ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2013-YL-000-

ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

Teslime UĞUZ

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Teslime UĞUZ tarafından hazırlanan Armendariz Halkalar Üzerine başlıklı tez, 31.05.2013 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Üniv. Fen Fakültesi	
Üye :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Doc. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2013 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

31.05.2013

Teslime UĞUZ

ÖZET

ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

Teslime UĞUZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2013, 57 sayfa

Çalışmamızda Armendariz halkalar ve Armendariz halkalarla bağlantılı halkalar aralarındaki ilişkiler incelendi. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde diğer bölümlerde kullanacağımız tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde Armendariz halkalarla bağlantılı polinom halkaları üzerinde Baer ve p.p.-halkalar incelendi [1] ve Armendariz özelliğine sahip olmayan örnekler verildi [2]. Bir R halkasının Armendariz olması için gerek ve yeter koşulun $R[x]$ polinom halkasının Armendariz olması durumu gösterildi [3]. Matris halkalarında Armendariz özeliğine sahip olan ve olmayan halkalar incelendi [4].

Üçüncü bölümde Armendariz halkaları üzerinde polinom halkaları incelendi, yarıdeğişmeli halkaların özellikleri ile yarıdeğişmelilik ve Armendarizlik arasındaki ilişkiler gösterildi [5]. Bundan başka Armendariz halkalarda genişlemeler araştırıldı [6].

Son bölümde abelian halkalar çalışılarak abelian halkalar ile Armendariz halkalar arasındaki bağlantılar incelenmiştir [7].

Anahtar Sözcükler
Armendariz halkalar, indirgenmiş halkalar, yarıdeğişmeli halkalar, abelian halkalar, Baer halkalar, p.p.-halkalar

ABSTRACT

ON ARMENDARIZ RINGS

Teslime UĞUZ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2013, 57 pages

In this work, we studied relationship between Armendariz rings and the related rings. The study consists of four chapters.

In the first chapter, we present some definations and theorems that will be used in the following chapters.

In the second chapter, Baer and p.p.-rings were examined on polynomial rings which are related with Armendariz rings [1] and examples were given for non Armendariz rings [2]. "A ring R is Armendariz if and only if polynomial ring $R[x]$ is Armendariz" were shown [3]. In addition Armendariz property on matrix rings, were examined [4].

In the third chapter, polynomial rings on Armendariz rings were studied, moreover the relationships between semicommutativy and Armendariz property with semicommutative rings, were shown [5]. Furthermore, extentions on Armendariz rings were investigated [6].

In the last chapter, we studied abelian rings and its relations with the Armendariz rings are examined [7].

Key Words
Armendariz rings, reduced rings, semicommutative rings, abelian rings, Baer rings, p.p.-rings

ÖNSÖZ

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi her türlü imkanı sağlayan anneme ve babama, her yönüyle takdir ettiğim ve bana hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Gonca Güngöroğlu'na saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Teslime UĞUZ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Temel Kavram ve Teoremler

Bu bölümde diğer bölümlerde gerekli olan tanım ve özellikler verilecektir.

Bu çalışmada halkalar birimli ve birleşmeli olacaktır.

Tanım 1.1.1 Bir R halkasının boştan farklı X altkümesi için $r_R(X) = \{r \in R : Xr = 0\}$, $l_R(X) = \{r \in R : rX = 0\}$ kümelerine sırasıyla X kümesinin R içindeki *sağ sıfırlayanı* ve *sol sıfırlayanı* denir.

Tanım 1.1.2 R bir halka olmak üzere R'nin bir p elemanı $p = p^2$ şartını sağlarsa, p ye *kare-eş (idempotent) eleman* denir.

Tanım 1.1.3 R bir halka ve $r \in R$ olsun. $r^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda r ye *nilpotent eleman* denir.

Tanım 1.1.4 Sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan bir R halkasına *indirgenmiş halka* denir.

Tanım 1.1.5 Her kare-eş elemanı merkezde olan halkaya *abelian halka* denir.

Tanım 1.1.6 Bir R halkasının boştan farklı altkümesinin sağ sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretiliyor ise R ye *Baer halka* denir.

Tanım 1.1.7 Her sağ idealin sağ sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen halkaya *quasi-Baer halka* denir.

Tanım 1.1.8 Her temel sağ (sol) idealinin sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen R halkasına *sağ (sol) p.q.(principally quasi)-Baer halka* denir. Hem sağ hem de sol p.q.-Baer halkasına *p.q.-Baer halka* denir.

Tanım 1.1.9 Herhangi bir elemanının sağ (sol) sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretiliyor ise R halkasına *sağ (sol) p.p.-halka (principle projective ring)* denir.

Önerme 1.1.10 *Baer halkalar açıkça p.q.-Baer ve sağ p.p.-halkalardır.*

Tanım 1.1.11 $R[x]$, bir polinom halkası olmak üzere eğer $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$, $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olduğunda her i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkasına *Armendariz* denir.

Tanım 1.1.12 Eğer herhangi bir $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ ise R'ye *yarı değişmeli halka* denir.

Tanım 1.1.13 Halkanın bütün asal ideallerinnin kesişimine *asal radikal* denir.

Tanım 1.1.14 Bir halkada sıfırdan farklı bir elemanın ne sağ ne de sol sıfırlayanı yoksa bu elemana *regular eleman* denir.

Tanım 1.1.15 Bir R halkası her $a \in R$ için $a \in aRa$ (en az bir $b \in R$ için $a = aba$) ise R halkasına *von Neumann regular halka* denir.

Tanım 1.1.16 Sıfır bölensiz halkaya *integral halkası* denir.

Tanım 1.1.17 Değişmeli ve birimli bir halkada sıfır bölen yoksa bu halkaya *tamlık bölgesi* (domain) denir.

Tanım 1.1.18 *R,* bir tamlık bölgesi olsun. R'nin her ideali temel ideal ise R'ye *temel ideal bölgesi* denir ve *TİB* ile gösterilir.

Tanım 1.1.19 R, bir değişmeli integral bölgesi ve M, bir sol R-modül olsun. $I_R(x) = \{r \in R : rx = 0\}$ olmak üzere $T(M) = \{x \in M : I_R(x) \neq 0\}$ altmodülüne M_R'nin torsion altmodülü denir. Eğer $T(M) = 0$ *(*$T(M) = M$*)* ise bu durumda M'ye *torsion free (torsion)* denir.

Tanım 1.1.20 M, bir sağ R-modül olsun. $Z_R(M) = \{m \in M : r_R(m),\ R'$ nin esas(essential) sağ ideali$\}$ dir. $Z(R_R)$, R'nin iki yanlı idealidir ve R'nin *sağ tekil (singular) ideali* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.21 $Z(M) = M$ ise M'ye *tekil (singular) modül* ve $Z(M) = 0$ ise M 'ye *tekil olmayan (non-singular) modül* denir. Eğer R_R tekil olmayan bir modül ise bu R halkasına *sağ tekil olmayan halka* denir.

Tanım 1.1.22 R bir halka I, R'nin bir ideali olsun. $C_R(I) = \{c \in R : c+I,\quad R/I'$ nın regular elemanı$\} = C(I)$ ve $C_R(0)$, R'nin regüler elemanlarının kümesini göstermek üzere eğer $C_R(0)$ varsa buna R'nin *sağ kesirler halkası* denir ve $Q(R)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.23 İdealin bütün elemanları nilpotent ise buna *bir yanlı nil ideal* denir.

Tanım 1.1.24 Eğer b regular olacak şekilde $a, b \in R$ verildiğinde b_1 regular ve $ba_1 = ab_1$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in R$ varsa R halkasına *sağ Ore halka* denir.

Çalışmamız boyunca aksi söylenmedikçe α dönüşümünü her zaman $\alpha : R \longrightarrow R$ halka homomorfizmasıdır ve α, $\alpha(1) = 1$ şartının sağlamasını gerektirmeyen bir dönüşüm olacaktır. 1 ile R'nin birim dönüşümünü ve ρ ile R'nin bir α-türevini göstereceğiz, yani her $r, s \in R$ için $\rho(r+s) = \rho(r) + \rho(s)$ ve $\rho(rs) = \rho(r)\alpha(s) + \alpha(r)\rho(s)$ şartlarını sağlayan bir $\rho : R \longrightarrow R$ fonksiyonudur.

Tanım 1.1.25 $R[x] = \{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$,

$R[[x]] = \{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i; a_i \in R\}$,

$R[x,x^{-1}] = \{\sum_{i=-s}^{t} a_i x^i; a_i \in R, s,t \in \mathbb{N}\}$,

$R[[x,x^{-1}]] = \{\sum_{i=-s}^{\infty} a_i x^i; a_i \in R, s \in \mathbb{N}\}$,

$R[x,\alpha] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$

halkalarına sırasıyla R bileşenli *x bilinmeyenli çok terimliler halkası, üstel seriler halkası, Laurent çok terimliler halkası, Laurent üstel çok terimliler halkası ve çarpık sağ üstel çok terimliler halkası* olarak adlandırılır. $R[x,\alpha]$ da işlemler çok terimlilerdeki bilinen toplama işlemi gibi tanımlıdır ek olarak çarpma işlemi $xr = \alpha(r)x$ olarak yapılır.

Tanım 1.1.26 $R[x,\alpha,\rho] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$, halkasında ρ, R'de α ya bağlı türev yani her $a,b \in R$ için $\rho(ab) = \alpha(a)\rho(b) + \rho(a)b$ olacak şekilde alınmaktadır. $R[x,\alpha,\rho]$ ya R'nin *Ore Genişlemesi* denir ya da çarpık çok terimliler halkası (skew polynomial ring) denir. $R[x,\alpha,\rho]$ da çok terimlilerdeki bilinen eşitlik ve toplama işlemlerine ek olarak çarpma işlemi; $xr = \alpha(r)x + \rho(r)$ kuralına bağlı diğer işlemler ise çok terimliler halkasındakilerle aynı olarak yapılır.

Teorem 1.1.27 ***Çin Kalan Teoremi:*** *Bir değişmeli ve birimli R halkasında $I_1, I_2, ..., I_n$ idealleri her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ yi sağlarsa $R/(I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n) \cong (R/I_1 \times R/I_2 \times ... R/I_n)$ dir.*

2. BAER VE P.P.-HALKALARIN GENİŞLEMELERİ ÜZERİNE NOTLAR

2.1. Baer ve P.P.-Halkalar

Lemma 2.1.1 *R bir indirgenmiş halka ve* $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ *olacak şekilde* $f, g \in R[x]$ *olsun. Bu durumda ;*

$fg = 0$ *olması için gerek ve yeter koşul her* $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ *için* $a_i b_j = 0$ *olmasıdır.*

İspat. $fg = 0$ ve $n = m$ olsun. Bu durumda eşitlikten

(1) $a_0 b_0 = 0$

(2) $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$

(3) $a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0$

$\vdots$

(n) $a_n b_0 + ... + a_0 b_n = 0$

eşitlikleri vardır. R indirgenmiş olduğundan $a_0 b_0 = 0$ buradan $b_0 a_0 = 0$ dır. Bu eşitliklerden (2) eşitliğini soldan b_0 ile çarparsak $b_0(a_1 b_0 + a_0 b_1) = 0$ ve buradan $b_0 a_1 b_0 + b_0 a_0 b_1 = 0$ olur. $b_0 a_0 b_1 = 0$ olacağından $b_0 a_1 b_0 = 0$ olur. $b_0 a_1 b_0 = 0$ eşitliğini soldan a_1 ile çarparsak $a_1 b_0 a_1 b_0 = (a_1 b_0)^2 = 0$ olur. R indirgenmiş olduğundan $a_1 b_0 = 0$ bulunur ve böylece (2) eşitliğinden $a_0 b_1 = 0$ olur. R indirgenmiş olduğundan $b_1 a_0 = 0$ olur. Şimdi (3) eşitliğini sağdan a_0 ile çarparsak $(a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) a_0 = 0$ elde ederiz. Yani $a_2 b_0 a_0 + a_1 b_1 a_0 + a_0 b_2 a_0 = 0$ ise buradan $a_0 b_2 a_0 = 0$ olur. $a_0 b_2 a_0 = 0$ eşitliğini sağdan b_2 ile çarparsak $a_0 b_2 a_0 b_2 = (a_0 b_2)^2 = 0$ olur. R indirgenmiş olduğundan $a_0 b_2 = 0$ olur. (3) eşitliğinden $a_2 b_0 + a_1 b_1 = 0$ olur. Bu eşitliği soldan a_2 ile çarparsak $a_2 b_0 a_2 b_0 = 0$ olur. Buradan $(a_2 b_0)^2 = 0$ olur. R indirgenmiş olduğundan $a_2 b_0 = 0$ dır. (3) eşitliğinden $a_1 b_1 = 0$ olur. Diğer eşitlikler için de benzer işlemleri uygularsak her $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$

için $a_ib_j = 0$ elde edilir.

Denkliğin diğer yönü açıktır. $\square$

Sonuç 2.1.2 *Eğer R bir indirgenmiş halka ve $f^2 = f$ olacak şekilde $f \in R[x]$ ise bu durumda $f \in R$ dir.*

İspat. $f = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ olsun. Buradan $(1-f) = (1-a_0) - \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ elde edilir. O halde $1-f = (1-a_0)-(a_0+a_1x+...+a_nx^n)$ dır. $f^2 = f$ olduğundan $(a_0+a_1x+...+a_nx^n)(a_0+a_1x+...+a_nx^n) = a_0+a_1x+...+a_nx^n$ olur. Böylece $(a_o)^2+(a_0a_1+a_1a_0)x+... = a_0+a_1x+...+a_nx^n$ olur. O halde $(a_o)^2 = a_0$ ise $0 = a_0-(a_o)^2 = a_0(1-a_0)$ olur. $a_0a_1+a_1a_0 = a_1$ ise $(a_0a_1+a_1a_0)a_0 = a_1a_0$ ve böylece $a_0a_1a_0+a_1a_0a_0 = a_1a_0$ dır ve buradan $a_0a_1a_0+a_1a_0 = a_1a_0$ elde edilir. Bu ise $a_0a_1a_0 = 0$ demektir. İndirgenmiş halkalar Lemma 2.11 den Armendarizdir. Armendariz halkalar abeliandır [5]. O halde $a_0a_0a_1 = 0$ olur. Buna göre $a_0a_1 = 0$ olur. $a_0a_1+a_1a_0 = a_1$ olduğundan $a_1a_0 = a_1$ olur. $(a_1)^2 = a_1a_0a_1a_0 = a_1(a_0a_1)a_0 = 0$ dır. R indirgenmiş olduğundan $a_1 = 0$ olur. $a_2a_0+a_1a_1+a_0a_2 = a_2$ ise $a_2a_0+a_0a_2 = a_2$ olur. Aynı yöntemle $a_2 = 0$ bulunur. Yani her $i \geq 1$ için $a_i = 0$ dır ve buradan $f = a_0 = (a_0) \in R$ olur. $\square$

Eğer $f \in R[x]$, n dereceli ve $f = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ ise $S_f = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ olsun.

Sonuç 2.1.3 *R bir indirgenmiş halka ve $U \subseteq R[x]$ olsun. Eğer $T = \bigcup_{f \in U} S_f$ ise bu durumda*

$r_{R[x]}(U) = r_R(T)[x]$ *olur.*

İspat. Eğer $g = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i \in R[x]$ ve $gU = 0$ ise $b_i \in r_{R[x]}(U)$ olur. Bu durumda her $f \in U$ için $gf = 0$ olur ve buradan Lemma 2.1.1'den $0 \leq i \leq m$ için $b_i \in r_R(T)$ elde edilir. Böylece $r_{R[x]}(U) \subseteq r_R(T)$ olur. Diğer kapsam açıktır. O halde $r_{R[x]}(U) = r_R(T)$ olur. $\square$

Teorem 2.1.4 *R bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $R[x]$ bir p.p.-halkadır ancak ve ancak R bir p.p.-halkadır.*

İspat. $R[x]$ bir p.p.-halka olsun. $a \in R$ ise bu durumda $e = e^2 \in R$ olmak üzere $r_{R[x]}(a) = R \cap R[x]e$ dir. Sonuç 2.1.2'den $e \in R$ olur ve böylece $R \cap R[x]e = Re$ dir. Buradan $r_R(a) = Re$ dir. O halde R bir p.p.-halka olur. Şimdi R bir p.p.-halka olsun. O halde $e_1, e_2 \in R$ birer kare-eş eleman olmak üzere $r_R a = Re_1$ ve $r_R b = Re_2$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Buradan eğer $e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$ ise R'nin kare-eş ögeleri merkezde olacağından ve $r_R(a, b) = Re$ olmasından $e^2 = e$ elde edilir. Böylece herbir sonlu altküme $U \subseteq R$ için ve bazı $e^2 = e \in R$ için $r_R(U) = Re$ olur. Eğer $f \in R[x]$ ise bu durumda Sonuç 2.1.3'ten $e = e^2$ olacak şekilde S_f sonlu olmak üzere $r_{R[x]}(f) = r_R(S_f)[x] = Re[x] = R[x]e$ olur. Böylece $R[x]$ bir p.p.-halkadır. $\square$

Teorem 2.1.5 *R bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $R[x]$, bir Baer halkadır ancak ve ancak R bir Baer halkadır.*

İspat. Baer halkalar p.p.-halka olduğundan Teorem 2.1.4'ten bu teoremin ispatı açıktır. $\square$

Örnek 2.1.6 R, tamsayılar üzerinde 2×2 tipindeki matrislerin halkası yani
$R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0\}$ olsun.
$r(R) = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ ise $ax + bz = 0$, $ay + bt = 0$, $cx + dz = 0$, $cy + dt = 0$ olur. Buradan $ax = -bz$ olduğundan $x = \frac{-bz}{a}$ olur. $ay = -bt$ olduğundan $y = \frac{-bt}{a}$ olur. $c(\frac{-bt}{a}) + dt = 0$ dan $\frac{-bct}{a} + dt = 0$ olur. $-bct + adt = 0$ dan $t(ad - bc) = 0$ ve $t = 0$ ise $y = 0$ olur. $c(\frac{-bz}{a}) + dz = 0$ dan $-cbz + adz = 0$ ve $z(ad - bc) = 0$ ve buradan $z = 0$ ise $a = 0$ olur. $r(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan R, bir Baer halkadır [8]. Fakat $R[x]$, bir Baer halka değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ ın sol sıfırlayanı bir kare-eş eleman ile üretilmemiştir;

yani $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise buradan $\begin{pmatrix} 2a+bx & 0 \\ 2c+dx & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise $2a+bx=0$ ve buradan $x = \frac{-2a}{b}$ olur ve $2c+dx=0$ ve buradan $x = \frac{-2c}{d}$ olur. O halde $\frac{-2a}{b} = \frac{-2c}{d}$ ise $ad = bc$ olur. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & ad+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olduğundan $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ ın sol sıfırlayanı bir kare-eş ile üretilmediğinden $R[x]$ Baer halka değildir [9]. $R[x]$'in merkezi bir Baer halkadır. Böylece merkezi Baer halka olan halkaların kendisinin Baer olması gerekmemektedir.

Bu örnek indirgenmiş halkalar için geçerli değildir. Buradan eğer R indirgenmiş ve merkezi bir Baer halka ise bu durumda R nin bir Baer halka olduğu düşünülebilir. Fakat bu her zaman sağlanmaz ve buna karşıt bir örnek verelim:

K, bir cisim X,Y,Z değişkenler olsun ve $XY = XZ = ZX = YX = 0$ ve $YZ \neq ZY$ olmak üzere $R = [X,Y,Z]$ alalım. Bu durumda R, merkezi $K[x]$ olacak şekilde bir indirgenmiş halka ve $K[x]$ bir Baer halkadır. $r(Y) = RX = K[x]X$ ve buradan $r(Y)$, sıfırdan farklı bir kare-eş eleman içermez. R'nin her seçilen $a_1, a_2, ..., a_n$ elemanları için $p(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ olacak şekilde R'nin merkezinin katsayıları ile değişkenleri değişmeli olmayan bir $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomu varsa R'ye polinom özdeşlik özelliğini sağlayan bir halka denir. Birimli bir indirgenmiş halka seçtiğimizden katsayılar R'nin merkezindedir [10].

Teorem 2.1.7 *R, polinom özdeşlik (polynomial identity) özelliğini sağlayan bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda R'nin her sıfırdan farklı sol (sağ) ideali R'nin sıfırdan farklı iki yanlı idealini içerir.*

İspat. I, R'nin sıfırdan farklı bir sol ideali olsun ve $0 \neq a \in I$ seçelim. Buradan Ra, $b \neq 0$ olacak şekilde $Rb \subseteq I$ sol idealler içinde minimal dereceli çok değişkenli

$p(x_1,x_2,...,x_k)$ lineer birimlisi olsun. p_2 içindeki artan tekilleri x_1 ile bitmeyecek şekilde $p(x_1,x_2,...,x_k) = p_1(x_2,...,x_k)x_1 + p_2(x_1,x_2,...,x_k)$ olarak yazılır . $a^2 \neq 0$ olduğundan Ra^2 içinde $u_2a^2,...,u_ka^2$, $d = p_1(u_2a^2,...,u_ka^2) \neq 0$ olacak şekilde vardır. Her $r \in R$ için $x_1 = ra$ olsun. $s \in R$ için $0 = p(ra,u_2a^2,...,u_ka^2) = dra + sa^2$ dir. Buradan $dr + sa \in r(a)$ olur. Böylece $dR \subseteq Ra + r(a)$ ve buradan $adR \subseteq aRa \subseteq I$ olur. Ayrıca $d \in Ra^2$ olduğundan $adR \neq 0$ dır ve $Ra^2 \cap r(a^2) = 0$ dır. Böylece $R(ad)R$, I içinde R'nin sıfırdan farklı bir ideali olur. $\square$

Teorem 2.1.7'nin bir sonucu, biz eğer birimli bir polinom olacak şekilde bir indirgenmiş halkanın sıfırdan farklı bir I idealine sahip isek bu durumda tüm iki yanlı idealler I içindedir. Bir $I_0 \subseteq I$ en büyük iki yanlı ideali elde edilir ve I_0, I içinde esastır (essentialdır). İndirgenmiş halkanın tekil(singüler) ideali sıfır olduğundan [11], $r(I_0) = r(I)$ dır.

Teorem 2.1.8 *R R, polinom özdeşlik (polynomial identity) özelliğini sağlayan bir indirgenmiş halka olsun. O zaman R'nin merkezi bir Baer halka ise R de bir Baer halkadır.*

İspat. A,R'nin merkezi, $\emptyset \neq T \subseteq R$ ve $I = \sum_{t \in T} Rt$ olsun. Bu durumda $r_R(T) = r_R(I) = r(I_0)$ olur. $B = I_0 \cap A$ olsun. A, Baer olduğundan $e \in A$ kare-eş elemanı için $r_A(B) = Ae$ dir. Şimdi $Re = r_R(T)$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $t \in T$ için $et \neq 0$ ise bu durumda $Ret \subseteq I$ olur. Buradan eğer $0 \neq W$, Ret içinde R'nin bir idealini içerirse bu durumda $W \subseteq I_0$ olur. [12] ile $W \cap A \neq 0$ dır ve böylece eğer $0 \neq w \in W \cap A$ ise bu durumda $w = xet$ ve $w \in B$ olmasından $w^2 = 0$ buradan da $w = 0$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece $Re \subseteq r_R(T)$ olur. Eğer $0 \neq y \in r_R(T)$ ise bu durumda Ry, R'nin sıfırdan farklı bir U idealini içerir. Böylece [12]'den $U \cap A \neq 0$ olur. Buradan $0 \neq xy \in A \cap r_R(T) = r_A(B)$ dir. O halde $xy = xye$ olur. Böylece Re, $r_R(T)$ içinde esastır. $r_R(T) = Re \bigoplus [r_R(T) \cap R(1-e)]$ olduğundan $Re = r_R(T)$ olur. O halde R bir Baer halkadır. $\square$

2.2. Armendariz Halkalar

Özellik 2.2.1 R bir değişmeli halka ve M bir R-modül olsun. $a,b \in R,\ m,n \in M$ olmak üzere $(a,m)(b,n) = (ab, an+bm)$ çarpma işlemi altında $R \bigoplus M$ bir R-modül olur. Bu R modülü halka olarak $R(+)M$ ile göstereceğiz. Eğer M sıfırdan farklıysa, bu halka $0 \bigoplus M$ ideali kare sıfır olacak şekilde M ile özdeşleşirse indirgenmiş değildir.

Özellik 2.2.2 R bir değişmeli halka ve $h : R \longrightarrow R$ bir halka homomorfizması ve M, bir R-modül olsun. $(a,m)(b,n) = (ab, h(a)n+bm)$ yi Özellik 2.2.1 ile yeniden yapılandırırsak $R \bigoplus M$ üzerinde $R(+)_h M$ ile gösterilen değişmeli olmayan halka yapısını elde ederiz.

Özellik 2.2.3 R bir halka ve A, R'nin bir ideali olsun. $\overline{R} = R/A$ bölüm halkası için sol-R, sağ-R, bimodülüdür. Her $a \in R$ için $\overline{a} = a + A \in \overline{R}$ ile gösterilsin. Biz $R \bigoplus (R/A)$ üzerine kurulan bir halka tanımını kurmak için $(r,\overline{a})(r',\overline{a}') = (rr', \overline{ra' + ar'})$ yi kullanacağız. Bu halka $R(+)R/A$ ile gösterilir ve özellikleri $R(+)M$ nin özellikleri ile benzerdir.

Armendariz halkaların althalkalarının da Armendariz olduğu kolayca görülebilir. Buna rağmen bölüm halkalarının böyle olmasına gerek yoktur. Eğer $\{R_i\}_{i \in I}$ Armendariz ise buradan $\prod R_i$ de Armendariz. (Uyarı 2.2.16)

Armendariz özelliğini sağlayan indirgenmiş olmayan halkaların bilinen örnekleri ile başlayalım.

Örnek 2.2.4 Her n tamsayısı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bir Armendariz halkadır, karesi kendisine eşit olmayan n doğal sayısı için indirgenmiş değildir.

İspat. Öncelikle p, bir asal sayı olmak üzere $n = p^m$ durumunu inceleyelim. $f(x), g(x) (mod\, p^m \mathbb{Z}[x])$ in yan kümelerini sırasıyla $\overline{f(x)}$, $\overline{g(x)}$ ile gösterelim.

$\overline{f(x)g(x)} = 0$ olsun. Yani $p^m | f(x)g(x)$ olsun. p, bir asal sayı olduğundan bazı f' ve g' için $f(x) = p^r f'(x)$ ve $g(x) = p^s g'(x)$ olarak yazılabilir. Bu f''nün(g'nün) katsayıları p ile bölünemez olacak şekilde sağlanır. Açıkça $r+s \geq m$ dir. Bu ise her i ve j için $\overline{a_i}\overline{b_j}$=0 olmasını gerektirir. Böylece $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ Armendariz olur.

n, bir doğal sayı olsun. Bu durumda p_k lar asal sayı olmak üzere $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_i^{e_i}$ dir. Teorem 1.1.27'ye göre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z} \bigoplus ... \bigoplus \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$ dir. Her bir $\mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z}$ Armendariz olduğundan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de Armendarizdir. □

Önerme 2.2.4'ün genelleştirilmesi olan aşağıdaki teoremin ispatı da benzer şekilde yapılır:

Teorem 2.2.5 *R, bir değişmeli temel ideal bölgesi ve A, R'nin bir ideali ise bu durumda R/A Armendarizdir.*

Teorem 2.2.6 *R bir domain, A, R'nin bir ideali ve R/A Armendariz olsun. Bu durumda $R(+)R/A$ Armendarizdir.*

İspat. $f(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i, \overline{u_i}) x^i = (f_0(x), \overline{f_1(x)})$ ve $g(x) = \sum_{i=0}^{n} (b_j, \overline{v_j}) x^j = (g_0(x), \overline{g_1(x)})$ olmak üzere $f(x)$, $g(x)$ $\{R(+)R/A\}[x]$'in elemanları olsun. Eğer $f(x)g(x) = 0$ ise, o zaman $(f_0(x), \overline{f_1(x)})(g_0(x), \overline{g_1(x)}) = 0$ olur. Buradan aşağıdaki denklik durumu vardır:

(1) $f_0(x)g_0(x) = 0$

(2) $\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x) + g_0(x)} = 0$

Durum1 $f_0(x) = 0$ olsun. Bu durumda (2) den R/A üzerinde $\overline{f_1(x)g_0(x)} = 0$ olur. R/A Armendariz olduğundan her i ve j için $\overline{u_i b_j} = 0$ olur. $f_0(x) = 0$ durumunda her i için $a_i = 0$ olur. Böylece her i ve j için $(a_i, \overline{u_i})(b_j, \overline{v_j}) = (a_i b_j, \overline{a_i v_j + u_i b_j}) = (0,0)$ olur.

Durum2 $g_0(x) = 0$ olsun. Durum1 dekine benzer işlem yapılır. □

Yukarıdaki teoremin özel bir durumu için aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 2.2.7 $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, *her n tamsayısı için Armendarizdir.*

Teorem 2.2.6 dan eğer R domain ise o zaman $R(+)R$ Armendarizdir. Bu sonucu indirgenmiş halkalara da genişletebiliriz. Bu halkalar için aşağıdaki özellikler kullanılacaktır:

i) Eğer a,b indirgenmiş bir halkanın elemanları ise bu durumda $ab=0$ dır ancak ve ancak $ba=0$ dır.

ii) İndirgenmiş halkalar Armendarizdir. (Lemma 2.1.1)

iii) Eğer R indirgenmiş ise o zaman $R[x]$ halkası da indirgenmiştir.

Biz $\{R(+)R\}[x]$ ile $R[x](+)R[x]$ halkasını özdeşleştireceğiz.

Önerme 2.2.8 *R bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $R(+)R$ halkası Armendarizdir.*

İspat. $f(x)g(x)=0$ olacak şekilde $f(x)=(f_0(x),f_1(x))$, $g(x)=(g_0(x),g_1(x))$, $\{R(+)R\}[x]$ in elemanları olsun. ($k=0,1$ için) $f_k(x)$, $g_k(x)$ için karşılıklı temsiller ile $f(x)=\sum_{i=0}^{m}(a_i,u_i)x^i$ ve $g(x)=\sum_{j=0}^{n}(b_j,v_j)x^j$ yazılır. Buradan

(A) $f_0(x)g_0(x)=0$

(B) $f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x)=0$

dır. $R[x]$ indirgenmiş olduğundan (A) dan dolayı

(C) $g_0(x)f_0(x)=0$

vardır. (B) eşitliği $g_0(x)$ ile soldan çarpılır ve (C) eşitliği de kullanılırsa $g_0(x)f_1(x)g_0(x)=0$ elde edilir. Bu durumda bu eşitlik soldan $f_1(x)$ ile çarpılırsa $f_1(x)g_0(x)f_1(x)g_0(x)=(f_1(x)g_0(x))^2=0$ olur ve $R[x]$ indirgenmiş olduğundan

(D) $(f_1(x)g_0(x))=0$

dır. (B) den dolayı

(E) $(f_0(x)g_1(x))=0$

olur. Şimdi (A), (D), (E) den R, Armendariz olduğundan her i ve j için $a_ib_j=0$, $a_iv_j=0$, $u_ib_j=0$ olur. Her i ve j için $(a_i,u_i)(b_j,v_j)=(a_ib_j,a_iv_j+u_ib_j)=(0,0)$ elde edilir. O halde $R(+)R$ halkası Armendarizdir. □

Önerme 2.2.8 in genellemesi olan aşağıdaki önerme için de benzer ispat yapılır.

Önerme 2.2.9 *R ve R/A indirgenmiş halkalar olacak şekilde A, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda $R(+)R/A$ Armendarizdir.*

Eğer R deki her a elemanı için $a = a^2b$ olacak şekilde R de bir b elemanı varsa bu halkaya *kuvvetli regular halka* denir [13].

Önerme 2.2.10 *A kuvvetli regüler halkadır ancak ve ancak A von Neumann regular ve indirgenmiştir.*

İspat. ($\Longrightarrow$): R kuvvetli regular halka olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $a = a^2b$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. $(a - aba)^2 = 0$ dır. Kuvvetli regüler halka sıfır bölensiz olduğundan $a - aba = 0$ ve böylece $a = aba$ elde edilir. Bu ise R'nin von Neumann regular olması demektir. Her $a \in R$ için $a = a^2b$ olsun. Bu durumda $a^2 = 0$ ise $a = a^2b = 0b = 0$ olur. Yani R indirgenmiştir.
($\Longleftarrow$): R von Neumann regular ve indirgenmiş halka olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $a = aba$ dır. $(a - a^2b)^2 = 0$ dır. Buradan R indirgenmiş olduğundan $a - a^2b = 0$ olur. Böylece $a = a^2b$ elde edilir. O halde R, kuvvetli regular halka olur. $\square$

Önerme 2.2.11 *Eğer R, bir kuvvetli regular halka ise bu durumda R'nin her A ideali için R/A kuvvetli regular ve indirgenmiştir.*

İspat. Eğer R bir kuvvetli regular halka ise her $a \in R$ için $a = a^2b$ dir. $\overline{a} \in R/A$ ve $\overline{b} \in R/A$ olsun. $\overline{a} = \overline{a}^2\overline{b}$ olduğundan $\bar{a} = a + A = a^2b + A$ dır. Buradan $\bar{a} = a + A = (a^2 + A)(b + A) = (a + A)^2(b + A) = \bar{a}^2\bar{b}$ elde edilir. Yani R/A kuvvetli regular olur.

R kuvvetli regular halka ve $\overline{a}^2 = 0$ yani $(a + A)(a + A) = A$ olsun. $(a^2 + A)(b + A) = (0 + A)(b + A)$ ise $a^2b + A = A$ olur ve $a + A = A$ ise $a \in A$ yani $\bar{a} = 0$ elde edilir. Bu ise R/A nın indirgenmiş olması demektir. $\square$

Önerme 2.2.9'a başvurulduğunda aşağıdaki sonuc elde edilir. Eğer R, bir kuvvetli regular halka ise bu durumda R'nin her A ideali için $R(+)R/A$ halkası Armendarizdir.

Önerme 2.2.12 *K, bir cisim, $h : K \longrightarrow K$ bir cisim monomorfizması ve V, bir K-vektör uzayı olsun. Bu durumda $K(+)_hV$ Armendarizdir.*

İspat. $h : K[x] \longrightarrow K[x]$ bir doğal halka homomorfizmasıdır. $K[x]$ üzerinde torsion free $V[x]$ polinom modülü vardır. $K(+)_hV[x]$ i $K[x](+)_hV[x]$ ile özdeşleyelim. (bakınız Özellik 2.2.2). Şimdi $f(x), g(x) \in K(+)_hV[x]$ olsun ve $f(x)g(x) = 0$ sağlansın. $f_0(x), g_0(x) \in K[x]$ ve $f_1(x), g_1(x) \in V[x]$ olmak $f(x) = (f_0(x), f_1(x))$, $g(x) = (g_0(x), g_1(x))$ olacak şekilde yazılır. Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ olduğundan $(f_0(x), f_1(x))(g_0(x), g_1(x)) = 0$ olur. Buna göre $(f_0(x)g_0(x), h(f_0(x))g_1(x) + g_0(x)f_1(x)) = 0$ olur. Buradan $f_0(x)g_0(x) = 0$ ve $h(f_0(x))g_1(x) + g_0(x)f_1(x) = 0$ olur. $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$ olduğunda durum aşikardır. O halde ispatın geri kalan kısmında iki durumu ele alacağız.
Durum1 $f_0(x) = 0$ fakat $g_1(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $h(f_0(x)) = 0$ ise $g_0(x)f_1(x) = 0$ dır ve bu da $V[X]$in, $K[x]$-torsion free olmasından $g_0(x) = 0$ ı verir.
Durum2 $g_0(x) = 0$ fakat $g_1(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $h(f_0(x))g_1(x) = 0$ olur. Bu da Durum1 dekine benzer bir ispatla $h(f_0(x)) = 0$ olmasını gerektirir. h, birebir bir dönüşüm olduğundan $f_0(x) = 0$ olur. Böylece $f(x)$, $g(x)$ in diğer durumları için $f(x) = (0, f_1(x))$ ve $g(x) = (0, g_1(x))$ olmalıdır.

Böylece $K(+)_hV$ Armendariz olur. □

Sonuç 2.2.13 *K, bir cisim ve V, bir K-vektör uzayı ise bu durumda $K(+)V$, eğer $V \neq 0$ ise indirgenmiş olmayan bir değişmeli Armendariz halkadır.*

İspat. h, Önerme 2.2.12 deki gibi birim dönüşüm olsun. O halde $K(+)V$ 'nin de Armendariz olduğu sağlanmış olur. □

Şimdi Armendariz olmayan halkalara birkaç örnek vereceğiz.

Örnek 2.2.14 Birimli bir halka üzerinde $der \geq 2$ olan tüm matris halkaları Armendariz değildir. $f(x) = E_{12}x + E_{11}$, $g(x) = E_{11}x - E_{21}$ polinomlarını düşünelim. Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ elde edilirken $E_{11}E_{11} \neq 0$ olduğundan matris halkası Armendariz değildir.

Örnek 2.2.15 Değişmeli halkalar Armendariz olmak zorunda değildir. $\{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$ halkası üzerinde $f(x) = (\overline{4},\overline{0}) + (\overline{4},\overline{1})x$ polinomunu düşünelim. Bu polinomun karesi $f(x)f(x) = 0$ olmasına rağmen $(\overline{4},\overline{0})(\overline{4},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{4}) \neq (0,0)$ olduğundan Armendariz değildir.

Uyarı 2.2.16 Örnek *2.2.15* içindeki halkayı düşünürsek bu halka bir Armendariz halkanın bir bölüm halkasıdır. Yani $\mathbb{Z}$ üzerinde çok değişkenli polinomlar halkasını düşünelim. $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ nin bir bölüm halkası da Sonuç *2.2.7* den Armendariz olur. Böylece Armendariz halkaların bölüm halkalarının Armendariz olmasına gerek yoktur.

Önerme 2.2.17 *R bir Armendariz halka olsun. f_i'nin katsayıları a_i ve $f_1, f_2, ..., f_n \in R[x]$ olmak üzere eğer $f_1 f_2 ... f_n = 0$ ise bu durumda $a_1 a_2 ... a_n = 0$ dır.*

İspat. $f_1 f_2 ... f_n = 0$ ve a_i ler f_i'lerin katsayıları olsun. $f_1(f_2...f_n) = 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan $f_2 f_3 ... f_n$ nin herbir b katsayısı için $a_1 b = 0$ olur. Böylece $af_2 f_3 ... f_n = 0$ olur. Buradan $(af_2)(f_3...f_n) = 0$ olur. $a_1 a_2$, $a_1 f_2$'nın bir katsayısı olduğundan $f_3...f_n$'nin her c katsayısı için $(a_1 a_2)c = 0$ olur. Böylece $a_1 a_2 f_3 ... f_n = 0$ bulunur. Aynı yolla $a_1 a_2 ... a_n = 0$ olduğu görülür. □

Teorem 2.2.18 *Bir R halkası Armendarizdir ancak ve ancak $R[x]$ Armendarizdir.*

İspat. $(\Longleftarrow)$: Armendariz halkanın alt halkası da Armendarizdir.
$(\Longrightarrow)$: R Armendariz ve $fg = 0$ olacak şekilde $f(T)$, $g(T) \in R[x][T]$ olsun.

$f_i, \ g_j \in R[x]$ olmak üzere $f(T) = f_0 + f_1 T + ... + f_n T^n$ ve $g(T) = g_0 + g_1 T + ... + g_m T^m$ olsun. $f_i g_j = 0$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Buradaki derece, x deki polinomların derecesi m ve sıfır polinomunun derecesi 0 olmak üzere $k = deg f_0 + deg f_1 + ... + deg f_n + deg g_0 + deg g_1 + ... + deg g_m$ olsun. Buradan $f(x^k) = f_0 + f_1 x^k + ... + f_n x^{kn}, \ g(x^k) = g_0 + g_1 x^k + ... + g_m x^{km} \in R[x]$ ve f_i lerin (g_i lerin) katsayılarının kümesi $f(x^k)$ nın ($g(x^k)$nın) katsayılarının kümesine denktir. $f(T)g(T) = 0$ ve x, R'nin elemanları olacak şekilde değiştirirsek $f(x^k)g(x^k) = 0$ olur. R, Armendariz olduğundan f_i'nin herbir katsayısı g_j'nin herbir katsayısının sıfırlayanlarıdır. Böylece $f_i g_j = 0$ olur. □

Sonuç 2.2.19 *R, bir Armendariz halka ve $\{x_\alpha\}$, R üzerinde herhangi bir küme olsun. Bu durumda $R[\{x_\alpha\}]$'nın herhangi bir althalkası da Armendarizdir.*

İspat. $fg = 0$ olacak şekilde $f, g \in R[\{x_\alpha\}][T]$ olsun. Bu durumda $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n}\} \subseteq \{x_\alpha\}$ sonlu altkümesi için $f, g \in R[\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n}\}][T]$ dir. $R[\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n}\}]$ halkası tümevarım ile Armendarizdir. Böylece f'nin her a_i ve g'nin her b_j katsayıları için $a_i b_j = 0$ dır. Buradan $R[\{x_\alpha\}]$ halkası da Armendariz ve böylece $R[x_\alpha]$'nın bir althalkası da Armendarizdir. □

Önerme 2.2.17 ve Sonuç 2.2.19'u birleştirerek Armendariz halkaların diğer bir karakterizasyonunu aşağıdaki teorem ile verebiliriz:

Teorem 2.2.20 *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(1) R Armendarizdir.

(2) $\{x_\alpha\}$, R üzerinde herhangi bir küme ve $f_1 f_2 ... f_n = 0$ olacak şekilde $f_1, f_2 ... f_n \in R[x_\alpha]$ olsun. Eğer a_i ler , f_i'nin katsayıları ise bu durumda $a_1 a_2 ... a_n = 0$ dır.

İspat. (2) $\Longrightarrow$ (1): Açıktır.

(1) $\Longrightarrow$ (2): $m > 1$ olacak şekilde $f_1, f_2 ... f_n \in R[x_1, ..., x_m]$ ve a_i, f_i'nin bir katsayısı olsun. Her bir f_i, x_m içinde bir polinom olarak yazılır. Böylece $f_i =$

$\sum f_{ij}x_m^j \in R[x_1,...,x_{m-1}][x_m]$ olur $R[x_1,...,x_{m-1}]$ Önerme 2.2.17'den Armendariz olduğundan, seçilen herbir $j_1, j_2, ..., j_n$ için $f_{1_{j_1}}, ..., f_{n_{j_n}} = 0$ dır. Herbir a_i, herbir f_{ij} için bir katsayı olduğundan m üzerindeki tümevarım ile $a_1a_2...a_n = 0$ olur. □

Bir sonraki teorem Armendariz halkalar için güzel örnekler verir.

Teorem 2.2.21 *R bir halka ve $n \geq 2$ bir doğal sayı olsun. Bu durumda $R[x]/(x^n)$ Armendarizdir ancak ve ancak R indirgenmiştir.*

İspat. $(\Longrightarrow)$: $R[x]/(x^n)$ Armendariz olsun. $r^n = 0$ olacak şekilde $r \in R$ olsun. r ile $\widehat{x}$ yer değiştirilirse, T herhangi bir değişken olmak üzere $0 = r^n - \widehat{x}^nT^n = (r - \widehat{x}T)(r^{n-1} + r^{n-2}\widehat{x}T + ... + \widehat{x}^{n-1}T^{n-1})$ olur. $R[x]/(x^n)$ Armendariz olduğundan $r\widehat{x}^{n-1} = 0$ ve buradan $r = 0$ olur ve böylece R indirgenmiştir.

$(\Longleftarrow)$: R indirgenmiş olsun. $R[x]/(x^n)$ deki $\widehat{x}$ yı u ile gösterelim. Böylece u yu R'nin elemanları ile değiştirirsek $R[x]/(x^n) = R[u] = R + Ru + ... + Ru^{n-1}$ ve u^n=0 olur. $fg = 0$ olacak şekilde $f, g \in R[u][T]$ olsun. $f_i, g_i \in R[T]$ olmak üzere $f = f_0 + f_1u + ... + f_{n-1}u^{n-1}$ ve $g = g_0 + g_1u + ... + g_{n-1}u^{n-1}$ olarak yazabiliriz. Şimdi $i + j \geq n$ olmak üzere f_iu^i ve g_ju^j için f_iu_i nin katsayıları $u^{i+j} = 0$ olduğundan g_ju^j nin katsayılarının sıfırlayanıdır. $i + j < n$ olduğunda $f_ig_j = 0$ olduğunu göstermeliyiz ve buradan R indirgenmiş olduğundan Armendariz olur. f_i'nin katsayıları g_j'nin katsayılarının sıfırlayanlarıdır. Böylece f'nin katsayıları g'nin katsayılarının sıfırlayanlarıdır.

Şimdi $0 = fg = (f_0 + f_1u + ... + f_{n-1}u^{n-1})(g_0 + g_1u + ... + g_{n-1}u^{n-1})$
$=f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)u + (f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0)u^2 + ... + (f_0g_{n-1} + ... + f_{n-1}g_0)u^{n-1}$
olur. Buradan

$$0 = f_0g_0 = f_0g_1 + f_1g_0 = f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0 = ... = f_0g_{n-1} + ... + f_{n-1}g_0$$

olur. Lemma 2.1.1 in ispatı ile eğer $i + j < n$ ise $f_ig_j = 0$ olur. □

2.3. Armendariz ve İndirgenmiş Halkalar Arasındaki İlişkiler

Örnek 2.3.1 R bir halka olsun. $n \geq 2$ olmak üzere R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkaları Armendariz değildir.

İspat. R üzerindeki 2×2 tipindeki üst üçgensel matris halkalarının Armendariz olmadığını göstermemiz yeterli olacaktır. Çünkü bir Armendariz halkanın althalkası da Armenndariz dir.

S, R üzerinde 2×2 tipinde üst üçgensel matris halkası ve $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ ve $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$, $S[x]$ içinde polinomlar olsun. Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ dır. Fakat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan S, Armendariz değildir ve sonuç olarak R üzerindeki her $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası Armendariz değildir. $\square$

Buna karşılık 3×3 tipindeki üst üçgensel matris halkalarının althalkalarının Armendariz olduğunu gösterebiliriz:

Önerme 2.3.2 *R bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda* $S = \{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} a, b, c, d \in R \}$ *bir Armendariz halkadır.*

İspat. Önerme 2.2.8'in ispatındaki metodu kullanacağız. İlk olarak $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$ için bunların toplamını ve çarpımını sırasıyla $(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, \; b_1 + b_2, \; c_1 + c_2, \; d_1 + d_2)$ ve $(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2, \; a_1 b_2 + b_1 a_2, \; a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2, \; a_1 d_2 + d_1 a_2)$ ile gösterebiliriz. Böylece $S[x]$ deki her polinomun $R[x]$ deki bazı $p_i(x)$ ler için $(p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ formunda olduğu açıktır. $S[x]$'in elemanları $f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ ve $g(x) = (g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ olsun. $f(x)g(x) = 0$ oldduğunu kabul edelim. Bu durumda

$f(x)g(x) = (f_0(x)g_0(x),\ \ f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x),\ \ f_0(x)g_2(x) + f_1(x)g_3(x) + f_2(x)g_0(x),\ \ f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x)) = 0$ olur. Buradan

(0) $f_0(x)g_0(x) = 0$

(1) $f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x) = 0$

(2) $f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x) = 0$

(3) $f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x) = 0$

eşitlikleri yazılır. Şimdi $R[x]$'in indirgenmiş olduğunu kullanacağız. (0) dan $g_0(x)f_0(x) = 0$ dır. (1) eşitliğinde her iki tarafı sağdan $f_0(x)$ ile çarparsak bu durumda $f_0(x)g_1(x)f_0(x) + f_1(x)g_0(x)f_0(x) = 0$ elde edilir. $g_0(x)f_0(x) = 0$ olduğundan $f_0(x)g_1(x)f_0(x) = 0$ olur. Bu eşitliği sağdan $g_1(x)$ ile çarparsak $f_0(x)g_1(x)f_0(x)g_1(x) = (f_0(x)g_1(x))^2 = 0$ olur. $R[x]$ indirgenmiş olduğundan $f_0(x)g_1(x) = 0$ olur ve (1) eşitliğinden $f_1(x)g_0(x) = 0$ elde edilir. Eğer (3) eşitliğinin sağ tarafını $f_0(x)$ ile çarparsak bu durumda $f_0(x)g_3(x)f_0(x) + f_3(x)g_0(x)f_0(x) = 0$ olur. Böylece aynı yöntemle $f_0(x)g_3(x) = 0$ ve buradan (3) eşitliğinden $f_3(x)g_0(x) = 0$ elde edilir. Şimdi (2) eşitliğinde her iki tarafı sağdan $f_0(x)$ ile çarparsak $f_0(x)g_2(x)f_0(x) + f_1(x)g_3(x)f_0(x) + f_2(x)g_0(x)f_0(x) = 0$ olur. Böylece $f_0(x)g_2(x) = 0$ olur ve (2) eşitliğinden

$(3')$ $f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x) = 0$

elde edilir. Eğer $(3')$ eşitliğini sağdan $f_1(x)$ ile çarparsak bu durumda $f_1(x)g_3(x) = 0$ elde edilir ve buradan $f_2(x)g_0(x) = 0$ olur. Şimdi $f_0(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, $f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $f_3(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$, $g_0(x) = \sum_{j=0}^{m} a'_j x^j$, $g_1(x) = \sum_{j=0}^{m} b'_j x^j$, $g_2(x) = \sum_{j=0}^{m} c'_j x^j$, $g_3(x) = \sum_{j=0}^{m} d'_j x^j$, olmak üzere $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ 0 & a'_j & d'_j \\ 0 & 0 & a'_j \end{pmatrix} x^j$ olsun. Bu durumda her i, j için $a_i a'_j = 0$, $a_i b'_j = 0$, $b_i a'_j = 0$, $a_i c'_j = 0$, $b_i d'_j = 0$, $c_i a'_j = 0$, $a_i d'_j = 0$, $d_i a'_j = 0$ bulunur. Bu durumda R indirgenmiş olur.

Lemma 2.1.1 ile indirgenmiş halkalar Armendarizdir. Sonuç olarak her i, j için $\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ 0 & a'_j & d'_j \\ 0 & 0 & a'_j \end{pmatrix} = 0$ olur. Böylece S bir Armendariz halkadır. □

S, bir indirgenmiş halka olsun ve

$$R_n = \{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & . & . & . & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a \end{pmatrix} : a, a_{ij} \in S\}$$

olsun. Önerme 2.3.2 yi baz alırsak $n \geq 4$ için R_n nin de bir Armendariz halka olabileceği düşünülebilir. Fakat aşağıdaki örnekte bunun olmadığını göstereceğiz.

Örnek 2.3.3 S bir halka ve $R_4 = \{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, a_{ij} \in S\}$ olsun.

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \text{ ve}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$ $R_4[x]$ içinde polinomlar olsun.

Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ olur fakat $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olur.

O halde R_4, Armendariz değildir.

Benzer şekilde $n \geq 5$ için de aynı sonuç vardır.

R halkası ve $_RM_R$ bimodülü verilsin. M ile R'nin aşikar genişlemesi bilinen toplama $(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, \ \ m_1 + m_2)$ ve çarpma $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, \ \ r_1 m_2 + m_1 r_2)$ işlemi ile $T(R, M) = R \bigoplus M$ halkası ile tanımlansın. Bu

$r \in R$, $m \in M$ olmak üzere bilinen matris işlemleri ile tüm $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ matrislerinin halkasına izomorftur.

Sonuç 2.3.4 *R bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $T(R,R)$ aşikar genişlemesi bir Armendariz halkadır.*

İspat. $T(R,R)$, $U = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in R\}$ ye izomorftur ve Armendariz halkanın her althalkası da Armendarizdir. Böylece $T(R,R)$, Önerme 2.3.2 den bir Armendariz halkadır. □

Örnek 2.3.5 T bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in T\}$, Sonuç *2.3.4* ten bir Armendariz halkadır. $S = \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} : A,B \in R\}$ olsun ve

$$f(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} x \text{ ve}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} x,$$

$S[x]$ içinde polinomlar olsun. Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ olur fakat

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

dır. O halde S Armendariz değildir.

Teorem 2.2.18 gereğince Armendariz halkalar üzerindeki polinom halkaları da Armendarizdir.

Örnek 2.3.6 $\mathbb{Z}_2$, mod2 ye göre tamsayılar halkası ve bilinen toplama ve çarpmaya göre $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$ halkasını düşünelim. $R = \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$ olsun. Bu durumda R, bir değişmeli indirgenmiş halkadır. Böylece R Armendarizdir (Lemma 2.1.1). Şimdi $\alpha((a,b)) = (b,a)$ olacak şekilde $\alpha : R \longrightarrow R$ tanımlansın. Bu durumda α, R'nin bir otomorfizmasıdır.

İDDİA: $R[x,\alpha]$, Armendariz değildir.

$f(y) = (1,0) + [(1,0)x]y$ *ve* $g(y) = (0,1) + [(1,0)x]y$, $R[x,\alpha][y]$ de elemanlar olsun. Bu durumda

$f(y)g(y) = (1,0)(0,1) + (1,0)[(1,0)x]y + (0,1)[(1,0)x]y + [(1,0)x]y[(1,0)x]y$

$= (0,1) + [(1,0)x]y((1,0) + (0,1)) + ([(1,0)x]y)^2$

$= (0,1) + [(1,0)x]y(1,1) + (\alpha((1,0))y)^2$

$= (0,1) + \alpha((1,0))y(1,1) + ((0,1)y)^2$

$= (0,1) + (0,1)y(1,1) + (0,1)y(0,1)y$

$= (0,1) + \alpha((0,1))(1,1) + \alpha((0,1))\alpha((0,1))$

$= (0,1) + (1,0)(1,1) + (1,0)(1,0)$

$= (0,1) + (1,1) + (1,0) = (2,2) = (0,0)$

olur. Fakat $(1,0)[(1,0)x] \neq 0$ olduğundan $R[x,\alpha]$ Armendariz halka değildir.

Lemma 2.3.7 *R, bir Armendariz halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır:*

(1) $a,b,c \in R$ ve bazı $n \geq 1$ tamsayısı için eğer $ab = 0$ ve $ac^nb = 0$ ise bu durumda $acb = 0$ olur.

(2) $a,b,c \in R$ ve bazı $n \geq 1$ tamsayısı için eğer $ab = 0$ ve c^n merkezde ise bu durumda $acb = 0$ olur.

İspat. (1): $f(x) = a(1-cx)$, $g(x) = (1+cx+\ldots+c^{n-1}x^{n-1})b \in R[x]$ olsun. Bu durumda $f(x)g(x) = (a-acx)(b+cxb+c^2x^2b+\ldots+c^{n-1}x^{n-1}b) = ab - ac^nbx^n = 0$ olur. $f(x)g(x) = 0$ ve R Armendariz olduğundan $acb = 0$ dır.

(2): $f(x) = a(1-cx) \in R[x]$, $g(x) = (1+cx+\ldots+c^{n-1}x^{n-1})b \in R[x]$ alınırsa $ab =$

0 ve c^n merkezde ise $f(x)g(x) = ab - ac^n bx^n = ab - abc^n x^n = 0$ olur. R Armendariz olduğundan $acb = 0$ olur. □

Sonuç 2.3.8 [5] *Armendariz halkalar abeliandır.*

İspat. R bir Armendariz halka olsun ve ($r \in R$ olacak şekilde) $e^2 = e \in R$ düşünürsek $a = e$, $b = 1-e$ ve $c = er(1-e)$ olsun. Bu durumda $ab = e(1-e) = e - e^2 = 0$ ve $c^2 = er(1-e)er(1-e) = 0$ olur. Buradan $ac^2b = 0$ olur. Bu durumda Lemma 2.3.7 den $acb = 0$ olur. Yani $eer(1-e)(1-e) = 0$ olur. $a_1 = 1-e, \quad b_1 = e$ ve $c_1 = (1-e)re$ olsun. Bu durumda aynı yöntemle $a_1c_1b_1 = 0$ olur. Yani $(1-e)(1-e)ree = 0$ olur. Buradan $(1-e)((1-e)re)e = e(er(1-e))(1-e)$ olur. Dolayısıyla R halkası abelian olur. □

Bir R halkası verilsin. R üzerindeki üstel serileri halkası $R[[x]]$ ile gösterilir.

Lemma 2.3.9 *R halkası abelian olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) $R[x]$'in her kare-eş elemanı R'dedir ve $R[x]$ abeliandır.

(2) $R[[x]]$'in her kare-eş elemanı R'dedir ve $R[[x]]$ abeliandır.

İspat. $R[x]$, $R[[x]]$'in bir althalkasıdır ve böylece (2)'nin ispatını yapmak yeterlidir. $f \in R[[x]]$ için $f = e_0 + e_1x + ... + e_nx^n + ...$ olmak üzere $f^2 = f$ olsun. Bu durumda

(0) $e_0^2 = e_0$

(1) $e_0e_1 + e_1e_0 = e_1$

(2) $e_0e_2 + e_1e_1 + e_2e_0 = e_2$

$\vdots$

(n) $e_0e_n + e_1e_{n-1} + ... + e_ne_0 = e_n$

$\vdots$

eşitlikler sistemi vardır. (0) eşitliğinden e_0 bir kare-eş elemandır. Böylece e_0 merkezdedir. Eğer (1) eşitliğini soldan e_0 ile çarparsak bu durumda $e_0e_0e_1 + e_0e_1e_0 = e_0e_1$ olur. e_0 merkezde olduğundan $e_0e_1e_0 = e_0e_0e_1 = e_0e_1$ dir. O halde $e_0e_1 = 0$ ve böylece $e_1 = 0$ olur. Buradan (2) eşitliğinden $e_0e_2 + e_2e_0 = e_2$ elde edilir. Eğer (2) eşitliğini soldan e_0 ile çarparsak bu durumda $e_0e_0e_2 + e_0e_2e_0 = e_0e_2$ yani $e_0e_2 + e_0e_2e_0 = e_0e_2$ olur. Fakat $e_0e_2e_0 = e_0e_2$ olduğundan $e_0e_2 = 0$ olur ve buradan $e_2 = 0$ dır. Şimdi her $1 \leq i \leq k$ için $e_i = 0$ olacak şekilde k nın bir pozitif tamsayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(k+1)$ eşitliği $e_0e_{k+1} + e_{k+1}e_0 = e_{k+1}$ i verir ve böylece aynı yöntemle $e_{k+1} = 0$ olur. Bu nedenle $f = e_0 \in R$ dir ve $R[[x]]$ abeliandır. $\square$

[8]'den abelian sağ p.p.-halkalar indirgenmiştir. Yani R bir abelian sağ p.p.-halka ve $r \in R$ için $r^2 = 0$ olsun. Bu durumda $r_R(r) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Buradan $r \in r_R(r)$ dir. Bu ise $r = er = re = 0$ demektir ve böylece R bir indirgenmiş halkadır. Benzer şekilde sol p.p.-halkalar için de gösterilir.

Böylece Teorem 2.1.4 ve Teorem 2.1.5 in yardımı ile aşağıdaki iki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 2.3.10 *R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda ;*
R bir p.p.-halkadır ancak ve ancak $R[x]$ bir p.p.-halkadır.

İspat. $(\Longrightarrow)$: R bir p.p.-halka ve $p = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m \in R[x]$ olsun. Her $i = 0, 1, ..., m$ için $r_R(a_i) = e_iR$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i \in R$ vardır. $e = e_0e_1...e_m$ olsun. Bu durumda Sonuç 2.3.8 den $e^2 = e$ ve $eR = \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$ olur. Böylece $pe = a_0e + a_1ex + ... + a_mex^m = 0$ olur ve buradan $eR[x] \subseteq r_{R[x]}(p)$ olur. $q = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in r_{R[x]}(p)$ olsun. $pq = 0$ ve R Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ için $a_ib_j = 0$ olur. Bu durumda her $j = 0, 1, ..., n$ için $b_j \in e_0e_1...e_mR = eR$ dir. Buradan $q \in eR[x]$ olur ve sonuç olarak $eR[x] = r_{R[x]}(p)$ dir ve böylece $R[x]$ bir p.p.-halkadır.
$(\Longleftarrow)$: $R[x]$ bir p.p.-halka ve $a \in R$ olsun. Lemma 2.3.9 dan $r_{R[x]}(a) = eR[x]$ olacak şekilde bir $e \in R$ kare-eş elemanı vardır. Buradan $r_R(a) = r_{R[x]}(a) \cap R = eR[x] \cap R = eR$ ve böylece R bir p.p.-halkadır. $\square$

Teorem 2.3.11 *R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda*
R bir Baer halkadır ancak ve ancak $R[x]$ bir Baer halkadır.

İspat. $(\Longrightarrow)$: R bir Baer halka ve A, $R[x]$'in bir boştan farklı altkümesi olsun. A^*, A'nın elemanlarının tüm katsayılarının kümesi olsun. Bu durumda A^*, R'nin bir boştan farklı altkümesidir ve böylece bazı $e \in R$ kare-eş elemanları için $r_R(A^*) = eR$ olur. $e \in r_{R[x]}(A)$ olduğundan $eR[x] \subseteq r_{R[x]}(A)$ olur. Şimdi $g = b_0 + b_1x + ... + b_tx^t \in r_{R[x]}(A)$ olsun. Bu durumda $Ag = 0$ ve buradan her $f \in A$ için fg=0 olur. Böylece R Armendariz olduğundan $b_0, b_1, ..., b_t \in r_R(A^*) = eR$ dir. Buradan $g = ec_0 + ec_1x + \ldots + ec_tx^t = e(c_0 + c_1x + \ldots + c_tx^t) \in eR[x]$ olacak şekilde $c_0, c_1, \ldots, c_t \in R$ vardır. Böylece $R[x]$ Baer halkadır.
$(\Longleftarrow)$: $R[x]$ bir Baer halka ve B, R'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Bu durumda Lemma 2.3.9 dan bazı $e \in R$ kare-eş elemanları için $r_{R[x]}(B) = eR[x]$ dir ve R bir Bear halkadır. $\square$

Şimdi üstel serili için benzer sonuçları vereceğiz.

Önerme 2.3.12 *R halkası bir abelian halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.*

(1) Eğer $R[[x]]$ bir p.p.-halka ise bu durumda R bir p.p.-halkadır.

(2) Eğer $R[[x]]$ bir Baer halka ise bu durumda R bir Baer halkadır.

İspat. Teorem 2.3.10 ve Teorem 2.3.11 in ispatındaki yöntem ile yapılır. $\square$

Sonuç 2.3.13 *R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır:*

(1) Eğer $R[[x]]$ bir p.p.-halka ise bu durumda R bir p.p.-halkadır.

(2) Eğer $R[[x]]$ bir Baer halka ise bu durumda R bir Baer halkadır.

İspat. Sonuç 2.3.8 ve Önerme 2.3.12 kullanılarak yapılır. $\square$

R bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $T(R,R)$ aşikar genişlemesi Sonuç 2.3.4 ten Armendarizdir. T'nin $P(T)$ asal radikali (halkanın asal ideallerinin kesişimi) $r \in R$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır. (Böylece Armendariz halkanın tanımına başvurursak bu asal radikal Armendarizdir) ve $T/P(T) \cong R$ indirgenmiştir (böylece Armendarizdir). Eğer bir R halkası $R/P(R)$ ve $P(R)$ Armendariz olacak şekilde abelian bir halka ise bu durumda $P(R)$, R'nin asal radikali olacak şekilde R bir Armendariz halkadır. □

Örnek 2.3.14 $\mathbb{Z}$ tamsayıların halkası ve $R = \{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a - b \equiv c \equiv 0(mod2)\}$ olsun. Bu durumda $P(R) = \{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : c \equiv 0(mod2)\}$ *o*lur ve bundan dolayı $P(R)$ Armendarizdir. R'nin kare-eş elemanları sadece $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ve* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece R abelian halka olur. $R/P(R)$ indirgenmiştir ve böylece R'nin Armendariz halka olduğunu da not edelim. $R/P(R) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a - b \equiv 0(mod2)\} \cong \{(a,b) : a - b \equiv 0(mod2)\}$ olur. Eğer $(a,b)^2 = (a^2,b^2) = (0,0)$ ise o zaman $a = 0$ ve $b = 0$ olur.

İDDİA: R Armendariz değildir*:*
$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ ve $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ olsun. Bu durumda $f(x)g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur fakat $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ dır. Böylece R Armendariz halka değildir.

Bundan başka eğer R'nin her sıfırdan farklı I özideali için R/I ve I Armendariz ise R'nin Armendariz olduğu düşünülebilir. Fakat bunun doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.15 F bir cisim olsun ve $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkasını düşünelim. Bu durumda Örnek 2.3.1 den R Armendariz değildir. Şimdi R nin sıfırdan farrklı I ideali için R/I ve I'nın Armendariz olduğunu göstereceğiz. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri sadece $\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ dir. İlk olarak

$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $R/I \cong F$ ve böylece R/I, Armendariz olur.
Şimdi I nın Armendariz olduğunu gösterelim:

$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n \in I[x]$ *ve* $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_m x^m \in I[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olsun. $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ olacak şekilde $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ve* $\beta_j = \begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $\alpha_0 \neq 0$ *ve* $\beta_0 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_0c_0 = 0 = a_0d_0$ olur. Eğer $a_0 \neq 0$ ise $c_0 = 0$ ve $d_0 = 0$ olur ve bu kabulumüzle çelişir. Böylece $a_0 = 0$ ve buradan $b_0 \neq 0$ dır. O halde her $0 \leq j \leq m$ için $\alpha_0\beta_j = 0$ olur. Böylece $f(x)g(x)$ içindeki x'in katsayısı $\alpha_1\beta_0 = 0$ olur. Bu durumda $a_1c_0 = 0 = a_1d_0$ olur. Eğer $a_1 \neq 0$ ise $c_0 = 0$ *ve* $d_0 = 0$ olur bu da kabülümüzle çelişir. O halde her $0 \leq j \leq m$ için $\alpha_1\beta_j = 0$ dır. Bu yöntemle $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ olmak üzere her i, j için $\alpha_i\beta_j = 0$ olur. Böylece I, Armendarizdir.
Şimdi $J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $R/J \cong F$ ve böylece R/J Armendariz olur. Aynı yöntem ile J Armendarizdir. Son olarak $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $R/K \cong F \bigoplus F$ ve böylece R/K, Armendariz olur. $K^2 = 0$ dır ve buradan K Armendarizdir.

Örnek 2.3.16 $\mathbb{Z}_2$, mod2 ye göre tamsayıların halkası olsun ve $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$ halkasını düşünelim. Bu durumda Örnek 2.3.1 den R Armedariz değildir. R'nin aşikar ve birim olmayan kare-eş elemanları sadece $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir ve $eRe \cong \mathbb{Z}_2$, R içindeki herbir aşikar ve birim olmayan e kare-eş elemanları için Armendariz halkadır.

Teorem 2.3.17 *Bir R halkasının klasik sağ kesirler halkası $Q(R)$ var olsun. Bu durumda:*
R indirgenmiştir ancak ve ancak $Q(R)$ indirgenmiştir.

İspat. R indirgenmiş olduğunda $Q(R)$ nin de indirgenmiş olduğunu göstermek yeterlidir. q, $q^2 = 0$ olacak şekilde $Q(R)$'nin bir sıfırdan farklı elemanı olsun. Bu durumda $q = ab^{-1}$ olmak üzere b regular olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Böylece $ab^{-1}ab^{-1} = 0$ dır. Açıkça $b^{-1}a \in Q(R)$ dir ve buradan $b^{-1}a = cd^{-1}$ olmak üzere d regular olacak şekilde $c, d \in R$ vardır. Buradan $ac(bd)^{-1} = acd^{-1}b^{-1} = ab^{-1}ab^{-1} = 0$ ve böylece $ac = 0$ olur. O halde $(ca)^2 = 0$ ve R indirgenmiş olduğundan $ca = 0$ olur $((ca)^2 = c(ac)a = 0)$. Şimdi $b^{-1}a = cd^{-1}$ olduğundan $Q(R)$ içinde $ad = bc$ olur. Buradan $ada = bca = 0$ dır. Böylece $ad = 0$ ve d regular olduğundan $a = 0$ olur. O halde $q = ab^{-1}$ ise $q = 0$ olur. Bu da bir çelişki verir. Böylece $Q(R)$, indirgenmiştir. □

Sonuç 2.3.18 *R bir von Neumann regular halka ve R'nin klasik sağ kesirler halkası $Q(R)$ var olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) R Armendarizdir.

(2) R indirgenmiştir.

(3) $Q(R)$ indirgenmiştir.

(4) $Q(R)$ Armendariz.

İspat. $(3) \Longrightarrow (2)$ ve $(4) \Longrightarrow (1)$ açıktır.

$(2) \Longrightarrow (1)$: Lemma 2.1.1 den vardır.

$(1) \Longrightarrow (3)$: R Armendariz olsun. Bu durumda Lemma 2.3.8 den R abelian, von Neumann regular ve böylece indirgenmiştir. Buradan $Q(R)$ Teorem 2.3.17 gereğince indirgenmiştir.

$(3) \Longrightarrow (4)$: Lemma 2.1.1 den doğrudur. □

3. ARMENDARİZ HALKALAR VE YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR

3.1. Polinom Halkaları ve Yarıdeğişmeli Halkalar

Bu kısımda yarı değişmeli halkalar üzerinde polinom halkalarının durumlarını inceleyeceğiz.

Lemma 3.1.1 [14] *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(1) R yarıdeğişmelidir.

(2) R üzerindeki her sağ sıfırlayanı R'nin bir idealidir.

(3) R üzerindeki her sol sıfırlayanı R'nin bir idealidir.

(4) Her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunda $aRb = 0$ dır.

İspat. $(1) \Longleftrightarrow (3)$ ve $(1) \Longleftrightarrow (2)$ açıktır.

$(1) \Longrightarrow (4)$: Her $a, r \in R$ için $ar = 0$ ve her $r, b \in R$ için $rb = 0$ ise $(ar)(rb) = 0$ olur. O halde $aRb = 0$ dır.

$(4) \Longrightarrow (1)$: Her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunda $aRb = 0$ olsun. $r \in R$ yi birim seçtiğimizde R, yarıdeğişmeli olur. $\square$

Yarıdeğişimeli halkalar Lemma 3.1.1 den abeliandır. Çünkü R, yarıdeğişmeli halka olsun. Buna göre Lemma 2.1.1 den $ab = 0$ ise $aRb = 0$ dır. Her $e = e^2 \in R$ için $e = e^2$ ise $e(1-e) = 0$ dır. R, yarıdeğişmeli olduğundan her $a \in R$ için $ea(1-e) = 0$ ise $ea - eae = 0$ olur. O halde $ea = eae$ olur.

Diğer taraftan $e^2 = e$ ise $(1-e)e = 0$ olur. R yarıdeğişmeli olduğundan $(1-e)ae = 0$ ise $ae = eae$ olur. Buradan $ea = ae$ olur. O halde R abeliandır.

Şimdi yarıdeğişmeli halkalar ile ilişkili olan halkaların bazı çeşitleri üzerindeki polinom halkaları ile ilgileneceğiz. Aşağıdaki sonuçlar vardır.

(1) Bir R halkası indirgenmiştir ancak ve ancak $R[x]$ indirgenmiştir. (Özelliği açık olarak vardır.)

(2) Bir R halkası Armendarizdir ancak ve ancak $R[x]$, Armendarizdir. (Teorem

2.2.18)

(3) Bir R halkası abeliandır ancak ve ancak $R[x]$ abeliandır (Lemma 2.3.9).

Önerme 3.1.2 *Eğer R Armendariz özelliğini sağlayan bir yarıdeğişmeli halka ise bu durumda $R[x]$ yarıdeğişmeldir.*

İspat. $f(x)$, $g(x)$ $R[x]$ içinde $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde polinomlar ve $h(x) = \sum_{k=0}^{i} c_k x^k$ olsun. R Armendariz olduğundan ve $f(x)g(x) = 0$ olduğundan her i ve j için $a_i b_j = 0$ dır. R yarıdeğişmeli olduğundan her i, j ve k için $a_i c_k b_j = 0$ olur. Böylece $f(x)h(x)g(x) = 0$ dır. Buna göre $R[x]$ yarıdeğişmelidir. □

Önceki sonuçlara dayanarak bir R halkası yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x]$ yarıdeğişmelidir olabilir mi diye düşünebiliriz. Fakat aşağıda bunu sağlamayan bir örnek vardır.

Örnek 3.1.3 $\mathbb{Z}_2$, mod2 ye göre tamsayıların cismi olsun ve $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ değişmeli olmayan belirsizleri içinde sıfır sabit terimi olacak şekilde polinomların serbest cebiri olsun. A, birimli bir halkadır ve $\mathbb{Z}_2 + A$'nın bir idealini düşünürsek, buna I diyelim, $r \in A$ olmak üzere a_0b_0, $a_1b_2 + a_2b_1$, $a_0b_1 + a_1b_0$, $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, $(a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2)$ *ve* $r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$ olmak üzere $r_1r_2r_3r_4$ ile üretilir. Bu durumda açık olarak $A^4 \in I$ dır.

$R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$ olsun. $(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \in I[x]$ fakat $(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2) \notin I[x]$ dir. Çünkü $a_0cb_1 + a_1cb_0 \notin I$ dır. Böylece $R[x]$ yarıdeğişmeli değildir.

R'nin yarıdeğişmeli olacağını ileride ispat edeceğiz.

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ belirsizlerinin herbir çarpımına tekil denir ve α, eğer n tane üretecin tamamının çarpımıysa n dereceli bir tekil denir. H_n, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde n dereceli tekillerin tüm lineer kombinosyonlarının kümesi olsun. H_n nin her n için sonlu ve R'nin I idealinin homojen olduğunu gözleyeceğiz. (Yani $r_i \in H_i$ olacak şekilde $\sum_{i=1}^{s} r_i \in I$ ise o zaman her r_i, I içinde kalır.)

İDDİA 1: Eğer $f_1, g_1 \in H_1$ olacak şekilde $f_1 g_1 \in I$ ise o zaman bazı $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $f_1 r g_1 \in I$ dır.

İspat. I'nın tanımından aşağıdaki durumlar vardır: $(f_1 = a_0,\ g_1 = b_0), (f_1 = a_2,\ g_1 = b_2)$ veya $(f_1 = a_0 + a_1 + a_2,\ g_1 = b_0 + b_1 + b_2)$. İspat I nın tanımı tekrar kullanılarak elde edilir. □

İDDİA 2: $f, g \in A$ olacak şekilde $fg \in I$ ise, o zaman her $r \in A$ için $frg \in I$ dır.

İspat. Bazı $f_1, r_1, g_1 \in H_1,\ f_2, r_2, g_2 \in H_2,\ f_3, r_3, g_3 \in H_3$ ve bazı $f_4, r_4, g_4 \in H_4$ için $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,\ g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ ve $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ olduğunu bulalım.

$i \geq 4$ için $H_i \subseteq I$ olduğunu not edelim. Böylece bazı $h \in I$ için $frg = f_1 r_1 g_1 + h$ olur. I homojen olduğundan $fg \in I$ durumunda $f_1 g_1 \in I$ olur. Buradan İddia1 den $f_1 r g_1 \in I$ olur. Sonuç olarak $frg \in I$ dır. □

R'nin yarıdeğişmeli olduğunu göstereceğiz. Lemma 3.1.1 den $y, z \in \mathbb{Z}_2 + A$ olacak şekilde $yz \in I$ ise o zaman her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz \in I$ olduğunu göstermek yeterlidir. İddia2'nin yardımı ile aşağıdaki hesaplamaları elde ederiz:

Öncelikle bazı $\alpha, \beta \in Z_2$ ve $y', z' \in A$ için $y = \alpha + y',\ z = \beta + z'$ yazalım. Buradan $\alpha\beta + \alpha z' + y'\beta + y'z' = (\alpha + y')(\beta + z') = yz \in I$ olur. Böylece $\alpha = 0$ yada $\beta = 0$ olur. $\alpha = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y'\beta + y'z' \in I$ olur. Eğer $\beta \neq 0$ ise bu durumda I homojen olduğundan $y' \in I$ ve $\beta \in \mathbb{Z}_2$ olur. Böylece her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz = y'r(\beta + z') = y'rz \in I$ olur. Eğer $\beta = 0$ ise, o zaman $y'z' \in I$ ve böylece her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz = y'rz \in I$ olur.

$\beta = 0$ durumunda da benzer şekilde ispat yapılır. Böylece R, yarıdeğişmeli halkadır. Eğer R, Armendariz ve yarıdeğişmeli halka ise o zaman Önerme 3.1.2 den $R[x]$ yarıdeğişmelidir.

Önerme 3.1.4 *R bir halka ve Ω, merkezi regular elemanların oluşturduğu R'nin çarpmaya göre kapalı altkümesi olsun. Bu durumda R, yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $\Omega^{-1}R$ yarıdeğişmelidir.*

İspat. İspatın gereklilik kısmını göstermek yeterlidir. Çünkü yarıdeğişmeli halkaların althalkaları da yarıdeğişmelidir. $u,v \in \Omega$ ve $a,b \in R$ olmak üzere $\alpha = u^{-1}a$, $\beta = v^{-1}b$ olacak şekilde $\alpha\beta = 0$ olsun. Ω, R'nin merkezinde içerildiğinden $0 = \alpha\beta = u^{-1}av^{-1}b = (u^{-1}v^{-1})ab = (uv)^{-1}ab$ ve böylece $ab = 0$ olur. R yarıdeğişmeli olduğundan her $r \in R$ için $arb = 0$ dır. Şimdi $w \in \Omega$ ve $r \in R$ olacak şekilde $\gamma = w^{-1}r$ için $\alpha\gamma\beta = (uwv)^{-1}arb = (uwv)^{-1}0 = 0$ olur. Böylece $\Omega^{-1}R$ yarıdeğişmelidir. $\square$

Sonuç 3.1.5 *Bir R halkası için $R[x]$ yarıdeğişmelidir ancak ve ancak $R[x,x^{-1}]$, yarıdeğişmelidir.*

İspat. ($\Longrightarrow$): $R[x]$ in yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $\Omega = \{1,x,x^2,...\}$ olsun. Bu durumda açıkça Ω, $R[x]$'in çarpımsal kapalı altkümesidir. $R[x,x^{-1}] = \Omega^{-1}R[x]$ olduğundan $R[x;x^{-1}]$, Önerme 3.1.4 ten yarıdeğişmelidir.
($\Longleftarrow$): Yarıdeğişmeli halkaların althalkaları da yarıdeğişmeli olduğundan bu durumun ispatı açıktır. $\square$

I, birimli bir yarıdeğişmeli halka olmak üzere eğer R'nin her sıfırdan farklı I öz ideali için R/I ve I yarıdeğişmeli ise R'nin de bir yarıdeğişmeli halka olduğu düşünülebilir. Fakat aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bu durum geçerli değildir. Yarıdeğişmeli halkaların abelian olduğunu hatırlarsak $n \geq 2$ için her $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası, birimli halka üzerinde yarıdeğişmeli olmayabilir.

Örnek 3.1.6 *F, bölüm halkası, $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$, 2×2 tipinde üst üçgensel matris halkası olsun.* R'nin yarıdeğişmeli halka olmadığı kolaylıkla görülebilir. R'nin sıfırdan farklı her I ideali için R/I ve I'nın yarıdeğişmeli olduğunu

gösterelim. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri $\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır. Önce $I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alalım. O zaman $R/I \cong F$ ve dolayısıyla da R/I halkası yarıdeğişmeli olur. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buradan $\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ve böylece $ac = ad = 0$ olur. Eğer $a = 0$ ise her $e, f \in F$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olur. Eğer $a \neq 0$ ise $c = d = 0$ ve aynı sonuç bulunur. Dolayısıyla I yarıdeğişmeli olur.
$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. Aynı yöntemle J ve R/J yarıdeğişmeli bulunur. Son olarak $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $R/K \cong F \bigoplus F$ ve dolayısıyla R/K yarıdeğişmeli olur. Ayrıca $K^2 = 0$ olması K'nın yarıdeğişmeli olduğunu verir.

Teorem 3.1.7 *R'nin bir I ideali için R/I yarıdeğişmeli halka olsun. Eğer I indirgenmiş halka ise R, yarıdeğişmeli olur.*

İspat. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. O zaman $aRb \subseteq I$ dır ve $bIa \subseteq I$ ve $(bIa)^2 = bIabIa = 0$ ve I, indirgenmiş halka olduğundan $bIa = 0$ olur. $((aRb)I)^2 = aRbIaRbI = aR(bIa)RbI = 0$ olduğundan $aRbI = 0$ ve dolayısıyla $(aRb)^2 \subseteq aRbI = 0$ olur ve buradan $(aRb)^2 = 0$ bulunur. Fakat $aRb \subseteq I$ olduğundan $aRb = 0$ bulunur. O halde R, yarıdeğişmeli olur. □

Lemma 3.1.8 *R, bir Armendariz halka ve $Z(R)$, R'nin merkezi olsun. Eğer N, R'nin bir biryanlı nil ideali ise bu durumda $Z(R) + N$, bir Armendariz halka ve bir yarıdeğişmeli halkadır.*

İspat. $S = Z(R) + N$ olsun. S formundakiler bir halka ve Armendariz halkaların althalkaları da Armendariz olduğundan $Z(R) + N$ Armendarizdir. $a, b \in Z(R)$ ve $m, n \in N$ olacak şekilde $(a+m)(b+n) = 0$ olsun. Buradan $c \in Z(R)$ için $(a+m)c(b+n) = 0$ dır ve Lemma 2.3.7 den $I \in N$ için $(a+m)I(b+n) = 0$

olur. Böylece her $c+I \in S$ için $(a+m)(c+I)(b+N) = 0$ elde edilir. O halde S yarıdeğişmeli olur. □

Aşağıda kare-eş elemanlar ile Armendarizlik arasındaki bağlantılar incelenecektir:

Önerme 3.1.9 *Bir R abelian halkası için aşağıdakiler denktir:*

(1) R bir Armendariz halkadır.

(2) eR ve $(1-e)R$, R'nin her e kare-eş elemanı için Armendarizdir.

(3) eR ve $(1-e)R$, R'nin bazı e kare-eş elemanı için Armendarizdir.

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$: eR ve $(1-e)R$, R'nin althalkaları olduğundan açıktır.

$(2) \Longrightarrow (3)$: Açıktır.

$(3) \Longrightarrow (1)$: $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ ve $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bazı $e = e^2 \in R$ için $f_1(x) = ef(x)$, $f_2(x) = (1-e)f(x)$, $g_1(x) = eg(x)$, $g_2(x) = (1-e)g(x)$ olsun. Bu durumda $0 = f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)$ olur ve böylece $f_1(x)g_1(x) = ef(x)g(x) = 0$, $f_2(x)g_2(x) = (1-e)f(x)g(x) = 0$ elde edilir. Bu durumda her $a_ib_j \in R$ için $a_ib_je = 0$ ve her i, j için $a_ib_j(1-e) = 0$ vardır. Buradan her i, j için $a_ib_j = 0$ elde edilir. Böylece R Armendariz olur. □

Önerme 3.1.10 *Bir R halkası için R/I, R'nin bazı I ideali için bir Armendariz halka olsun. Eğer I indirgenmiş ise bu durumda R, Armendariz olur.*

İspat. Eğer $a, b \in R$ olacak şekilde $ab = 0$ ise bu durumda $bIa \subseteq I$, $(bIa)^2 = 0$ olduğundan $bIa = 0$ olur ve I indirgenmiştir.

$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R/I Armendariz olduğundan her i, j için $a_ib_j \in I$ olduğunu $m \geq 0$ olacak şekilde m üzerinden tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Eğer $m = 0$ ise bu durumda bunu gösterdik. O halde $m \geq 1$ olsun. Her $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ için $a_0b_j = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bazı j için $a_0b_j \neq 0$ olsun. Bu durumda k yı $\{1,2,...,n\}$ içinde $a_0b_k \neq 0$ olacak şekilde en küçük olarak alabiliriz. Böylece $j \in \{0,1,...,k-1\}$ için $a_0b_j = 0$ dır ve önceki durum ile $b_jIa_0 = 0$ olur. O halde $(a_{k-j}b_j)(a_0b_k)^2 = a_{k-j}b_j(a_0b_k)a_0b_k \in a_{k-j}b_jIa_0b_k = a_{k-j}(b_jIa_0)b_k = 0$ ise buradan $(a_{k-j}b_j)(a_0b_k)^2 = 0$ olur. $f(x)g(x) = 0$ içindeki x^k teriminin katsayıları $0 = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = a_0b_k + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j}b_j$ olur. Eşitlik sağdan $(a_0b_k)^2$ ile çarpılırsa $0 = (a_0b_k + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j}b_j)(a_0b_k)^2 = (a_0b_k)^3$ bulunur. $a_0b_k \in I$ ve I indirgenmiş olduğundan $a_0b_k = 0$ bulunur ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak her $j \in \{0,1,...,n\}$ için $a_0b_j = 0$ ve böylece $f_1(x) = a_1 + a_2x + ... + a_mx^{m-1}$ olacak şekilde $f_1(x)g(x) = 0$ olur. Fakat $f_1(x)$'in derecesi m den küçük ve hipotez ile $1 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olacak şekilde her i,j için $a_ib_j = 0$ dır. Buradan $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olacak şekilde her i,j için $a_ib_j = 0$ olur. □

Şimdi Armendariz halkalar üzerinde indirgenmiş halkalar için daha genel sonuçları vereceğiz. Eğer b regular olacak şekilde $a,b \in R$ verildiğinde $ab_1 = ba_1$ ve b_1 regular olacak şekilde $a_1,b_1 \in R$ varsa R halkasına *sağ Ore halka* denir [4].

Teorem 3.1.11 *Bir R halkasının klasik sağ kesirler halkası Q var olsun. Bu durumda R Armendarizdir ancak ve ancak Q Armendarizdir.*

İspat. Armendariz halkanın althalkası da Armendariz olduğundan eğer R nin Armendariz olduğunu gösterirsek Q nün de Armendariz olduğu gösterilmiş olur. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_jx^j \in Q[x]$ olsun. $u,v \in R$ regular ve her i,j için $a_i,b_j \in R$ olacak şekilde $\alpha_i = a_iu^{-1}$, $\beta_j = b_jv^{-1}$ kabul edebiliriz. Her j için $u^{-1}b_j = c_jw^{-1}$ olacak şekilde $w \in R$ regular eleman ve $c_j \in R$ vardır [15]. $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g_1(x) = \sum_{j=0}^{n} c_jx^j \in R[x]$ olarak alırsak bu durumda $0 = f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\beta_jx^{i+j} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i(u^{-1}b_j)v^{-1}x^{i+j} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_ic_j(vw)^{-1}x^{i+j} = f_1(x)g_1(x)(vw)^{-1}$ olur. Buradan $0 = f_1(x)g_1(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_ic_jx^{i+j} \in R[x]$ olur. R Armendariz olduğundan her i,j için $a_ic_j = 0$ ve buradan her i,j için $\alpha_i\beta_j =$

$a_iu^{-1}b_jv^{-1} = a_ic_jw^{-1}v^{-1} = 0$ olur. Böylece Q, Armendariz olur. □

Şimdi Armendariz halkalar ile yarıdeğişmeli halkalar arasındaki ilişki incelenecektir.

Örnek 3.1.12 Armendariz olmayan fakat yarıdeğişmeli olan halkalar vardır. $R = T(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_8) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_8\}$ halkasını gözönüne alalım. $f(x) = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} x$ alırsak $f(x)^2 = 0$ olur. Fakat $\begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan R Armendariz değildir. R değişmeli olduğundan yarıdeğişmelidir.

Örnek 3.1.13 Yarıdeğişmeli olmayan fakat Armendariz olan halkalar vardır. F cisim ve $A = F[a, b, c]$, F üzerinde ve a, b, c değişkenleri değişmeli olmayan ve sabit terimi *0* olan polinomların serbest cebiri olsun. A'nın birimsiz bir halka olduğu gözlemlenebilir. I, $F + A$'nın her $r \in A$ için *cc, ac, crc* tarafından üretilen ideali olsun. $R = (F + A)/I$ alalım. $ac \in I$ fakat $abc \notin I$ olduğundan R yarıdeğişmeli değildir. Çünkü R'de $(a+I)(c+I) = 0$ fakat $(a+I)(c+I)(b+I) \neq 0$ dır.

I_1, A'daki her bir c değişkenini içeren monomial(tekli) elemanlardan oluşan F üzerinde bir doğrusal uzay olsun. $I_2 = F[a, b]$ ise F üzerinde ve a, b değişkenleri değişmeli olmayan ve sabit terimi sıfır olan polinomların serbest cebiri olsun. $A = I + I_1 + I_2$ olduğu gözlemlenebilir. R'nin Armendariz halka olduğunu gösterelim. Aşağıdaki gösterimlerde $A[x]$, $I[x]$, $I_1[x]$ *ve* $I_2[x]$ ile uygun olarak A, I, I_1, I_2 üzerinde birimsiz polinom halkaları kabul edilecektir, burada *x, R* üzerinde değişkendir.

İDDİA: $f(x), g(x) \in A[x]$ için $f(x)g(x) \in I[x]$ olsun. O zaman (eğer $f(x) \notin I[x]$ ise) $f(x) \in I_1[x] + I[x]$ *ve* $g(x) \in I_1[x] + I[x]$ veya (eğer $g(x) \notin I[x]$ ise) $f(x) \in I_1[x] + I[x] + I_2[x]a$ ve $g(x) \in cI_2[x] + I[x]$ olur.

İspat. $f_1, g_1 \in I_1[x]$, $f_2, g_2 \in I[x]$ ve $f_3, g_3 \in I[x]$ olacak şekilde $f(x) = f_1 + f_2 + f_3$ ve $g(x) = g_1 + g_2 + g_3$ vardır. Hipotezden ve I'nın tanımından

$(f_1+f_2)(g_1+g_2) \in I[x]$ ve dolayısıyla $(f_1+f_2)(g_1+g_2) \in I[x]+I_1[x]$ olur; fakat $f_1g_1+f_1g_2+f_2g_1 \in I[x]+I_1[x]$ olur ve buradan da $f_2g_2 \in I[x]+I_1[x]$ olur. $f_2g_2 \in I_2[x]$ olduğundan $f_2g_2=0$ olmak zorundadır ve buradan $f_2=0$ veya $g_2=0$ bulunur. $f_2=0$ olsun. O zaman $f_1(g_1+g_2) \in I[x]$ olması bize $f_1g_1 \in I[x]$ olduğundan $f_1g_2 \in I[x]$ olmasını verir. Böylece $f_1g_2=0$ ve dolayısıyla da $f_1=0$ ya da $g_2=0$ olması gerekir. Buradan da aranılan sonuç elde edilir.

Şimdi $g_2=0$ kabul edelim. O zaman $(f_1+f_2)g_1 \in I[x]$ olması $f_1g_1 \in I[x]$ olduğundan $f_2g_1 \in I[x]$ verir. I_2 deki teklileri doğal sayılar kümesinin içerisine $a \to 1,\ \ b \to 2$ dönüşümü vasıtasıyla alabiliriz. O zaman tam sıralı olurlar. (Örneğin $2<11<12$ olduğundan $b<aa<ab$ yazılabilir.) Benzer şekilde I_1 deki tekliler de rasyonel sayılar cismi içerisine $''a \to 1,\ \ b \to 2,\ \ c \to 0,0''$ dönüşümüyle alınabilirler bu durumda tam sıralı olurlar. (Örneğin $0,0222222<10,012<20,0$ olduğundan $cbbbbbb<acab<bc$ olur.)

Bazı $k_i, l_j \in F[x]$ *ve* $h_i,\ \ t_j$ teklileri için $f_2=\sum\limits_{i=1}^{M} h_ik_i$ ve $g_1=\sum\limits_{j=0}^{N} t_jl_j$ yazabiliriz. Bu durumda biz $i_\alpha \neq i_\beta$ olduğundan $h_{i_\alpha} \neq h_{i_\beta}$ ve $j_\delta \neq j_\gamma$ olduğundan $t_{j_\delta} \neq t_{j_\gamma}$ kabul edebiliriz. Burada h_{i_0} diğer h_i lerden ve $t_{j_0},\ \ t_j$ lerden büyük olsun.

$f_2g_1=(\sum\limits_{i=0}^{M} h_ik_i)(\sum\limits_{j=1}^{N} t_jl_j)=\sum\limits_{i=1...M,j=1...N} h_it_jk_il_j$ olur. $f_2g_1 \in I[x]$ ve $h_{i_0}t_{j_0}$ diğer h_it_j lerden büyük olduğundan I'nın özelliğinden $h_{i_0}t_{j_0}k_{i_0}l_{j_0} \in I[x]$ olur. O zaman $h_{i_0}t_{j_0} \in I$ dır. Fakat $h_{i_0} \in I_2$ olduğundan t_{j_0}, c ile başlamalıdır. Çünkü $ac \in I$ dır. Ayrıca diğer t_j ler de c ile başlamalıdır. Çünkü t_{j_0} en büyüktür. Buradan bir $g' \in I_2[x]$ için $g_1=cg'$ olur. Bazı $f', f'' \in I_2[x]$ için $f_2=f'a+f''b$ olduğu görülebilir. $f_2g_1 \in I[x]$ olduğundan $f''bcg' \in I[x]$ ve dolayısıyla $f''bcg'=0$ bulunur. Sonuç olarak $f''=0$ veya $g'=0$ olacağından ispat tamamlanır.

Şimdi $y(x), z(x) \in (F+A)[x]$ olsun ve $y(x)z(x) \in I[x]$ olduğunu kabul edelim. $y(x)=y_1+y_2,\ \ z(x)=z_1+z_2$ olacak şekilde $y_1, z_1 \in F[x]$ ve $y_2, z_2 \in A[x]$ elemanlarının var olduğu kolayca görülebilir. $y(x)z(x)=(y_1+y_2)(z_1+z_2)=y_1z_1+y_1z_2+y_2z_1+y_2z_2 \in I[x]$ olmasını I'nın özelliğini ve $y_1z_2+y_2z_1+y_2z_2 \in I[x]$ olmasını kullanarak $y_1z_1=0$ buluruz. Dolayısıyla $y_1=0$ ya da $z_1=0$ bulunur.

$y_1 = 0$ olsun. O zaman $y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$ ve $z_1 \in F[x]$ olduğundan $y_2z_1 \in I[x]$ ve $y_2z_2 \in I[x]$ olur. $z_1 \neq 0$ ise I'nın özelliğinden $y_2 \in I[x]$ ve dolayısıyla da $y(x)$ ve $z(x)$'in katsayılarının her çarpımı da I'da olur. $z_1 = 0$ olursa $y_2z_2 \in I[x]$ ve dolayısıyla iddianın yardımıyla yine aynı sonucu elde ederiz. $z_1 = 0$ durumunda da benzer çözüm uygulanır. Böylece R Armendariz halka olur. □

Teorem 3.1.14 *R,* bir von Neumann reguler halka olsun ve R'nin klasik sağ kesirler halkası Q olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) R bir Armendariz halkadır.

(2) R bir indirgenmiş halkadır.

(3) R bir yarıdeğişmeli halkadır.

(4) Q bir Armendariz halkadır.

(5) Q bir indirgenmiş halkadır.

(6) Q bir yarıdeğişmeli halkadır.

İspat. (1), (2), (4) ve (5) (Sonuç 2.3.18) den denktir. Şimdi $(5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$ gerektirmelerini gösterelim.

Q bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $q \in Q(R)$ için $q^2 = 0$ olduğunda $q = 0$ dır. a, $a^2 = 0$ olacak şekilde R'nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Bu durumda b regular olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Şöyle ki $q = ab^{-1}$ buradan $qb = a$ olur. O halde $a^2 = qbqb = 0$ ise $bq \in Q(R)$ ve böylece dr regular olacak şekilde $bq = rd$ olmak üzere $b \in Q$, $d \in R$ vardır. $qr(bd)^{-1} = qrdb = qbqb = 0$ ise $qr = 0$ olur. Buradan $(rq)^2 = rqrq = 0$ ve Q indirgenmiş olduğundan $rq = 0$ olur. Şimdi $a = qb$ ise $ra = rqb = 0b = 0$ olduğundan $a = 0$ olur. Buna göre R indirgenmiş olur. □

Bir R halkasının her sonlu altkümesi sonlu bir çarpımsal yarıgrup üretirse bu halkaya *yerel sonlu halka* denir.

Önerme 3.1.15 *Yerel sonlu bir Armendariz halkası yarıdeğişmelidir ve özellikle sonlu Armendariz halkalar yarıdeğişmelidir.*

İspat. R bir yerel sonlu halka ve $a,b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $aRb = 0$ olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $r \in R$ alalım. R yerel sonlu halka olduğu için bir pozitif n sayısı var ve her $n \leq k$ için $r^n = r^{n+k}$ olur. Çünkü $\{r, r^2, r^3, ...\}$ yarıgrubu sonlu olacaktır. Böylece $r^n = r^{n+k} = r^n r^k = r^n r^{2k} = ... = r^n r^{nk} = r^n r^{n(k+1)}$ olur. $h = k+1$ dersek o zaman $r^{(h-1)n} = r^{(h-2)n} r^n = r^{(h-2)n}(r^n)^h = r^{2(h-1)n} = (r^{(h-1)n})^2$ olacağından $r^{(h-1)n}$ kare eş eleman olur ve buradan Sonuç 2.3.8 den Armendariz halkalar abelian olduğundan $r^{(h-1)n}$ merkezi bir kare-eş eleman olur. Böylece $ar^{(h-1)n}b = 0$ sağlanır. Lemma 2.3.7 den $arb = 0$ bulunur. Burada r, R'nin keyfi bir elemanı olduğu için $aRb = 0$ olacaktır. Yani R yarıdeğişmelidir. □

3.2. Armendariz Halkalarda Aşikar Genişlemeler

$M_n(R)$ ve $T_n(R)$ ile sırasıyla R üzerindeki $n \times n$ tipindeki matris halkası ve R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası ve $n \times n$ tipindeki birim matrisler ise I_n ile gösterilsin.

Öncelikle bazı notasyonları hazırlayalım. Her $A \in M_n(R)$ için $RA = \{rA : r \in R\}$ olsun. $n \geq 2$ için $\{E_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ birimli bir matris olmak üzere $V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ olsun.

Bir R halkası için eğer R Armendriz ise bu durumda R'nin althalkası da Armendariz olur. R'nin Armendariz althalkasının her S_t zinciri için $\bigcup_t S_t$ açıkça R'nin bir Armendariz althalkasıdır. Böylece bir R halkasının her Armendariz althalkası R'nin bazı maximal Armendariz althalkası içinde kalır. Teorem 2.2.21 den her $n \geq 2$ için eğer $R[x]/(x^n)$ Armendarizdir ancak ve ancak R indirgenmiştir olduğunu göstermiştik. $R[x]/(x^n)$, $T_n(R)$ nin bir althalkasıdır ve $RI_n + RV + ... + RV^{n-1}$ e izomorftur. Örnek 2.3.1 den $T_n(R)$, her R halkası ve $n \geq 2$ için Armendariz değildir. İndirgenmiş bir R halkası için $RI_3 + RE_{1,2} + RE_{1,3} + RE_{2,3}$, $T_3(R)$'nin bir Armendariz althalkasıdır. Böylece indirgenmiş bir R halkası için $T_n(R)$'nin tüm bilinen Armendariz althalkalarını içeren $T_n(R)$'nin bazı büyük Armendariz althalkaları bulunur. Bu amaçla bazı notasyonlar tanıtalım.

$$V=\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Bir $n=2k\geq 2$ çift sayısı için $A_n^e(R)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+i}^{n}RE_{i,j}$, $B_n^e(R)=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=k+i-1}^{n}RE_{i,j}$ olsun ve bir $n=2k+1\geq 3$ tek sayısı için

$A_n^0(R)=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=k+i}^{n}RE_{i,j}$, $B_n^0(R)=\sum_{i=1}^{k+2}\sum_{j=k+i-1}^{n}RE_{i,j}$ olsun.

$n=2k$ için $A_n(R)=RI_n+RV+...+RV^{k-1}+A_n^e(R)$,

$B_n(R)=RI_n+RV+...+RV^{k-2}+B_n^e(R)$ olur.

$n=2k+1$ için $A_n(R)=RI_n+RV+...+RV^{k-1}+A_n^0(R)$ ve

$B_n(R)=RI_n+RV+...+RV^{k-2}+B_n^0(R)$ olarak tanımlayalım. Örneğin

$$A_4(R)=\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b\\ 0 & a_1 & a_2 & c\\ 0 & 0 & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1,a_2,a,b,c\in R\},$$

$$B_4(R)=\{\begin{pmatrix} a_1 & a & b & c\\ 0 & a_1 & d & r\\ 0 & 0 & a_1 & s\\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1,a,b,c,d,r,s\in R\},$$

$$A_5(R)=\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b & c\\ 0 & a_1 & a_2 & d & r\\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & s\\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1,a_2,a,b,c,d,r,s\in R\} \text{ ve}$$

$$B_5(R)=\{\begin{pmatrix} a_1 & a & b & c & d\\ 0 & a_1 & r & s & t\\ 0 & 0 & a_1 & u & v\\ 0 & 0 & 0 & a_1 & w\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1,a,b,c,d,r,s,t,u,v,w\in R\} \text{ dir.}$$

Örnek 3.2.1 *R bir halka olsun.*

(1) $n = 2k \geq 2$ için $B_n^e(R)$, bir Armendariz halka değildir.

(2) $n = 2k+1 \geq 3$ için $B_n^0(R)$, bir Armendariz halka değildir.

(3) $n \geq 2$ için $B_n(R)$, bir Armendariz halka değildir.

İspat. (1): $[E_{1,k} + (E_{1,k} - E_{1,k+1})x][E_{k+1,n} + (E_{k,n} + E_{k+1,n})x] = 0$, $B_n^e(R)[x]$ de ve $E_{1,k}(E_{k,n} + E_{k+1,n}) = E_{1,n} \neq 0$ olduğundan $B_n^e(R)$ Armendariz değildir.

(2): $B_n^0(R)[x]$ içinde $[E_{1,k+1} + (E_{1,k+1} - E_{1,k+2})x][E_{k+2,n} + (E_{k+1,n} + E_{k+2,n})x] = 0$ fakat $E_{1,k+1}(E_{k+1,n} + E_{k+2,n}) = E_{1,n} \neq 0$ olduğundan $B_n^0(R)$ Armendariz değildir.

(3): (1) ve (2) ile $n \geq 2$ için $B_n(R)$ Armendariz halka değildir. □

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(R)$ iken $l = 1,2,...,n$ için $a_{il}b_{lj} = 0$ olduğundan $[AB]_{ij} = 0$ yazılır. $M_n(R)[x]$ i kanonik olarak $M_n(R[x])$ ile özdeşleyebiliriz.

Lemma 3.2.2 *$a_{ij}^{(l)}$ ve $b_{ij}^{(l)}$, $l = 0,1,...,m$ için sırasıyla A_l ve B_l'nin (i,j). terimleri olmak üzere $\alpha(x) = A_0 + A_1x + ... + A_mx^m$, $\beta(x) = B_0 + B_1x + ... + B_mx^m \in M_n(R)[x]$ için $f_{ij}(x) = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}(x) + ... + a_{ij}(m)x^m$, $g_{ij}(x) = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}(x) + ... + b_{ij}(m)x^m$ olsun. Bu durumda $\alpha(x) = (f_{ij}(x))$, $\beta(x) = (g_{ij}(x)) \in M_n(R[x])$ olur. Eğer her i ve j için R Armendariz ve $[\alpha(x)\beta(x)]_{i,j} = 0$ ise o zaman $(f_{ij}(x))(g_{ij}(x)) = 0$ dır. O halde her i ve j için $A_iB_j = 0$ olur.*

İspat. Açıktır. □

Önerme 3.2.3 *R, bir indirgenmiş bir halka olsun. Aşağıdakiler vardır.*

(1): $A_2(R)$, $T_2(R)$'nin bir maximal Armendariz althalkasıdır.

(2): $A_3(R)$, $T_3(R)$'nin bir maximal Armendariz althalkasıdır.

İspat. Armendariz halkanın althalkası da Armendariz olduğundan (2) yi ispatlamak yeterli olur.

T, $T_3(R)$'nin bir Armendariz althalkası ve T, özellikle $A_3(R)$'yi içersin. O halde $a_1E_{1,1} + a_2E_{2,2} + a_3E_{3,3} \in T - A_3(R)$ vardır.

DURUM 1: $a_1 \neq a_2$ olsun. Bu durumda $a = a_1 - a_2 \neq 0$ olmak üzere bazı $s,t \in R$ için $A = aE_{1,1} + sE_{3,3}$, $B = aE_{2,2} + tE_{3,3} \in T$ dir. Eğer $st = 0$ ise bu durumda $(A + aE_{1,2}x)(B - aE_{1,2}x) = 0$ fakat $A + aE_{1,2}x$, $B - aE_{1,2}x \in T[x]$ olmak üzere (R indirgenmiş olduğundan) $(aE_{1,2})B = a^2E_{1,2} \neq 0$ dır. Bu bir çelişkidir. Eğer $st \neq 0$ ise bu durumda $0 \neq AB = stE_{3,3} \in T$ olur. $f(x) = (st)E_{1,2} - (st)E_{1,3}x$, $g(x) = (st)E_{3,3} + (st)E_{2,3}x$ olsun. Böylece $f(x), g(x) \in T[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ elde edilir fakat $(st)E_{1,2}(st)E_{2,3} = (st)^2E_{1,3} \neq 0$ olduğundan bu bir çelişki belirtir. O halde $a_1 = a_2$ elde edilir.

DURUM 2: $a_1 = a_2 \neq a_3$ olsun. Bu durumda $b = a_3 - a_1 \neq 0$ olmak üzere $bE_{1,1} + bE_{2,2}$, $(-b)E_{3,3} \in T$ olsun. $f(x) = (bE_{1,1} + bE_{2,2}) + (bE_{1,1} + bE_{2,2} + E_{1,3})x$, $g(x) = (-b)E_{3,3} + [(-b)E_{3,3} + E_{1,3}x]$ olsun. Buradan $f(x), g(x) \in T[x]$ elde edilir. Fakat $f(x)g(x) = 0$ ve $(bE_{1,1} + bE_{2,2})[(-b)E_{3,3} + E_{1,3}] = bE_{1,3} \neq 0$ olduğundan bir çelişki olur.

Dolayısıyla $a_1 = a_2 = a_3$ olur. Yani $A_3(R)$, $T_3(R)$'nin bir maximal Armendariz althalkasıdır. $\square$

Bir (R,R) bimodülü M için R'nin M'ye aşikar genişlemesi $R\alpha M$ ile gösterilir. $R\alpha M$, üst üçgensel $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in R, m \in M\}$ halkasınn althalkasıdır. Bir M_R modülü için $M[x]$ katsayıları M'den olacak şekilde x değişkenleri içinde tüm bu formdaki polinomların kümesi olsun. Bu durumda $M[x]$, polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemi altında bir sağ $R[x]$-modül olur. Eğer $m(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{s} a_j x^j \in R[x]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ olduğunda her i ve j için $m_i a_j = 0$ oluyorsa bir sağ R-modül M, bir Armendariz modül olarak adlandırılır [3]. Benzer şekilde bir Armendariz sol R-modül M tanımlanabilir.

Lemma 3.2.4 *M, bir (R,R)-bimodül ve $T = R\alpha M$ olsun. Bu durumda $M[x]$, bir $(R[x], R[x])$-bimodül ve $R[x]\alpha M[x] = T[x]$ olur.*

Teorem 3.2.5 *M, bir $(R,R)-$ bimodül olsun. Bu durumda $R\alpha M$ bir Armendariz halkadır ancak ve ancak aşağıdaki özellikler vardır:*

(1) R, bir Armendariz halkadır.

(2) M, bir Armendariz sol ve sağ R-modüldür.

(3) Eğer $R[x]$ içinde $f(x)g(x) = 0$ ise bu durumda $f(x)M[x] \cap M[x]g(x) = 0$ dır.

İspat.($\Longrightarrow$): (1) $R \cong \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in R\} \subseteq R\alpha M$ olduğundan Armendariz halkanın althalkası da Armendariz olduğundan R, bir Armendariz halkadır.

(2) $m(x) = \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x]$, $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in R[x]$ ve $f(x)m(x) = 0$ olsun. Bu durumda $[\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + ... + \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} x^n][\begin{pmatrix} 0 & m_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + ... + \begin{pmatrix} 0 & m_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^s] = \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(x)m(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olur. $R\alpha M$ Armendariz olduğundan her i ve j için $\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir. Yani her i ve j için $a_i m_j = 0$ olur. Buradan M, bir Armendariz sol R-modül olur. Benzer şekilde M, bir Armendariz sağ R-modül olur.

(3) $R\alpha M$ Armendariz olduğundan Teorem 2.2.18 e göre $(R\alpha M)[x]$ de Armendariz dir. Buradan Lemma 3.2.4 ten de $R[x]\alpha M[x]$ de Armendariz olur. Şimdi $m(x)$, $m'(x) \in M[x]$ olmak üzere $f(x)m(x) = -m'(x)g(x) \neq 0$ ve $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$[\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & m'(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y][\begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & m(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y] = 0$$

olur. Ancak

$$\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(x)m(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olur. Bu bir çelişkidir. Yani $f(x)m(x) = -m'(x)g(x) = 0$ elde edilir. O halde $f(x)M[x] \cap M[x]g(x) = 0$ olur.

($\Longleftarrow$): $\alpha(x) = \begin{pmatrix} a_0 & m_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + ... + \begin{pmatrix} a_n & m_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix} x^n$ ve $\beta(x) = \begin{pmatrix} b_0 & l_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & l_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} x + ... + \begin{pmatrix} b_s & l_s \\ 0 & b_s \end{pmatrix} x^s \in (R\alpha M)[x]$ olmak üzere $\alpha(x)\beta(x)=0$ olsun.

$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n, \quad g(x)=b_0+b_1x+...+b_sx^s,$

$m(x)=m_0+m_1x+...+m_nx^n, \;\; l(x)=l_0+l_1x+...+l_sx^s$ olsun.

Bu durumda $f(x), \quad g(x)\in R[x]$ ve $m(x), \quad l(x)\in M[x]$ ve $\begin{pmatrix} f(x) & m(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(x) & l(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x)g(x) & f(x)l(x)+m(x)g(x) \\ 0 & f(x)g(x) \end{pmatrix}=$ 0 ve $f(x)l(x)+m(x)g(x)=0$ olur. (1) ile R, Armendariz olduğundan her i ve j için $a_ib_j=0$ dır. (3) ile $f(x)l(x)=-m(x)g(x)\in f(x)M[x]\cap M[x]g(x)=0$ ve böylece $f(x)l(x)=m(x)g(x)=0$ olur. (2) ile her i ve j için $a_il_j=0=m_ib_j$ olur. Buradan her i ve j için $\begin{pmatrix} a_i & m_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_j & l_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_ib_j & a_il_j+m_ib_j \\ 0 & a_ib_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Böylece $R\alpha M$ bir Armendariz halkadır. $\square$

Sonuç 3.2.6 *R, bir (değişmeli olması gerek olmayan) domain ve M, bir (R,R) bimodül olsun. Bu durumda $R\alpha M$, bir Armendariz halkadır ancak ve ancak M, bir Armendariz sol ve sağ R-modüldür.*

4. ABELİAN HALKALAR ÜZERİNE NOTLAR

4.1. Abelian Halkalar

Bu bölümde $\alpha : R \longrightarrow R$ halka homomorfizması olarak alınacaktır.

Tanım 4.1.1 Eğer her $a, b \in R$ ve her $e \in R$ kare-eş eleman için

i) $ea = ae$

ii) $ab = 0$ dır ancak ve ancak $a\alpha(b) = 0$ dır,

şartları sağlanıyorsa R halkasına α-*abelian* denir.

Böylece bir R halkası abeliandır ancak ve ancak 1-abeliandır.

Örnek 4.1.2 $\mathbb{Z}_4$, mod4'e göre tamsayıların halkası olsun. Bilinen matris işlemi ile $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4\}$ halkasını düşünelim.

$\alpha : R \to R$, $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ile tanımlayalım. α, R'nin bir homomorfizmasıdır. R halkasının α-abelian olduğunu gösterelim.

1. R değişmeli olduğundan R abeliandır.

2. $r, s \in R$ için $rs = 0$ ancak ve ancak $r\alpha(s) = 0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$(\Longrightarrow)$: $r = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in R$ olsun. $rs = 0$ ve r ve s sıfırdan farklı olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bx \\ 0 & ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Buradan $ax = 0$ ve $ay + bx = 0$ dır. Eğer $a = 0$ ise bu durumda $r\alpha(s) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $ay + bx = 0$ olduğundan $0 + bx = 0$ olur ve buradan $bx = 0$ elde edilir. O halde $r\alpha(s) = 0$ olur ve $x \neq 0$ olduğundan $b = 0$ olur ki bu da $r = 0$ demektir. O halde $a \neq 0$ olsun. Eğer $x = 0$ ise bu durumda $r\alpha(s) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. $ay + bx = 0$ ise $ay = 0$ olur. Buradan $-ay = 0$ elde edilir. Böylece $r\alpha(s) = 0$ olur. O halde $x \neq 0$ olsun. Bu durumda $a = 2$ ve

$x = 2$ olur. Buradan $r\alpha(s) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 2 & y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(b-y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $ay + bx = 0$ ise $2(b+y) = 0$ olur ve buradan $b + y = 0$ olur. O halde $b = -y$ olur. Böylece $r\alpha(s) = \begin{pmatrix} 0 & 2(b-y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(-2y) \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. O halde R, α-abelian halka olur. Tersinin doğruluğu açıktır.

Lemma 4.1.3 *R, bir halka olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $ab = 0$ durumunda $a\alpha(b) = 0$ oluyorsa bu durumda her $e \in R$ kare-eş elemanı için $\alpha(e) = e$ dir.*

İspat. $e(1-e) = 0$ ve $\alpha(1) = 1$ olduğundan $e\alpha(1-e) = 0$ olur. Buradan $e(\alpha(1) - \alpha(e)) = 0$ olur ve böylece $e\alpha(1) - e\alpha(e) = 0$ olur. O halde $e1 - e\alpha(e) = 0$ dır. Buradan $e = e\alpha(e)$ olur. Ayrıca $(1-e)e = 0$ ise bu durumda $(1-e)\alpha(e) = 0$ olur. Buradan $\alpha(e) - e\alpha(e) = 0$ elde edilir. Böylece $\alpha(e) = e\alpha(e)$ olur. O halde $e = \alpha(e)$ dir. □

Şimdi abelian olan fakat α-abelian olmayan halkaya örnek verelim.

Örnek 4.1.4 R, $\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$ halkası olsun. Açıkça R, bir abelian halkadır. $\alpha : R \to R$, $\alpha(a,b) = (b,a)$ ile tanımlansın. Bu durumda $(1,0)(0,1) = 0$ olur fakat $(1,0)\alpha(0,1) = (1,0)(1,0) = (1,0) \neq 0$ olduğundan R, α-abelian değildir.

Tanım 4.1.5 [16] Bir R halkası her $a, b \in R$ için

i. $ab = 0$ durumunda $aRb = 0$,

ii. $ab = 0$ ancak ve ancak $a\alpha(b) = 0$,

şartlarını sağlıyorsa bu R halkasına *α-yarıdeğişmeli halka* denir.

Böylece bir R halkası yarıdeğişmelidir ancak ve ancak 1-yarıdeğişmelidir.

Lemma 4.1.6 *Eğer bir R halkası α-yarıdeğişmeli ise bu durumda R, α-abelian dır. Bu durumun tersi R, bir sağ p.p.-halka olduğunda sağlanır.*

İspat. ($\Longrightarrow$): Eğer e, R de bir kare-eş eleman ise bu durumda $e(1-e)=0$ dır. Her $a\in R$ için R, α-yarıdeğişmeli olduğundan $ea(1-e)=0$ olur. Buradan $ea-eae=0$ ve böylece $ea=eae$ elde edilir. Diğer yandan $(1-e)e=0$ olduğundan $(1-e)ae=0$ dır. Buradan $ae-eae=0$ olur ve buradan da $ae=eae$ elde edilir. Bu durumda $ea=ae$ olur. O halde R, α-abelian olur.

($\Longleftarrow$): R, bir $\alpha-$abelian ve sağ p.p.-halka olsun. $ab=0$ olacak şekilde $a,b\in R$ olsun. Bu durumda bazı $e=e^2\in R$ için $a\in r(b)=eR$ dir. Buradan $be=0$ ve $a=ea$ olur. R, $\alpha-$abelian olduğundan her $r\in R$ için $arb=earb=aerb=areb=arbe=0$ elde edilir. O halde $aRb=0$ dır. Böylece R, $\alpha-$yarıdeğişmeli olur. □

Sonuç 4.1.7 *Bir R halkası yarıdeğişmeli ise abeliandır. Tersi R, bir sağ p.p.-halka olduğunda sağlanır.*

Sonuç 4.1.8 *R, bir $\alpha-$abelian ve sağ p.p.-halka olsun. Bu durumda her $a\in R$ için $r(a)=r(aR)$ dir.*

İspat. R, α-abelian ve sağ p.p.-halka ise R, bir α-yarıdeğişmeli halkadır. Yani $ab=0$ iken $aRb=0$ dır. Bu durumda $r(a)=b$ ve $r(aR)=b$ olur. O halde $r(a)=r(aR)$ dir. □

Sonuç 4.1.9 *R, bir α-abelian ve sağ p.p.-halka olsun. Bu durumda R, bir sağ p.q.-Baer halkadır.*

İspat. Sonuç 4.1.8 den elde edilir. □

Bir sağ R-modül M için $M[x,\alpha]=\{\sum_{i=0}^{s} m_ix^i;\ s\geq 0,\ m_i\in M\}$ olarak düşünelim. $M[x,\alpha]$, bilinen toplama işlemi ile bir abelian gruptur ve skaler çarpma işlemi altında $R[x,\alpha]$ üzerinde bir sağ R-modüldür. $m(x)=\sum_{i=0}^{s} m_ix^i\in M[x,\alpha]$ ve $f(x)=\sum_{i=0}^{t} a_ix^i\in R[x,\alpha]$ için $m(x)f(x)=\sum_{k=0}^{s+t}(\sum_{i+j=k} m_i\alpha^i(a_j))x^k$ dır.

Tanım 4.1.10 [17] Bir M modülü için eğer

1. $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır,

2. Her $m(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x,\alpha]$, $f(x) = \sum_{j=0}^{s} a_j x^j \in R[x,\alpha]$ için $m(x)f(x) = 0$ iken her i ve j için $m_i\alpha^i(a_j) = 0$

şartlarını sağlıyorsa M modülüne *α-Armendariz* denir.

Tanım 4.1.11 [17] Bir M modülü eğer

1. $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır,

2. Her $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x,\alpha]]$, $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \in R[[x,\alpha]]$ için $m(x)f(x) = 0$ iken her i ve j için $m_i\alpha^i(a_j) = 0$

şartlarını sağlıyorsa M modülüne *üstel serili α-Armendariz modül* denir.

Bu kısımda eğer R_R α-Armendariz (üstel serili α-Armendariz) modül ise R halkasına α-Armendariz (üstel serili α-Armendariz) denir. Böylece R bir Armendariz (üstel serili Armendariz) halkadır ancak ve ancak R_R bir 1-Armendariz (üstel serili 1-Armendariz) modüldür.

Teorem 4.1.12 *Eğer R halkası α-Armendariz ise bu durumda R, α-abeliandır. Tersi ise R, bir sağ p.p.-halka ise sağlanır.*

İspat. e, R de bir kare-eş eleman ve $a \in R$ olmak üzere $f_1(x) = e - ea(1-e)x$, $g_1(x) = 1 - e + ea(1-e)x$, $f_2(x) = 1 - e - (1-e)aex$, $g_2(x) = e + (1-e)aex \in R[x,\alpha]$ olsun. Buradan $f_1(x)g_1(x) = 0$ ve $f_2(x)g_2(x) = 0$ dır. R, α-Armendariz olduğundan $ea(1-e)\alpha(1-e) = 0$ olur. Lemma 4.1.3 ten $\alpha(1-e) = 1-e$ ve böylece $ea(1-e)(1-e) = 0$ olur. Buradan $ea(1-e) = 0$ ve $ea = eae$ elde edilir. Benzer bir şekilde $f_2(x)g_2(x) = 0$ durumunda R, α-Armendariz olduğundan $-(1-e)ae\alpha(e) = 0$ olur. Lemma 4.1.3 ten $\alpha(e) = e$ olduğundan $-(1-e)aee = 0$ olur. Buradan da $(e-1)ae = 0$ ve $eae = ae$ elde edilir . Böylece $ae = ea$ olur. O halde R, α-abelian olur.

R, α-abelian ve R, sağ p.p.-halka olsun. Bu durumda R, abelian olur ve böylece her kare-eş eleman merkezdedir. Lemma 4.1.3 ten her $e \in R$ kare-eş eleman için $\alpha(e) = e$ olur. Lemma 4.1.6 dan R, α-yarıdeğişmeli olduğundan her $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ olur. Böylece R α-Armendariz olur.

$f(x) = \sum_{i=0}^{s} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{t} b_j x^j \in R[x, \alpha]$ olsun. $f(x)g(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

(1) $a_0 b_0 = 0$

(2) $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$

(3) $a_0 b_2 + a_1 \alpha(b_1) + a_2 \alpha^2(b_0) = 0$

$\vdots$

olur. Varsayımdan her i için $r(a_i) = e_i R$ olacak şekilde $e_i \in R$ kare-eş elemanları vardır. Buradan $b_0 = e_0 b_0$ ve $a_0 e_0 = 0$ olur. (2) eşitliğini sağdan e_0 ile çarparsak $0 = (a_0 b_1 + a_1 \alpha(b_0))e_0 = a_0 b_1 e_0 + a_1 \alpha(b_0) e_0 = a_0 e_0 b_1 + a_1 \alpha(b_0)\alpha(e_0) = a_1 \alpha(b_0)\alpha(e_0) = a_1 \alpha(b_0 e_0) = a_1 \alpha(e_0 b_0) = a_1 \alpha(b_0)$ olur (2) den $a_0 b_1 = 0$ bulunur ve buradan $b_1 = e_0 b_1$ olur. (3) eşitliğini sağdan e_0 ile çarparsak $(a_0 b_2 + a_1 \alpha(b_1) + a_2 \alpha^2(b_0))e_0 = 0$ olur. Buradan $a_0 b_2 e_0 + a_1 \alpha(b_1) e_0 + a_2 \alpha^2(b_0) e_0 = 0$ ve $a_0 e_0 b_2 + a_1 \alpha(b_1)\alpha(e_0) + a_2 \alpha^2(b_0)\alpha(e_0) = 0$ bulunur. Böylece $a_1 \alpha(b_1 e_0) + a_2 \alpha^2(b_0 e_0) = 0$ olur ve buradan da $a_1 \alpha(b_1) + a^2 \alpha_2(b_0) = 0$ elde edilir. Bu eşitliği sağdan e_1 ile çarparsak $(a_1 \alpha(b_1) + a^2 \alpha_2(b_0))e_1 = 0$ ve böylece $a_1 \alpha(b_1) e_1 + a^2 \alpha_2(b_0) e_1 = 0$ olur. Buradan $a^2 \alpha_2(b_0) = 0$ bulunur. O halde $a_1 \alpha(b_1) = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edersek her $1 \le i \le s$ ve $1 \le j \le t$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ olur. Böylece R, α-Armendariz halka olur. □

Sonuç 4.1.13 *R halkası Armendariz ise o zaman R, abelian olur. Bunun tersi eğer R aynı zamanda bir sağ p.p.-halka ise vardır.*

Önerme 4.1.14 *R halkası üstel serili α-Armendariz halkası ise bu durumda R, $\alpha-$abeliandır. Bunun tersi eğer R bir sağ p.p.-halka ise vardır.*

İspat. Teorem 4.1.12'nin ispatına bebnzer olarak yapılır. □

Tanım 4.1.15 [17] Bir M modülü eğer her $m \in M$ *ve* $a \in R$ için

1. $ma = 0$ iken $mR \cap Ma = 0$,

2. $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır

şartlarını sağlıyorsa M modülüne α-*indirgenmiş modül* denir.

R_R, bir α-indirgenmiş modül ise R halkası da α-indirgenmiştir. Buradan R, indirgenmiştir ancak ve ancak R_R, 1-indirgenmiş modüldür.

Lemma 4.1.16 *Eğer R, bir α-indirgenmiş halka ise o zaman R, α-abeliandır. Tersi eğer R, aynı zamanda bir sağ p.p.-halka ise vardır.*

İspat. Bu lemmanın ilk durumu açıkça sağlanır. Biz 2. durumu ispatlayacağız. R, bir α-abelian ve sağ p.p.-halka olsun. O halde $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Eğer $x \in aR \cap Rb$ ise bu durumdaa $x = ar_1 = r_2b$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. R, sağ p.p.-halka olduğundan $ab = 0$ durumunda bazı $e = e^2 \in R$ için $b \in r(a) = eR$ dir. Bu durumda $b = eb$ ve $xe = ar_1e = r_2be$ olur. R, α-abelian ve $ae = 0$ olduğundan $ar_1e = aer_1 = r_2be = r_2eb = r_2b = 0$ olur. Buradan $xe = 0$ ise $x = 0$ elde edilir. O halde $aR \cap Rb = 0$ olur. Böylece R, α-indirgenmiştir. □

Sonuç 4.1.17 *Eğer R, bir indirgenmiş halka ise bu durumda R, abeliandır. Tersi eğer R, bir sağ p.p.-halka ise sağlanır.*

Tanım 4.1.18 [18] $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ olduğunda $bac = 0$ oluyorsa R halkasına *simetrik denir.*

Tanım 4.1.19 [18] Bir R halkası herhangi bir $a, b, c \in R$ olmak üzere eğer,

1. $abc = 0$ olduğunda $acb = 0$ dır,

2. $ab = 0$ dır ancak ve ancak $a\alpha(b) = 0$ dır,

şartlarını sağlıyorsa bu R halkasına α-*simetrik* denir.

R halkası simetriktir ancak ve ancak 1-simetriktir.

Teorem 4.1.20 *R, bir sağ p.p.-halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(1) R, α-indirgenmiştir.

(2) R, α-simetriktir.

(3) R, α-yarıdeğişmelidir.

(4) R, α-Armendarizdir.

(5) R, üstel serili α-Armendarizdir.

(6) R, α-abeliandır.

İspat. $(1) \Leftrightarrow (6)$ Lemma 4.1.16 dan gösterilir.

$(4) \Leftrightarrow (6)$ Teorem 4.1.12 den açıktır.

$(3) \Leftrightarrow (6)$ Lemma 4.1.6 dan açıktır.

$(5) \Leftrightarrow (6)$ Önerme 4.1.14 den açıktır.

$(2) \Longrightarrow (3)$ $a,b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Varsayımdan her $c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ dır. Bu durumda $aRb = 0$ olur. Böylece R, α-yarıdeğişmelidir.

$(3) \Longrightarrow (2)$ Herhangi bir $a,b,c \in R$ için $abc = 0$ olsun. R, sağ p.p.-halka olduğundan $e \in R$ kare-eş elemanı için $c \in r(ab) = eR$ olur. Buradan $c = ec$ ve $abe = 0$ olur ve böylece $acbe = 0$ olur. Yarıdeğişmeli halkanın abelian olduğunu göstermiştik. O halde $acbe = aecb$ dir. Buna göre $acb = aecb = acbe = 0$ olur ve ispat biter. $\square$

Sonuç 4.1.21 *R, bir Baer halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(1) R, α-indirgenmiştir.

(2) R, α-simetriktir.

(3) R, α-yarıdeğişmelidir.

(4) R, α-Armendarizdir.

(5) R, üstel serili α-Armendarizdir.

(6) R, α-abeliandır.

Örnek 4.1.22 F herhangi bir cisim olsun. $R = \{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} : a,b,u,v \in F\}$ *ve* $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \in R$ *olmak üzere* $\alpha \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ile $\alpha : R \longrightarrow R$ tanımlansın. R değişmeli olduğundan abeliandır. $R[x,\alpha]$'nın abelian halka olmadığını göstereceğiz.

e_{ij}, 4×4 tipinde sadece (i,j). elemanı *1* diğer elemanlarının tümü *0* olan matrisi göstersin. $e = e_{11} + e_{22}$ ve $f = e_{33} + e_{44} \in R$ ve $e(x) = e + fx \in R[x,\alpha]$ olarak düşünelim. Bu durumda $e(x)^2 = e(x)$, $ef = fe = 0$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, $\alpha(e) = f$, $\alpha(f) = e$ olur. $e(x)e_{12} = e_{12} + e_{34}x$ dir, fakat $e_{12}e(x) = e_{12}$ dir. Bu durumda *R*, abeliandır fakat $R[x,\alpha]$ abelian halka değildir.

Lemma 4.1.23 *R bir α-abelian halka ise bu durumda $R[x,\alpha]$'nın kare-eş elemanları R'ye aittir. Böylece $R[x,\alpha]$ bir abelian halkadır.*

İspat. R bir α-abelian halka ve $e(x) = \sum_{i=0}^{t} e_i x^i$, $R[x,\alpha]$ da bir kare-eş eleman olsun. $e^2(x) = e(x)$ olduğundan

(1) $e_0^2 = e_0$

(2) $e_0e_1 + e_1\alpha(e_0) = e_1$

(3) $e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2\alpha^2(e_0) = e_2$

$\vdots$

olur. R, α-abelian olduğundan R abelian ve buradan da her kare-eş eleman merkezde olur. Lemma 4.1.3 ten her $e \in R$ kare-eş elemanı için $\alpha(e) = e$ olduğundan (2) ile $e_0e_1 + e_1e_0 = e_1$ olur. Bu eşitliği sağdan e_0 ile çarparsak $e_0e_1e_0 + e_1e_0e_0 = e_1e_0$ olur. Buradan $e_0e_1e_0 + e_1e_0 = e_1e_0$ ve böylece $e_0e_1e_0 = 0$ elde edilir. e_0 merkezde olduğundan $e_0e_0e_1 = 0$ ise $e_0e_1 = 0$ olur. O halde $e_1 = 0$

elde edilir. e_0 merkezi kare-eş eleman olduğundan (3)den $e_0e_2 + e_2e_0 = e_2$ ve buradan $e_2 = 0$ olur. Benzer şekilde $i = 1,2,...,t$ için $e_i = 0$ bulunur. □

Lemma 4.1.24 *$R[x,\alpha]$ bir abelian halka ise bu durumda her $e \in R$ kare-eş elemanı için $\alpha(e) = e$ dir.*

İspat. $R[x,\alpha]$ abelian olduğundan $f(x)$, $e(x)^2 = e(x) \in R[x,\alpha]$ için $f(x)e(x) = e(x)f(x)$ olur. Özel olarak her $e \in R$ kare-eş elemanı için $xe = ex$ olur. Buradan $xe = ex = \alpha(e)x$ ve böylece $\alpha(e) = e$ olur. □

Lemma 4.1.25 *$R[x,\alpha]$ bir abelian halka ise bu durumda $R[x,\alpha]$'nın kare-eş elemanları R'ye aittir.*

İspat. Lemma 4.1.23'ün ispatına benzer şekilde yapılır. □

Teorem 4.1.26 *R bir α-abelian halka ise bu durumda $R[x,\alpha]$ abelian olur. Tersi eğer $R[x,\alpha]$ aynı zamanda bir sağ p.p.-halka ise sağlanır.*

İspat. R α-abelian ise Lemma 4.1.23 ten $R[x,\alpha]$ abelian olur. $R[x,\alpha]$ bir abelian ve sağ p.p.-halka olsun. Açıkça her a, $e^2 = e \in R$ için $ae = ea$ dır. Her $a,b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R sağ p.p.-halka olduğundan $b \in r(a) = eR$, buradan $b = eb$ olur. Böylece $a\alpha(b) = a\alpha(eb) = ae\alpha(b) = 0$ olur. Tersine $a\alpha(b) = 0$ olsun. Bu durumda $axb = 0$ dır. $R[x,\alpha]$ sağ p.p.-halka olduğundan $e \in R[x,\alpha]$ kare-eş elemanı için $b \in r_{R[x,\alpha]}(ax) = eR[x,\alpha]$ olur. Buradan $b = eb$, $axe = 0$ ele edilir. Lemma 4.1.25 ten $e \in R$ olur. O halde $ae = 0$ ve $ab = aeb = 0$ dır. Böylece R, α-abelian olur. □

KAYNAKLAR

[1] Armendariz, E.P. 1974. A note on extensions of baer and P.P.-rings. **J.Austral. Math. Soc.**, 18: 470-473.

[2] Rege, M.B., Chhawchharia, S. 1997. Armendariz rings. **Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.**, 73: 14-17.

[3] Anderson, D.D., Camillo, V. 1998. Armendariz rings and Gaussian rings. **Comm. Algebra**, 26(7): 2265-2272.

[4] Kim, N.K., Lee, Y. 2000. Armendariz rings and reduced rings. **J. Algebra**, 223: 477-488.

[5] Huh, C., Lee, Y., Smoktunowicz, A. 2002. Armendariz rings and semicommutative rings. **Comm. in Algebra**, 30(2): 751-761.

[6] Lee, T.K., Zhou, Y. 2004. Armendariz and reduced rings. **Comm. in Algebra**, 32(6): 2287-2299.

[7] Agayev, N., Harmancı, A., Halıcıoğlu, S. 2010. On abelian rings. **Türk. J. Math.** 34: 465-474.

[8] Kaplansky, I. 1968. Rings of Operators. W.A. Benjamin, New York.

[9] Jondruup, S. 1971. P.P.-Rings and finitely generated flat ideals. **Proc. Amer. Math. Soc.** 28: 431-435.

[10] Jacobson, N. 1964. Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. v. 37, Providence, R.I.

[11] Renault, G. 1967. Anneaux reduits non commutatifs. **J. Math. Pures et Appl.** 46: 203-214.

[12] Rowen, L. 1973. Some results on the center of a ring with polynomial identity. **Bull. Amer. Math. Soc.**79: 219-223.

[13] Hirano, Y., Tominaga, H. 1979. Regular rings, V-rings and their generalizations. **Hiroshima Math. J.**, 9: 137-149.

[14] Shin, G. 1973. Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric rings. **Trans. Amer. Math. Soc.** 184, 43-60.

[15] McConell, J.C., Robson, J.C. 1987. Noncommutative Noetherian Rings. John Wiley Sons Ltd.

[16] Agayev, N., Harmancı, A. 2007. On semicommutative modules and rings. **Kyungpook Math. J.** 47: 21-30.

[17] Lee, T.K., Zhou, Y. 2004. Reduced modules, rings, modules, algebras and abelian groups. **Lecture Notes in Pure and Appl. Math.**, 236: 365-377.

[18] Lambek, J. 1971. On the representation of modules by sheaves of factor modules. **Canad. Math. Bull.**, 14(3): 359-368.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Teslime UĞUZ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Erdemli, 07.07.1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Gaziantep Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
-SCI
-Diğer
b) Bildiriler
-Uluslararası
-Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	teslime-2733@hotmail.com
Tarih		