



**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2010-0005**

**STANDART AĞLAR ÜZERİNDE ε -DÜZGÜN
YAKINSAYAN METOTLAR**

Mehmet Ekici

**DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Ali Filiz**

AYDIN-2010

**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2010-0005**

**STANDART AĞLAR ÜZERİNDE ε -DÜZGÜN
YAKINSAYAN METOTLAR**

Mehmet Ekici

**DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Ali Filiz**

AYDIN-2010

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Mehmet Ekici tarafından hazırlanan Standart Ağlar Üzerinde ε -Düzgün Yakınsayan Metotlar başlıklı tez, 30.07.2010 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Yrd. Doç. Dr. Ali Filiz	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN	Muğla Üniversitesi	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ali Işık	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:		
Üye	:		

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

30.07.2010

Mehmet Ekici

ÖZET
STANDART AĞLAR ÜZERİNDE ε -DÜZGÜN
YAKINSAYAN METOTLAR

Mehmet Ekici

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali Filiz
2010, 51 sayfa

Tekil olarak pertürbe edilmiş iki noktalı sınır değer problemi için, bir diferansiyel denklemin hiçbir tam çözümünü gerektirmeyen, eş uzunluklu bir ağ üzerinde ε -düzgün bir sonlu fark metodu önerilir. Problemin tekil pertürbasyon doğasını yerel bir sınır değer problemi boyunca yansıtan bir tam-sabitlenmiş operatör metodu ile başlanır. Ancak, yerel sınır değer problemini çözmek için, tam olarak çözmek yerine yerel bölgede bir Shishkin ağı üzerinde bir geri metot kullanılır. Ayrıca, önerilen nümerik metodun yakınsaklık özellikleri incelenir ve herhangi bir ε için bunun gerçek çözüme dögümsel olarak yakınsadığı ispatlanır.

Anahtar Sözcükler

ε -düzgün, Tekil pertürbasyon, Sabitlenmiş operatör metodu, Shishkin ağı.

ABSTRACT**AN ε -UNIFORM METHOD ON EQUIDISTANT MESHES**

Mehmet Ekici

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ali Filiz

2010, 51 pages

For a singularly-perturbed two-point boundary value problem, we propose an ε -uniform finite difference method on an equidistant mesh which requires no exact solution of a differential equation. We start with a full-fitted operator method reflecting the singular perturbation nature of the problem through a local boundary value problem. However, to solve the local boundary value problem, we employ an upwind method on a Shishkin mesh in local domain, instead of solving it exactly. We further study the convergence properties of the numerical method proposed and prove it nodally converges to the true solution for any ε .

Key Words ε -uniform, Singular perturbation, Fitted operator method, Shishkin mesh.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim insanı sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Filiz'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez yazım sırasında değerli bilgilerini esirgemeyen hocalarım Doç. Dr. Ali İhsan Neslitürk ve Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK'a eşsiz yorumlarıyla sağlamış oldukları bilimsel katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Ekici

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
İNTİHAL BEYAN SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
1. GİRİŞ	1
2. KONVEKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMİNE GENEL BAKIŞ	3
2.1. Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Analitik Davranışı	3
2.2. Tekil Pertürbe Edilmiş Problemler için Nümerik Metotlar	4
3. STANDART NÜMERİK METOTLAR	9
3.1. Konveksiyon-Difüzyon Problemleri için Merkezi Fark Metodu	9
3.2. Konveksiyon-Difüzyon Problemleri için Geri Fark Metodu	12
4. EŞ UZUNLUKLU AĞLAR ÜZERİNDE DÜZGÜN YAKINSAK BİR METOT	16
4.1. Düzgün Yakınsak Bir Metodun Çıkarılışı	16
5. PARÇALI DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE DÜZGÜN YAKINSAK BİR METOT	27
5.1. Parçalı Düzgün Sabitlenmiş Ağlar Üzerindeki Sonlu Geri Fark Operatörlerinin Özellikleri	28
5.2. Düzensiz Kaynak Fonksiyonu	32
5.3. Tam Çözümü Kullanmadan Eş Uzunluklu Bir Ağ Üzerinde ε -Düzgün Nümerik Bir Metot	34
6. YAKINSAKLIK	42
6.1. Yakınsaklık Özellikleri	42
7. SONUÇ	48
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

1. GİRİŞ

ε , difüzyonun konveksiyona göre bağıl miktarını ölçmek için kullanılan küçük bir parametre olmak üzere $\Omega = [0, 1]$ aralığı üzerinde

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad \text{ve} \quad u(x) \in C^2(\overline{\Omega}) \\ \forall x \in \Omega \quad \text{için} \quad Lu = -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = f(x) \end{cases} \quad (1.0.1)$$

konveksiyon-difüzyon problemi için hem eş uzunluklu hemde parçalı düzgün ağlar üzerinde nümerik çözüm teknikleri incelenecektir. Burada $b(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları düzgün fonksiyonlar ve ayrıca $b(x)$ fonksiyonu

$$b(x) > \alpha > 0$$

mutlak eşitsizliğini sağlar. (1.0.1) konveksiyon-difüzyon problemiyle; kuru toprakta nemin taşınması, uzun bir dikey kanalın bir kenarı boyunca akışkan enjeksiyonunun potansiyel fonksiyonu, yarı iletken cihaz modellemesi, bir yapışkanın düzenli akışının potansiyel fonksiyonları ve sıkıştırılmaz sıvılar gibi çeşitli alanlarda karşılaşılır. (1.0.1) problemi gerçek uygulamalara direkt olarak uygulanamamasına rağmen, bir çok pratik uygulamanın araştırılmasında önemli bir aşama olduğundan çözümünün bulunması önemlidir.

Bu bir tekil olarak pertürbe edilmiş problem olduğundan, asıl güçlük (1.0.1) probleminin tam çözümüne ε -düzgün yakınsayan bir nümerik çözüm elde etmektir. Bu problemi çözmek için bir düzgün ağ üzerinde standart sonlu fark operatörleri, örneğin merkezi fark şeması kullanıldığında, h adım uzunluğu ε 'a göre yeterince küçük seçilmedikçe nümerik çözümler salınım yapar. Geri fark şemasıyla daha kararlı bir sonuç alınmasına karşın, (O'Malley, Jr, 1991) de düzgün bir ağ üzerindeki standart geri fark şemasının hatasının davranışı analiz edildi ve onun katmanda ayrık maksimum normda ε -düzgün olmadığı gösterildi. Bu nedenle, ε -düzgün yakınsaklık özelliğine sahip nümerik çözümlerin elde edilebilmesi için daha etkin metotlara ihtiyaç duyulacaktır. Bu yöntemler düzgün bir ağ üzerinde veya düzgün olmayan bir ağ üzerinde verilecektir. Bu tezde; hem düzgün bir ağ üzerinde, hem

de düzgün olmayan bir ağ üzerinde konveksiyon-difüzyon probleminin nümerik yaklaşımları araştırılacaktır. Tezde aşağıdaki gibi bir yol izlenecektir:

İkinci bölümde, basit bir problem kullanılarak problemin bir boyuttaki davranışı açıklanacaktır ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı gösterimler ve tanımlar verilecektir.

Üçüncü bölümde, ilgili fark denklemlerinin çözümleri kullanılarak merkezi fark ve geri fark metotları analiz edilecektir. ε değerinin h adım uzunluğuna göre farklı durumları için bu metotların kalitatif davranışını göstermek amacıyla bazı nümerik sonuçlar sunulacaktır.

Dördüncü bölümde, eş uzunluklu bir ağ üzerinde Il'in-Allen-Southwell metodu adı verilen düzgün yakınsak bir metot türetilecektir.

Beşinci bölümde, Shishkin ağı olarak adlandırılan parçalı düzgün bir ağ tanıtılacaktır. Parçalı düzgün ağ üzerinde (4.1.1) probleminin yakınsaklık analizinde kullanılan bazı sonuçları elde etmek için ilk olarak, düzgün verili ve konvektif terimi sabit bir katsayıya sahip olan bir problem ele alınacaktır. Ayrıca, düzensiz verili konveksiyon-difüzyon probleminin farklı bir tipi ele alınacak ve bu problemin diskretizasyonu için Shishkin ağı üzerinde yine sonlu geri fark metodu kullanılacaktır.

Altıncı bölümde ise yakınsaklıkla ilgili, yeni algoritmanın gerçek çözüme dögümsel olarak yakınsadığı ispatlanacaktır.

2. KONVEKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMİNE GENEL BAKIŞ

2.1 Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Analitik Davranışı

Bu bölüme konveksiyon-difüzyon olgusunun nerede ortaya çıktığının açıklanmasıyla başlanır ve sonra $[0, 1]$ aralığı üzerinde bir boyutlu bir konveksiyon-difüzyon denklemi tam çözümün davranışıyla birlikte verilir. Konvektif ve difüzyif işlemlerin bir kombinasyonunu içeren matematiksel modeller; bütün bilimlerde, mühendislikte ve matematiksel modellemenin önemli olduğu diğer alanlarda en yaygın olanlar arasındadır. Su kalitesi problemleri, konvektif ısı transfer problemleri ve yarı iletken cihazların simülasyonu bu modellere birer örnek olarak verilebilir. Ayrıca Navier-Stokes denkleminin doğrusallaştırılması ve yarı iletken cihaz modellemenin drift-difüzyon denklemi önemli örneklerdir.

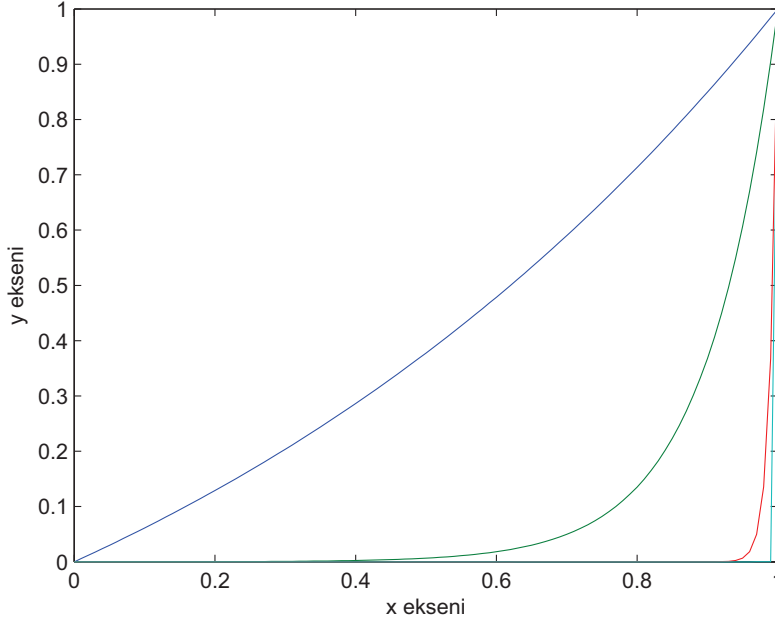
Çoğu kez yayılmanın bağlı gücünü ölçen boyutsuz parametre oldukça küçüktür; dolayısıyla ince sınır ve iç katmanların mevcut olduğu durumlarla sıkça karşılaşılır ve tekil pertürbasyon problemleri ortaya çıkar. $\Omega = [0, 1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki problem yardımıyla, bir boyuttaki problemin analitik davranışı anlaşılır. $b > 0$ olmak üzere ve $C^2(\Omega)$, Ω üzerinde iki kez diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayını göstermek üzere

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad \text{ve} \quad u(x) \in C^2(\overline{\Omega}) \\ \forall x \in \Omega \quad \text{için} \quad Lu = -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = f(x) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

denklemini göz önüne alalım. (2.1.1) probleminin $f(x) = 0$ için tam çözümü

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0) \frac{e^{-b(1-x)/\varepsilon} - e^{-b/\varepsilon}}{1 - e^{-b/\varepsilon}} \quad (2.1.2)$$

olarak bulunur. Çözümdeki üstel fonksiyon $(1-x)/\varepsilon$ argümanına sahip olduğundan çözüm $(1-\varepsilon, 1)$ aralığında hızla değişir. Yani ε sıfıra yaklaşırken, $x = 1$ civarında bir sınır katmanı vardır ve bu, ε genişliğindedir. Şekil 2.1; $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ ve $b = 1$ alınarak $\varepsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ değerleri için çizilmiştir.



Şekil 2.1: Farklı ε değerleri için (2.1.1) probleminin tam çözümü

Bu durum, sınır katmanı kalınlığının ε küçüldükçe incelmesini gösterir. Ancak, problemin nümerik çözümlerini bulmak zordur. Dolayısıyla, konveksiyon-difüzyon problemlerinin yaklaşımı için etkin algoritmalar geliştirmek önemlidir.

2.2 Tekil Pertürbe Edilmiş Problemler için Nümerik Metotlar

Bu bölümde, tekil olarak pertürbe edilmiş problemleri çözmek için kullanılan nümerik metotlar gözden geçirilir ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı gösterimler, sonlu fark operatörleri, fonksiyon uzayları, normlar ve yarı normlar tanımlanır. D , R' 'de sınırlı bir bölge olsun. Ω sınırlı bir açık aralık olmak üzere genel olarak $D = \Omega$ veya $D = \overline{\Omega}$ olur. $C^0(D)$, D üzerinde, herhangi bir $f \in C^0(D)$ fonksiyonunun normu

$$\|f\|_D = \sup |f(x)| \quad \forall x \in D$$

ile tanımlanmak üzere sürekli fonksiyonların uzayını gösterebilir. Her bir $k \geq 1$ tamsayısı için $C^k(D)$, D üzerinde k -inci mertebeyi de içeren sürekli türevlerle

k kez türevlenebilir fonksiyonların uzayını gösterebilir. Söz konusu olan tanım bölgesi biliniyorken, gösterimlerde D kullanılmayabilir. Keyfi bir $\bar{\Omega}^N = \{x_i\}_0^N$ ağı üzerindeki herhangi bir V ağ fonksiyonu için ayrık maksimum norm

$$\|V\|_{\bar{\Omega}^N} = \max |V_i| \quad 0 \leq i \leq N$$

ile tanımlanır. $\bar{\Omega}$ üzerinde tanımlanan bütün ağ fonksiyonlarının $\|\cdot\|_{\bar{\Omega}^N}$ normuyla donatılmış lineer vektör uzayı $V(\bar{\Omega}^N)$ ile gösterilir. Ağın $\bar{\Omega}^N$ olduğu biliniyorsa, bu kısım gösterimden atılabilir.

İlerleyen bölümlerde ele alınacak olan nümerik yöntemleri oluşturmak için aşağıdaki ağ tanımlamalarına, sonlu fark operatörlerine ve tanımlara gerek duyulur.

$\Omega = (0, 1)$ aralığı üzerinde, her $N \geq 2$ tamsayısı için $\bar{\Omega}^N = \{x_i\}_0^N$ düzgün ağı, birbirinden düzgün bir

$$0 \leq i \leq N \text{ için } h = x_i - x_{i-1} = 1/N$$

adım uzunluğuyla ayrılmış olan

$$0 \leq i \leq N \text{ için } x_i = i/N$$

$N + 1$ tane ağ noktası alınarak tanımlanır. Aynı sonuca ulaşmanın alternatif bir yolu Ω aralığını $h = 1/N$ uzunluğunda N adet $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ ağ elemanına bölmektir. Bu düzgün ağlar üzerindeki birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark operatörleri

$$\begin{aligned} D^+ V_i &= \frac{V_{i+1} - V_i}{h}, & D^- V_i &= \frac{V_i - V_{i-1}}{h}, \\ D^0 V_i &= \left(\frac{D^+ + D^-}{2} \right) V_i = \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanır. D^+ ve D^- herhangi bir fonksiyonun ilk türevine birinci mertebeden bir yaklaşım verirken D^0 ikinci mertebeden bir yaklaşım verir. İkinci mertebeden fark operatörü D^2 ileri ve geri fark operatörleri düzenlenerek elde edilir ve herhangi bir fonksiyonun ikinci türevine ikinci mertebeden bir yaklaşım verir.

$$D^2 V_i = \frac{(D^+ - D^-)}{h} V_i = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad (2.2.4)$$

Sonraki bölümlerde ağlar artık düzgün olmayacağından yukarıdaki tanımın düzgün ağlardan düzgün olmayan ağlara genişletilmesi gerekir. Eğer $1 \leq i \leq N$ için $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ N alt aralığıyla verilen keyfi bir düzgün olmayan ağdaki ağ noktaları $\overline{\Omega}^N = \{x_i\}_0^N$ ile gösterilse ağ noktaları

$$1 \leq i \leq N \text{ için } h_i = x_i - x_{i-1}$$

uzaklığı ile ayrılır. Düzgün olmayan ağlar için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark operatörleri, $1 \leq i \leq N - 1$ için

$$\bar{h}_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} D^+ V_i &= \frac{V_{i+1} - V_i}{h_{i+1}}, & D^- V_i &= \frac{V_i - V_{i-1}}{h_i}, \\ D^0 V_i &= \frac{h_{i+1} D^+ + h_i D^-}{2\bar{h}_i} V_i, & D^2 V_i &= \frac{(D^+ - D^-)}{\bar{h}_i} V_i \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ile verilir. Tekil olarak pertürbe edilmiş diferansiyel denklemleri içeren problemlerin nümerik çözümleri, düzgün bir ağ üzerinde (2.2.3) ile tanımlanan standart sonlu fark operatörü kullanılarak ve daha sonra singüler pertürbasyon parametresinin büyüklüğü azalırken sınır veya iç katmanları yakalamak için ağ daha fazla inceltilerek elde edildi. Böylece bir-boyuttaki problemler için bile metotlar etkin değildi ve yüksek mertebelerdeki problemler için isabetli çözümler elde edilemiyordu. Gelecek bölümde bu yöntemlerin isabetli sonuç elde etmede neden başarısız olduklarıyla ilgilenilecektir. Bu durumda doğal bir soru ortaya çıkar:

Ne kadar küçük olduğuna bakılmaksızın tekil pertürbasyon parametresinin bütün değerleri için düzgün olarak davranan nümerik metotlar oluşturmak mümkün müdür?

İlerleyen bölümlerde bir nümerik metodun ε -düzgün yakınsaklığa sahip olduğunu söyleyebilmek için aşağıdaki tanım gereklidir.

Tanım 2.1 $0 < \varepsilon \leq 1$ yarı-açık aralığında yer alan bir ε tekil pertürbasyon parametresiyle parametrelenmiş matematiksel problemlerin bir ailesi göz önüne

alınsın. Ailedeki her problemin u ile gösterilen tek bir çözüme sahip olduğunu ve $U, \overline{\Omega}^N$ ağı üzerinde tanımlı olmak üzere ve N diskretizasyon parametresi olmak üzere her u çözümüne $\{(U, \overline{\Omega}^N)\}_{N=1}^{\infty}$ nümerik çözümlerin bir dizisiyle yaklaşıldığı varsayılınsın. Bu durumda eğer N_0, C ve $p; N$ ve ε değerinden bağımsız olmak üzere her $N \geq N_0$ için

$$\sup \|U - u\|_{\overline{\Omega}^N} \leq CN^{-p}$$

olacak şekilde bir N_0 pozitif tam sayısı, C ve p pozitif sayıları varsa u 'nun nümerik çözümünün u 'nun tam çözümüne ε -düzgün yakınsadığı söylenir. Burada p sayısına ε -düzgün yakınsaklık oranı ve C sayısına da ε -düzgün hata sabiti denir.

Bir sonlu fark metodunun iki temel bileşeni vardır: Birincisi L diferansiyel operatörüne yaklaşmak için kullanılan L^N sonlu fark operatörü ve ikincisi Ω sürekli tanım bölgesiyle yer değiştiren Ω^N ağıdır. Standart sonlu fark metotları dendiğinde, tekil olarak pertürbe edilmemiş problemlere başarılı bir şekilde uygulanan sonlu fark metotlarının hemen hemen hepsi anlaşılır. Bu metotların bir çoğu iyi bilinir ve bu metotları geliştirenlerden bazılarının adlarıyla anılır. Genellikle bu metotlar kararlı ve isabetlidir ve dolayısıyla $N \rightarrow \infty$ giderken bunların çözümleri tam çözüme yakınsar. Diğer taraftan bu metotların hiçbiri ε -düzgün değildir ve bazı yeni nitelikler gereklidir.

ε -düzgün metotların oluşturulmasında genellikle iki yaklaşım gündeme gelir. Bunlardan ilki standart sonlu fark operatörünün yerine, diferansiyel operatörün tekil pertürbe doğasını yansıtan bir sonlu fark operatörünün alınmasını içerir. Genelde böyle sonlu fark operatörlerine sabitlenmiş sonlu fark operatörleri denir. Bunlar bazı durumlarda, örneğin lineer problemlerde, katsayıları diferansiyel operatör veya onun parçasının sıfır uzayında bulunan üstel fonksiyonların tümü veya bazıları yine diferansiyel operatörün sıfır uzayında kalacak biçimde seçilerek oluşturulabilir. Böyle durumlarda sonlu fark operatörüne üstel olarak sabitlenmiş bir sonlu fark operatörü denir. Buna karşılık gelen nümerik metot, uygulamada genellikle bir düzgün ağ olan standart bir ağ üzerindeki sonlu fark denklemlerinin bir sistemini elde etmek için sabitlenmiş sonlu fark operatörleri uygulanarak elde edilir. Daha

sonra bu sistem, yaklaşık çözümleri elde etmek için kullanışlı bir yöntemle çözülür. Sabitlenmiş sonlu fark operatörlerinin oluşturulmasındaki diğer yaklaşımlar (Roos, 1994) te gösterilmiştir.

ε -düzgün nümerik metotların oluşturulmasında ikinci başarılı yaklaşım tekil pertürbasyona uyarlanmış bir ağı kullanımına dayanır. Böyle metotlar sabitlenmiş ağ metotları olarak adlandırılır. Daha sonra, yaklaşık çözümler elde etmek için alışılmış yöntemle çözülen sonlu fark denklemlerinin bir sistemini elde etmek için sabitlenmiş ağ üzerinde bir standart sonlu fark operatörü uygulanır. Bir parçalı düzgün ağ; yani farklı ağ parametrelerine sahip olan sonlu sayıda düzgün ağların birleşimi olan bir ağ genellikle yeterlidir. Bu parçalı düzgün sabitlenmiş ağlar ilk olarak Shishkin tarafından tanıtılmış (Shishkin, 1998) ve (Shishkin, 1992) ile sonlanan bir dizi makaleyle ilgili nümerik metotlar daha da geliştirilmiş ve ε -düzgün oldukları gösterilmiştir. Bir sabitlenmiş ağ metodunu kullanan ilk nümerik sonuçlar (Millet et al, 1991) de sunulmuştur. Ağı uyarlamak için, ağ noktalarının karmaşık dağılımlarını içeren farklı yaklaşımlar (Liseikin, 1983; Vulcanovic, 1986; Gartland, 1988; Bakhlavov, 1996) da ele alınmıştır, ancak hiç biri parçalı düzgün sabitlenmiş ağların basitliğine sahip değildir.

Yukarıdaki düşünceler hem sabitlenmiş operatörlerin hemde sabitlenmiş ağların geliştirilmesi gerektiğini gösterir. Dördüncü ve beşinci bölümde her bir tekniğin örneği sunulur. Uygulamada, sabitlenmiş ağları kullanan metotlar sabitlenmiş operatörleri kullanan metotlardan genellikle daha basit uygulanabilir olduğu için tavsiye edilir. Ayrıca bunları birden çok boyuttaki problemlere ve lineer olmayan problemlere genelleştirmek daha kolaydır.

3. STANDART NÜMERİK METOTLAR

Bu bölümde, bir düzgün ağ üzerinde (2.1.1) problemi için standart nümerik metotlar kullanılır ve bu metotların problemin analitik çözümüne yakınsamakta neden başarısız oldukları açıklanır. İlk türeve sırasıyla D^0 merkezi fark operatörü ve D^- geri fark operatörüyle yaklaşılır. Burada $f(x) = 0$ ve sınır koşulları olarak $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ alınır.

3.1 Konveksiyon-Difüzyon Problemleri için Merkezi Fark Metodu

Ω 'nın $\bar{\Omega}^N$ düzgün parçalanışı için

$$L^N = -\varepsilon D^2 + bD^0$$

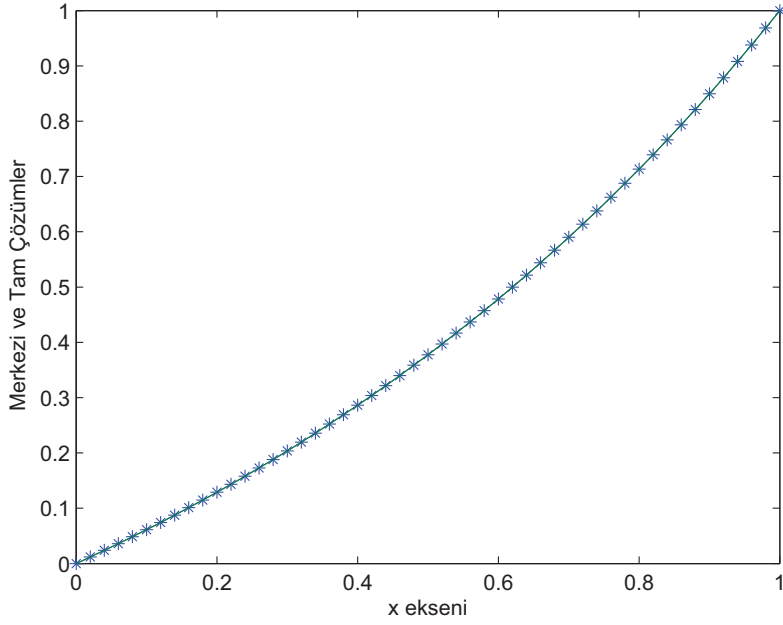
ayrık operatörü göz önüne alınsın. Bu, (2.1.1) probleminde D^0 merkezi fark operatörüyle ilk türeve ve D^2 ikinci dereceden fark operatörüyle ikinci türeve yakınsar. $U_i \approx u(x_i)$ olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad U \in V(\bar{\Omega}^N) \quad \text{ve} \quad \forall x_i \in \Omega^N \quad \text{için} \\ L^N U_i = -\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + b \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

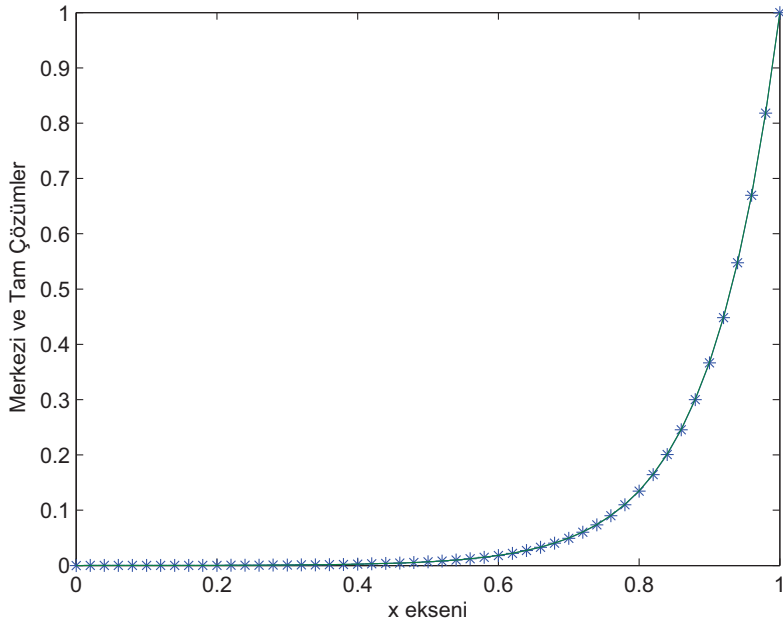
elde edilir. (3.1.1) denkleminde aynı indisli terimler bir araya getirilerek $\rho = bh/\varepsilon$ olmak üzere

$$(-1 + \rho)U_{i+1} + 2U_i + (-1 - \rho)U_{i-1} = 0 \quad (3.1.2)$$

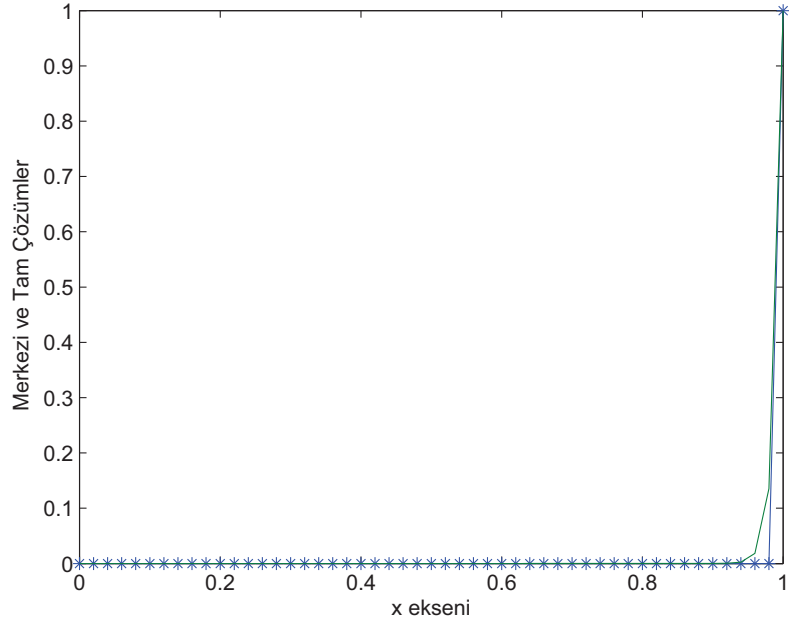
fark denklemi elde edilir. Bu durum bize $N - 1$ bilinmeyenli bir denklem sistemi verir. (2.1.1) probleminin yaklaşık çözümü, sistem çözülerek elde edilebilir. Bazı nümerik sonuçlar; $N = 50$ ve $b = 1$ ile ε 'un farklı değerleri için 3.1'den 3.4'e kadar olan şekillerde, tam çözüm ile birlikte verilir. Bunlar nümerik sonuçların ε 'un büyük değerleri için tam çözüm ile tutarlı olduklarını gösterir. Ancak $\varepsilon = 10^{-3}$ için salınım yapar.



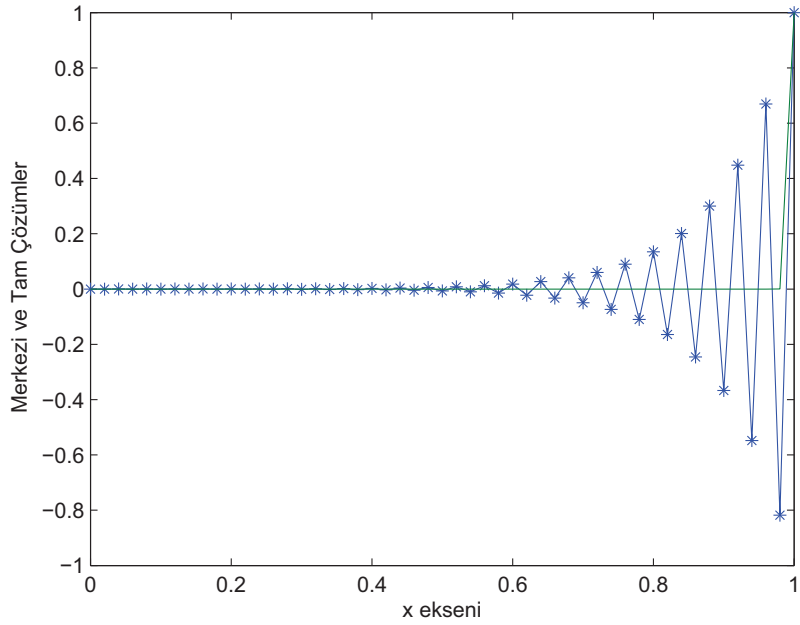
Şekil 3.1: $\varepsilon = 1$ için TAM(-) ve MERKEZİ FARK ÇÖZÜM(*)



Şekil 3.2: $\varepsilon = 0.1$ için TAM(-) ve MERKEZİ FARK ÇÖZÜM(*)



Şekil 3.3: $\varepsilon = 0.01$ için TAM(-) ve MERKEZİ FARK ÇÖZÜM(*)



Şekil 3.4: $\varepsilon = 0.001$ için TAM(-) ve MERKEZİ FARK ÇÖZÜM(*)

Bu durum, (3.1.2) fark denklemi tam olarak çözümlenerek açıklanabilir. Fark denkleminde $U_i = r^i$ seçilir ve çıkan ifade r^{i-1} ile bölünürse

$$(-1 + \rho)r^2 + 2r + (-1 - \rho) = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

olarak bulunur. Böylece (3.1.2) fark denkleminin genel çözümü

$$U_i = a_1 r_1^i + a_2 r_2^i = a_1 + a_2 \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^i \quad (3.1.3)$$

ile verilebilir. Sınır koşulları, yani $U_0 = 0$ ve $U_N = 1$ uygulanılarak (3.1.2) fark denkleminin tek çözümü bütün $0 \leq i \leq N$ için

$$U_i = \frac{1 + \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^i}{1 - \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^N} \quad (3.1.4)$$

olarak bulunur. Eğer $\rho < 1$ ise nümerik çözümün iyi sonuçlar verdiği görülür. Bununla birlikte (3.1.4) çözümü, $\rho > 1$ ($\varepsilon < 0.01$) ise, bu durumda r_2 kökü negatif olabileceğinden nümerik çözümlerin salınım yapabileceğini açıkça gösterir. Böylece merkezi fark metodunun (2.1.1) problemi için sağlam olmadığı sonucuna varılabilir.

3.2 Konveksiyon-Difüzyon Problemleri için Geri Fark Metodu

Bu bölümde ilk türeve D^- geri fark operatörüyle yaklaşılır. Bütünleşmiş ayrık operatör

$$L^N = -\varepsilon D^2 + b D^-$$

ile verilir ve ayrık problem

$$\begin{cases} u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad U \in V(\bar{\Omega}^N) \quad \text{ve} \quad \forall x_i \in \Omega^N \quad \text{için} \\ L^N U_i = -\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + b \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

olarak elde edilir. (3.2.5) denkleminde aynı indisli terimler bir araya getirilerek, $\rho = bh/\varepsilon$ olmak üzere

$$-U_{i+1} + (2 + \rho)U_i + (-1 - \rho)U_{i-1} = 0$$

fark denklemi elde edilir. Yeniden $U_i = r^i$ seçilir ve oluşan ifade r^{i-1} ile bölünürse

$$-r^2 + (2 + \rho)r + (-1 - \rho) = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1 + 2\rho$$

olur. Böylece genel çözüm

$$U_i = a_1 r_1^i + a_2 r_2^i = a_1 + a_2(1 + 2\rho)^i \quad (3.2.6)$$

olarak ifade edilebilir. Sınır şartlarını sağlayan çözüm, her i , $0 \leq i \leq N$ için

$$U_i = \frac{1 - (1 + 2\rho)^i}{1 - (1 + 2\rho)^N} \quad (3.2.7)$$

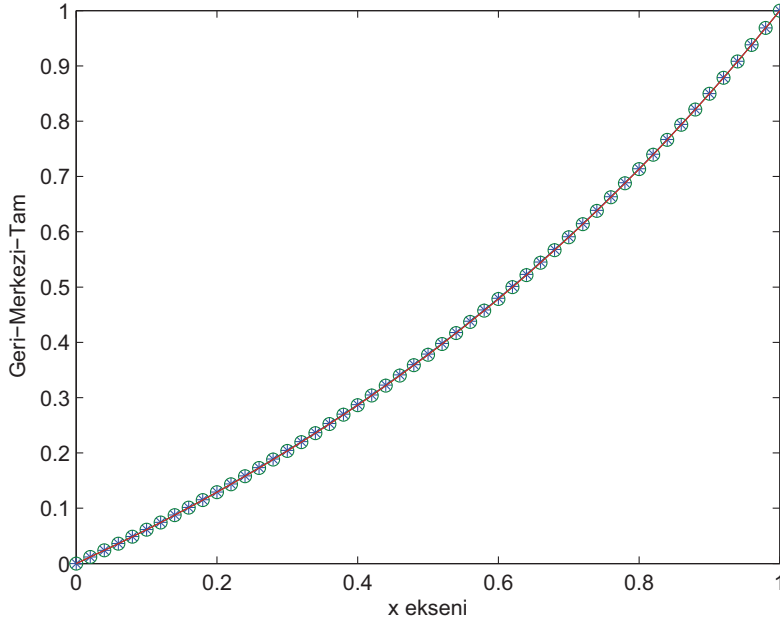
şeklinde yazılabilir. r_2 kökü her zaman pozitif olduğundan bu durumda salınımsal yaklaşım olmaz. Böylece geri fark metodu, merkezi fark metodundan, Şekil 3.5'ten 3.8'e kadar görülebileceği gibi daha kararlı sonuç verir. Bununla birlikte eğer $\rho = h/\varepsilon = 1$ ise $x = 1$ sınırına en yakın olan iç ağ noktasındaki hata

$$(U - u)(x_{N-1}) = \frac{1 - 3^{N-1}}{1 - 3^N} - \frac{e^{-1} - e^{-N}}{1 - e^{-N}}$$

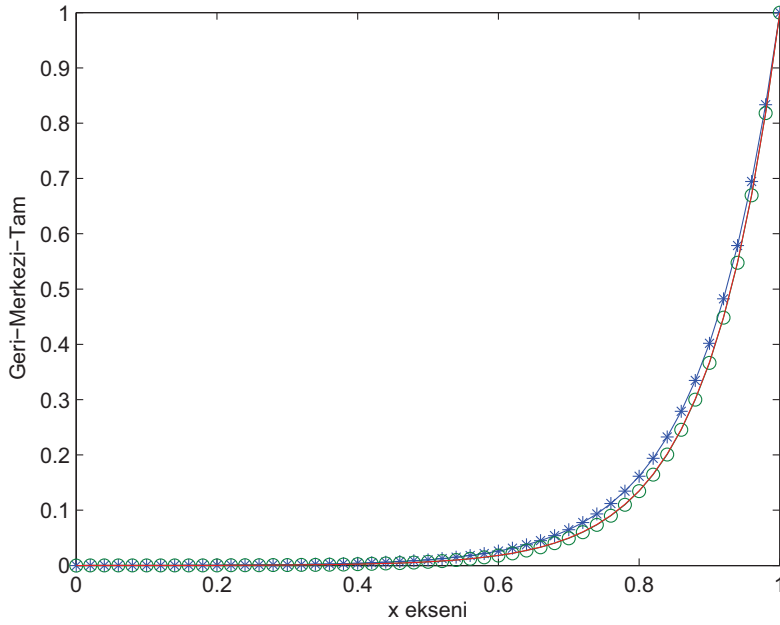
olur ve buradan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (U - u)(x_{N-1}) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{e} \neq 0$$

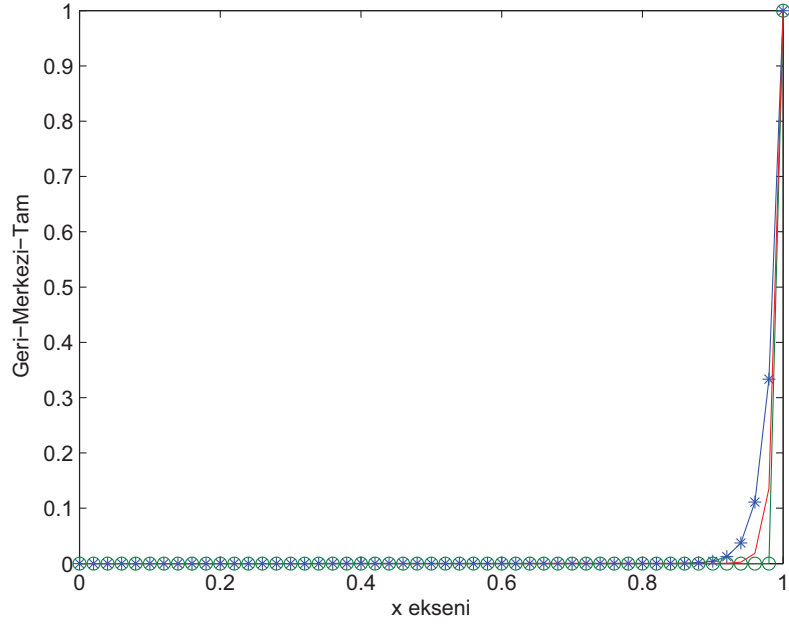
çıkar ve bu sonuç geri fark metodunun katmanda yakınsak olmadığını gösterir.



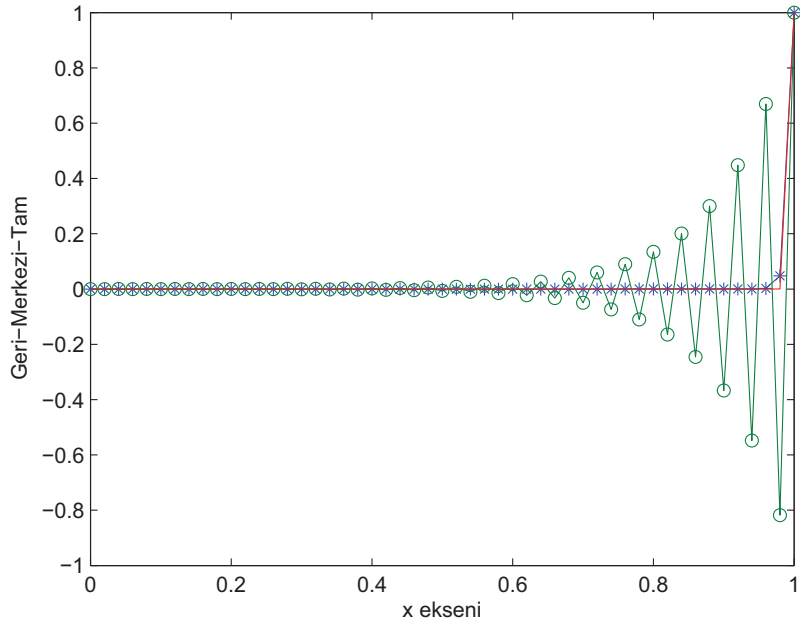
Şekil 3.5: $\varepsilon = 1$ için Merkezi(o) ve Geri(*) Fark Çözüm



Şekil 3.6: $\varepsilon = 0.1$ için Merkezi(o) ve Geri(*) Fark Çözüm



Şekil 3.7: $\varepsilon = 0.01$ için Merkezi(o) ve Geri(*) Fark Çözüm



Şekil 3.8: $\varepsilon = 0.001$ için Merkezi(o) ve Geri(*) Fark Çözüm

4. EŞ UZUNLUKLU AĞLAR ÜZERİNDE DÜZGÜN YAKINSAK BİR METOT

4.1 Düzgün Yakınsak Bir Metodun Çıkarılışı

Sabitlenmiş operatör tipinde bir ε -düzgün metodun nasıl elde edileceğini ve onun yakınsaklık özelliklerinin ne olduğunu hatırlayalım. u_0 ve u_1 verilen sabitler olmak üzere $b(x) \geq b_0 > 0$ ve $c(x) \geq 0$ kabulleri altında $\Omega = (0, 1)$ birim aralığı üzerindeki

$$\begin{cases} u(0) = u_0, & u(1) = u_1 \\ \forall x \in \Omega \text{ için } L_1 u = -\varepsilon u'' + b(x) u' + c(x) u(x) = f(x) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

tekil olarak pertürbe edilmiş sınır değer problemi göz önüne alınsın. L_1 operatörü kısmi olarak sabitlenecektir yani sabitleme işleminde $L = -\varepsilon u'' + b u' + c u$ operatörü tanıtılacaktır. Bu durumda L operatörünün L^* eşlenik operatörü $L^* = -\varepsilon u'' - b u' + c u$ ile verilir. $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$ ve $h = 1/N$ olmak üzere Ω^N ile gösterilen bir $\{x_i\}_0^N$ düzgün ağ tanımlansın, Ω^N üzerindeki bütün ağ fonksiyonlarının uzayı $V(\Omega^N)$ ile, herhangi bir V ağ fonksiyonunun normu $\|V\|_{\Omega^N} = \max_{0 \leq i \leq N} |V_i|$ ile gösterilsin. Ayrıca $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ alt aralığı tanımlansın. g_i, L^* eşlenik operatörünün, x_i noktasına göre x_i noktasını içeren bir aralık çiftinde yer alan yerel Green fonksiyonu olsun. $\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_{i+1}$ yerel bölgesi üzerindeki g_i Green fonksiyonuna ilişkin BVP (Sınır Değer problemi)

$$\varepsilon(g_i'(x_i^-) - g_i'(x_i^+)) = 1 \quad (4.1.2)$$

ek şartıyla birlikte

$$\begin{cases} g_i \in C(\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_{i+1}) \cap C^2(\Omega_i \cup \Omega_{i+1}) \\ g_i(x_{i-1}) = 0, \quad g_i(x_{i+1}) = 0 \\ \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_{i+1} \text{ için } L^* g_i = -\varepsilon g_i''(x) - b g_i'(x) + c g_i(x) = 0 \end{cases} \quad (4.1.3)$$

şeklinindedir. Böylece, (4.1.1) denklemindeki $L_1 u = f$ ifadesiyle g_i çarpılır ve çıkan ifadenin x_{i-1} noktasından x_{i+1} noktasına kadar integrali alınırsa

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Lu) g_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f g_i dx \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (4.1.4) denkleminin parça parça integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-\varepsilon u''(x) + bu'(x) + cu(x))g_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} fg_i dx \\
& = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon u'' + bu' + cu(x))g_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon u'' + bu' + cu(x))g_i dx \\
& = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon u'' + bu')g_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (cu(x))g_i dx \\
& + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon u'' + bu')g_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (cu(x))g_i dx \\
& = (-\varepsilon u' + bu)g_i(x)|_{x_{i-1}}^{x_i} + (-\varepsilon u' + bu)g_i(x)|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
& - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon u' + bu)g'_i dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon u' + bu)g'_i dx \\
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (cu(x))g_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (cu(x))g_i dx \\
& = [(-\varepsilon u'(x_i^-) + bu(x_i))g_i(x_i) - (-\varepsilon u'(x_{i-1}) + bu(x_{i-1}))g_i(x_{i-1})] \\
& + [(-\varepsilon u'(x_{i+1}) + bu(x_{i+1}))g_i(x_{i+1}) - (-\varepsilon u'(x_i^+) + bu(x_i))g_i(x_i)] \\
& - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (bu + cu)g'_i dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (bu + cu)g'_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varepsilon u')g'_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varepsilon u')g'_i dx \\
& = -\varepsilon u'(x_i^-)g_i(x_i) + \varepsilon u'(x_i^+)g_i(x_i) + \varepsilon u(x)g'_i(x)|_{x_{i-1}}^{x_i} + \varepsilon u(x)g'_i(x)|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon g_i'' - bg_i' + cg_i)udx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon g_i'' - bg_i' + cg_i)udx.
\end{aligned}$$

u' fonksiyonu (x_{i-1}, x_{i+1}) üzerinde sürekli olduğundan bu durumda

$$\begin{aligned} &= [\varepsilon u(x_i)g'_i(x_i^-) - \varepsilon u(x_{i-1})g'_i(x_{i-1}^+)] + [\varepsilon u(x_{i+1})g'_i(x_{i+1}^-) - \varepsilon u(x_i)g'_i(x_i^+)] \\ &= -\varepsilon g'_i(x_{i-1})u_{i-1} + u_i + \varepsilon g'_i(x_{i+1})u_{i+1}. \end{aligned}$$

Böylece (4.1.4) özdeşliği

$$-\varepsilon g'_i(x_{i-1})u(x_{i-1}) + u(x_i) + \varepsilon g'_i(x_{i+1})u(x_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f g_i dx \quad (4.1.5)$$

şeklinde yazılabilir. Genelde her bir g_i değerini hesaplamak zordur. Dolayısıyla (4.1.5) şemasını çalışır bir şema haline getirmek için daha fazla yaklaşım gerekir. (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığında b , c ve f fonksiyonlarının sabit olduğu en basit durumda g_i değerlerini tam olarak hesaplamak mümkündür. Bunları sırasıyla b_i , c_i ve f_i ile gösterilerek (4.1.3) denklemini tam olarak çözülebilir. (4.1.3) denkleminin karakteristik polinomu

$$\varepsilon r^2 + br - c = 0$$

ile verilir. Yukardaki ikinci derece denklemin kökleri

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

olarak bulunur. Kökler $\theta = \sqrt{b^2 + 4c\varepsilon}$ olmak üzere

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \theta}{2\varepsilon}$$

şeklinde sade bir biçimde yazılabilir. Böylece (4.1.3) denkleminin çözümü

(x_{i-1}, x_i) üzerinde

$$g_i(x^-) = c_1 \left(\frac{2\varepsilon}{-b + \theta} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} + c_2 \left(\frac{2\varepsilon}{-\theta - b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)}$$

(x_i, x_{i+1}) üzerinde

$$g_i(x^+) = c'_1 \left(\frac{2\varepsilon}{-b + \theta} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} + c'_2 \left(\frac{2\varepsilon}{-\theta - b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki iki denklem yeniden düzenlenirse

$$g_i(x^-) = c_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} + c_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)}, \quad (4.1.6)$$

$$g_i(x^+) = c'_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} + c'_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \quad (4.1.7)$$

elde edilir. c_1, c_2, c'_1 ve c'_2 şeklinde 4 bilinmeyen olduğundan, bu yüzden 4 denkleme ihtiyaç duyulur:

$$g_i(x_{i-1}) = 0 \quad (4.1.8)$$

$$g_i(x_{i+1}) = 0 \quad (4.1.9)$$

$$-\varepsilon(g'_i(x_i^-) - g'_i(x_i^+)) = 1 \quad (4.1.10)$$

ve, g_i Green fonksiyonunun $x = x_i$ noktasındaki sürekliliğinden

$$g_i(x_i^-) = g_i(x_i^+). \quad (4.1.11)$$

(4.1.8) ve (4.1.9) sınır koşulları uygulandığında

$$g_i(x_{i-1}) = c_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x_{i-1}}{2\varepsilon} \right)} + c_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x_{i-1}}{2\varepsilon} \right)} = 0 \quad (4.1.12)$$

$$g_i(x_{i+1}) = c'_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x_{i+1}}{2\varepsilon} \right)} + c'_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x_{i+1}}{2\varepsilon} \right)} = 0. \quad (4.1.13)$$

(4.1.6) ve (4.1.7) denklemlerinin türevi alındığında

$$g'_i(x_i^-) = c_1 e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + c_2 e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)}$$

$$g'_i(x_i^+) = c'_1 e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + c'_2 e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)}$$

elde edilir ve böylece (4.1.14) denklemi

$$-\varepsilon(g'_i(x_i^-) - g'_i(x_i^+)) = 1$$

ek şartı uygulanarak

$$\begin{aligned} \varepsilon \left((c_1 - c'_1) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + (c_2 - c'_2) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} \right) &= 1 \\ \Rightarrow (c_1 - c'_1) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + (c_2 - c'_2) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} &= \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.1.14) \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. $g_i(x_i^-) = g_i(x_i^+)$ eşitliği $x = x_i$ noktasındaki g_i Green fonksiyonunun sürekliliğinden yazılır.

$$g_i(x_i^-) - g_i(x_i^+) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + c_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} \\ = c'_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + c'_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} \\ \Rightarrow c_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + c_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} \\ - c'_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} + c'_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x_i}{2\varepsilon}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Bu taktirde

$$(c_1 - c'_1) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\left(\frac{(-b + \theta)x_i}{2\varepsilon} \right)} + (c_2 - c'_2) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{\left(\frac{-(b + \theta)x_i}{2\varepsilon} \right)} = 0 \quad (4.1.15)$$

elde edilir.

$$\alpha_i = \frac{(-b + \theta)x_i}{2\varepsilon}, \quad \beta_i = \frac{(-b + \theta)h}{2\varepsilon}, \quad \eta_i = \frac{(b + \theta)x_i}{2\varepsilon}, \quad \varphi_i = \frac{(b + \theta)h}{2\varepsilon}$$

olduğu kabul edilirse

$$e^{\frac{(-b + \theta)x_{i-1}}{2\varepsilon}} = e^{\frac{(-b + \theta)(x_i - h)}{2\varepsilon}} = e^{\frac{(-b + \theta)x_i}{2\varepsilon}} e^{-\frac{(-b + \theta)h}{2\varepsilon}} = e^{\alpha_i - \beta_i}$$

$$e^{-\frac{(b + \theta)x_{i-1}}{2\varepsilon}} = e^{-\frac{(b + \theta)(x_i - h)}{2\varepsilon}} = e^{-\frac{(b + \theta)x_i}{2\varepsilon}} e^{\frac{(b + \theta)h}{2\varepsilon}} = e^{-\eta_i + \varphi_i}$$

$$e^{\frac{(-b + \theta)x_{i+1}}{2\varepsilon}} = e^{\frac{(-b + \theta)(x_i + h)}{2\varepsilon}} = e^{\frac{(-b + \theta)x_i}{2\varepsilon}} e^{\frac{(-b + \theta)h}{2\varepsilon}} = e^{\alpha_i + \beta_i}$$

$$e^{-\frac{(b + \theta)x_{i+1}}{2\varepsilon}} = e^{-\frac{(b + \theta)(x_i + h)}{2\varepsilon}} = e^{-\frac{(b + \theta)x_i}{2\varepsilon}} e^{-\frac{(b + \theta)h}{2\varepsilon}} = e^{-\eta_i - \varphi_i}$$

elde edilir. Böylece (4.1.12)-(4.1.15) denklemleri (4.1.16)-(4.1.19) denklemlerine dönüşür:

$$c_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\alpha_i - \beta_i} + c_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{-\eta_i + \varphi_i} = 0 \quad (4.1.16)$$

$$c'_1 \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\alpha_i + \beta_i} + c'_2 \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{-\eta_i - \varphi_i} = 0 \quad (4.1.17)$$

$$(c_1 - c'_1) e^{\alpha_i} + (c_2 - c'_2) e^{-\eta_i} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.1.18)$$

$$(c_1 - c'_1) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right) e^{\alpha_i} + (c_2 - c'_2) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right) e^{-\eta_i} = 0. \quad (4.1.19)$$

(4.1.16)–(4.1.19) denklemleri

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.1.20)$$

matris formunda

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\alpha_i-\beta_i} & \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{-\eta_i+\varphi_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\alpha_i+\beta_i} & \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{-\eta_i-\varphi_i} \\ e^{\alpha_i} & e^{-\eta_i} & -e^{\alpha_i} & -e^{-\eta_i} \\ \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\alpha_i} & \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{-\eta_i} & \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\alpha_i} & \left(\frac{2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{-\eta_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [c_1 \ c_2 \ c'_1 \ c'_2]^T, \quad \mathbf{b} = \left[0 \ 0 \ \frac{1}{\varepsilon} \ 0\right]^T$$

şeklinde yazılabilir. (4.1.20) lineer sistemi çözümlürse

$$c_1 = \frac{e^{-\alpha_i+\beta_i+\varphi_i}(\theta-b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta} \quad c_2 = \frac{e^{-\eta_i}(\theta+b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta}$$

$$c'_1 = -\frac{e^{-\alpha_i}(\theta-b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta} \quad c'_2 = -\frac{e^{\beta_i+\varphi_i+\eta_i}(\theta+b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta}$$

sabitleri elde edilir. c_1 , c'_1 , c_2 ve c'_2 sabitleri (4.1.6) ve (4.1.7) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$g_i(x^-) = \left(\frac{e^{-\alpha_i+\beta_i+\varphi_i}(\theta-b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta}\right) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x}{2\varepsilon}\right)}$$

$$+ \left(\frac{e^{\eta_i}(\theta+b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta}\right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x}{2\varepsilon}\right)} \quad (4.1.21)$$

$$g_i(x^+) = -\left(\frac{e^{-\alpha_i}(\theta-b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta}\right) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta-b}\right) e^{\left(\frac{(-b+\theta)x}{2\varepsilon}\right)}$$

$$- \left(\frac{e^{\beta_i+\varphi_i+\eta_i}(\theta+b)}{2(1+e^{\beta_i+\varphi_i})\varepsilon\theta}\right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta+b}\right) e^{\left(\frac{-(b+\theta)x}{2\varepsilon}\right)} \quad (4.1.22)$$

elde edilir. (4.1.21) ve (4.1.22) denklemlerinin türevi alınırsa

$$g'_i(x^-) = \left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \varphi_i}(\theta - b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x} + \left(\frac{e^{\eta_i}(\theta + b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x}$$

$$g'_i(x^+) = - \left(\frac{e^{-\alpha_i}(\theta - b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x} - \left(\frac{e^{\beta_i + \varphi_i + \eta_i}(\theta + b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x}$$

böylece (4.1.23) ve (4.1.24) denklemleri

$$g'_i(x_{i-1}^-) = \left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \varphi_i}(\theta - b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x_{i-1}} + \left(\frac{e^{\eta_i}(\theta + b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x_{i-1}}$$

$$g'_i(x_{i-1}^-) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\varphi_i}}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} \quad (4.1.23)$$

$$g'_i(x_{i+1}^+) = - \left(\frac{e^{-\alpha_i}(\theta - b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x_{i+1}} - \left(\frac{e^{\beta_i + \varphi_i + \eta_i}(\theta + b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})\varepsilon\theta} \right) e^{\left(\frac{-b+\theta}{2\varepsilon}\right)x_{i+1}}$$

$$g'_i(x_{i+1}^+) = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\beta_i}}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})}. \quad (4.1.24)$$

İntegral terimi için:

$$\begin{aligned} f \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx &= f \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i^- dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i^+ dx \right] \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}(\theta - a)}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i})\varepsilon\theta} \right) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - a} \right) e^{\left(\frac{-a+\theta}{2\varepsilon}\right)x} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^{\eta_i}(\theta + a)}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i})\varepsilon\theta} \right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + a} \right) e^{\left(\frac{-(a+\theta)}{2\varepsilon}\right)x} \right] dx \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[- \left(\frac{e^{-\alpha_i}(\theta - a)}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i})\varepsilon\theta} \right) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - a} \right) e^{\left(\frac{-a+\theta}{2\varepsilon}\right)x} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{e^{\beta_i + \gamma_i + \eta_i}(\theta + a)}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i})\varepsilon\theta} \right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + a} \right) e^{\left(\frac{-(a+\theta)}{2\varepsilon}\right)x} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \gamma_i (\theta - a)}}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i}) \varepsilon \theta} \right) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - a} \right)^2 e^{\left(\frac{(-a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&+ \left[\left(\frac{e^{\eta_i (\theta + a)}}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i}) \varepsilon \theta} \right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + a} \right)^2 e^{\left(\frac{-(a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&+ \left[\left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \gamma_i (\theta - a)}}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i}) \varepsilon \theta} \right) \left(\frac{2\varepsilon}{\theta - a} \right)^2 e^{\left(\frac{(-a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&+ \left[\left(\frac{e^{\eta_i (\theta + a)}}{2(1 + e^{\beta_i + \gamma_i}) \varepsilon \theta} \right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + a} \right)^2 e^{\left(\frac{-(a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \right]_{x_i}^{x_{i+1}}
\end{aligned}$$

İlk olarak

$$\begin{aligned}
&e^{\left(\frac{(-a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} - e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_{i-1}} = e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} - e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) (x_i - h)} \\
&= e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} - e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) h} = e^{\alpha_i} - e^{\alpha_i - \beta_i} = e^{\alpha_i} (1 - e^{-\beta_i}),
\end{aligned}$$

ikinci olarak

$$\begin{aligned}
&e^{\left(\frac{-(a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} - e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_{i-1}} = e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} - e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) (x_i - h)} \\
&= e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} - e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) h} = e^{-\eta_i} - e^{\gamma_i - \eta_i} = e^{-\eta_i} (1 - e^{\gamma_i}),
\end{aligned}$$

üçüncü olarak

$$\begin{aligned}
&e^{\left(\frac{(-a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_{i+1}} - e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} = e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) (x_i + h)} - e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} \\
&= e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) h} - e^{\left(\frac{\theta - a}{2\varepsilon} \right) x_i} = e^{\alpha_i + \beta_i} - e^{\alpha_i} = e^{\alpha_i} (e^{\beta_i} - 1),
\end{aligned}$$

son olarak

$$\begin{aligned}
&e^{\left(\frac{-(a + \theta)x}{2\varepsilon} \right)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_{i+1}} - e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} = e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) (x_i + h)} - e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} \\
&= e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) h} - e^{-\left(\frac{\theta + a}{2\varepsilon} \right) x_i} = e^{-\eta_i - \gamma_i} - e^{-\eta_i} = e^{-\eta_i} (e^{-\gamma_i} - 1)
\end{aligned}$$

değerleri bulunur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right)^2 \left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \varphi_i} (\theta - b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i}) \varepsilon \theta} \right) e^{\alpha_i} (1 - e^{-\beta_i}) \right] \\
&+ \left[\left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + b} \right)^2 \left(\frac{e^{\eta_i} (\theta + b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i}) \varepsilon \theta} \right) e^{-\eta_i} (1 - e^{\varphi_i}) \right] \\
&+ \left[\left(\frac{2\varepsilon}{\theta - b} \right)^2 \left(\frac{e^{-\alpha_i + \beta_i + \varphi_i} (\theta - b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i}) \varepsilon \theta} \right) e^{\alpha_i} (e^{\beta_i - 1}) \right] \\
&+ \left[\left(\frac{e^{\eta_i} (\theta + b)}{2(1 + e^{\beta_i + \varphi_i}) \varepsilon \theta} \right) \left(\frac{-2\varepsilon}{\theta + a} \right)^2 e^{-\eta_i} (e^{-\varphi_i} - 1) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece integral

$$f \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx = \frac{f_i}{c_i} \left(1 - \frac{(e^{\beta_i} + e^{\varphi_i})}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Bulunan bütün değerler (4.1.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\varepsilon g'_i(x_{i-1})u(x_{i-1}) + u(x_i) + \varepsilon g'_i(x_{i+1})u(x_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f g_i) dx \quad (4.1.25)$$

$$-\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\varphi_i}}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} u_{i-1} + u_i - \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\beta_i}}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} u_{i+1} = \frac{f_i}{c_i} \left(1 - \frac{(e^{\beta_i} + e^{\varphi_i})}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} \right)$$

$$-\frac{e^{\varphi_i}}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} u_{i-1} + u_i - \frac{e^{\beta_i}}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} u_{i+1} = \frac{f_i}{c_i} \left(\frac{(e^{\beta_i + \varphi_i} - e^{\beta_i} - e^{\varphi_i} + 1)}{(1 + e^{\beta_i + \varphi_i})} \right) \quad (4.1.26)$$

fark şeması üretilir. Son olarak (4.1.26) denklemi

$$U_i \approx u(x_i), \quad \gamma_i = \frac{\left(\sqrt{b_i^2 + 4c_i \varepsilon} \right) h}{2\varepsilon} \quad \text{ve} \quad \rho_i = \frac{b_i h}{2\varepsilon}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \quad U_N = u_1, \quad U \in V(\Omega^N) \quad \text{ve} \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ -\frac{e^{\gamma_i + \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}} U_{i-1} + U_i - \frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}} U_{i+1} = \frac{f_i}{c_i} \left(\frac{e^{2\gamma_i} - e^{\gamma_i - \rho_i} - e^{\gamma_i + \rho_i} + 1}{1 + e^{2\gamma_i}} \right) \end{cases} \quad (4.1.27)$$

formunda yazılabilir. Bu şema, El-Mistikawy-Werle şemasının (Roos vd., 1996) da verilen farklı bir biçimidir. Bu şemanın hata tahmini (O’Riordan ve Stynes, 1986) da verilmiştir ve aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.1 Ω^N düzgün ağı ile birlikte (4.1.27) sabitlenmiş operatör sonlu fark metodu, (4.1.1) problemi için ε -düzgündür. Ayrıca, (4.1.1) probleminin u çözümü ve (4.1.27) şemasının U_0 çözümü; C , ε dan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|u - U_0\|_{\Omega^N} \leq CN^{-2}$$

ε -düzgün hata tahmini sağlar.

İspat: (O’Riordan ve Stynes, 1986).

(4.1.27) sabitlenmiş operatör metodu ayırık normda ε -düzgün yakınsamasına rağmen, çözülmesi (4.1.1) problemini çözmekten çok da kolay olmayan (4.1.3) yerel sınır değer probleminin tam çözümü üstüne kurulmuştur. Bu durum yöntemin büyük bir dezavantajı olarak görülebilir.

5. PARÇALI DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE DÜZGÜN YAKINSAK BİR METOT

Bu bölüm konfeksiyon-difüzyon problemi için ε -düzgün sabitlenmiş ağ metodunun oluşturulması üzerine olacaktır. Bu tür bir metot için (4.1.1) problemi yeniden ele alınır. Bir parçalı düzgün sabitlenmiş aralığın bir ε -düzgün metodun oluşturulması için yalnız başına yeterli olduğu iyi bilinir. Elbette daha karmaşık sabitlenmiş ağlarda kullanılabilir. Bununla beraber, kolay anlaşılması açısından parçalı düzgün ağlar en cazip seçimlerden biri olarak düşünülür. Parçalı düzgün bir ağın basit bir örneği $\Omega = (0, 1)$ aralığı üzerinde aşağıdaki gibi oluşturulabilir. $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$ aralığını sağlayan bir $1 - \tau$ noktası seçilir ve $r \geq 2$ için $N = 2^r$ olduğu kabul edilir. $1 - \tau$ noktası Ω 'yı $(0, 1 - \tau)$ ve $(1 - \tau, 1)$ şeklinde iki alt aralığa böler. Karşılık gelen parçalı düzgün ağ, $(0, 1 - \tau)$ ve $(1 - \tau, 1)$ aralıklarının her ikisinde Ω_τ^N ile gösterilen $\frac{N}{2}$ eşit alt aralığa bölmekle elde edilebilir. Şekil 5.1

$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{b_0} \ln N \right\} \quad (5.0.1)$$

olmak üzere Ω_τ^8 düzgün ağını gösterir.



Şekil 5.1: Ω_τ^8 parçalı düzgün ağı

Bununla birlikte, τ nun hem ε a hem de N ye bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durum ε veya N değiştiğinde ağ noktalarının konumlarının değişeceği anlamına gelir. Ayrıca N yeterince büyük alındığında τ nun $1/2$ değeri aldığına ve böylece Ω_τ^N ağının N alt aralıklı düzgün ağa dönüştüğüne dikkat edilmelidir. Bu durum, N nin

$$\varepsilon \ln N \geq \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad N \geq \exp \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)$$

eşitsizlikleri sağlandığında olur. τ değerinin, $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$, diğer bütün izin verilebilir değerleri için $(1 - \tau, 1)$ alt aralığı $(0, 1 - \tau)$ alt aralığından daha küçüktür. Bu

durumlarda $(1 - \tau, 1)$ aralığının $N/2$ düzgün ağ elemanlarının her biri, $(0, 1 - \tau)$ aralığının $N/2$ düzgün ağ elemanlarının $2(1 - \tau)/N$ uzunluğundan daha kısa olan $2\tau/N$ uzunluğundadır. Böyle durumlarda global ağ, düzgün olmak yerine parçalı düzgündür çünkü 1'in bir komşuluğundaki alt aralıklar, τ değeri sıfıra yakın olduğunda daha küçüktür, ağa $x = 1$ sınır noktasının bir komşuluğunda yoğunlaşan veya kısaca $x = 1$ noktasında yoğunlaşan denir. τ 'nin değeri ne olursa olsun bütün ağlar N ağ elemanından oluşur ve sonuçta x_i noktaları bu N ağ elemanlarının uç noktaları olmak üzere ağ noktaları $\bar{\Omega}_\tau^N = \{x_i\}_0^N$ 'dir. $1 - \tau$ geçiş noktasının $x_{N/2}$ ağ noktasına denk geldiğinin ve $\bar{\Omega}_\tau^N = \{x_i\}_0^N$ ağı için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığının görülmesi zor değildir.

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_i \leq 2/N, & 1 \leq i \leq N \\ h_i \geq 1/N, & 1 \leq i \leq N/2 \\ h_i \leq 2\tau/N, & N/2 + 1 \leq i \leq N \\ \bar{h}_i \geq h_i/2, & 1 \leq i \leq N - 1 \end{array} \right. \quad (5.0.2)$$

5.1 Parçalı Düzgün Sabitlenmiş Ağlar Üzerindeki Sonlu Geri Fark Operatörlerinin Özellikleri

Bir sonraki adımda düzgün verili konfeksiyon-difüzyon problemleriyle ilgili sabitlenmiş ağ metodunun yakınsaklık analizi üzerinde uygulanan bazı argümanlar elde etmek için, parçalı düzgün ağlar üzerinde sonlu geri fark operatörünün özellikleri gözden geçirilir. Bölümün başında tanımlanan Ω_τ^N sabitlenmiş parçalı düzgün ağı üzerinde

$$L^N U = -\varepsilon D^2 U_i + b D^- U_i + c U_i$$

ayrık operatör göz önüne alınsın. D^2 ve D^- sonlu fark operatörlerinin (2.2.5) denkleminde sunulan şekliyle kullanıldığına dikkat edelim. Böylece b , bir α sabiti için

$$b > \alpha > 0 \quad (5.1.3)$$

eşitsizliğini sağlayan bir sabit olmak üzere (4.1.1) problemi ile ilgili ayrık problem

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \quad U_N = u_1 \quad \text{ve} \quad \forall x_i \in \Omega_\tau^N \quad \text{için} \quad U \in V(\bar{\Omega}_\tau^N), \\ L^N U_i = -\varepsilon \frac{(D^+ - D^-)}{\bar{h}_i} U_i + b D^- U_i + c U_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

veya denk olarak

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \quad U_N = u_1 \quad \text{ve} \quad \forall x_i \in \Omega_\tau^N \quad \text{için} \quad U \in V(\bar{\Omega}_\tau^N), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ L^N U_i = -\varepsilon \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \right) \frac{1}{\bar{h}_i} + b \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \right) + c U_i = 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

ile verilir.

$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{\alpha} \ln N \right\} \quad (5.1.6)$$

olmak üzere sabitlenmiş parçalı düzgün ağ $\Omega_\tau^N = \{X_i\}_0^N$

$$x_0 = 0 \quad \text{ve} \quad x_i - x_{i-1} = \begin{cases} h_1 = \frac{2(1-\tau)}{N}, & 0 < i \leq N/2 \\ h_2 = \frac{2\tau}{N}, & N/2 < i \leq N \end{cases}$$

ile tanımlanır. Ayrıca aşağıdaki gösterimlerin tanıtılması kullanışlı olacaktır.

$$h_1 = \frac{2(1-\tau)}{N}, \quad h_2 = \frac{2\tau}{N}, \quad \bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (5.1.7)$$

$$\lambda_1 = 1 + \frac{bh_1}{\varepsilon}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{bh_2}{\varepsilon}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

olmak üzere

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \quad \text{ve} \quad \bar{\lambda} = 1 + \frac{b\bar{h}}{\varepsilon}$$

ve daha sonra

$$1 < \lambda_1 \leq 2\bar{\lambda} \quad \text{ve} \quad 1 < \lambda_2 \leq 2\bar{\lambda} \quad (5.1.8)$$

olacağı açıktır. (5.1.4) fark denkleminde geri dönüşüm ve çözümünü elde etmeye çalışalım. (5.1.4) denklemini $[0, 1 - \tau]$ ve $[1 - \tau, 1]$ alt aralıklarında ayrık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Z_j^* = \begin{cases} Z_1, & 1 \leq i < N/2 \\ Z_2, & N/2 < i \leq N-1 \end{cases}, \quad Z_1 = \frac{c(h_1)^2}{\varepsilon} \text{ ve } Z_2 = \frac{c(h_2)^2}{\varepsilon}$$

olmak üzere

$1 \leq i < N/2$ için

$$(-1)U_{i+1} + (1 + \lambda_1 + Z_1)U_i + (-\lambda_1)U_{i-1} = 0 \quad (5.1.9)$$

$i = N/2$ için

$$\left(-\frac{h_1}{h_2}\right)U_{i+1} + \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{c(\lambda_1 - 1)}{bN}\right)U_i + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)U_{i-1} = 0 \quad (5.1.10)$$

$N/2 < i \leq N-1$ için

$$(-1)U_{i+1} + (1 + \lambda_2 + Z_2)U_i + (-\lambda_2)U_{i-1} = 0. \quad (5.1.11)$$

(5.1.11) fark denkleminde $U_i = r^i$ seçilir ve çıkan ifade r^{i-1} ile bölünürse

$$r^2 - (1 + \lambda_2 + Z_2)r + \lambda_2 = 0$$

karakteristik polinomu elde edilir. Karakteristik polinomun kökleri

$$r_{1,2} = \frac{1 + Z_1 + \lambda_1 \pm \sqrt{(1 + Z_1 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_1}}{2},$$

$$r_{3,4} = \frac{1 + Z_2 + \lambda_2 \pm \sqrt{(1 + Z_2 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_2}}{2}$$

olduğundan fark çözümünün

$$U_i = \begin{cases} a_1 r_1^i + a_2 r_2^i, & 0 \leq i \leq N/2 \\ a_3 r_3^i + a_4 r_4^i, & N/2 \leq i \leq N \end{cases} \quad (5.1.12)$$

formunda olduğunu kabul edilir. a_1, a_2, a_3 ve a_4 şeklinde dört bilinmeyen olduğundan dolayısıyla dört denkleme ihtiyaç duyulacaktır. İki denklem U_0 ve U_N sınır şartları kullanılarak elde edilir. Diğer iki denklemden biri $x_{N/2}$ ayrık

düğümünde yazılmış olan fark denklemi kullanılarak elde edilir ve diğeride aynı düğümdeki süreklilik şartı kullanılarak bulunabilir. Böylece

$$\begin{aligned}\omega_1 &= r_1^{N/4}, \quad \omega_2 = r_2^{N/4}, \quad \omega_3 = r_3^{N/4}, \quad \omega_4 = r_4^{N/4}, \\ k_1 &= w_1^2 \left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{c(\lambda_1 - 1)}{bN} - r_1^{-1} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right), \\ k_2 &= w_2^2 \left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{c(\lambda_1 - 1)}{bN} - r_2^{-1} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

olmak üzere oluşan denklem sistemi matris formda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ w_1^2 & w_2^2 & -w_3^2 & -w_4^2 \\ k_1 & k_2 & -w_3^2 r_3 \frac{h_2}{h_1} & -w_4^2 r_4 \frac{h_2}{h_1} \\ 0 & 0 & w_3^4 & w_4^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \\ U_N \end{bmatrix} \quad (5.1.13)$$

şeklinde yazılabilir. (5.1.13) sistemi çözümlerse

$$\begin{aligned}A_1 &= h_2 Y_0 (w_3^2 - w_4^2), & A_2 &= Y_0 (r_4 w_3^2 - r_3 w_4^2) \\ A_3 &= Y_N (r_3 - r_4), & A_4 &= w_2^2 A_2 + A_3 \\ A_5 &= w_1^2 A_2 + A_3, & A_6 &= h_2 Y_0 (k_2 w_1^2 - k_1 w_2^2) \\ A_7 &= h_2 Y_N (k_1 - k_2), & A_8 &= h_1 Y_N (w_1^2 - w_2^2) \\ A_9 &= w_4^2 A_6 + A_7 - r_4 A_8, & A_{10} &= w_3^2 A_6 + A_7 - r_3 A_8\end{aligned}$$

ve

$$A_{11} = h_2 (k_1 - k_2) (w_3^2 - w_4^2) + h_1 (w_1^2 - w_2^2) (r_3 w_4^2 - r_4 w_3^2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{A_{11}} (-k_2 A_1 + h_1 A_4), & a_2 &= \frac{1}{A_{11}} (k_1 A_1 - h_1 A_5) \\ a_3 &= \frac{1}{A_{11}} (w_3^{-2} A_9), & a_4 &= \frac{1}{A_{11}} (-w_4^{-2} A_{10})\end{aligned}$$

katsayıları elde edilir. Bulunan katsayılar (5.1.12) denkleminde yazılırsa

$$U_i = \begin{cases} \frac{A_1(k_1 r_2^i - k_2 r_1^i) + h_1(A_4 r_1^i - A_5 r_2^i)}{A_{11}}, & 0 \leq i \leq N/2 \\ \frac{w_3^{-2} A_9 r_3^i - w_4^{-2} A_{10} r_4^i}{A_{11}}, & N/2 \leq i \leq N \end{cases} \quad (5.1.14)$$

elde edilir.

5.2 Düzensiz Kaynak Fonksiyonu

f kaynak fonksiyonunun düzgün bileşeni ve δ_d değiştirilmiş *Dirac*-delta fonksiyonu; $d \in (0, 1)$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ ile birlikte $\delta_d(x) = \delta(x - d)$ olmak üzere, aşağıdaki konsantre kaynaklı tekil pertürbasyon problemi ele alınır:

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad \text{ve} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{için} \quad u \in C^2(\bar{\Omega}) \\ L_2 u = -\varepsilon u''(x) - b u'(x) + c u = f(x) + \delta_d(x). \end{cases} \quad (5.2.15)$$

Bu kaynak gelecek bölümdeki nümerik metodun gelişiminde önemli olacaktır. u çözümü tipik olarak konsantre kaynaktan kaynaklanan $x = d$ de bir iç katmana ve $x = 0$ taşma sınırında bir üstel sınır katmanına sahiptir. (5.2.15) problemine yaklaşmak için bir Shishkin ağı kullanılır ve bu ağ, hem sınırı hem de iç katmanları çözmek için özel bir şekilde tasarlanır. Böyle bir ağ kurmak için τ ,

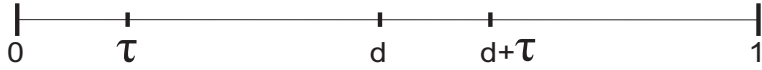
$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{b_0} \ln N \right\} \quad (5.2.16)$$

koşulunu sağlamak üzere $\bar{\Omega}$ bölgesini

$$I_1 = [0, \tau], \quad I_2 = [\tau, d], \quad I_3 = [d, d + \tau] \quad \text{ve} \quad I_4 = [d + \tau, 1]$$

dört alt aralığına bölen τ , d ve $d + \tau$ noktaları alınır. Karşılık gelen parçalı düzgün ağ her bir alt aralığı $N/4$ eş uzunluklu alt aralığa bölmekle kurulur. Ortaya çıkan $\Omega_{\tau-d}^N$ ağı

$$h_1 = \frac{4\tau}{N} \quad \text{ve} \quad h_2 = \frac{4(d - \tau)}{N}$$



Şekil 5.2: (5.2.15) probleminin ayrıklaştırılması için alt aralıklar

olmak üzere

$$x_0 = 0 \quad \text{ve} \quad x_i - x_{i-1} = \begin{cases} h_1, & 0 < i \leq N/4 \quad \text{veya} \quad N/2 < i \leq 3N/4 \\ h_2, & N/4 < i \leq N/2 \quad \text{veya} \quad 3N/4 < i \leq N \end{cases} \quad (5.2.17)$$

ile tarif edilir.

$$\Delta_{d,i} = \begin{cases} \frac{1}{h_{i+1}}, & d \in [x_i, x_{i+1}) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

değiştirilmiş *Dirac*-delta fonksiyonunun bir yaklaşımı ve $b_i = \lim_{x \rightarrow x_i^-} b(x)$ olmak üzere (5.2.15) denkleminde (5.2.17)'de tanımlanan parçalı düzgün ağ üzerindeki geri metot kullanılarak yaklaşılır.

$$\begin{cases} U_0 = 0, \quad U_N = 0 \quad \text{ve} \quad U \in V(\Omega_{\tau-d}^N) \\ -\varepsilon D^+ D^- U_i - b_i D^+ U_i + c_i U_i = f_i + \Delta_{d,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (5.2.18)$$

(5.2.18) nümerik metodun çözümü (5.2.15) denkleminin çözümüne düğümsel olarak yakınsar.

Teorem 5.1 $\Omega_{\tau-d}^N$ parçalı düzgün sabitlenmiş ağı ile birlikte (5.2.18) sabitlenmiş ağ sonlu fark metodu, τ 'nin yukarıdaki (5.2.16) koşulunu sağlayacak şekilde seçilmiş olması şartıyla (5.2.15) problemi için ε -düzgündür. Ayrıca (5.2.15)'in u çözümü ve (5.2.18)'in U_D çözümü C , ε 'dan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|u - U_D\|_{\Omega_{\tau-d}^N} \leq CN^{-1} \ln N$$

ε -düzgün hata tahmini sağlar.

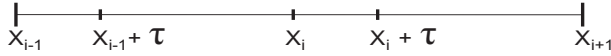
İspat: (Linss, 2002).

5.3 Tam Çözümü Kullanmadan Eş Uzunluklu Bir Ağ Üzerinde ε -Düzgün Nümerik Bir Metot

(4.1.1) problemini Ω^N düzgün ağı üzerindeki bir ε -düzgün fark metoduyla 4. Bölümde açıklandığı gibi çözelim. (4.1.3) problemi aşağıdaki probleme denktir. $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ olmak üzere

$$\begin{cases} L^* g_i = -\varepsilon g_i''(x) - b g_i'(x) + c g_i(x) = \delta_{x_i}(x), & \forall x \in \Omega_i \cup \Omega_{i+1}, \\ g_i(x_{i-1}) = 0, \\ g_i(x_{i+1}) = 0, \end{cases} \quad (5.3.19)$$

olacak şekilde $\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_{i+1}$ üzerinde x_i ağ noktasına göre tanımlanmış yerel g_i fonksiyonunu bulalım.



Şekil 5.3: $\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_{i+1}$ yerel bölgesinin alt aralıkları

$L_1 u = f$ denklemini g_i ile çarpıp çıkan ifadenin x_{i-1} noktasından x_{i+1} noktaya kadar integrali alınır, sırasıyla kısmi integrasyon uygulanır ve u fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa

$$-\varepsilon g_i'(x_{i-1})U_{i-1} + U_i + \varepsilon g_i'(x_{i+1})U_{i+1} = f_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx \quad (5.3.20)$$

özdeşliği elde edilir. Ancak $g_i'(x_{i-1})$, $g_i'(x_{i+1})$ ve $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx$ değerlerinin hesaplanması (4.1.1) orjinal problemi kadar zor olabilecek olan (5.3.19) denkleminin tam çözümünü gerektirir. Bundan dolayı, g_i yerel Green fonksiyonuna Bölüm 5.2 de açıklandığı gibi bir sabitlenmiş ağ metoduyla yaklaşılır ve sonra çıkan yaklaşım (5.3.20) denkleminde g_i lerin yerine kullanılır. Bu bağlamda Ω_i ve Ω_{i+1} sabit alt aralıklarının birleşimi üzerinde Bölüm 5.2 deki metot yeniden formüle edilir. $\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_{i+1}$ yerel bölgesi

$$[x_{i-1}, x_{i-1} + \tau], [x_{i-1} + \tau, x_i], [x_i, x_i + \tau] \text{ ve } [x_i + \tau, x_{i+1}]$$

şeklinde dört alt aralığa bölünür.

$$\tau = \min \left\{ \frac{h}{2}, \frac{\varepsilon}{b_i} \ln M \right\}$$

olmak üzere bunların her biri $M/4$ ağ elemanına sahiptir. Karşılık gelen ağ parametreleri

$$h_1^* = \frac{4\tau}{M} \quad \text{ve} \quad h_2^* = \frac{4}{M}(h - \tau)$$

halini alır. Böylece Shiskin'in $\Omega_{i,\tau}^{M/2} \cup \Omega_{i+1,\tau}^{M/2} = \{x_j^*\}_0^M$ sabitlenmiş ağı

$$x_0^* = x_{i-1} \quad \text{ve} \quad x_j^* - x_{j-1}^* = \begin{cases} h_1^*, & 0 < j \leq M/4 \quad \text{veya} \quad M/2 < j \leq 3M/4 \\ h_2^*, & M/4 < j \leq M/2 \quad \text{veya} \quad 3M/4 < j \leq M \end{cases} \quad (5.3.21)$$

ile tanımlanır. G_j ile $G_j \approx g_i(x_j^*)$ olacak şekilde G_j^i kastedilir ve

$$\Delta_{x_i,j} = \begin{cases} \frac{1}{h_{j+1}^*}, & x_i \in [x_j^*, x_{j+1}^*) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere (5.3.21) özel ağı üzerindeki geri fark operatörünü kullanan (5.3.19) için ayrık problem

$$\begin{cases} G_0 = 0, \quad G_M = 0 \quad \text{ve} \quad G \in V(\Omega_{i,\tau}^{M/2} \cup \Omega_{i+1,\tau}^{M/2}) \\ -\varepsilon D^+ D^- G_j - b_i D^+ G_j + c_i G_j = \Delta_{x_i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \end{cases} \quad (5.3.22)$$

ile verilir. b_i ve c_i değerlerinin $\Omega_i \cup \Omega_{i+1}$ aralığında parçalı sabitler oldukları varsayıldığında (5.3.22) denklemini tam çözümü mümkün olan sabit katsayılı bir denklem halini alır. (5.3.22) denklemini; λ_j^* ,

$$\lambda_1 = 1 + \frac{b_i h_1^*}{\varepsilon} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 1 + \frac{b_i h_2^*}{\varepsilon} \quad \text{ile}$$

$$\lambda_j^* = \begin{cases} \lambda_1, & 1 \leq j \leq M/4 \quad \text{veya} \quad M/2 < j \leq 3M/4 \\ \lambda_2, & M/4 < j \leq M/2 \quad \text{veya} \quad 3M/4 < j \leq M-1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(-\varepsilon) \left(\frac{G_{j+1} - G_j}{h_{j+1}^*} - \frac{G_j - G_{j-1}}{h_j^*} \right) \frac{1}{h_j^*} - b \left(\frac{G_{j+1} - G_j}{h_{j+1}^*} \right) + c G_j = \Delta_{x_i,j}. \quad (5.3.23)$$

(5.3.23) denkleminde aynı indisli terimler bir araya getirilirse

$$\left(\frac{-\varepsilon}{h_j^* h_{j+1}^*} - \frac{b}{h_{j+1}^*} \right) G_{j+1} + \left(\frac{\varepsilon}{h_j^* h_{j+1}^*} + \frac{\varepsilon}{h_j^{*2}} + \frac{b}{h_{j+1}^*} + c \right) G_j + \left(\frac{-\varepsilon}{h_j^{*2}} \right) G_{j-1} = \Delta_{x_i,j}$$

denklemleri elde edilir ve bu denkleminin her iki tarafı $\frac{h_j^* h_{j+1}^*}{\varepsilon}$ ile çarpılırsa

$$\left(-1 - \frac{bh_j^*}{\varepsilon}\right) G_{j+1} + \left(1 + \frac{h_{j+1}^*}{h_j^*} + \frac{bh_j^*}{\varepsilon} + \frac{ch_j^* h_{j+1}^*}{\varepsilon}\right) G_j + \left(\frac{-h_{j+1}^*}{h_j^*}\right) G_{j-1} = \Delta_{x_i, j}.$$

Böylece

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\lambda_j^*) G_{j+1} + \left(\frac{h_{j+1}^*}{h_j^*} + \lambda_j^* + \frac{c_i h_{j+1}^* h_j^*}{\varepsilon}\right) G_j + \left(-\frac{h_{j+1}^*}{h_j^*}\right) G_{j-1} = \Delta_{x_i, j}, \\ j = 1, 2, \dots, M-1 \end{array} \right. \quad (5.3.24)$$

üç noktalı fark şeması elde edilir. $x_{i-1} + \tau$, x_i , $x_i + \tau$ geçiş noktalarında ve alt bölgelerin iç noktalarında Z_j^* ,

$$Z_1 = \frac{c (h_1^*)^2}{\varepsilon} \text{ ve } Z_2 = \frac{c (h_2^*)^2}{\varepsilon} \text{ ile}$$

$$Z_j^* = \begin{cases} Z_1, & 1 \leq j \leq M/4 \quad \text{veya } M/2 < j \leq 3M/4 \\ Z_2, & M/4 < j \leq M/2 \quad \text{veya } 3M/4 < j \leq M-1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere (5.3.24) fark denklemi

$j = M/4$ için

$$(-\lambda_1) G_{M/4+1} + \left(\frac{h_2^*}{h_1^*} + \lambda_1 + \frac{c_i h_1^* h_2^*}{\varepsilon}\right) G_{M/4} + \left(-\frac{h_2^*}{h_1^*}\right) G_{M/4-1} = 0 \quad (5.3.25)$$

$j = M/2$ için

$$(-\lambda_2) G_{M/2+1} + \left(\frac{h_1^*}{h_2^*} + \lambda_2 + \frac{c_i h_1^* h_2^*}{\varepsilon}\right) G_{M/2} + \left(-\frac{h_1^*}{h_2^*}\right) G_{M/2-1} = \frac{h_2^*}{\varepsilon} \quad (5.3.26)$$

$j = 3M/4$ için

$$(-\lambda_1) G_{3M/4+1} + \left(\frac{h_2^*}{h_1^*} + \lambda_1 + \frac{c_i h_1^* h_2^*}{\varepsilon}\right) G_{3M/4} + \left(-\frac{h_2^*}{h_1^*}\right) G_{3M/4-1} = 0 \quad (5.3.27)$$

diğer durumlarda ise

$$(-\lambda_j^*) G_{j+1} + (1 + \lambda_j^* + Z_j^*) G_j + (-1) G_{j-1} = 0 \quad (5.3.28)$$

şeklinde tam olarak yazılabilir. (5.3.28) fark denkleminde $G_j = r^j$ seçilir ve çıkan ifade r^{j-1} ile bölünürse

$$(-\lambda_j^*) r^2 + (1 + \lambda_j^* + Z_j^*) r - 1 = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik polinomun kökleri geçiş bölgesinin dışında r_1 ve r_2 geçiş bölgesinin içinde r_3 ve r_4 olmak üzere kökler tam olarak aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{1 + Z_1 + \lambda_1 \pm \sqrt{(1 + Z_1 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_1}}{2\lambda_1}, \\ r_{3,4} &= \frac{1 + Z_2 + \lambda_2 \pm \sqrt{(1 + Z_2 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_2}}{2\lambda_2}. \end{aligned}$$

(5.3.22) fark denkleminin çözüm formu karakteristik polinom kökleri cinsinden

$$G_j^i = \begin{cases} a_1 r_1^j + a_2 r_2^j, & 0 \leq j \leq M/4 \\ a_3 r_3^j + a_4 r_4^j, & M/4 \leq j \leq M/2 \\ a_5 r_1^j + a_6 r_2^j, & M/2 \leq j \leq 3M/4 \\ a_7 r_3^j + a_8 r_4^j, & 3M/4 \leq j \leq M \end{cases} \quad (5.3.29)$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi $a_i, i = 1, \dots, 8$ katsayıları belirlenecektir. Oluşan sistemi çözmek için sekiz denkleme ihtiyaç duyulur. $G_0 = G_M = 0$ sınır koşulları kullanılarak iki denklem elde edilir ve üç denklem sırasıyla $x_{M/4}^*$, $x_{M/2}^*$ ve $x_{3M/4}^*$ geçiş noktalarında yazılmış (5.3.25), (5.3.26) ve (5.3.27) fark denklemleri kullanılarak elde edilir. Son olarak diğer üç denklem geçiş noktalarındaki

$$\begin{aligned} a_1 r_1^{M/4} + a_2 r_2^{M/4} &= a_3 r_3^{M/4} + a_4 r_4^{M/4} \\ a_3 r_3^{M/2} + a_4 r_4^{M/2} &= a_5 r_1^{M/2} + a_6 r_2^{M/2} \\ a_5 r_1^{3M/4} + a_6 r_2^{3M/4} &= a_7 r_3^{3M/4} + a_8 r_4^{3M/4} \end{aligned}$$

fark çözümünün sürekliliği kullanılarak elde edilir. Bu sekiz denklem

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.3.30)$$

matris formunda

$$\omega_1 = r_1^{M/4}, \quad \omega_2 = r_2^{M/4}, \quad \omega_3 = r_3^{M/4}, \quad \omega_4 = r_4^{M/4},$$

$$k_1 = \omega_1 \left(Y_1 - r_1^{-1} \frac{h_2^*}{h_1^*} \right), \quad k_2 = \omega_2 \left(Y_1 - r_2^{-1} \frac{h_2^*}{h_1^*} \right),$$

$$k_3 = \omega_3^2 \left(Y_2 - r_3^{-1} \frac{h_1^*}{h_2^*} \right), \quad k_4 = \omega_4^2 \left(Y_2 - r_4^{-1} \frac{h_1^*}{h_2^*} \right),$$

$$k_5 = \omega_1^3 \left(Y_1 - r_1^{-1} \frac{h_1^*}{h_2^*} \right), \quad k_6 = \omega_2^3 \left(Y_1 - r_2^{-1} \frac{h_1^*}{h_2^*} \right),$$

$$Y_1 = \frac{h_2^*}{h_1^*} + \lambda_1 + \sqrt{Z_1 Z_2}, \quad Y_2 = \frac{h_1^*}{h_2^*} + \lambda_2 + \sqrt{Z_1 Z_2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_3 & -\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & -\omega_3 r_3 \lambda_1 & -\omega_4 r_4 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & -\omega_1 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 & -\omega_1 r_1 \lambda_2 & -\omega_2 r_2 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & -\omega_3^3 & -\omega_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & k_6 & -\omega_3^3 r_3 \lambda_1 & -\omega_4^3 r_4 \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3^4 & \omega_4^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8]^T, \quad \mathbf{b} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{h_2^*}{\varepsilon} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T,$$

şeklinde yazılabilir. (5.3.30) lineer sistemi çözümlerse

$$A_1 = (\varepsilon + b h_1^*) (h_2^*)^2 r_1 r_2 r_3 (r_3 - r_4),$$

$$A_2 = -(r_2(r_4 - 2) + 1)r_3 \omega_3 r_4 + (1 - r_2)\omega_3 r_4 \\ + r_2 r_3^2 \omega_4 r_4 - \omega_4 r_3 (1 + r_2(2r_4 - 1) - r_4),$$

$$A_3 = (r_1 \omega_2 - (r_2 - 1) \omega_1 - \omega_2) r_3 r_4 (r_3 \omega_4 - (r_4 - 1) \omega_3 - \omega_4),$$

$$A_4 = \omega_1 r_1 r_2 ((r_2 - 1)r_3^2 r_4 \omega_4 - r_3 \omega_4 ((r_2 - 2)r_4 + 1) + \omega_3 r_4 - r_3 \omega_3 (r_2 (r_4 - 1) \\ - r_4 + 2) r_4) - \omega_1 r_2 (r_3 (r_4 - 1)\omega_4 - r_3 r_4 \omega_3 + \omega_3 r_4) + r_1 \omega_2 A_2 \\ + r_1^2 r_2 r_3 r_4 \omega_2 ((r_4 - 1) \omega_3 - (r_3 - 1)\omega_4),$$

$$\begin{aligned}
A_5 &= h_1^* h_2^* r_1 r_2 r_3 r_4 (-r_1 \omega_2 (\omega_3 - \omega_4) + \omega_2 (r_3 \omega_4 - (r_4 - 2) \omega_3 - 2 \omega_4) \\
&\quad + \omega_1 ((r_2 + r_4 - 2) \omega_3 - r_3 \omega_4 + (2 - r_2) \omega_4)), \\
A_6 &= b ((\omega_2 - \omega_1)(r_3 - 1)(r_4 - 1)(r_3 \omega_4 - \omega_3 r_4) r_1 r_2 (h_1^*)^3 - A_3 r_1 r_2 (h_1^*)^2 h_2^* \\
&\quad - A_3 r_1 r_2 h_1^* (h_2^*)^2 - (\omega_3 - \omega_4)(r_1 \omega_2 - \omega_1 r_2)(h_2^*)^3 (r_1 - 1)(r_2 - 1) r_3 r_4), \\
A_7 &= \varepsilon (A_6 + c h_1^* h_2 (-r_3 (r_4 - 1) \omega_4 - r_3 r_4 \omega_3 + \omega_3 r_4) (\omega_2 - \omega_1) r_1 r_2 (h_1^*)^2 \\
&\quad + (\omega_3 - \omega_4)(r_1 (r_2 - 1) \omega_2 - r_1 r_2 \omega_1 + \omega_1 r_2)(h_2^*)^2 r_3 r_4 + A_5), \\
A_8 &= \varepsilon^2 ((\omega_2 - \omega_1)(r_3 - 1)(r_4 - 1)(r_3 \omega_4 - \omega_3 r_4) (h_1^*)^2 r_1 r_2 + A_4 h_1^* h_2^* \\
&\quad - ((\omega_3 - \omega_4)(r_1 \omega_2 - \omega_1 r_2)(h_2^*)^2 (r_1 - 1)(r_2 - 1) r_3 r_4)), \\
A_9 &= (\varepsilon (h_2^* ((r_1 - 1) r_2 \omega_1 - (r_2 - 1) r_1 \omega_2) - (-h_1^* r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)) (r_4 - 1)) \\
&\quad + h_1^* (-h_1^* r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)) (b + c h_2^* - b r_4)) r_3 r_4 \omega_3^{-1}, \\
A_{10} &= (\varepsilon (-h_2^* ((r_1 - 1) r_2 \omega_1 - (r_2 - 1) r_1 \omega_2) + (-h_1^* r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)) (r_3 - 1)), \\
&\quad - h_1^* (-h_1^* r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)) (b + c h_2^* - b r_3)) r_3 r_4 \omega_4^{-1}), \\
A_{11} &= (b r_1^2 r_2 r_3 r_4 \omega_2 ((r_4 - 1) \omega_3 - (r_3 - 1) \omega_4)) / (\omega_2 r_1^2 r_2 r_3 r_4), \\
A_{12} &= (h_2^*)^2 (\omega_1^{-2} \omega_2 r_1 r_3 r_4) (h_1^*)^2 r_2 ((-c(\omega_3 - \omega_4) h_2^*) + A_{11} \\
&\quad + \varepsilon (h_2^* (\omega_3 - \omega_4)) (r_2 - 1) + h_1^* ((r_4 - 1) \omega_3 - r_3 \omega_4 + \omega_4)), \\
A_{13} &= (h_2^*)^2 (\omega_1^{-2} \omega_2^{-1} r_2 r_3 r_4) (-h_1^*)^2 r_1 ((c(\omega_3 - \omega_4) h_2^*) + A_{11} \\
&\quad + \varepsilon (h_2^* (\omega_3 - \omega_4)) (r_1 - 1) - h_1^* ((r_4 - 1) \omega_3 - r_3 \omega_4 + \omega_4)), \\
A_{14} &= -(\omega_2 - \omega_1) c h_1^* + b ((r_2 - 1) \omega_1 - r_1 \omega_2 + \omega_2) ((b((r_4 - 1) \omega_3 - r_3 \omega_4 + \omega_4) \\
&\quad - (\omega_2 - \omega_1) c h_2^*) r_1 r_2 r_3 r_4) (h_1^* h_2^*)^2 + A_7 + A_8
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{A_1 h_1^*}{A_{14}}, & a_2 &= -a_1 \\
a_3 &= \frac{(h_2^*)^2 A_9}{A_{14}}, & a_4 &= \frac{(h_2^*)^2 A_{10}}{A_{14}} \\
a_5 &= \frac{A_{12}}{A_{14}}, & a_6 &= \frac{A_{13}}{A_{14}} \\
a_7 &= \frac{(\varepsilon \omega_1 \omega_2 (r_1 - r_2) r_3 r_4 \omega_3 \omega_4^{-3} (h_2^*)^3)}{A_{14}}, & a_8 &= -\frac{(\varepsilon \omega_1 \omega_2 (r_1 - r_2) r_3^{-1} r_4 \omega_3 \omega_4^3 (h_2^*)^3)}{A_{14}}
\end{aligned}$$

katsayıları elde edilir. Bulunan a_1, \dots, a_8 katsayıları (5.3.29) çözüm formunda yerine yazılırsa

$$G_j^i = \begin{cases} -\frac{A_1 h_1^*(r_1^j - r_2^j)}{A_{14}}, & 0 \leq j \leq M/4 \\ \frac{(h_2^*)^2 (A_9 r_3^j + A_{10} r_4^j)}{A_{14}}, & M/4 \leq j \leq M/2 \\ \frac{(A_{12} r_1^j + A_{13} r_2^j)}{A_{14}}, & M/2 \leq j \leq 3M/4 \\ \frac{(\varepsilon \omega_1 \omega_2 (r_1 - r_2) r_3 r_4 \omega_3 \omega_4^{-3} (h_2^*)^3) r_3^j}{A_{14}} \\ - \frac{(\varepsilon \omega_1 \omega_2 (r_1 - r_2) r_3^{-1} r_4 \omega_3 \omega_4^3 (h_2^*)^3) r_4^j}{A_{14}}, & 3M/4 \leq j \leq M, \end{cases} \quad (5.3.31)$$

elde edilir. Ağın düzgün olduğu basit durumda (5.3.30) lineer sistemi tekrar çözümlerse

$$\xi_1 = h \sqrt{4c_i^2 h^2 + 4b_i c_i M h + M^2 (b_i^2 + 4c_i \varepsilon)}, \quad \xi_2 = (1 - h)/(1 + h)$$

$$\xi_4 = \left((\xi_1 (1/h - 1))^{M/2} + (\xi_1 (1/h + 1))^{M/2} \right) (\xi_1 / h), \quad \xi_3 = M(2b_i h + \varepsilon M)$$

olmak üzere

$$a_1 = \frac{M \xi_3^{M/2}}{\xi_4}, \quad a_2 = -a_1$$

$$a_3 = a_1, \quad a_4 = -a_1$$

$$a_5 = -\frac{(\xi_3 \xi_2)^{M/2}}{\xi_4}, \quad a_6 = \frac{M (\xi_3^{-1} \xi_2)^{-M/2}}{\xi_4}$$

$$a_7 = a_5, \quad a_8 = a_6$$

katsayıları elde edilir. Bulunan a_1, \dots, a_8 katsayıları (5.3.29) çözüm formunda yerine yazılırsa (5.3.31) fark çözümü aşağıdaki uygun duruma indirgenir:

$$G_j^i = \begin{cases} \frac{M\xi_3^{M/2} (r_1^j - r_2^j)}{\xi_4}, & 0 \leq j \leq M/4 \\ \frac{M\xi_3^{M/2} (r_3^j - r_4^j)}{\xi_4}, & M/4 \leq j \leq M/2 \\ \frac{-(\xi_3 \xi_2)^{M/2} r_1^j + M(\xi_3^{-1} \xi_2)^{-M/2} r_2^j}{\xi_4}, & M/2 \leq j \leq 3M/4 \\ \frac{-(\xi_3 \xi_2)^{M/2} r_3^j + M(\xi_3^{-1} \xi_2)^{-M/2} r_4^j}{\xi_4}, & 3M/4 \leq j \leq M. \end{cases} \quad (5.3.32)$$

Şimdi (5.3.20) denkleminde $g'_i(x_{i-1})$ ve $g'_i(x_{i+1})$ fonksiyonlarının tek taraflı yaklaşımlarında G_j kullanılarak yerine yazılır; yani

$$g'_i(x_{i-1}) \approx D^+ G_0 = \frac{G_1 - G_0}{h_1^*}, \quad g'_i(x_{i+1}) \approx D^- G_M = \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*},$$

olur ve bu

$$-\varepsilon D^+ G_0 \tilde{U}_{i-1} + \tilde{U}_i + \varepsilon D^- G_M \tilde{U}_{i+1} = f_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx \quad (5.3.33)$$

son nümerik metodu verir. (5.3.33) metodu, hiç bir şekilde bir tam çözüme gereksinim duymaması bakımından kayda değerdir. Uygulama aşamasında G_j^i yaklaşımları direkt olarak (5.3.22) fark denkleminin çözümünde uygulanabilir. Böylece uygulamalı bakış açısıyla (5.3.31) çözümündeki G için olan ifadelerin bile tam çözümünün bulunması zorunlu değildir, bunlara sadece gelecek bölümde (5.3.33) metodunun ε -düzgün yakınsak olduğunu ispatlamak için gerek duyulacaktır.

6. YAKINSAKLIK

6.1 Yakınsaklık Özellikleri

(5.3.33) nümerik metodunun yakınsaklık özelliklerini araştırmak için; düşünülen bu metodun ε da düzgün yakınsadığını ispatlamak için gereken iyi bilinen bazı sonuçlar hatırlatılacaktır. Öncelikle problem (4.1.1) için türevi (4.1.3) yerel Green probleminin tam çözümünü kullanan (4.1.27) tam şeması geri formda yeniden yazılır:

$$B_D(\rho_i, \gamma_i) = \frac{h^2 c_i}{\varepsilon} \frac{e^{\gamma_i}}{e^{2\gamma_i + \rho_i} + e^{\rho_i} - e^{\gamma_i} - e^{\gamma_i + 2\rho_i}},$$

$$B_C(\rho_i, \gamma_i) = \frac{h c_i}{b_i} \frac{e^{\gamma_i} (e^{2\rho_i} - 1)}{e^{2\gamma_i + \rho_i} + e^{\rho_i} - e^{\gamma_i} - e^{\gamma_i + 2\rho_i}},$$

$$B_R(\rho_i, \gamma_i) = 1$$

olmak üzere

$$\begin{cases} U_0 = u_0, U_N = u_1, U \in V(\Omega^N) \text{ ve } 1 \leq i \leq N-1 \\ -\varepsilon B_D(\rho_i, \gamma_i) D^+ D^- U_i + b_i B_C(\rho_i, \gamma_i) D^- U_i + c_i B_R(\rho_i, \gamma_i) U_i = f_i. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Diğer taraftan $\hat{\sigma}_i > 0$, $\hat{\eta}_i \gg 0$ ve $\hat{\theta}_i > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \hat{U}_0 = u_0, \hat{U}_N = u_1, \text{ ve } \hat{U} \in V(\Omega^N) \\ -\varepsilon \hat{\sigma}_i D^+ D^- \hat{U}_i + \hat{\eta}_i b_i D^- \hat{U}_i + \hat{\theta}_i c_i \hat{U}_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \end{cases} \quad (6.1.2)$$

formunda bir fark şeması ele alınır. (Farrell, 1982) de (6.1.2) formunda yazılmış şemaların düzgün yakınsaklığı için yeter şartlar türetilmiştir ve katsayıları (6.1.1) metodunun katsayılarına yakın olan (6.1.2) tipindeki şemaların da düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Bu bağlamda;

$$\sigma_i = \frac{h^2 T_2}{\varepsilon T_3}, \quad \eta_i = \frac{h^2 T_1 - T_2}{2 \varepsilon \rho_i T_3}, \quad \theta_i = \frac{1}{c_i} \left(\frac{1 - T_1 - T_2}{T_3} \right) \quad (6.1.3)$$

ve

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) &= \varepsilon D^+ G_0, \\ T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) &= -\varepsilon D^- G_M, \\ T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

olmak üzere (5.3.33) nümerik metodu bazı cebirsel işlemler yapılarak (6.1.2) formunda yeniden yazılır:

$$-\varepsilon \sigma_i D^+ D^- \tilde{U}_i + \eta_i b_i D^- \tilde{U}_i + \theta_i c_i \tilde{U}_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (6.1.5)$$

Bu durumda (5.3.33) metodunun düzgün yakınsak olduğunun ispatlanabilmesi için (6.1.2) denklemindeki σ_i , η_i ve θ_i katsayılarının (6.1.1) nümerik metodunun katsayılarına keyfi şekilde yakın yapılabilmesi yeterlidir. Yani düzgün yakınsaklık için,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_D(\rho_i, \gamma_i), \quad (6.1.6)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \eta_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_C(\rho_i, \gamma_i), \quad (6.1.7)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \theta_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_R(\rho_i, \gamma_i) \quad (6.1.8)$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. G^i , x_{i-1} noktasından x_{i+1} noktasına kadar integralde kesin pozitif olan bir fonksiyon olduğundan ilk olarak (6.1.4)'te sırasıyla $i = 1, 2, 3$ için $\lim_{M \rightarrow \infty} T_i$ değerleri bulunabilir ve sonra bunlar (6.1.6)-(6.1.8) limitlerini bulmak için bir araya getirilir.

Lema 6.1 $T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M)$ değeri (6.1.4) denklemindeki gibi verilsin; yani

$$T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \varepsilon D^+ G_0 \quad (6.1.9)$$

olsun. Eğer ρ_i ve γ_i değişkenleri sabit ise

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = -\frac{e^{\gamma_i + \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}}. \quad (6.1.10)$$

İspat: τ ya göre iki durumun göz önüne alınması gerekir. $\tau = h/2$ olan ilk durumda ağ $h_1^* = h_2^* = 2h/M$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + \frac{2b_i h}{M\varepsilon}$ ile birlikte düzgündür. Bu gerçekler kullanılarak T_1 değeri, yeniden düzenlenilerek ve (5.3.31) denklemindeki G^i nin tam çözümü kullanılarak yeniden yazılabilir.

$$T_1 = \frac{G_1 - G_0}{h_1^*} = \frac{M\xi_3^{M/2} (r_1 - r_2)}{h_1^* \xi_4} = -\frac{\xi_1 M^2 (M(2b_i h + \varepsilon M))^{\frac{M-2}{2}}}{\xi_4 h}.$$

Her $x \in \mathfrak{R}$ için $\lim_{M \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{M})^M = e^x$ olduğu gerçeği kullanılarak bir hesaplamayla

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_1 - G_0}{h_1^*} = -\frac{e^{\frac{(b^2 + 4c\varepsilon + b\sqrt{b^2 + 4c\varepsilon})h}{2\varepsilon\sqrt{b^2 + 4c\varepsilon}}}}{1 + e^{\frac{h\sqrt{b^2 + 4c\varepsilon}}{\varepsilon}}} = -\frac{e^{\gamma_i + \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}}.$$

$\tau = \frac{\varepsilon}{b} \ln M$ olan ikinci durumda ise ağ

$$h_1^* = \frac{4\varepsilon}{M} \ln \frac{M}{2}, \quad h_2^* = \frac{4}{M} \left(h - \frac{\varepsilon}{b} \ln \frac{M}{2} \right)$$

ağ parametreleriyle birlikte parçalı düzgündür ve bu durumda

$$\lambda_1 = 1 + \frac{4}{M} \ln \frac{M}{2}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{4\rho}{M} - \frac{4}{M} \ln \frac{M}{2}$$

olur. $M \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_1 - G_0}{h_1^*} = -\frac{e^{\gamma_i + \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}}$$

elde edilir.

Lema 6.2 $T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M)$ değeri (6.1.4) denklemindeki gibi verilsin; yani

$$T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = -\varepsilon D^- G_M \quad (6.1.11)$$

olsun. Eğer ρ_i ve γ_i değişkenleri sabit ise

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = -\frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}}. \quad (6.1.12)$$

İspat: Lemma 6.1'in ispatındakilerle aynı akıl yürütmeler kullanılır. $\tau = h/2$ olan durum için yine (5.3.31) denklemindeki G^i fark çözümü ve $h_1^* = h_2^* = 2h/M$ değeri kullanılırsa

$$T_2 = \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*} = -\frac{\left(-(\xi_3 \xi_2)^{M/2} r_3^{M-1} + M(\xi_3^{-1} \xi_2)^{-M/2} r_4^{M-1}\right)}{h_2^* \xi_4} = \frac{\xi_1 \varepsilon^{\frac{M}{2}-1} M^M}{\xi_4 h},$$

ve buradan

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*} = -\frac{e \frac{(b^2 + 4c\varepsilon - b\sqrt{b^2 + 4c\varepsilon})h}{2\varepsilon\sqrt{b^2 + 4c\varepsilon}}}{1 + e \frac{\varepsilon}{h\sqrt{b^2 + 4c\varepsilon}}} = -\frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}}. \quad (6.1.13)$$

$\tau = \frac{\varepsilon}{b} \ln M$ olan diğer durum için bir hesapla

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*} = -\frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}} \quad (6.1.14)$$

olduğunu gösterir. Bununla birlikte bunu hesaplamak için sembolik bir hesap aracı kullanışlı olacaktır ve bu durumda yine

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*} = -\frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{1 + e^{2\gamma_i}}. \quad (6.1.15)$$

Lema 6.3 $T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M)$ değeri (6.1.4) denklemindeki gibi verilsin; yani

$$T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx \quad (6.1.16)$$

olsun. Eğer ρ_i ve γ_i değişkenleri sabit ise

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \frac{1}{c_i} \left(\frac{e^{2\gamma_i} - e^{\gamma_i + \rho_i} - e^{\gamma_i - \rho_i} + 1}{1 + e^{2\gamma_i}} \right). \quad (6.1.17)$$

İspat: (6.1.16) integralini hesaplamak için (5.3.31) denklemindeki G^i nin tam çözümü ve yamuklar yöntemi kullanılırsa

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1} + \tau} G^i dx + \int_{x_{i-1} + \tau}^{x_i} G^i dx + \int_{x_i}^{x_i + \tau} G^i dx + \int_{x_i + \tau}^{x_{i+1}} G^i dx. \quad (6.1.18)$$

$\tau = h/2$ olan ilk durumda (6.1.18) ifadesi dikkate değer bir şekilde

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \frac{e^{\frac{(\gamma_i - \rho_i)}{2}} \left(-b_i e^{\gamma_i} + b_i + \left(1 + e^{\gamma_i} - 2e^{\frac{(\gamma_i - \rho_i)}{2}} \right) \frac{2\varepsilon \gamma_i}{h} \right)}{2c_i (1 + e^{2\gamma_i}) \frac{2\varepsilon \gamma_i}{h}}$$

şeklinde sadeleşir ve böylece

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \frac{1}{c_i} \left(\frac{e^{2\gamma_i} - e^{\gamma_i + \rho_i} - e^{\gamma_i - \rho_i} + 1}{1 + e^{2\gamma_i}} \right).$$

$\tau = \frac{\varepsilon}{b} \ln M$ olan düzgün olmayan durum için ortaya çıkan (6.1.18) ifadesi oldukça uzun ve karmaşıktır. Bununla birlikte, bunu hesaplamak için sembolik bir hesap aracı (MATHEMATICA) kullanışlı olacaktır. Bu durumda yine

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \frac{1}{c_i} \left(\frac{e^{2\gamma_i} - e^{\gamma_i + \rho_i} - e^{\gamma_i - \rho_i} + 1}{1 + e^{2\gamma_i}} \right).$$

Sonuç 6.1 Eğer ρ_i ve γ_i değişkenleri sabit ise, (6.1.5) denklemindeki σ_i , η_i ve θ_i katsayıları (6.1.1) nümerik metodunun katsayılarına yakınsar. Yani;

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_D(\rho_i, \gamma_i), \quad (6.1.19)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \eta_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_C(\rho_i, \gamma_i), \quad (6.1.20)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \theta_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_R(\rho_i, \gamma_i). \quad (6.1.21)$$

İspat: (6.1.3) denkleminde σ_i değişkeninin tanımı hatırlanır ve Lemma 6.2 ve Lemma 6.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_i &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{h^2 T_2}{\varepsilon T_3} = \frac{h^2 \lim_{M \rightarrow \infty} T_2}{\varepsilon \lim_{M \rightarrow \infty} T_3} = \frac{h^2}{\varepsilon} \frac{\frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{e^{2\gamma_i} + 1}}{\frac{1}{c_i} \frac{e^{2\gamma_i} + 1}{e^{2\gamma_i} + 1 - e^{\gamma_i - \rho_i} - e^{\gamma_i + \rho_i}}} \\ &= \frac{h^2 c_i}{\varepsilon} \frac{e^{\gamma_i - \rho_i}}{e^{2\gamma_i} + 1 - e^{\gamma_i - \rho_i} - e^{\gamma_i + \rho_i}} = \frac{h^2 c_i}{\varepsilon} \frac{e^{\gamma_i}}{e^{2\gamma_i + \rho_i} + e^{\rho_i} - e^{\gamma_i} - e^{\gamma_i + 2\rho_i}} = B_D(\rho_i, \gamma_i). \end{aligned}$$

(6.1.20) ve (6.1.21) in ispatları da benzerdir fakat bunları ispatlamak için aynı zamanda Lemma 6.1 de kullanılır.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \eta_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{h}{b_i} \frac{(T_1 - T_2)}{T_3} = \frac{h}{b_i} \frac{\lim_{M \rightarrow \infty} (T_1 - T_2)}{\lim_{M \rightarrow \infty} T_3} = B_C(\rho_i, \gamma_i).$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \theta_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{c_i} \left(\frac{1 - T_1 - T_2}{T_3} \right) = \frac{1}{c_i} \frac{\lim_{M \rightarrow \infty} (1 - T_1 - T_2)}{\lim_{M \rightarrow \infty} T_3} = B_R(\rho_i, \gamma_i).$$

Teorem 6.2 (6.1.5) fark denkleminin çözümleri maksimum normda (4.1.1) probleminin tam çözümüne ε da düzgün olarak yakınsar.

İspat: (Farrell, 1982).

7. SONUÇ

Bu tezde temel olarak konveksiyon-difüzyon problemi için hem eş uzunluklu hem de eş uzunluklu olmayan ağlar üzerinde ε -düzgün olan nümerik metotlar araştırıldı. Merkezi ve sonlu geri fark metotlarının ε -düzgün olmadıkları gözlemlendi. Bu durum bizi ε -düzgün yakınsak olan nümerik metotlar elde etmeye sevk etti. Buna ulaşmak için ya bir sabitlenmiş operatör metodu ya da bir sabitlenmiş ağ metodu kullanıldı. Eş uzunluklu ağlar üzerinde sabitlenmiş operatör metotlarının bir örneği olarak Il'in-Allen-Southwell metodunun türetilmesi ile başlandı ve bunun maksimum normda düzgün yakınsak olduğu görüldü. Ancak bu, problemin tam çözümünü temel aldığından, tam çözümü temel almayan bir ε -düzgün metot elde etmek için diğer düşünceler üzerinde çalışılmaya başlandı. Böylece sabitlenmiş ağ metotlarının bir örneği olarak bir metot elde edebilmek için, basitliği dolayısıyla Shishkin ağı kullanıldı. Beşinci bölümde başka bir amaç olarak daha etkin bir metot geliştirebilmek için problem iki durumda ele alındı. İlk olarak, düzenli verili bir problem ele alındı ve Shishkin ağı üzerinde geri operatörü kullanan sonuçtaki metodun ε -düzgün olduğu kanıtlandı. Sonra düzensiz veriye sahip bir problem üzerinde çalışıldı ve yine Shishkin ağı kullanıldı. Bu metot için bir ε -düzgün hata tahmini verildi. Her bir metot için teorik bulguların nümerik sonuçlarla uyumlu oldukları gözlemlendi. Ayrıca önerilen metodun, gerçek çözüme ε da düzgün olarak yakındığı da ispatlandı.

KAYNAKLAR

- El-Mistikawy, T.M., Werle, M.J. 1978. Numerical method for boundary layers with blowing-The exponential box scheme. **AIAA J.**, 16: 749–751.
- Farrell, P.A. 1982. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence of Difference Schemes for Singularly Perturbed Turning and Non-turning Point Problems. *Computational and Asymptotic Methods for Boundary and Interior Layers*, Boole Press, 230–235.
- Hegarty, P.A., Miller, J.J.H., O’Riordan, E. 1980. Sufficient Conditions for the Uniform Second Order Difference Schemes for Singular Perturbation Problems. In J. J. H. Miller editör, *BAIL II-Proceedings*, Boole Press, pp. 301–305.
- Il’in, A.M. 1969. Differencing scheme for a partial differential equation with a small parameter affecting the highest derivative. *Math. Notes*, 6: pp. 596–602.
- Linss, T. 2002. Finite Difference Schemes for Convection Diffusion Problems with a Concentrated Source and a Discontinuous Convection Field. **Comp. Math. in Appl. Math.**, 2: pp. 41–49.
- Marchuk, G.I. 1977. *Methods of Numerical Mathematics*. Springer, Berlin.
- Miller, J., O’Riordan, E., Shiskin, G. 1996. *Fitted Numerical Methods for Singularly Perturbed Problems*. World Scientific, Singapore.
- Neslitürk, A.I. Preprint. A fully discrete ε -uniform method for singular perturbation problems on equidistant meshes.
- O’Malley, Jr, R.E. 1991. *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Newyork.
- O’Riordan, E., Stynes, G. 1986. An Analysis of Some of a superconvergence result for a Singularly Perturbed boundary value problem. **Math.Comput.**, 46: pp. 81–92.
- Roos, H.G., Stynes, M., Tobiska, L. 1996. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin.

- Shishkin, G.I. 1988. A Difference Scheme for Singularly Perturbed Equation of Parabolic Type with a Discontinuous Initial Condition. Soviet Math. Dokl., 37: pp. 792-796.
- Shishkin, G.I. 1990. Grid approximation of singularly perturbed elliptic and parabolic equations. Second Doctoral Thesis, Keldysh Institute, Moscow, (In Russian).

ÖZ GEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Mehmet Ekici
Doğum Yeri ve Tarihi : Kırşehir, 01.07.1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Celal Bayar Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
 - SCI
 - Diğer
- b) Bildiriler
 - Uluslararası
 - Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :
:

İLETİŞİM

E-posta Adresi : ekici-m@ hotmail.com
Tarih : 30.07.2010