.[14] Buradaki teorem ve sonuçlarda, birimli, değişmeli ve 2-burulmasız R halkası üzerinde δ-asallık koşulu dışında başka bir koşul belirtilmeden $R\delta$ Lie halkasının asal olduğu gösterilecektir. Aynı zamanda R halkasının δ-idealleri ile $R\delta$ Lie halkasının idealleri arasında nasıl bir bağlantı kurulabileceği ifade edilecektir.

Aksi belirtilmedikçe bundan sonraki kısımda R değişmeli bir halka olarak kabul edilecektir. Bu yüzden, R halkasının boş olmayan S altkümesinin sol sıfırlayan ile sağ sıfırlayan kümeleri arasında fark olmayacağından bu kümeler *sıfırlayan* olarak adlandırılıp $ann\,(S)$ ile ifade edilebilir.

Lemma 5.1 *R değişmeli bir halka, δ R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve R δ-asal olsun. O halde,*

(i) S, R halkasının sıfırdan farklı δ-invaryant bir altkümesi ise o zaman $ann\,(S) = 0$ dır.

(ii) $r \in R$ ve $r\delta = 0$ ise o zaman $r = 0$ dır.

İspat. (i) R halkasının S altkümesi ile üretilen $I = S + SR$ ideali sıfırdan farklıdır ve $ann\,(S) = ann\,(I)$ dır. I, δ-invaryant olduğu için I, R halkasının δ-idealidir. Dolayısıyla R, δ-asal bir halka olduğundan $ann\,(I) = 0$ dır. Buradan $ann\,(S) = 0$ olur.

(ii) $\delta\,(R)$, R halkasının sıfırdan farklı δ-invaryant bir altkümesidir. (i)'den $ann\,(\delta\,(R)) = 0$ olur. $r\delta = 0$ ise, yani her $x \in R$ için $r\delta\,(x) = 0$ ise, o zaman $r \in ann\,(\delta\,(R)) = 0$, dolayısıyla $r = 0$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.2 *R birimli, değişmeli ve 2-burulmasız bir halka olsun. δ, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve R halkası δ-asal ise o zaman $R\delta$ asal bir Lie halkadır.*

İspat. Diyelim ki $R\delta$ Lie halkası asal olmasın. Yani A ve B, $[A,B]=0$ olacak şekilde $R\delta$ Lie halkasının sıfırdan farklı iki ideali olsun. $a\in\mu(A)$ ve $b\in\mu(B)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $a\delta\in A$ ve $b\delta\in B$ olur. O halde $[a\delta,b\delta]=0$ dır, ya da buna denk olarak $(a\delta(b)-b\delta(a))\delta=0$ elde edilir. Lemma 5.1(ii) den,

$$a\delta(b)-b\delta(a)=0 \qquad \forall a\in\mu(A),\ b\in\mu(B) \tag{5.1}$$

eşitliği sağlanır. $a\in\mu(A)$, $b\in\mu(B)$ ve $r\in R$ olduğunda $a\delta\in A$ dır ve böylece $[a\delta,br\delta]\in A$ olur. Bir başka deyişle, $(a\delta(br)-br\delta(a))\delta\in A$ dır. Son ifade δ nın R halkasında türev olduğu kullanılarak düzenlenirse $a\delta(b)r+ab\delta(r)-br\delta(a)\in\mu(A)$ elde edilir. R değişmeli bir halka olarak kabul edildiği için $ab\delta(r)+r(a\delta(b)-b\delta(a))\in\mu(A)$ dır. Buradan (5.1) deki denklem kullanılarak,

$$ab\delta(r)\in\mu(A) \qquad \forall a\in\mu(A),\ b\in\mu(B),\ r\in R \tag{5.2}$$

bulunur. Şimdi de $a\in\mu(A)$, $b,b'\in\mu(B)$ ve $r\in R$ olsun. (5.2) deki bağıntı göz önüne alınarak (5.1) deki denklemde a yerine $ab\delta(r)$ ve b yerine b' yazılırsa $ab\delta(r)\delta(b')=b'\delta(ab\delta(r))$ eşitliği elde edilir. Yani,

$$ab\delta(b')\delta(r)=bb'\delta(a)\delta(r)+ab'\delta(b)\delta(r)+abb'\delta^2(r)$$

olur. (5.1) den $a\delta(b')=b'\delta(a)$ olduğu kullanılırsa her $a\in\mu(A)$, $b,b'\in\mu(B)$ ve $r\in R$ için,

$$ab\delta(b')\delta(r)=ba\delta(b')\delta(r)+ab'\delta(b)\delta(r)+abb'\delta^2(r)$$

bulunur ve buradan,

$$ab'\left(\delta(b)\delta(r)+b\delta^2(r)\right)=0 \qquad \forall a\in\mu(A),\ b,b'\in\mu(B),\ r\in R \tag{5.3}$$

elde edilir.

$A \neq 0$ ve $B \neq 0$ kabul ettiğimiz için $\mu(A) \neq 0$ ve $\mu(B) \neq 0$ dır. R birimli bir halka iken $\mu(A)$ ve $\mu(B)$ altkümeleri δ-invaryant olduğuna göre Lemma 5.1(i), (5.3) denklemine iki kez uygulanırsa,

$$\delta(b)\delta(r) + b\delta^2(r) = 0 \qquad \forall b \in \mu(B),\ r \in R \tag{5.4}$$

bulunur. (5.4) de r yerine r^2 yazılırsa her $b \in \mu(B)$, $r \in R$ için $\delta(b)\delta(r^2) + b\delta^2(r^2) = 0$ olur ve δ nın değişmeli R halkasında bir türev olduğu kullanılırsa her $b \in \mu(B)$ ve $r \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(b)\delta(r)r + \delta(b)r\delta(r) + b\delta\left(\delta\left(r^2\right)\right) \\ &= 2r\delta(b)\delta(r) + b\delta(\delta(r)r + r\delta(r)) \\ &= 2r\delta(b)\delta(r) + b\delta^2(r)r + 2b\delta(r)\delta(r) + br\delta^2(r) \\ &= 2r\delta(b)\delta(r) + 2rb\delta^2(r) + 2b\delta(r)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

R halkasının 2-burulmasızlık özelliği ve (5.4) denklemi kullanılırsa, her $b \in \mu(B)$ ve $r \in R$ için $b\delta(r)^2 = 0$ olur. Son eşitliğe bir kez daha Lemma 5.1(i) uygulanırsa her $r \in R$ için $\delta(r)^2 = 0$ olur. Elde edilen bu son denklem her $r, s \in R$ için r yerine $r + s$ alınarak lineerleştirilirse $2\delta(r)\delta(s) = 0$ bulunur. Lemma 5.1(ii) son kez uygulanırsa her $r \in R$ için $\delta(r) = 0$ elde edilir. Ancak bu, teoremin hipotezi ile çelişir. Çünkü hipotezde δ, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olarak alınmıştı. O halde ya $A = 0$ ya da $B = 0$ dır. Böylece ispat biter. $\square$

Teorem 5.3 *R birimli, değişmeli, 2-burulmasız bir halka ve δ, R halkası δ-asal olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer J, R halkasının bir δ-ideali ise o zaman $J\delta$, $R\delta$ Lie halkasının bir ideali olur. Tersine, J R halkasının sıfırdan farklı bir δ-ideali olmak üzere $R\delta$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $J\delta$ formunda bir ideal içerir.*

İspat. J, R halkasının bir δ-ideali ise o zaman $a \in J$ ve $r \in R$ için $[a\delta, r\delta] = (a\delta(r) - r\delta(a))\delta \in J\delta$ olur. O halde $J\delta$, $R\delta$ Lie halkasının bir idealidir.

Tersine, A, $R\delta$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Teorem 5.2 den $R\delta$ asal bir Lie halka olduğu için $[A, A] \neq 0$ olur. Böylece uygun $a, b \in \mu(A)$ için $[a\delta, b\delta] = (a\delta(b) - b\delta(a))\delta \neq 0$ dır. $r \in R$ olsun. O halde $[a\delta, br\delta] + [ar\delta, b\delta] \in A$ dır. Bu ifade düzenlenirse her $r \in R$ için,

$$2(a\delta(b) - b\delta(a))r \in \mu(A)$$

elde edilir. Böylece $\mu(A)$ kümesi, R nin sıfırdan farklı $I = 2(a\delta(b) - b\delta(a))R$ idealini içerir. R birimli bir halka iken $\mu(A)$ kümesi δ-invaryanttır ve her $n = 0, 1, 2, ...$ için $\delta^n(I) \subseteq \mu(A)$ dır. Böylece $\mu(A)$ kümesi, R halkasının sıfırdan farklı bir δ-ideali olan $J = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^n(I)$ yi içerir. Dolayısıyla $R\delta$ Lie halkasının A ideali, $J\delta$ idealini kapsar. $\square$

Bir uygulama olarak, Teorem 4.24 ün bir özel sonucu aşağıdaki gibi elde edilir.

Sonuç 5.4 *R birimli, değişmeli ve 2-burulmasız bir halka olsun. δ, R halkası δ-basit olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ise o zaman $R\delta$ basit bir Lie halkadır.*

İspat. A, $R\delta$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. δ-basit bir halka olan birimli R halkası aynı zamanda δ-asaldır. Bir önceki teoremden $J\delta \subseteq A$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir J ideali vardır. J, aynı zamanda R halkasının bir δ-idealidir. R halkasının δ-basit olduğu kullanılırsa, $J = R$ olduğu görülür. Buradan $R\delta \subseteq A$ olur. Diğer taraftan A, $R\delta$ Lie halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için $A \subseteq R\delta$ dır. Dolayısı ile $A = R\delta$ olur. Bu durumda $R\delta$ basit bir Lie halkadır. $\square$

Tanım 5.5 R bir halka ve D, $\mathrm{Der}(R)$ nin bir Lie althalkası ve R-altmodülü olsun.

(i) Her $\delta \in D$ için R halkasının δ-invaryant bir idealine *D-ideal* denir.

(ii) Eğer R halkasının (0) ve R den başka D-ideali yoksa R halkasına *D-basit halka*; R halkasının sıfırdan farklı iki D-idealinin çarpımı sıfırdan farklı ise

R halkasına D-*asal halka* adı verilir. Buradan D altkümesinin tek bir δ türevi içerdiği durumda R halkasına sırasıyla δ-basit ve δ-asal halka adı verildiği açıkça anlaşılır.

Teorem 5.6 *R halkası, karakteristiği 2 den farklı, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. D,* $\mathrm{Der}\,(R)$ *nin Lie althalkası ve bir R-altmodülü ise o zaman D asal bir Lie halkadır.*

İspat. A ve B, $[A,B]=0$ olacak şekilde D Lie halkasının iki ideali olsun. $\delta \in A$, $\delta' \in B$ ve $r \in R$ için $[\delta', r\delta] \in B$ dir. Bundan dolayı $[\delta,[\delta',r\delta]]=0$ olur. Şimdi de son yazılan ifadenin açılımının,

$$0=[\delta,[\delta',r\delta]]=[\delta,\delta'(r)\delta]=(\delta\delta')\,(r)\,\delta$$

şeklinde olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $[\delta', r\delta]$ komütatörünü düzenleyelim. Her $y \in R$ için,

$$\begin{aligned}
[\delta', r\delta]\,(y) &= (\delta'\,(r\delta))\,(y)-((r\delta)\,\delta')\,(y)\\
&= \delta'\,((r\delta)\,(y))-(r\delta)\,(\delta'\,(y))\\
&= \delta'\,(r\delta\,(y))-r\,(\delta\delta')\,(y)\\
&= \delta'\,(r)\,\delta\,(y)+r\,(\delta'\delta)\,(y)-r\,(\delta\delta')\,(y)\\
&= \delta'\,(r)\,\delta\,(y)+r\,[\delta',\delta]\,(y)\\
&= \delta'\,(r)\,\delta\,(y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve buradan $[\delta,[\delta',r\delta]]=[\delta,\delta'\,(r)\,\delta]$ olduğu görülür. Her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned}
[\delta,\delta'\,(r)\,\delta]\,(x) &= (\delta\,(\delta'\,(r)\,\delta))\,(x)-((\delta'\,(r)\,\delta)\,\delta)\,(x)\\
&= (\delta\delta')\,(r)\,\delta\,(x)+\delta'\,(r)\,\delta^2\,(x)-\delta'\,(r)\,\delta^2\,(x)\\
&= (\delta\delta')\,(r)\,\delta\,(x)
\end{aligned}$$

olacağından $[\delta,\delta'\,(r)\,\delta]=(\delta\delta')\,(r)\,\delta$ eşitliği de sağlanır.

Böylece her $r \in R$ için $(\delta\delta')\,(r)\,\delta=0$ elde edilir. R nin sıfır bölensiz bir halka oluşu, δ sıfırdan farklı bir türev olduğu için $\delta\delta' = 0$ olmasını gerektirir. Teorem 2.62 den ya $\delta = 0$ dır ya da $\delta' = 0$ dır. Böylece $A = 0$ dır ya da $B = 0$ dır. O halde D asal bir Lie halkadır. □

Teorem 5.2 nin ışığında şu sorunun sorulması doğaldır: R, D-asal bir halka iken D asal bir Lie halka mıdır? [14] de bu açık probleme R ancak sıfırdan farklı nilpotent eleman içermeyen bir halka olduğunda bir çözüm bulunabilmiştir. Daha sonra [15] de R, D-asal bir halka iken D nin ve D ile birlikte her bir idealinin de asal Lie halka olduğu ispatlanmıştır.

Sonuç 5.7 *R halkası sıfırdan farklı nilpotent elemanları olmayan, değişmeli, 2-burulmasız bir halka ve D,* $\mathrm{Der}(R)$ *nin bir Lie althalkası ve R-altmodülü olsun. Eğer R, D-asal bir halka ise o zaman D asal bir Lie halkadır.*

İspat. Bir önceki teorem kullanılarak bu sonucun ispatı yapılacaktır. Bunun için R nin sıfır bölensiz bir halka olduğunu göstermek yeterlidir. a ve b, R halkasının $ab = 0$ şartını sağlayan iki elemanı olsun. $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\delta \in D$ için, $0 = \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ dir. Buradan $\delta(a)b = -a\delta(b)$ elde edilir. Son ifadeyi aşağıdaki eşitlikte kullanırsak,

$$(\delta(a)b)^2 = (\delta(a)b)(\delta(a)b) = (\delta(a)b)(-a\delta(b)) = -\delta(a)ba\delta(b)$$

elde edilir. $ab = 0$ olduğu için $(\delta(a)b)^2 = 0$ dır. R halkası sıfırdan farklı nilpotent elemanları olmayan bir halka olduğundan $\delta(a)b = 0$ dır. $n = 1, 2, ...$ olmak üzere $\delta_1, ..., \delta_n \in D$ için bu işlem n kez tekrarlanır ise $(\delta_1...\delta_n)(a)b = 0$ elde edilir.
$n = 1, 2, ...$ için $D^0 = \{id_R\}$, $D^n = \{\delta_1...\delta_n \mid \delta_1, ..., \delta_n \in D\}$ kümeleri ile,

$$\overline{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} D^n \qquad ve \qquad I = \sum_{\Delta \in \overline{D}} R\Delta(a)$$

kümeleri tanımlansın. O halde I, R halkasının sıfırdan farklı bir D-idealidir. Çünkü her $\delta \in D$ için $\delta(I) \subseteq I$ olduğu açıkça görülür. Aynı zamanda $n = 1, 2, ...$ olmak üzere her $\delta_1, ..., \delta_n \in D$ için $(\delta_1...\delta_n)(a)b = 0$ olduğundan $Ib = 0$ dır. R

nin D-asal bir halka olduğu göz önüne alınırsa $b = 0$ elde edilir. Dolayısıyla R, sıfır bölensiz bir halkadır. Teorem 5.6 dan D, asal bir Lie halka olur. $\square$

6. SONUÇ

Üçüncü bölümde, I. N. Herstein'ın 1969 yılında yayınlanan kitabının [13] ilk kısmında basit halkaların Lie ve Jordan yapıları ile ilgili olarak kanıtladığı lemma ve teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bazı teoremlerin daha iyi anlaşılması için yeri geldiğinde farklı yazarlara ait çalışmalara yer verilmiştir.

Posner'ın [28] asal halkaların türevleri ile ilgili bir teoreminin Lie ideallere bir genellemesi, Awtar'ın 1973 yılında yaptığı çalışmasında elde ettiği sonuçlardan yararlanılarak dördüncü bölümün ilk kısmında sunulmuştur. Bu genelleme sayesinde değişmeli olmayan asal R halkasının türevlerinin $\mathrm{Der}\,(R)$ Lie halkasının yapısı ile ilgili bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Daha sonra bu sonuçlar, yarı asal halkalara genişletilmeye çalışılmıştır.

Dördüncü bölümün ikinci kısmında, R halkasının değişmeliliği esas alınmış ve birinci kısımdaki çalışmaya benzer bir çalışma yapılarak $\mathrm{Der}\,(R)$ Lie halkasının yapısı incelenmiştir.

Son bölümde, R halkasının değişmeli olduğu durum incelenmeye devam edilmiş, bir önceki bölümde verilen Teorem 4.24 ün hipotezinde geçen Noetherian halka olma koşuluna gerek duyulmadan R halkasının sıfırdan farklı bir δ türevi için $R\delta$ Lie halkasının basit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca D, $\mathrm{Der}\,(R)$ nin bir Lie althalkası ve bir R-altmodülü olmak üzere D-asal halka tanımlanmış, R ancak sıfırdan farklı nilpotent elemanlar içermeyen D-asal bir halka iken D nin asal bir Lie halka olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Daha sonra [24] de P.H. Lee ve C. K. Liu tarafından R, yalnızca D-asal bir halka iken D nin ve D ile birlikte her bir idealinin de asal Lie halka olduğu ispatlanmış, R δ-asal bir halka olduğu sürece yalnız $[R\delta, R\delta]$ idealinin değil aynı zamanda $R\delta$ Lie halkasının her idealinin kendi başına asal bir Lie halka olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] Amitsur, S. A. 1956. Invariant submodules of simple rings, **Proc. Amer. Math. Soc.**, **7**: 987-989.

[2] Awtar, R. 1973. Lie and Jordan structure in prime rings with derivations, **Proc. Amer. Math. Soc.**, **41**: 67-74.

[3] Baxter, W. E. 1956. Lie simplicity of a special class of associative rings, **Proc. Amer. Math. Soc.**, **7**: 855-863.

[4] Bergen, J. and Montgomery, S. and Passman, D. S. 1987. Radicals of crossed products of enveloping algebras, **Israel J. Math.**, **59** no.2: 167-184.

[5] Bresar, M. 1995. On generalized biderivations and related maps, **J. Algebra**, **172**: no.3: 764-786.

[6] Brown, B. and McCoy, N. H. 1958. Prime ideals in nonassociative rings, **Trans. Amer. Math. Soc.**, **89**: 245-255.

[7] Chebotar, M. A. and Lee, P.H. 2006. Prime Lie rings of derivations of commutative rings, **Comm. Algebra**, **34** no.12: 4339-4344.

[8] Giambruno, A. and Herstein, I. N. 1981. Derivations with nilpotent values, **Rend. Circ. Math. Palermo (2)**, **30**: no.2: 199-206.

[9] Hattori, A. 1951. On invariant subrings, **Jap. J. Math.**, **21**: 121-129.

[10] Herstein, I. N. 1955. On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring, **Amer. J. Math.**, **77**: 279-285.

[11] Herstein, I. N. 1955. The Lie ring of a simple associative ring, **Duke Math. J.**, **22**: 471-476.

[12] Herstein, I. N. 1968. Noncommutative Rings. The Mathematical Association of America, p. 199, New York.

[13] Herstein, I. N. 1969. Topics in Ring Theory. University of Chicago Press, p. 132, Chicago.

[14] Herstein, I. N. 1970. On the Lie structure of an associative ring, **J. Algebra**, **14**: 561-571.

[15] Herstein, I. N. 1978. A note on derivations, **Canad. Math. Bull.**, **21**: no.3: 369-370.

[16] Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Holt, Rinehart and Winston, p. 502, New York.

[17] Jacobson, N. 1975. PI-Algebras, An Introduction. Lecture Notes In Math. 441, Springer-Verlag, p. 115, New York.

[18] Jordan, D. A. 1975. Noetherian Ore extensions and Jacobson rings, **J. London Math. Soc. (2)**, **10**: 281-291.

[19] Jordan, C. R. and Jordan, D. A. 1978. Lie rings of derivations of associative rings, **J. London Math. Soc. (2)**, **17** no.1: 33-41.

[20] Jordan, C. R. and Jordan, D. A. 1978. The Lie structure of a commutative ring with a derivation, **J. London Math. Soc. (2)**, **18**: no.1: 39-49.

[21] Jordan, D. A. 1986. On the ideals of a Lie algebra of derivations, **J. London Math. Soc. (2)**, **33**: no.1: 33-39.

[22] Kaplansky, I. 1971. Lie Algebras and Locally Compact Groups. The University of Chicago Press, p. 148, Chicago and London.

[23] Lam, T. Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings. 2nd Ed.Springer-Verlag, p. 385, New York.

[24] Lee, P.H. and Liu, C. K. 2007. Prime Lie rings of derivations of commutative rings II, **Comm. Algebra**, **35** no.4: 1205-1213.

[25] Mayne, J. H. 1982. Ideals and centralizing mappings in prime rings, **Proc. Amer. Math. Soc.**, **86**: no.2: 211-212.

[26] McCoy, N. H. 1964. The Theory of Rings. The Macmillan Co., p. 161, New York.

[27] Nowicki, A. 1985. The Lie structure of a commutative ring with a derivation, **Arch. Math. (Basel)**, **45**: no.4: 328-335.

[28] Posner, E. C. 1957. Derivations in Prime Rings, **Proc. Amer. Math. Soc.**, **8**: 1093-1100.

[29] Tsai, C. 1968. The prime radical in a Jordan ring, **Proc. Amer. Math. Soc.**, **19**: 1171-1175.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Berna ARSLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Aydın, 04.05.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	İzmir Ege Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a)

b)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. 2007 -

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	byorganci@adu.edu.tr
Tarih	:	