

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2014-DR-001

DİJİTAL KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Gülseli BURAK

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

2. Tez Danışmanı
Prof. Dr. İsmet KARACA

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Gülseli BURAK tarafından hazırlanan Dijital Kohomoloji Grupları başlıklı tez, 23.01.2014 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL	PAÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Prof. Dr. İsmet KARACA	EÜ Fen Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. Ali MUTLU	CBÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla ... / ... /2012 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN**

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

23.01.2014

Gülseli BURAK

ÖZET**DIJİTAL KOHOMOLOJİ GRUPLARI**

Gülseli BURAK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR
2. Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA
2014, 121 sayfa

Bu çalışma dijital görüntülerin simpleksler relatif kohomoloji gruplarını tanımlayarak çeşitli uygulamalarını göstermek amacıyla ele alınmıştır. Öncelikle dijital homotopi, homoloji ve kohomoloji gruplarının tanımları ve bunlarla ilgili uygulamalar verilmiştir. Sonra bunların yardımıyla simpleksler relatif kohomoloji grupları tanımlanmış ve bir dijital görüntünün kohomoloji grubu hesaplanmıştır. Daha sonra dijital görüntüler için cup çarpımı tanımlanarak bununla ilgili özellikler ifade edilmiştir. Bunun sonucu olarak dijital kohomoloji üzerinde halka yapısının olduğu belirlenmiştir. Ayrıca dijital görüntülerin kohomoloji halkasının hesaplanması için bir method belirlenmiş ve dijital kohomoloji halkasının belirlenmesiyle ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Dijital simpleksler homoloji grupları, dijital simpleksler kohomoloji grupları, dijital cup çarpımı, dijital kohomoloji halkası

ABSTRACT**DIGITAL COHOMOLOGY GROUPS**

Gülseli BURAK

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Hatice KANDAMAR

2nd Supervisor: Prof. İsmet KARACA

2014, 121 pages

The goal of this study is to define simplicial relative cohomology groups of digital images and to give some examples. First of all we study the notions of digital homotopy, homology and cohomology and their applications. Then simplicial relative cohomology groups are defined and cohomology groups of some digital images are calculated. Hence simplicial cup product for digital images is defined and their properties are given. As a result of this the ring structure is determined on digital cohomology. Furthermore a method for computing the cohomology ring of digital images is given and some examples concerned determination cohomology ring of digital images are given.

Key Words

Digital simplicial homology group, digital simplicial cohomology group, digital cup product, digital cohomology ring

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocalarım sayın Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a ve Prof. Dr. İsmet KARACA'ya; tez izleme komitesi üyeliğini kabul ederek benden yardımlarını hiç esirgemeyen sayın Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL ve Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU hocalarıma; tezin yazımında ve biçimlenmesinde emeği geçen değerli bölüm hocalarıma ve bölüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma, göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Gülsemi BURAK

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Dijital Homotopi	7
2.2. Basit Kapalı Eğriler	10
2.3. Dijital Kapalı Yüzey	12
2.4. Dijital Kapalı Yollar	13
2.5. Dijital Temel Grup	15
3. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE HOMOLOJİ GRUPLARI	21
3.1. Euler Karakteristik	44
3.2. Dijital Görüntülerin Relatif Homoloji Grupları	46
3.3. Eilenberg-Steenrod Aksiyomları	50
3.4. Dijital Görüntüler İçin Lefschetz Sabit Nokta Teoremi	54
4. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE KOHOMOLOJİ GRUPLARI	61
4.1. Dijital Görüntülerin Relatif Kohomoloji Grupları	92
4.2. Eilenberg-Steenrod Aksiyomları	97
5. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE KOHOMOLOJİ GRUPLARI ÜZERİNDE CUP ÇARPIMI	103
5.1. Dijital Görüntülerde Kohomoloji Halkası	106
5.2. Dijital Görüntülerde Kohomoloji Cebri	109
5.3. Sonuç	113
KAYNAKLAR	115
ÖZGEÇMİŞ	121

SİMGELER DİZİNİ

κ	Yakınlık bağıntısı
(X, κ)	κ -yakınlıklı dijital görüntü
$[a, b]_{\mathbb{Z}}$	Dijital aralık
(X, x_0)	Noktalı dijital görüntü
$N_{\kappa}(x_0, \varepsilon)$	x_0 noktasının ε yarıçaplı κ -komşuluğu
$Int(X)$	X dijital görüntüsünün içi
$X \# Y$	X ve Y dijital görüntülerinin bağlantılı toplamı
$f * g$	f ve g dijital κ -yollarının çarpımı
f'	f kapalı yolunun aşıkâr genişlemesi
$[f]_X$	X dijital görüntüsünde kapalı yol sınıfı
$\pi_1^{\kappa}(X, x_0)$	(X, x_0) in κ -temel grubu
$C_q^{\kappa}(X)$	X dijital görüntüsünde q -boyutlu simpleksler zincir grubu
∂_q	Sınır operatörü
$Z_q^{\kappa}(X)$	Dijital simpleksler q -devirlerin grubu
$B_q^{\kappa}(X)$	Dijital simpleksler q -sınırların grubu
$H_q^{\kappa}(X)$	q -boyutlu dijital simpleksler homoloji grubu
$\varphi_{\#}$	φ dijital simpleksler dönüşümünün zincir dönüşümü
$\{*\}$	Tek elemanlı dijital görüntü
$\chi(X, \kappa)$	(X, κ) nin Euler karakteristiği
$C_q^{\kappa}(K, K_0)$	q -boyutlu simpleksler relatif zincir grubu
$Z_q^{\kappa}(K, K_0)$	Dijital simpleksler relatif q -devirlerin grubu
$B_q^{\kappa}(K, K_0)$	Dijital simpleksler relatif q -sınırların grubu
$H_q^{\kappa}(K, K_0)$	q -boyutlu dijital simpleksler relatif homoloji grubu
$\lambda(f)$	f dönüşümünün Lefschetz sayısı
$tr(f)$	f dönüşümünün izi
$C^{q, \kappa}(X)$	X dijital görüntüsünde q -boyutlu simpleksler eşzincir grubu
δ^q	q -boyutlu eşsınır operatörü
$Z^{q, \kappa}(X)$	Dijital simpleksler q -eşdevirlerin grubu
$B^{q, \kappa}(X)$	Dijital simpleksler q -eşsınırların grubu
$H^{q, \kappa}(X)$	q -boyutlu dijital simpleksler kohomoloji grubu
$C^{q, \kappa}(K, K_0)$	q -boyutlu simpleksler relatif eşzincir grubu
$Z^{q, \kappa}(K, K_0)$	Dijital simpleksler relatif q -eşdevirlerin grubu
$B^{q, \kappa}(K, K_0)$	Dijital simpleksler relatif q -eşsınırların grubu
$H^{q, \kappa}(K, K_0)$	q -boyutlu dijital simpleksler relatif kohomoloji grubu
$f^{\#}$	f dijital simpleksler dönüşümünün eşzincir dönüşümü
\smile	Cup çarpımı
\oplus	Direkt toplam

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	2-yakın	4
Şekil 2.2	4-yakın ve 8-yakın	4
Şekil 2.3	6-yakın, 18-yakın ve 26-yakın	4
Şekil 2.4	MSC_4, MSC'_8 ve MSC_8	10
Şekil 2.5	MSC_4	11
Şekil 2.6	MSS'_{18} ve MSS_{18}	13
Şekil 2.7	$MSS_{18} \# MSS_{18}$	14
Şekil 3.1	(2,0), (2,1), (8,2) ve (26,3)-simpleksler	21
Şekil 3.2	MSC'_8	22
Şekil 3.3	MSS'_{18}	34
Şekil 3.4	MSS_{18}	38
Şekil 3.5	MSS'_6	41
Şekil 3.6	X	52
Şekil 3.7	A ve U	52
Şekil 3.8	$X - U$ ve $A - U$	53
Şekil 4.1	$MSS_{18} \# MSS_{18}$	79
Şekil 4.2	$MSS_6 \# MSS_6$	85
Şekil 4.3	X	99
Şekil 4.4	A ve U	99
Şekil 4.5	$X - U$ ve $A - U$	100
Şekil 5.1	ω eşdevri, z eşdevri ve α eşdevri	107
Şekil 5.2	β eşdevri, γ eşdevri ve δ eşdevri	107
Şekil 5.3	x eşdevri, y eşdevri ve z eşdevri	108
Şekil 5.4	r eşdevri, ω eşdevri ve k eşdevri	108
Şekil 5.5	l eşdevri, u eşdevri ve v eşdevri	108
Şekil 5.6	S^2 ve S^1	111
Şekil 5.7	S^1	112

1. GİRİŞ

Dijital görüntü analizinin önemi teknolojik gelişmelerle birlikte oldukça artmıştır. Görüntü analizinin endüstride, tıpta ve çevre bilimleri gibi pek çok alanda uygulaması vardır. Topolojik invaryantlar, dijital görüntü analizinde ve bilgisayar grafiklerinde son derece kullanışlı olduğundan topoloji metodlarından yararlanarak dijital topoloji inşa edilmiştir. Dijital topoloji, topoloji kavramlarının görüntü dizilerine uygulanması olarak tanımlanabilir.

Dijital topoloji kavramı 1960 ların sonlarında, Rosenfeld [25] tarafından ortaya atılmıştır. Başlangıçta dijital topoloji çalışmaları topolojik kavramlardan çok graf teorisi üzerinde ilerlemiştir. 1980 lerin sonunda V. Kovalevsky, dijital topolojiyi Alexandroff teorisinin bir parçası olarak ele almıştır. Dijital topolojiye üçüncü yaklaşım 1980 lerde Khalimsky tarafından getirilmiştir. Khalimsky topolojisi, aynı dijital görüntü üzerinde farklı yakınlık bağıntılarının kullanılmasına olanak sağlamıştır.

Diskret nesnelere üzerinde dijital temel grup kavramı Kong [21] tarafından tanımlanmıştır. Boxer klasik cebirsel topoloji metodlarının, dijital temel grubun inşasında kullanılabileceğini göstermiştir. Cebirsel topolojide homotopi gruplarının hesaplanmasında örtülü uzaylar önemli rol oynadığından Boxer [6] dijital örtülü uzay tanımını vermiştir. Han [15] dijital kapalı yüzeylerin bağlantılı toplamlarının dijital temel grubunu ve Euler karakteristiğini hesaplamaya çalışmış ve bu konuyla ilgili önemli örnekler vermiştir. Dijital temel grup çalışmalarının görüntü analizine önemli katkıları olmuştur.

Karaca, Arslan ve Öztel [1] dijital görüntülerde simpleksler homoloji grubunu inşa ederek, MSS_{18} basit kapalı yüzeyinin simpleksler homoloji grubunu hesaplamışlardır. Karaca ve Ege [9] dijital görüntülerin simpleksler kohomoloji gruplarını ve dijital cup çarpımını tanımlayarak dijital simpleksler kohomoloji için Eilenberg-Steenrod aksiyomlarıyla ilgili önemli sonuçlara ulaşmışlardır.

Karaca ve Ege [20] iki boyutlu dijital görüntülerin simpleksler homoloji gruplarını ele almışlardır. Bu çalışmada boştan farklı ve κ -bağlantılı $X \subset \mathbb{Z}$ sınırlı dijital görüntünün bir boyutlu homoloji grubunun aşıkâr grup olduğunu göstermişlerdir. Ege ve Karaca [10] dijital görüntülerin simpleksler homoloji gruplarının karakteristik özelliklerini ve dijital görüntülerin simpleksler homoloji grupları için Eilenberg-Steenrod aksiyomlarını incelemişlerdir. Lefschetz Sabit Nokta teoremi, farklı topolojik uzaylar için sabit nokta teoremlerini genelleştirdiğinden Ege ve Karaca [11] dijital görüntüler için de Lefschetz Sabit Nokta teoremini ele alarak sabit nokta özellikleriyle ilgili çeşitli örnekler vermişlerdir.

Gonzalez-Diaz ve Real [12] kohomoloji halkaları ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. 3-boyutlu kübik komplekslerin kohomoloji halkalarının hesaplanmasıyla ilgili formüller Gonzalez-Diaz, Jimenez ve Medrano [13] tarafından geliştirilmiştir. Gonzalez-Diaz, Lamar ve Umble [14] ise kübik komplekslere homeomorfik hücreli kompleksler elde ederek kohomoloji halkalarının hesaplanmasını basitleştirmeye çalışmışlardır.

Kaczynski ve Mrozek [19] kübik komplekslerin kohomoloji halka algoritmasını oluşturmak için çarpımı hesaplama yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntem kohomoloji halkalarının inşasında cebirsel hesaplamaları hızlandırmıştır.

Demir ve Karaca [8] çeşitli dijital basit kapalı yüzeylerin bağlantılı toplamlarının simpleksler homoloji gruplarını hesaplamışlardır.

Biz bu çalışmada simpleksler kohomoloji halkasının hesaplanması için bir method geliştirdik ve MSS'_{18} , MSS_{18} ve MSS'_6 gibi minimal basit kapalı yüzeylerin dijital kohomoloji grubunu hesaplayarak, MSS'_{18} ve MSS_{18} in dijital kohomoloji halkasını belirledik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

\mathbb{Z} tamsayılar kümesi olmak üzere \mathbb{Z}^n , n -boyutlu Euclid uzayında kafes noktalarının kümesidir. Bir dijital görüntü ikilisi, bir yakınlık bağıntısı ile \mathbb{Z}^n nin sonlu alt kümesinden oluşur. Dijital görüntü araştırmalarında çeşitli yakınlık bağıntıları kullanıldığından yakınlık bağıntısını tanımlayalım.

Tanım 2.1 [2] $1 < l < n$ olmak üzere pozitif l tam sayısı ve

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$$

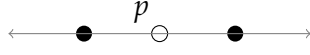
ayrık iki nokta için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa p ve q ya κ_l -yakın denir;

- $|p_i - q_i| = 1$ olacak şekilde en çok l tane i indisi vardır.
- $|p_j - q_j| \neq 1$ olacak şekilde diğer tüm j indisleri için $p_j = q_j$.

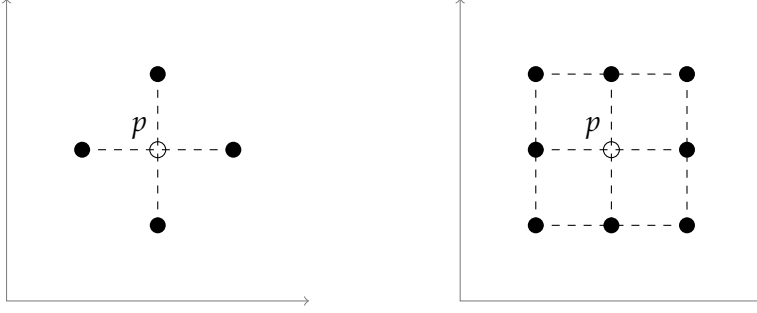
Buna göre κ_l , verilen bir $p \in \mathbb{Z}^n$ noktasına yakın olan $q \in \mathbb{Z}^n$ noktalarının sayısını gösterir. Tanım 2.1 den \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 ve \mathbb{Z}^3 de yakınlıkları řu şekilde ifade edilebilir:

- \mathbb{Z} de ayrık p ve q noktaları $|p - q| = 1$ ise bu noktalara 2-yakındır denir.
- \mathbb{Z}^2 de ayrık p ve q noktaları, her bir koordinatında en fazla 1 farklı ise bu noktalara 8-yakındır denir.
- \mathbb{Z}^2 de ayrık p ve q noktaları 8-yakın ve sadece bir koordinatında farklı ise bu noktalara 4-yakındır denir.
- \mathbb{Z}^3 de ayrık p ve q noktaları, her bir koordinatında en fazla 1 farklı ise bu noktalara 26-yakındır denir.
- \mathbb{Z}^3 de p ve q noktaları 26-yakın ve en fazla iki koordinatında farklı ise bu noktalara 18-yakındır denir.

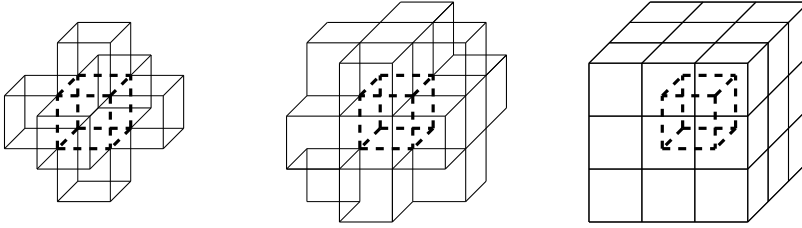
- \mathbb{Z}^3 de p ve q noktaları 18-yakın ve sadece bir koordinatında farklı ise bu noktalara 6-yakındır denir.
- $\kappa \in \{2,4,8,6,18,26\}$ olsun. Bir p latis noktasının κ -komşuluğu p ye κ -yakın olan noktalardan oluşur.



Şekil 2.1. 2-yakın



Şekil 2.2. 4-yakın ve 8-yakın



Şekil 2.3. 6-yakın, 18-yakın ve 26-yakın

Tanım 2.2 [2] κ , \mathbb{Z}^n üzerinde bir yakınlık bağıntısı olsun. $X \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsünün κ -bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ farklı noktaları için X in noktalarının bir x_0, x_1, \dots, x_r kümesi vardır öyle ki $x = x_0, y = x_r$ ve $i = 0, 1, \dots, r - 1$ için x_i ve x_{i+1} , κ -komşudur. Bir X dijital görüntüsünün bir κ -bileşeni X in en büyük κ -bağlantılı alt kümesidir.

Örnek 2.3 $X \subset \mathbb{Z}^2$ kümesi

$$X = \{x_0 = (0,0), x_1 = (1,1), x_2 = (2,0), x_3 = (3,1)\}$$

olsun. X dijital görüntüsünde $i = 0,1,2$ için x_i ve x_{i+1} , 8-komşu olduğundan X , 8-bağlantılı bir kümedir.

Tanım 2.4 $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a < b$ olsun.

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} | a \leq z \leq b\}$$

kümesine bir dijital aralık denir.

Tanım 2.5 [15] $p \in \mathbb{Z}^n$ noktasına κ -yakın olan noktaların kümesine p nin κ -komşuluğu denir. $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü ve $\varepsilon \in \mathbb{N}$ olsun. $x_0 \in X$ in ε yarıçaplı κ -komşuluğu, $l_{\kappa}(x_0, x)$, x_0 dan x e en kısa basit κ -yolunun uzunluğu olmak üzere;

$$N_{\kappa}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X | l_{\kappa}(x_0, x) \leq \varepsilon\} \cup \{x_0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.6 $X \subset \mathbb{Z}^2$ kümesi

$$X = \{x_0 = (1,1), x_1 = (2,1), x_2 = (3,2), x_3 = (3,0), x_4 = (4,0)\}$$

olsun. X dijital görüntüsünde x_1 e 4-yakın olan sadece x_0 olduğundan x_1 in 4-komşuluğunda x_0 vardır. x_1 in 8-komşuluğunda bulunan noktalar ise x_0, x_2 ve x_3 dür.

Tanım 2.7 [2] $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, κ_0 -yakınlıklı ve $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, κ_1 -yakınlıklı dijital görüntüler olsun. X in her κ_0 -bağlantılı U alt kümesi için $f(U)$, Y nin κ_1 -bağlantılı alt kümesi ise $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu (κ_0, κ_1) -süreklidir denir.

Örnek 2.8 $X \subset \mathbb{Z}$ ve $Y \subset \mathbb{Z}^2$ kümeleri sırasıyla

$$X = \{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4\},$$

$$Y = \{y_0 = (0,0), y_1 = (1,1), y_2 = (2,0), y_3 = (3,1)\}$$

olsun. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $i = 0, 1, 2, 3$ için $f(x_i) = y_i$ şeklinde tanımlansın. X in her 2-bağlantılı U alt kümesi için $f(U)$, Y nin 8-bağlantılı alt kümesi olduğundan $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $(2,8)$ -süreklidir.

Önerme 2.9 [3] $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, κ_0 -yakınlıklı ve $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, κ_1 -yakınlıklı dijital görüntüler olsun. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun (κ_0, κ_1) -sürekliliği için gerek ve yeter şart X in her κ_0 -yakın $\{x_0, x_1\}$ noktaları için $f(x_0) = f(x_1)$ veya $f(x_0)$ ve $f(x_1)$, Y de κ_1 -yakındır.

İspat: $f : X \rightarrow Y$, (κ_0, κ_1) -sürekliliği olduğunda X in κ_0 -bağlantılı $\{x_0, x_1\}$ alt kümesi için $\{f(x_0), f(x_1)\}$ Y nin κ_1 -bağlantılı alt kümesidir. Yani $f(x_0)$ ile $f(x_1)$ Y de κ_1 -yakındır veya $f(x_0) = f(x_1)$ dir.

Tersine κ_0 -yakın $x_0, x_1 \in X$ noktaları için yani X in κ_0 -bağlantılı $\{x_0, x_1\}$ alt kümesi için $f(x_0) = f(x_1)$ veya $f(x_0)$ ve $f(x_1)$, Y de κ_1 -yakın ise $\{f(x_0), f(x_1)\}$ Y nin κ_1 -bağlantılı alt kümesidir. Bu durumda $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu (κ_0, κ_1) -süreklidir. \square

Örneğin, κ , Y dijital görüntüsü üzerinde bir yakınlık bağıntısı olsun. $f : [a, b]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonunun $(2, \kappa)$ -sürekliliği için gerek ve yeter şart her $c, c + 1 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ için $f(c) = f(c + 1)$ veya $f(c)$ ile $f(c + 1)$ in Y de κ -yakın olmasıdır.

$X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, κ_0 -yakınlıklı ve $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, κ_1 -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.

$f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu (κ_0, κ_1) -sürekliliği ve bijektif, $f^{-1} : Y \rightarrow X$ fonksiyonu (κ_1, κ_0) -sürekliliği ise f fonksiyonuna (κ_0, κ_1) -izomorfizm denir [1] ve $X \approx_{(\kappa_0, \kappa_1)} Y$ şeklinde gösterilir.

2.1. Dijital Homotopi

Tanım 2.10 [2] $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, κ_0 -yakınlıklı, $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, κ_1 -yakınlıklı dijital görüntüler ve $f, g : X \rightarrow Y$ fonksiyonu (κ_0, κ_1) -süreklili fonksiyonlar olsun. Pozitif bir m tamsayısı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa, f ve g fonksiyonlarına Y de dijital (κ_0, κ_1) -homotopik fonksiyonlar denir.

- $\forall x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, m) = g(x)$,

- $\forall x \in X$ için

$$H_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$$

$$t \rightarrow H_x(t) = H(x, t),$$

şeklinde tanımlanan H_x indirgenmiş fonksiyonu $(2, \kappa_1)$ -süreklidir.

- $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için

$$H_t : X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow H_t(x) = H(x, t),$$

şeklinde tanımlanan H_t indirgenmiş fonksiyonu (κ_0, κ_1) -süreklidir.

Burada H fonksiyonuna f ve g arasında dijital (κ_0, κ_1) -homotopi fonksiyonu denir.

f ve g fonksiyonlarının Y de dijital (κ_0, κ_1) -homotopik olduğunu göstermek için

$$f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_1)} g$$

notasyonunu kullanılır.

$X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, κ_0 -yakınlıklı ve $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, κ_1 -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.

$f : X \rightarrow Y$ (κ_0, κ_1) -süreklili fonksiyonu için

$$g \circ f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_0)} 1_X \quad \text{ve} \quad f \circ g \simeq_{(\kappa_1, \kappa_1)} 1_Y$$

olacak şekilde $g : Y \rightarrow X$, (κ_1, κ_0) -sürekli fonksiyonu varsa f fonksiyonuna (κ_0, κ_1) -homotopi denklik denir [4]. X ve Y dijital görüntüleri aynı (κ_0, κ_1) -homotopi tipine sahiptir ve X ile Y , (κ_0, κ_1) -homotopi denktir denir [4].

Lemma 2.11 [2] *Dijital (κ_0, κ_1) -homotopi, dijital sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısıdır.*

İspat: Dijital homotopinin yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz.

- Her (κ_0, κ_1) -sürekli $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve her pozitif m tamsayısı için,
 $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonunu her $(x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için

$$H(x, t) = f(x)$$

şeklinde tanımlandığında f den f ye dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olur. O halde dijital homotopi yansıma özelliğini sağlar.

- $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu f den g ye dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olsun.
 $G : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonunu her $(x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için

$$G(x, t) = H(x, m - t)$$

şeklinde tanımlanırsa g den f ye dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olur. Böylece dijital homotopinin simetri özelliğini sağladığı görülür.

- $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu f den g ye dijital (κ_0, κ_1) -homotopi ve
 $G : X \times [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu g den h a dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olsun.
 $F : X \times [0, m + m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, t), & (x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ G(g(x), t - m), & (x, t) \in X \times [m, m + m_0]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında f den h a dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olur. Bu durumda dijital homotopi geçişme özelliğini sağlar. \square

Tanım 2.12 [2] $f : X \rightarrow Y$ dijital sürekli fonksiyonu Y de bir sabit fonksiyona dijital homotopik ise f fonksiyonuna Y de dijital nulhomotopik denir.

Tanım 2.13 [2] Bir X dijital görüntüsü için $I : X \rightarrow X$ birim dönüşümü dijital nulhomotopik ise X e dijital büzülebilirdir denir.

Örnek 2.14 [2] $X \subset \mathbb{Z}^2$ kümesi

$$X = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

8-büzülebilirdir. $H : X \times [0,2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ homotopi fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

- Her $p \in X$ için $H(p,0) = p$;
- $H((1,0),1) = H((0,-1),1) = (1,0)$, $H((0,1),1) = H((-1,0),1) = (0,1)$;
- Her $p \in X$ için $H(p,2) = (1,0)$.

Tanım 2.15 [3] X dijital görüntüsü ve $x_0 \in X$ için (X, x_0) ikilisine noktalı dijital görüntü denir. $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dijital sürekli fonksiyonu $f(x_0) = y_0$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna noktalı dijital sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.16 [3] f ve g , (X, x_0) dan (Y, y_0) a tanımlı noktalı dijital sürekli fonksiyonlar ve H , f ile g arasında dijital (κ_0, κ_1) -homotopi olsun. Her $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için $H(x_0, t) = y_0$ ise H a (κ_0, κ_1) -noktalı dijital homotopi denir.

Tanım 2.17 [6] $f, g : [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, $(2, \kappa)$ -sürekli fonksiyonları arasında $H : [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \times [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, $(2, \kappa)$ -homotopi fonksiyonu her $t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}}$ için $H(0, t) = f(0) = g(0)$ ve $H(m_0, t) = f(m_0) = g(m_0)$ ise H a uç noktaları sabit tutan homotopi denir.

2.2. Basit Kapalı Eğriler

Tanım 2.18 [3] $X \subset \mathbb{Z}^n$, κ -yakınlıklı bir dijital görüntü olsun. Bir $m > 3$ tamsayısı ve $f : [0, m - 1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $(2, \kappa)$ -süreklili fonksiyonu için

- f bire-bir ve örten,
- $f(0)$ ve $f(m - 1)$, κ -yakın,
- Her $t \in [0, m - 1]_{\mathbb{Z}}$ için $f([0, m - 1]_{\mathbb{Z}})$ de $f(t)$ nin κ -komşulukları sadece

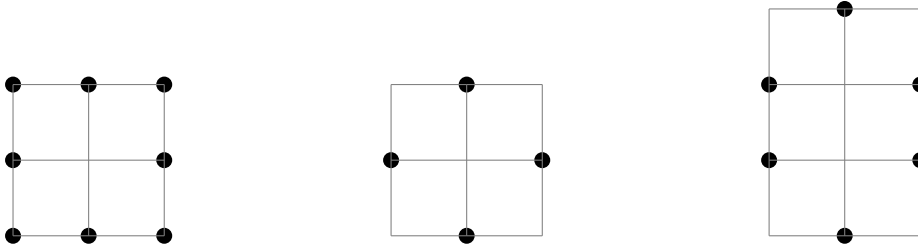
$$f((t - 1) \bmod m) \text{ ve } f((t + 1) \bmod m)$$

koşulları sağlanıyorsa X e dijital basit kapalı κ -eğri denir.

Örnek 2.19 $X \subset \mathbb{Z}^2$ kümesi

$$X = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

olsun. $f : [0,3]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ fonksiyonu $f(0) = (1,0)$, $f(1) = (0,1)$, $f(2) = (-1,0)$, $f(3) = (0,-1)$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon $(2,8)$ -süreklidir ve basit kapalı eğri koşullarını sağlar.



Şekil 2.4. MSC_4 , MSC_8' ve MSC_8

MSC_4 , MSC_8' ve MSC_8 , \mathbb{Z}^2 de minimal basit kapalı eğrilerdir.

Tanım 2.20 [15] $c^* = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, \mathbb{Z}^2 de kapalı κ -eğri olsun. c^* in \mathbb{Z}^2 de tümleyeni olan $\overline{c^*}$ nın bir x noktası, $\overline{c^*}$ nın sınırlı $\bar{\kappa}$ -bağlantılı bileşenine aitse c^* in iç noktasıdır denir. $Int(c^*)$ ile gösterilir.

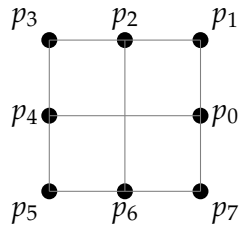
Bir dijital görüntü ayrık noktalardan oluştuğu için dijital görüntünün kapanışı kendisine eşittir. Yani A dijital görüntüsü için A nın kapanışını \overline{A} ile gösterilirse $\overline{\overline{A}} = A$ dır.

MSC_4^* , MSC_8^* ve MSC_8^* dijital görüntüleri, kapalı κ -yüzeylerin dijital bağlantılı toplamını tanımlarken önemli rol oynayacaktır:

- $MSC_4^* = MSC_4 \cup Int(MSC_4)$
- $MSC_8'^* = MSC_8' \cup Int(MSC_8')$
- $MSC_8^* = MSC_8 \cup Int(MSC_8)$

$(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ bir dijital görüntü olsun. $x, y, z \in X$ ve y ile z birbirlerine κ -yakın olsun. x noktası sadece y ve z noktalarına κ -yakın ise x noktasına κ -köşe noktası denir [15]. y ve z , κ -köşe noktaları değil ve x noktası y ve z nin her ikisine de κ -yakın olan tek nokta ise x , κ -köşe noktasına basittir denir. X dijital görüntüsünün tüm basit κ -köşeleri çıkarıldığında bir basit kapalı κ -eğri elde ediliyorsa X e genelleştirilmiş basit kapalı κ -eğri denir [15].

Örnek 2.21 MSC_4 basit kapalı 4-eğrisini ele alalım.



Şekil 2.5. MSC_4

- $\{p_1, p_3, p_5, p_7\} \subset MSC_4$ kümesinin her bir elemanı basit 8-köşe noktasıdır.
- Bu noktalar çıkarıldığında MSC'_8 basit kapalı 8-eğrisi elde edilir. MSC_4 genelleştirilmiş basit kapalı 8-eğridir.

2.3. Dijital Kapalı Yüzey

Tanım 2.22 [16] $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 3$ için dijital görüntü ve $\bar{X} = \mathbb{Z}^n - X$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X e kapalı κ -yüzey denir.

1. $(\kappa, \bar{\kappa}) \in \{(\kappa, 2n), (2n, 3^n - 1)\}$ ve $\kappa \neq 3^n - 2^n - 1$ için;

- Her $x \in X$ için $|X|^x = N_{26}(x, 1) - \{x\}$ kümesi x e κ -yakın olan bir tane eleman içerir.
- $|\bar{X}|^x$, x e $\bar{\kappa}$ -yakın iki tane $\bar{\kappa}$ bileşene sahiptir. (Bu bileşenleri C^{xx} ve D^{xx} ile gösterelim.)
- Her $y \in N_\kappa \cap X$ için $N_{\bar{\kappa}} \cap C^{xx} \neq \emptyset$ ve $N_{\bar{\kappa}} \cap D^{xx} \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca X kapalı κ -yüzeyi için, X basit κ -noktaya sahip değil ise X e basit kapalı κ -yüzey denir.

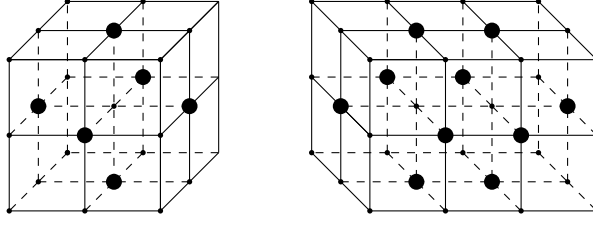
2. $(\kappa, \bar{\kappa}) = (3^n - 2^n - 1, 2n)$ için;

- X , κ -bağlantılıdır.
- Her $x \in X$ için $|X|^x$ genelleştirilmiş basit kapalı eğridir.

Ayrıca $|X|^x$ basit kapalı κ -eğri ise X e basit kapalı κ -yüzey denir.

Örnek 2.23 MSS_{18} ve MSS'_{18} minimal basit kapalı 18-yüzeylerdir.

Tanım 2.24 [15] $n_0, n_1 \geq 3$ için $S_{\kappa_0}, \mathbb{Z}^{n_0}$ da kapalı bir κ_0 -yüzey, $A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0} \subset S_{\kappa_0}$ ve $S_{\kappa_1}, \mathbb{Z}^{n_1}$ de kapalı bir κ_1 -yüzey olsun. Burada

Şekil 2.6. MSS'_{18} ve MSS_{18}

$$A_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,8).h} MSC_8^*, \quad A_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,4).h} MSC_4^* \quad \text{veya} \quad A_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,8).h} MSC_8'^*$$

ve ayrıca,

$$A'_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,8).h} Int(MSC_8^*), \quad A'_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,4).h} Int(MSC_4^*) \quad \text{veya} \\ A'_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0,8).h} Int(MSC_8'^*)$$

dır. $f : A_{\kappa_0} \rightarrow f(A_{\kappa_0}) \subset S'_{\kappa_1}$ bir (κ_0, κ_1) -izomorfizm olmak üzere

$$S'_{\kappa_1} = S_{\kappa_1} - f(A'_{\kappa_0}) \quad \text{ve} \quad S'_{\kappa_0} = S_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0}$$

dır. $S'_{\kappa_0} \cup S'_{\kappa_1}$ ayrık birleşimi üzerinde, $i : A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0} \rightarrow S'_{\kappa_0}$ dönüşümü kapsama dönüşümü olsun. S_{κ_0} dan A'_{κ_0} nün çıkarılmasıyla ve $A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0}$ ile $f(A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0})$ nün denkliğinden aşağıdaki gibi tanımlanan bir $S'_{\kappa_0} \cup S'_{\kappa_1} / \sim$ bölüm uzayı elde edilir:

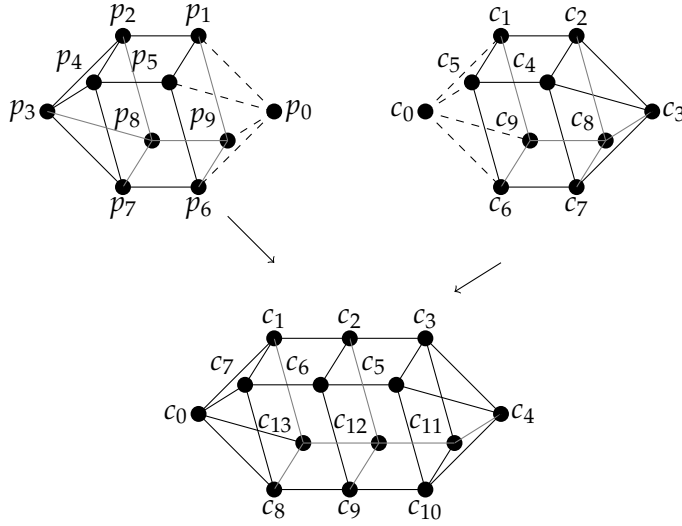
$$x \in A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0} \quad \text{için} \quad i(x) \sim f(x) = y \in S'_{\kappa_1}$$

denklik sınıflarının kümesine bağlantılı toplam denir ve $S_{\kappa_0} \# S_{\kappa_1}$ ile gösterilir.

Örnek 2.25 $MSS_{18} \# MSS_{18}$ bağlantılı toplamını ele alalım.

2.4. Dijital Kapalı Yollar

Tanım 2.26 [3] Bir X dijital görüntüsünde dijital κ -yol $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $(2, \kappa)$ -süreklidir. Ayrıca $f(0) = f(m)$ ise f e dijital κ -kapalı yol (loop) ve $f(0)$ a da f kapalı yolunun baz noktası denir. f sabit fonksiyonsa f dönüşümüne aşikar kapalı yol denir.

Şekil 2.7. $MSS_{18} \# MSS_{18}$

Örnek 2.27 $K, [0, 1]_{\mathbb{Z}}^3$ birim küpü ve $X = K \setminus \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ olsun.

$f : [0, 6]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ fonksiyonu $f(0) = f(6) = (1, 0, 0)$, $f(1) = (1, 1, 0)$, $f(2) = (0, 1, 0)$, $f(3) = (0, 1, 1)$, $f(4) = (0, 0, 1)$, $f(5) = (1, 0, 1)$ şeklinde tanımlansın. f bir kapalı yoldur.

X de f ve g dijital κ -yolları için f in bittiği yerde g başlasın; yani $f : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ve $g : [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dijital yolları için $f(m_1) = g(0)$ olsun. Bu durumda f ve g nin çarpımı olan $(f * g) : [0, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ fonksiyonu

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \\ g(t - m_1), & t \in [m_1, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.28 [3] $m_1 \leq m_2$ olmak üzere $f : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ kapalı yolunun aşikar genişlemesi

$$f'(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq m_1 \\ f(m_1), & m_1 \leq t \leq m_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f' : [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ fonksiyonudur.

Tanım 2.29 [6] Aynı $p \in X$ baz noktalı f_0, f_1 dijital kapalı yollarının aşikar genişlemeleri arasında uç noktaları sabit tutan bir H homotopisi varsa f_0 ve f_1 dijital kapalı yolları aynı $[f]_X$ kapalı yol sınıfına aittir denir.

Önerme 2.30 [3] $f_1, f_2, g_1, g_2, (X, x_0)$ noktalı dijital görüntüsünde dijital kapalı yollar olsun. $f_2 \in [f_1]_X$ ve $g_2 \in [g_1]_X$ ise $f_2 * g_2 \in [f_1 * g_1]_X$ dir.

İspat: $f_2 \in [f_1]_X$ olduğundan f_1 ile f_2 nin sırasıyla $f'_1, f'_2 : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ aşikar genişlemeleri arasında bir noktalı $F : [0, m]_{\mathbb{Z}} \times [0, p]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ homotopisi vardır. Benzer şekilde $g_2 \in [g_1]_X$ olduğundan g_1 ile g_2 nin sırasıyla $g'_1, g'_2 : [0, m']_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ aşikar genişlemeleri arasında bir noktalı $G : [0, m']_{\mathbb{Z}} \times [0, q]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ homotopisi vardır. $H : [0, m + m']_{\mathbb{Z}} \times [0, p + q]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ homotopisini

$$H(s, t) = \begin{cases} f'_1(s), & s \in [0, m]_{\mathbb{Z}}, t \in [0, p]_{\mathbb{Z}} \\ g'_1(s - m), & s \in [m, m + m']_{\mathbb{Z}}, t \in [0, p]_{\mathbb{Z}} \\ f'_2(s), & s \in [0, m]_{\mathbb{Z}}, t \in [p, p + q]_{\mathbb{Z}} \\ g'_2(s - m), & s \in [m, m + m']_{\mathbb{Z}}, t \in [p, p + q]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. f'_1, g'_1, f'_2 ve g'_2 dijital sürekli olduğundan H da dijital sürekli dir.

$$H(s, 0) = (f'_1 * g'_1)(s) = \begin{cases} f'_1(s), & s \in [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ g'_1(s - m), & s \in [m, m + m']_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

ve

$$H(s, p + q) = (f'_2 * g'_2)(s) = \begin{cases} f'_2(s), & s \in [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ g'_2(s - m), & s \in [m, m + m']_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

oldüğundan $H, f'_1 * g'_1$ ile $f'_2 * g'_2$ arasında bir noktalı homotopidir. Bu durumda $f_2 * g_2 \in [f_1 * g_1]_X$ dir. \square

2.5. Dijital Temel Grup

Bir X dijital görüntüsünde x_0 baz noktalı $[f]_X$ κ -kapalı yol sınıflarının kümesi $\Pi_1^{\kappa}(X, x_0)$ olsun.

Önerme 2.30 dan,

$$[f]_X \cdot [g]_X = [f * g]_X$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi $\Pi_1^X(X, x_0)$ üzerinde iyi tanımlıdır.

Lemma 2.31 [3] ' ' çarpma işlemi $\Pi_1^X(X, x_0)$ üzerinde birleşmelidir.

İspat: $f_1, f_2, f_3, (X, x_0)$ noktalı dijital görüntüsünde dijital kapalı yollar olsun.

$i \in \{1, 2, 3\}$ için $f_i : [0, m_i]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ olsun. Bu durumda $(f_1 * f_2) * f_3$ ve $f_1 * (f_2 * f_3)$ çarpımlarının her biri

$$F(t) = \begin{cases} f_1'(t), & 0 \leq t \leq m_1 \\ f_2'(t - m_1), & m_1 \leq t \leq m_1 + m_2 \\ f_3'(t - m_1 - m_2), & m_1 + m_2 \leq t \leq m_1 + m_2 + m_3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F : [0, m_1 + m_2 + m_3]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ yoluna eşittir. Böylece

$$\begin{aligned} ([f_1]_X \cdot [f_2]_X) \cdot [f_3]_X &= [f_1 * f_2]_X \cdot [f_3]_X = [(f_1' * f_2') * f_3']_X \\ &= [f_1' * (f_2' * f_3')]_X = [f_1']_X \cdot [f_2' * f_3']_X \\ &= [f_1']_X \cdot ([f_2']_X \cdot [f_3']_X) \end{aligned}$$

olur. □

Lemma 2.32 [3] (X, x_0) noktalı dijital görüntü, $\bar{x}_0 : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, görüntüsü $\{x_0\}$ olan bir aşikar kapalı yol olsun. Bu durumda $[\bar{x}_0]_X, \Pi_1^X(X, x_0)$ in birim elemanıdır.

İspat: $[f]_X \in \Pi_1^X(X, x_0)$ sınıfından $f : [0, m']_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dönüşümünü alalım.

$$\begin{aligned} (f * \bar{x}_0)(t) &= \begin{cases} f(t), & t \in [0, m']_{\mathbb{Z}} \\ \bar{x}_0(t - m'), & t \in [m', m' + m]_{\mathbb{Z}} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(t), & t \in [0, m']_{\mathbb{Z}} \\ x_0, & t \in [m', m' + m]_{\mathbb{Z}} \end{cases} \\ (\bar{x}_0 * f)(t) &= \begin{cases} \bar{x}_0(t), & t \in [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ f(t - m), & t \in [m, m + m']_{\mathbb{Z}} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_0, & t \in [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ f(t - m), & t \in [m, m + m']_{\mathbb{Z}} \end{cases} \end{aligned}$$

$f * \bar{x}_0$ ve $\bar{x}_0 * f$, f in aşikar genişlemeleridir. Bu durumda $f * \bar{x}_0$ ve $\bar{x}_0 * f$ aynı kapalı yol sınıfına aittir. Böylece $[\bar{x}_0]_X, \Pi_1^\kappa(X, x_0)$ in birim elemanıdır. \square

Lemma 2.33 [3] $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X, \Pi_1^\kappa(X, x_0)$ in bir elemanı ise

$$g(t) = f(m - t), \quad t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$$

şeklinde tanımlanan $g : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ fonksiyonu $\Pi_1^\kappa(X, x_0)$ da $[f]_X^{-1}$ in elemanıdır.

İspat: $f * g$ ve $g * f$ fonksiyonlarının her birinin görüntüsü $\{x_0\}$ olan

$\bar{x}_0 : [0, 2m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ sabit fonksiyonu ile aynı kapalı yol sınıfına ait olduğunu göstermeliyiz. $f * g : [0, 2m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ kapalı yolu

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \begin{cases} f(t), & t \in [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ g(t - m), & t \in [m, 2m]_{\mathbb{Z}} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(t), & t \in [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ f(2m - t), & t \in [m, 2m]_{\mathbb{Z}} \end{cases} \end{aligned}$$

olur. $H : [0, 2m]_{\mathbb{Z}} \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ fonksiyonunu

$$H(t_1, t_2) = \begin{cases} (f * g)(t_1), & 0 \leq t_1 \leq m - t_2 \text{ veya } m + t_2 \leq t_1 \leq 2m \\ (f * g)(m - t_2), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak alalım. Her $t_2 \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için $H(0, t_2) = x_0$ ve $H(2m, t_2) = x_0$ elde edilir.

$H, f * g$ ile \bar{x}_0 arasında bir noktalı dijital homotopidir. Böylece $f * g \in [\bar{x}_0]_X$ olur.

Benzer şekilde $g * f \in [\bar{x}_0]_X$ olduğu da gösterilebilir. \square

Teorem 2.34 [3] $'\cdot'$ çarpma işlemi altında $\Pi_1^\kappa(X, x_0)$ bir gruptur. (Bu gruba (X, x_0) in κ -temel grubu denir.)

İspat: Lemma 2.31, Lemma 2.32 ve Lemma 2.33 den ispat elde edilir. \square

Önerme 2.35 [3] (X, κ) bir dijital görüntü, $x_0 \in X$ olsun. X, κ -noktalı büzülebilir ise $\Pi_1^\kappa(X, x_0)$ aşikar gruptur. ($\Pi_1^\kappa(X, x_0)$ in tek elemanı $[\bar{x}_0]_X$ dir.)

İspat: (X, κ) dijital görüntüsü κ -noktalı büzülebilir ise

- Her $x \in X$ için $H(x, 0) = x$;
- Her $x \in X$ için $H(x, m) = x_0$;
- Her $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için $H(x_0, t) = x_0$;

olacak şekilde bir $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dijital homotopisi vardır. $f : [0, n]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dijital kapalı yolu $[f]_X$ in herhangi bir elemanı olsun. Her $(s, t) \in [0, n]_{\mathbb{Z}} \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için

$$G(s, t) = H(f(s), t)$$

fonksiyonu f ile \bar{x}_0 arasında noktalı dijital homotopidir. Böylece $[f]_X = [\bar{x}_0]_X$ elde edilir. \square

Örnek 2.36 [3] MSC'_8 8-büzülebilir olduğundan temel grubu aşikar gruptur.

Önerme 2.37 [3] $(X, \kappa_0), \mathbb{Z}^{n_0}$ da, $(Y, \kappa_1), \mathbb{Z}^{n_1}$ de dijital görüntüler olsun.

$h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dönüşümü (κ_0, κ_1) -izomorfizm ise $h_*([f]) = [h \circ f]$ eşitliğiyle tanımlı $h_* : \Pi_1^{\kappa_0}(X, x_0) \rightarrow \Pi_1^{\kappa_1}(Y, y_0)$ indirgenmiş dönüşümü dijital temel grup izomorfizmidir.

İspat: $h, (\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizm ise (κ_1, κ_0) -sürekli $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ dönüşümü için

$$g \circ h \simeq_{(\kappa_0, \kappa_0)} 1_X \quad \text{ve} \quad h \circ g \simeq_{(\kappa_1, \kappa_1)} 1_Y$$

olur. $[f_0] \in \Pi_1^{\kappa_0}(X, x_0), [g_0] \in \Pi_1^{\kappa_1}(Y, y_0)$ için

$$(g_* \circ h_*)([f_0]) = [(g \circ h) \circ f_0] = [f_0]$$

$$(h_* \circ g_*)([g_0]) = [(h \circ g) \circ g_0] = [g_0]$$

dır. Bu durumda h_* ve g_* ters fonksiyonlardır. h_* in homomorfizm olduğunu gösterelim:

$$h_*([f_0 \cdot f_1]) = [(h \circ f_0) \cdot (h \circ f_1)] = h_*([f_0]) * h_*([f_1])$$

Benzer şekilde g_* da homomorfizmdir. h_* dönüşümü bir dijital temel grup izomorfizmidir. \square

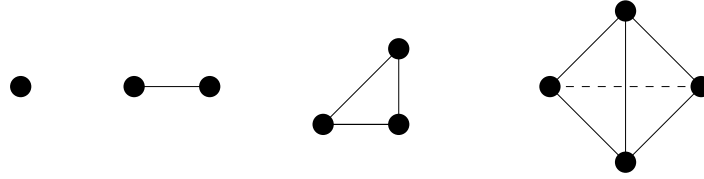
3. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE HOMOLOJİ GRUPLARI

Cebirsel topolojide homoloji gruplarının hesaplanması, yüksek dereceli homotopi gruplarının hesaplanmasından daha kolaydır. Bu nedenle bir dijital görüntünün homoloji grubunun hesaplanması homotopi grubunun hesaplanmasına tercih edilir.

Tanım 3.1 [7] $S, (X, \kappa) \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ dijital görüntüsünün boştan farklı alt kümesi olsun.

- $s \in S$ ve p ile q, s nin ayrık noktaları olmak üzere p ve q, κ -yakın;
- $s \in S$ ve $\emptyset \neq t \subset s$ ise $t \in S$;

şartları sağlanıyorsa S nin elemanlarına (X, κ) nin dijital simpleksleri denir. Bir S simpleksi m -simplekstir öyle ki $|S| = m + 1$ dir. P , bir dijital m -simpleks olsun. P' , P nin boştan farklı öz alt kümesi ise P' ne P nin bir yüzü denir.



Şekil 3.1. (2,0), (2,1), (8,2) ve (26,3)-simpleksler

Tanım 3.2 [7] Negatif olmayan d tamsayısı için $0 \leq m \leq d$ olmak üzere (X, κ) , dijital m -simplekslerin sonlu koleksiyonu olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X, κ) ya sonlu dijital simpleksler kompleksi denir;

- P, X e aitse P nin her yüzü de X e aittir.
- $P, Q \in X$ ise $P \cap Q$ ya boştur ya da P ve Q nun ortak yüzüdür.

X dijital simpleksler kompleksinin m tane simpleksi varsa X in boyutu m dir.

Tanım 3.3 [7] $C_q^\kappa(X)$, X de her dijital (κ, q) -simpleksi baz olan serbest abel gruptur.

Sonuç 3.4 [1] $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ de m boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olsun. Her $q > m$ için, $C_q^\kappa(X)$ bir aşikar gruptur.

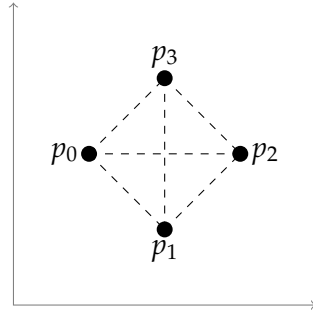
İspat: X , m boyutlu bir dijital simpleksler kompleksinde $q > m$ için (κ, q) -simpleks mevcut olmadığından $C_q^\kappa(X) = \{0\}$ dir. \square

Tanım 3.5 [7] $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ de m boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olsun. \widehat{p}_i, p_i elemanının simpleksten çıkarılması olmak üzere;

$$\partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = \begin{cases} \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_i, \dots, p_q \rangle, & m \geq q \\ 0, & m < q \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\partial_q : C_q^\kappa(X) \rightarrow C_{q-1}^\kappa(X)$ homomorfizmine sınır operatörü denir.

Örnek 3.6 MSC'_8 dijital görüntüsünü ele alalım.



Şekil 3.2. MSC'_8

$MSC'_8 = \{p_0 = (1,2), p_1 = (2,1), p_2 = (3,2), p_3 = (2,3)\} \subset \mathbb{Z}^2$ ve $p_0 < p_1 < p_3 < p_2$ olsun. 0-simpleksler

$$\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle$$

ve 1-simpleksler

$$e_0 = \langle p_0 p_3 \rangle, e_1 = \langle p_3 p_2 \rangle, e_2 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_3 = \langle p_0 p_1 \rangle$$

şeklindedir. 1-simplekslere sınır operatörünü uygularsak

$$\partial_1(e_0) = \langle p_3 \rangle - \langle p_0 \rangle$$

$$\partial_1(e_1) = \langle p_2 \rangle - \langle p_3 \rangle$$

$$\partial_1(e_2) = \langle p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle$$

$$\partial_1(e_3) = \langle p_1 \rangle - \langle p_0 \rangle$$

elde edilir.

Önerme 3.7 [1] Her $1 \leq q \leq m$ için $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ dir.

İspat: Her $\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \in C_q^k(X)$ için

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) &= \partial_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (\langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q \rangle) \\ &\quad + \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} (\langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle) \\ \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} (\langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle) &= \sum_{k < l} (-1)^{k+l+1} (\langle p_0, \dots, \hat{p}_k, \dots, \hat{p}_l, \dots, p_q \rangle) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = 0$$

elde edilir. □

Sonuç 3.8 [1] $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ de m boyutlu dijital simpleksler kompleksi olsun.

$$C_*^\kappa(X) : 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir zincir komplekstir.

İspat: $C_q^\kappa(X)$ serbest abel grup, ∂_q homomorfizm ve $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ olduğundan

$$C_*^\kappa(X) : 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir zincir kompleks olur. □

Şimdi q -boyutlu dijital homoloji grubunu tanımlayalım;

Tanım 3.9 [1] (X, κ) , dijital simpleksler kompleksi olsun.

- $Z_q^\kappa(X) = \text{Ker } \partial_q$ grubuna dijital simpleksler q - devirlerin grubu denir.
- $B_q^\kappa(X) = \text{Im } \partial_{q+1}$ grubuna dijital simpleksler q - sınırların grubu denir.
- $H_q^\kappa(X) = Z_q^\kappa(X) / B_q^\kappa(X)$ bölüm grubuna q . dijital simpleksler homoloji grubu denir.

Tanım 3.10 [7] $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ dijital görüntüler arasında bir fonksiyon olsun. X de κ_0 -yakınlıklı her P dijital (κ_0, m) -simpleksi için $\varphi(P)$, $n \leq m$ için Y de (κ_1, n) -simpleks ise φ ye dijital simpleksler dönüşüm denir.

Tanım 3.11 [7] $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ dijital simpleksler dönüşüm olsun. $q \geq 0$ için $\varphi_\# : C_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow C_q^{\kappa_1}(Y)$ homomorfizmi

$$\varphi_\#(\langle p_0, \dots, p_q \rangle) = \langle \varphi(p_0), \dots, \varphi(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.12 [1] $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ bir dijital (κ_0, κ_1) -izomorfizm ise

$$H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y)$$

dir.

İspat: $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ bir dijital (κ_0, κ_1) -izomorfizm olsun. Bu durumda f sürekli olduğundan " $x_1, x_2 \in X$, x_1 ve x_2 , κ_0 -yakındır $\Leftrightarrow f(x_1)$ ve $f(x_2)$, κ_1 -yakın veya $f(x_1) = f(x_2)$ dir" koşulunu sağlar. $m \geq q \geq 0$ olsun.

$$f_{\#} : C_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow C_q^{\kappa_1}(Y)$$

$$\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \rightarrow f_{\#}(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = \langle f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlanır. $f_{\#}$ dönüşümü f nin tanımından dolayı iyi tanımlı ve bijeksiyondur.

Böylece $C_q^{\kappa_0}(X) \cong C_q^{\kappa_1}(Y)$ elde edilir. Sonuç olarak

$$H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y)$$

olur. □

Teorem 3.13 [1] (X, κ) tek noktalı dijital görüntü ise

$$H_q^{\kappa}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dir.

İspat: $X = \{x_0\}$ olsun. $m \geq q > 0$ için X in içerdiği dijital (κ, q) -simpleks mevcut olmadığından $C_q^{\kappa}(X) = 0$ dir. Böylece, tüm $m \geq q > 0$ için $H_q^{\kappa}(X) = 0$ dir.

$q = 0$ olsun. $C_0^{\kappa}(X)$, dijital $(\kappa, 0)$ -simpleks bazlı serbest değişmeli grup olduğundan $C_0^{\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$ dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\kappa}(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinde $\text{Im } \partial_1 = 0$ ve $\text{Ker } \partial_0 \cong \mathbb{Z}$ dir. Böylece $H_0^k(X) \cong \mathbb{Z}$ dir. \square

Teorem 3.14 [1] X dijital basit kapalı κ -eğri ise

$$H_q^k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dur.

İspat: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_q\} \subset \mathbb{Z}^2$ bir dijital basit kapalı κ -eğri olsun. Bu durumda, x_i ve x_j , κ -yakındır $\Leftrightarrow i = j \pm 1 \pmod{q}$ dur.

$$\begin{aligned} C_0^k(X) &= \{\langle x_0 \rangle, \langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_q \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1} \\ C_1^k(X) &= \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_q, x_0 \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1} \end{aligned}$$

dir. $m > q > 1$ için $C_q^k(X) = 0$ olduğundan $H_q^k(X) = 0$ dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^k(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^k(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinden $\text{Im } \partial_2 = 0$ ve $\text{Ker } \partial_0 \cong \mathbb{Z}^{q+1}$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \partial_1(n_0 \langle x_0, x_1 \rangle + n_1 \langle x_1, x_2 \rangle + \dots + n_q \langle x_q, x_0 \rangle) = \\ n_0(x_1 - x_0) + n_1(x_2 - x_1) + \dots + n_q(x_0 - x_q) \end{aligned}$$

eşitliğinden $\text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}^q$ dur.

$$\begin{aligned} \partial_1(n_0 \langle x_0, x_1 \rangle + n_1 \langle x_1, x_2 \rangle + \dots + n_q \langle x_q, x_0 \rangle) &= 0 \\ n_0(x_1 - x_0) + n_1(x_2 - x_1) + \dots + n_q(x_0 - x_q) &= 0 \\ (n_q - n_0)x_0 + (n_0 - n_1)x_1 + \dots + (n_{q-1} - n_q)x_q &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği çözüldüğünde $n_0 = n_1 = \dots = n_q = n$ olur. Buradan $\text{Ker } \partial_1 \cong \mathbb{Z}$ dir. Sonuç olarak $H_1^k(X) = \mathbb{Z} = H_0^k(X)$ elde edilir. \square

Teorem 3.15 [1] $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü κ -yol bağlantılı ise $H_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$ dir.

İspat: X in 0-simplekslerinin $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle$ olduğunu kabul edelim.

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dizisi elde edilir. ∂_0 sıfır homomorfizmi olduğundan

$$Z_0^\kappa(X) = \text{Ker } \partial_0 = C_0^\kappa(X)$$

olur. $C_0^\kappa(X)$ in elemanları $\sum_{i=0}^n k_i p_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$ şeklindedir. İddia ediyoruz ki

$$B_0^\kappa(X) = \left\{ \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C_0^\kappa(X) \mid \sum k_i = 0 \right\} \quad (*)$$

dır. İddiamız doğruysa,

$$\varphi : Z_0^\kappa(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum k_i p_i \rightarrow \sum k_i$$

dönüşümü örtendir ve çekirdeği $B_0^\kappa(X)$ dir. Birinci İzomorfizm Teoreminden $H_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$ olur. (*) eşitliğini göstermek için çift taraflı kapsamayı göstereyim.

$$\gamma = \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C_0^\kappa(X) \quad \text{ve} \quad \sum k_i = 0$$

olsun. Herhangi bir $p \in X$ seçersek X , κ -yol bağlantılı olduğundan her $p_i \in X$ için p den p_i ye bir κ -yol vardır. $\sigma_i : p$ den p_i ye olan κ -yolu oluşturan dijital 1-simplekslerin kümesi olsun. $\partial_1(\sigma_i) = p_i - p$ olduğu açıktır. $\sum k_i \sigma_i \in C_1^\kappa(X)$ dir ve

$$\partial_1(\sum k_i \sigma_i) = \sum k_i \partial_1(\sigma_i) = \sum k_i (p_i - p) = \sum k_i p_i - (\sum k_i) p$$

olur. $\sum k_i = 0$ olduğundan

$$\gamma = \sum_{i=0}^n k_i p_i = \partial_1(\sum k_i \sigma_i) \in B_0^k(X)$$

dır. Tersine, $\gamma \in B_0^k(X)$ ise $\gamma = \partial_1(\sum k_i e_i)$, $e_i \in C_1^k(X)$ yani e_i , 1-simplekstir ve $e_i = \langle p_{r_i}, p_{s_i} \rangle$ şeklindedir. Böylece

$$\gamma = \sum k_i \partial_1(e_i) = \sum k_i \partial_1(\langle p_{r_i}, p_{s_i} \rangle) = \sum k_i (p_{s_i} - p_{r_i}) = \sum k_i p_{s_i} - \sum k_i p_{r_i}$$

olur. k_i iki kez ve zıt işaretli olarak tekrarladığından $\sum k_i = 0$ dır. Böylece

$$H_0^k(X) = Z_0^k(X) / B_0^k(X) \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir. □

Örnek 3.16 X, Y ye dijital homotopi denk iken $H_q^{k_0}(X)$ ve $H_q^{k_1}(Y)$ izomorf olmayabilir.

$$MSC'_8 = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

dijital görüntüsünü ele alalım. MSC'_8 dijital basit kapalı 8-eğri ve 8-büzülebilir bir eğridir. Bu nedenle tek noktalı uzaya dijital (8,8)-homotopi denktir. Teorem 3.13 ve 3.14 den $H_1^8(MSC'_8) = \mathbb{Z}$ ve $H_1^8(\{*\}) = 0$ dır. Sonuç olarak $MSC'_8 \simeq_{(8,8)} \{*\}$ iken $H_1^8(MSC'_8)$ ve $H_1^8(\{*\})$ izomorf değildir.

Teorem 3.17 [1] (K, κ) , m boyutlu dijital simpleksler kompleksi olsun.

1. Her $q \geq 0$ için $H_q^k(K)$ sonlu üretilen gruptur.
2. Tüm $q > m$ için $H_q^k(K) = 0$ dır.
3. $H_m^k(K)$ serbest abel gruptur.

İspat:

1. $C_q^\kappa(K)$ sonlu üretilen bir gruptur. Dolayısıyla alt grubu $Z_q^\kappa(K)$ da sonlu üretilen olup bölüm grubu $H_q^\kappa(K)$ da sonlu üretilen gruptur.
2. Sonuç 3.4 den her $q > m$ için $H_q^\kappa(K) = 0$ dır.
3. $C_{m+1}^\kappa(K) = 0$ olduğundan $B_m^\kappa(K) = 0$ dır. Bu durumda

$$H_m^\kappa(K) = Z_m^\kappa(K)$$

elde edilir. Serbest abel grubun alt grubu da serbest abel grup olduğundan $H_m^\kappa(K)$ serbest abel gruptur. \square

Teorem 3.18 [7] Her bir $q \geq 0$ için H_q^κ , simpleksler kompleksler ve simpleksler dönüşümler kategorisinden abel gruplar kategorisine bir kovaryant funktordur.

İspat: $H_q^{\kappa_0}(X)$, dijital simpleksler kompleks olan X objesi üzerinde tanımlanmıştır.

$\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ bir dijital simpleksler dönüşüm ise

$$\varphi_* : H_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow H_q^{\kappa_1}(Y)$$

dönüşümü $z \in Z_q^{\kappa_0}(X)$ olmak üzere

$$\varphi_*(z + B_q^{\kappa_0}(X)) = \varphi_\#(z) + B_q^{\kappa_1}(Y)$$

şeklinde tanımlanır. $1_{(X, \kappa_0)} : (X, \kappa_0) \rightarrow (X, \kappa_0)$ birim dönüşümü için

$$(1_{(X, \kappa_0)})_* : H_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow H_q^{\kappa_0}(X)$$

dönüşümünde $z \in Z_q^{\kappa_0}(X)$ için

$$(1_{(X, \kappa_0)})_*(z + B_q^{\kappa_0}(X)) = (1_{(X, \kappa_0)})_\#(z) + B_q^{\kappa_0}(X) = z + B_q^{\kappa_0}(X)$$

olur. Bu durumda $(1_{(X,\kappa_0)})_* = 1_{H_q^{\kappa_0}(X)}$ bulunur. $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ ve $\psi : (Y, \kappa_1) \rightarrow (W, \kappa_2)$ dijital simpleksler dönüşümleri için

$$\varphi_* : H_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow H_q^{\kappa_1}(Y) \quad \text{ve} \quad \psi_* : H_q^{\kappa_1}(Y) \rightarrow H_q^{\kappa_2}(W)$$

dönüşümlerinde $z \in Z_q^{\kappa_0}(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\psi_* \circ \varphi_*)(z + B_q^{\kappa_0}(X)) &= \psi_*(\varphi_*(z + B_q^{\kappa_0}(X))) \\ &= \psi_*(\varphi_{\#}(z) + B_q^{\kappa_1}(Y)) \\ &= \psi_{\#}(\varphi_{\#}(z)) + B_q^{\kappa_2}(W) \\ &= (\psi_{\#} \circ \varphi_{\#})(z) + B_q^{\kappa_2}(W) \\ &= (\psi \circ \varphi)_{\#}(z) + B_q^{\kappa_2}(W) \\ &= (\psi \circ \varphi)_*(z + B_q^{\kappa_0}(X)) \end{aligned}$$

olur. Buradan $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ elde edilir. \square

Örnek 3.19 [7] $X = \{p_0 = (0,0), p_1 = (1,0), p_2 = (1,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$, 8-yakınlıklı bir dijital görüntü olsun. X in dijital simpleksler homoloji grubu

$$H_q^8(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

dır. X in noktalarının $p_0 < p_1 < p_2$ şeklinde sıralandığını kabul edelim. X , iki boyutlu dijital bir görüntü olduğundan $q > 2$ için

$$H_q^8(X) = \{0\}$$

dır. $C_0^8(X)$, $C_1^8(X)$ ve $C_2^8(X)$ serbest abel grupların bazları sırasıyla

$$\begin{aligned} &\{\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle\}, \\ &\{\langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_0 p_2 \rangle\}, \\ &\{\langle p_0 p_1 p_2 \rangle\} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^8(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1^8(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^8(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisini elde ederiz. İm $\partial_3 = B_2^8(X) = \{0\}$ olduğunu görebiliriz.

$$\begin{aligned} \partial_2(a\langle p_0p_1p_2 \rangle) &= a(\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_0p_2 \rangle + \langle p_0p_1 \rangle) \\ \partial_2(a\langle p_0p_1p_2 \rangle) = 0 &\Rightarrow a(\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_0p_2 \rangle + \langle p_0p_1 \rangle) = 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\text{Ker } \partial_2 = Z_2^8(X) = \{0\}$ dir. Böylece

$$H_2^8(X) = Z_2^8(X) / B_2^8(X) = \{0\}$$

elde edilir.

$$B_1^8(X) = \text{Im } \partial_2 = \{a(\langle p_0p_1 \rangle + \langle p_1p_2 \rangle - \langle p_0p_2 \rangle) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial_1(a\langle p_0p_1 \rangle + b\langle p_0p_2 \rangle + c\langle p_1p_2 \rangle) &= a\partial_1(\langle p_0p_1 \rangle) + b\partial_1(\langle p_0p_2 \rangle) + c\partial_1(\langle p_1p_2 \rangle) \\ &= a(\langle p_1 \rangle - \langle p_0 \rangle) + b(\langle p_2 \rangle - \langle p_0 \rangle) + c(\langle p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle) \\ &= (-a - b)\langle p_0 \rangle + (a - c)\langle p_1 \rangle + (b + c)\langle p_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Böylece $a = -b = c$ elde edilir. Buradan

$$Z_1^8(X) = \text{Ker } \partial_1 = \{a(\langle p_0p_1 \rangle + \langle p_1p_2 \rangle - \langle p_0p_2 \rangle) \mid a \in \mathbb{Z}\} = B_1^8(X)$$

olur. Böylece

$$H_1^8(X) = Z_1^8(X) / B_1^8(X) = \{0\}$$

elde edilir.

$$B = \{a\langle p_0 \rangle + b\langle p_1 \rangle + c\langle p_2 \rangle \mid \{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}, a + b + c = 0\} \cong \mathbb{Z}^2$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$$

∂_1 in tanımından $\text{Im } \partial_1 = B_0^8(X) \subset B$ olur. Şimdi $B \subset B_0^8(X)$ olduğunu gösterelim:

$a\langle p_0 \rangle + b\langle p_1 \rangle - (a+b)\langle p_2 \rangle \in B$ için

$$a\langle p_0 \rangle + b\langle p_1 \rangle - (a+b)\langle p_2 \rangle = \partial_1(-a\langle p_0 p_2 \rangle - b\langle p_1 p_2 \rangle) \in B_0^8(X)$$

olduğundan $B \subset B_0^8(X)$ dir. Buradan $B = B_0^8(X) \cong \mathbb{Z}^2$ elde edilir.

$$\text{Ker } \partial_0 = Z_0^8(X) = \{a_0\langle p_0 \rangle + a_1\langle p_1 \rangle + a_2\langle p_2 \rangle \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2\} \cong \mathbb{Z}^3$$

bulunur. Bu durumda

$$H_0^8(X) = Z_0^8(X) / B_0^8(X) \cong \mathbb{Z}$$

olur. Böylece

$$H_q^8(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 3.20 [7] $MSC'_8 = \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$ nün simpleksler homoloji grubu

$$H_q^8(MSC'_8) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dir.

İspat: MSC'_8 nün noktalarını $\{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1), p_2 = (0,1), p_3 = (1,0)\}$ olarak gösterelim ve bu noktaların $p_0 < p_1 < p_2 < p_3$ şeklinde sıralandığını kabul edelim. MSC'_8 iki boyutlu dijital bir görüntü olduğundan $q > 2$ için

$$H_q^8(MSC'_8) = \{0\}$$

dir. $C_0^8(MSC'_8)$ ve $C_1^8(MSC'_8)$ serbest abel grupların bazları sırasıyla

$$\{\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle\}, \langle p_3 \rangle\},$$

$$\{\langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_0 p_3 \rangle, \langle p_2 p_3 \rangle\},$$

dür. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^8(MSC'_8) \xrightarrow{\partial_1} C_0^8(MSC'_8) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi bulunur. $\text{Im } \partial_2 = B_1^8(MSC'_8) = \{0\}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial_1(a\langle p_0 p_1 \rangle + b\langle p_1 p_2 \rangle + c\langle p_0 p_3 \rangle + d\langle p_2 p_3 \rangle) &= a\partial_1(\langle p_0 p_1 \rangle) + b\partial_1(\langle p_1 p_2 \rangle) + c\partial_1(\langle p_0 p_3 \rangle) \\ &\quad + d\partial_1(\langle p_2 p_3 \rangle) \\ &= a(\langle p_1 \rangle - \langle p_0 \rangle) + b(\langle p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle) \\ &\quad + c(\langle p_3 \rangle - \langle p_0 \rangle) + d(\langle p_3 \rangle - \langle p_2 \rangle) \\ &= (-a - c)\langle p_0 \rangle + (a - b)\langle p_1 \rangle + (b - d)\langle p_2 \rangle \\ &\quad + (c + d)\langle p_3 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. $a = b = -c = d$ elde edilir. Buradan

$$Z_1^8(MSC'_8) = \text{Ker } \partial_1 = \{a(\langle p_0 p_1 \rangle + \langle p_1 p_2 \rangle - \langle p_0 p_3 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

olur.

$$H_1^8(MSC'_8) = Z_1^8(X) / B_1^8(X) \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir.

$$B_0^8(MSC'_8) = \{t_0\langle p_0 \rangle + t_1\langle p_1 \rangle + t_2\langle p_2 \rangle + (-t_0 - t_1 - t_2)\langle p_3 \rangle \mid t_i = 0, 1, 2, \forall p_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^3$$

ve

$$Z_0^8(MSC'_8) = \{k_0\langle p_0 \rangle + k_1\langle p_1 \rangle + k_2\langle p_2 \rangle + k_3\langle p_3 \rangle \mid k_i = 0, 1, 2, 3 \forall k_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^4$$

olduğundan

$$H_0^8(MSC'_8) = Z_0^8(X) / B_0^8(X) \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. Böylece

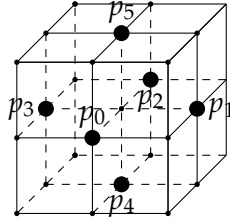
$$H_q^8(MSC'_8) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,1 \\ 0, & q \neq 0,1 \end{cases}$$

elde edilir. \square

Teorem 3.21 [7] MSS'_{18} nün dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,2 \\ 0, & q \neq 0,2 \end{cases}$$

dır.



Şekil 3.3. MSS'_{18}

İspat: MSS'_{18} nün noktalarını $\{p_0 = (1,1,0), p_1 = (0,2,0), p_2 = (-1,1,0), p_3 = (0,0,0), p_4 = (0,1,-1), p_5 = (0,1,1)\} \subset \mathbb{Z}^3$ olarak gösterelim ve bu noktaların $p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_1 < p_0$ şeklinde sıralandığını kabul edelim. MSS'_{18} dijital görüntüsünde $q > 3$ için

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \{0\}$$

dır. $C_0^{18}(MSS'_{18}), C_1^{18}(MSS'_{18})$ ve $C_2^{18}(MSS'_{18})$ bazları sırasıyla

0-simpleksler $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle$

1-simpleksler $e_0 = \langle p_2 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_2 p_3 \rangle, e_2 = \langle p_2 p_4 \rangle, e_3 = \langle p_2 p_5 \rangle, e_4 = \langle p_4 p_1 \rangle,$

$$e_5 = \langle p_3 p_4 \rangle, e_6 = \langle p_4 p_0 \rangle, e_7 = \langle p_5 p_1 \rangle, e_8 = \langle p_3 p_5 \rangle, e_9 = \langle p_5 p_0 \rangle,$$

$$e_{10} = \langle p_1 p_0 \rangle, e_{11} = \langle p_3 p_0 \rangle$$

2-simpleksler $\sigma_0 = \langle p_2 p_4 p_1 \rangle, \sigma_1 = \langle p_4 p_1 p_0 \rangle, \sigma_2 = \langle p_3 p_4 p_0 \rangle, \sigma_3 = \langle p_2 p_3 p_4 \rangle,$

$$\sigma_4 = \langle p_2 p_5 p_1 \rangle, \sigma_5 = \langle p_2 p_3 p_5 \rangle, \sigma_6 = \langle p_5 p_1 p_0 \rangle, \sigma_7 = \langle p_3 p_5 p_0 \rangle$$

olan serbest abel gruplardır. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir. $\text{Im } \partial_3 = B_2^{18}(MSS'_{18}) = \{0\}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial_2\left(\sum_{i=0}^7 n_i \sigma_i\right) &= n_0 \partial_2(\sigma_0) + n_1 \partial_2(\sigma_1) + n_2 \partial_2(\sigma_2) + n_3 \partial_2(\sigma_3) + n_4 \partial_2(\sigma_4) \\ &\quad + n_5 \partial_2(\sigma_5) + n_6 \partial_2(\sigma_6) + n_7 \partial_2(\sigma_7) \\ &= n_0(e_4 - e_0 + e_2) + n_1(e_{10} - e_6 + e_4) + n_2(e_6 - e_{11} + e_5) \\ &\quad + n_3(e_5 - e_2 + e_1) + n_4(e_7 - e_0 + e_3) + n_5(e_8 - e_3 + e_1) \\ &\quad + n_6(e_{10} - e_9 + e_7) + n_7(e_9 - e_{11} + e_8) \\ &= e_0(-n_0 - n_4) + e_1(n_3 + n_5) + e_2(n_0 - n_3) + e_3(n_4 - n_5) \\ &\quad + e_4(n_0 + n_1) + e_5(n_2 + n_3) + e_6(-n_1 + n_2) + e_7(n_4 + n_6) \\ &\quad + e_8(n_5 + n_7) + e_9(-n_6 + n_7) + e_{10}(n_1 + n_6) + e_{11}(-n_2 - n_7) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &e_0(-n_0 - n_4) + e_1(n_3 + n_5) + e_2(n_0 - n_3) + e_3(n_4 - n_5) + e_4(n_0 + n_1) \\ &+ e_5(n_2 + n_3) + e_6(-n_1 + n_2) + e_7(n_4 + n_6) + e_8(n_5 + n_7) + e_9(-n_6 + n_7) \\ &+ e_{10}(n_1 + n_6) + e_{11}(-n_2 - n_7) = 0 \end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$-n_0 = n_1 = n_2 = -n_3 = n_4 = n_5 = -n_6 = -n_7 = n$$

bulunur. Bu durumda

$$Z_2^{18}(MSS'_{18}) = \text{Ker } \partial_2 = \{n(-\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 - \sigma_6 - \sigma_7) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir. Böylece

$$H_2^{18}(MSS'_{18}) = Z_2^{18}(MSS'_{18}) / B_2^{18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

olur.

$$\partial_1\left(\sum_{i=0}^{11} k_i e_i\right) = k_0 \partial_1(e_0) + k_1 \partial_1(e_1) + k_2 \partial_1(e_2) + k_3 \partial_1(e_3) + k_4 \partial_1(e_4) + k_5 \partial_1(e_5)$$

$$\begin{aligned}
& +k_6\partial_1(e_6) + k_7\partial_1(e_7) + k_8\partial_1(e_8) + k_9\partial_1(e_9) + k_{10}\partial_1(e_{10}) + k_{11}\partial_1(e_{11}) \\
= & k_0(p_1 - p_2) + k_1(p_3 - p_2) + k_2(p_4 - p_2) + k_3(p_5 - p_2) \\
& +k_4(p_1 - p_4) + k_5(p_4 - p_3) + k_6(p_0 - p_4) + k_7(p_1 - p_5) \\
& +k_8(p_5 - p_3) + k_9(p_0 - p_5) + k_{10}(p_0 - p_1) + k_{11}(p_0 - p_3) \\
= & p_0(k_6 + k_9 + k_{10} + k_{11}) + p_1(k_0 + k_4 + k_7 - k_{10}) \\
& +p_2(-k_0 - k_1 - k_2 - k_3) + p_3(k_1 - k_5 - k_8 - k_{11}) \\
& +p_4(k_2 - k_4 + k_5 - k_6) + p_5(k_3 - k_7 + k_8 - k_9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& p_0(k_6 + k_9 + k_{10} + k_{11}) + p_1(k_0 + k_4 + k_7 - k_{10}) + p_2(-k_0 - k_1 - k_2 - k_3) \\
& +p_3(k_1 - k_5 - k_8 - k_{11}) + p_4(k_2 - k_4 + k_5 - k_6) + p_5(k_3 - k_7 + k_8 - k_9) = 0
\end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$k_3 = -k_0 - k_1 - k_2$$

$$k_6 = k_2 - k_4 + k_5$$

$$k_9 = -k_0 - k_1 - k_2 - k_7 + k_8$$

$$k_{10} = k_0 + k_4 + k_7$$

$$k_{11} = k_1 - k_5 - k_8$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
Z_1^8(MSS'_{18}) = \text{Ker}\partial_1 & = \{k_0e_0 + k_1e_1 + k_2e_2 + (-k_0 - k_1 - k_2)e_3 + k_4e_4 + k_5e_5 \\
& + (k_2 - k_4 + k_5)e_6 + k_7e_7 + k_8e_8 + (-k_0 - k_1 - k_2 - k_7 + k_8)e_9 \\
& + (k_0 + k_4 + k_7)e_{10} + (k_1 - k_5 - k_8)e_{11} \mid k_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\} \\
& \cong \mathbb{Z}^7
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$B_1^{18}(MSS'_{18}) = \text{Im}\partial_2 = \{t_0e_0 + t_1e_1 + t_2e_2 + (-t_0 - t_1 - t_2)e_3 + t_3e_4 + t_4e_5$$

$$\begin{aligned}
& + (t_2 - t_3 + t_4)e_6 + t_5e_7 + t_6e_8 + (-t_0 - t_1 - t_2 - t_5 + t_6)e_9 \\
& + (t_0 + t_3 + t_5)e_{10} + (-t_1 + t_4 + t_6)e_{11} \mid t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
& \cong \mathbb{Z}^7
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$H_1^{18}(MSS'_{18}) = Z_1^{18}(MSS'_{18})/B_1^{18}(MSS'_{18}) \cong \{0\}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
B_0^{18}(MSS'_{18}) = \text{Im}\partial_1 & = \{h_0\langle p_0 \rangle + h_1\langle p_1 \rangle + h_2\langle p_2 \rangle + h_3\langle p_3 \rangle + h_4\langle p_4 \rangle \\
& + (-h_0 - h_1 - h_2 - h_3 - h_4)\langle p_5 \rangle \mid i = 0, 1, 2, 3, 4 \forall h_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^5
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Z_0^{18}(MSS_{18}) & = \{n_0\langle p_0 \rangle + n_1\langle p_1 \rangle + n_2\langle p_2 \rangle + n_3\langle p_3 \rangle + n_4\langle p_4 \rangle + n_5\langle p_5 \rangle \\
& \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \forall n_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^6
\end{aligned}$$

olduğundan

$$H_0^{18}(MSS'_{18}) = Z_0^{18}(MSS'_{18})/B_0^{18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. Böylece

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

elde edilir. □

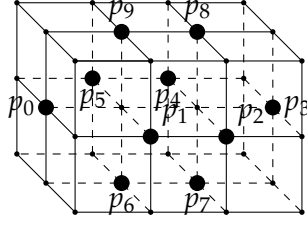
Teorem 3.22 [7] MSS_{18} in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır.

İspat: MSS_{18} in noktalarını

$\{p_0 = (0, 0, 1), p_1 = (1, 1, 1), p_2 = (1, 2, 1), p_3 = (0, 3, 1), p_4 = (-1, 2, 1),$
 $p_5 = (-1, 1, 1), p_6 = (0, 1, 0), p_7 = (0, 2, 0), p_8 = (0, 2, 2), p_9 = (0, 1, 2)\} \subset \mathbb{Z}^3$
olarak gösterelim ve bu noktaların $p_5 < p_4 < p_0 < p_6 < p_9 < p_7 < p_8 < p_3 < p_1 < p_2$
şeklinde sıralandığını kabul edelim. MSS_{18} dijital görüntüsünde $q > 3$ için

Şekil 3.4. MSS_{18}

$$H_7^{18}(MSS_{18}) = \{0\}$$

dir. $C_0^{18}(MSS_{18})$, $C_1^{18}(MSS_{18})$ ve $C_2^{18}(MSS_{18})$ serbest abel gruplarının bazıları sırasıyla

0-simpleksler $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle, \langle p_6 \rangle, \langle p_7 \rangle, \langle p_8 \rangle, \langle p_9 \rangle$

1-simpleksler $e_0 = \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_0 p_9 \rangle, e_2 = \langle p_5 p_0 \rangle, e_3 = \langle p_0 p_6 \rangle, e_4 = \langle p_9 p_8 \rangle,$

$$e_5 = \langle p_9 p_1 \rangle, e_6 = \langle p_5 p_9 \rangle, e_7 = \langle p_6 p_1 \rangle, e_8 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_9 = \langle p_5 p_6 \rangle,$$

$$e_{10} = \langle p_6 p_7 \rangle, e_{11} = \langle p_5 p_4 \rangle, e_{12} = \langle p_8 p_2 \rangle, e_{13} = \langle p_4 p_8 \rangle, e_{14} = \langle p_8 p_3 \rangle,$$

$$e_{15} = \langle p_4 p_3 \rangle, e_{16} = \langle p_4 p_7 \rangle, e_{17} = \langle p_3 p_2 \rangle, e_{18} = \langle p_7 p_2 \rangle, e_{19} = \langle p_7 p_3 \rangle$$

2-simpleksler $\sigma_0 = \langle p_0 p_9 p_1 \rangle, \sigma_1 = \langle p_0 p_6 p_1 \rangle, \sigma_2 = \langle p_5 p_0 p_6 \rangle, \sigma_3 = \langle p_5 p_0 p_9 \rangle,$

$$\sigma_4 = \langle p_4 p_8 p_3 \rangle, \sigma_5 = \langle p_4 p_7 p_3 \rangle, \sigma_6 = \langle p_8 p_3 p_2 \rangle, \sigma_7 = \langle p_7 p_3 p_2 \rangle$$

dir. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir. $\text{Im } \partial_3 = B_2^{18}(MSS_{18}) = \{0\}$ dir. Ayrıca

$$\partial_2 \left(\sum_{i=0}^7 n_i \sigma_i \right) = n_0 \partial_2(\sigma_0) + n_1 \partial_2(\sigma_1) + n_2 \partial_2(\sigma_2) + n_3 \partial_2(\sigma_3) + n_4 \partial_2(\sigma_4)$$

$$+ n_5 \partial_2(\sigma_5) + n_6 \partial_2(\sigma_6) + n_7 \partial_2(\sigma_7)$$

$$= n_0(e_5 - e_0 + e_1) + n_1(e_7 - e_0 + e_3) + n_2(e_3 - e_9 + e_2)$$

$$+ n_3(e_1 - e_6 + e_2) + n_4(e_{14} - e_{15} + e_{13}) + n_5(e_{19} - e_{15} + e_{16})$$

$$\begin{aligned}
& +n_6(e_{17} - e_{12} + e_{14}) + n_7(e_{17} - e_{18} + e_{19}) \\
= & e_0(-n_0 - n_1) + e_1(n_0 + n_3) + e_2(n_2 + n_3) + e_3(n_1 + n_2) \\
& +e_5(n_0) + e_6(-n_3) + e_7(n_1) + e_9(-n_2) + e_{12}(-n_6) + e_{13}(n_4) \\
& +e_{14}(n_4 + n_6) + e_{15}(-n_4 - n_5) + e_{16}(n_5) + e_{17}(n_6 + n_7) \\
& +e_{18}(-n_7) + e_{19}(n_5 + n_7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& e_0(-n_0 - n_1) + e_1(n_0 + n_3) + e_2(n_2 + n_3) + e_3(n_1 + n_2) + e_5(n_0) + e_6(-n_3) \\
& +e_7(n_1) + e_9(-n_2) + e_{12}(-n_6) + e_{13}(n_4) + e_{14}(n_4 + n_6) + e_{15}(-n_4 - n_5) \\
& +e_{16}(n_5) + e_{17}(n_6 + n_7) + e_{18}(-n_7) + e_{19}(n_5 + n_7) = 0
\end{aligned}$$

denklemini çözümlerse

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 0$$

bulunur. Bu durumda $Z_2^{18}(MSS_{18}) = \text{Ker } \partial_2 = \{0\}$ dir. Böylece

$$H_2^{18}(MSS_{18}) = Z_2^{18}(MSS_{18}) / B_2^{18}(MSS_{18}) \cong \{0\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\partial_1\left(\sum_{i=0}^{19} k_i e_i\right) &= k_0 \partial_1(e_0) + k_1 \partial_1(e_1) + k_2 \partial_1(e_2) + k_3 \partial_1(e_3) + k_4 \partial_1(e_4) + k_5 \partial_1(e_5) \\
&+ k_6 \partial_1(e_6) + k_7 \partial_1(e_7) + k_8 \partial_1(e_8) + k_9 \partial_1(e_9) + k_{10} \partial_1(e_{10}) + k_{11} \partial_1(e_{11}) \\
&+ k_{12} \partial_1(e_{12}) + k_{13} \partial_1(e_{13}) + k_{14} \partial_1(e_{14}) + k_{15} \partial_1(e_{15}) + k_{16} \partial_1(e_{16}) \\
&+ k_{17} \partial_1(e_{17}) + k_{18} \partial_1(e_{18}) + k_{19} \partial_1(e_{19}) \\
= & k_0(p_1 - p_0) + k_1(p_9 - p_0) + k_2(p_0 - p_5) + k_3(p_6 - p_0) \\
&+ k_4(p_8 - p_9) + k_5(p_1 - p_9) + k_6(p_9 - p_5) + k_7(p_1 - p_6) \\
&+ k_8(p_2 - p_1) + k_9(p_6 - p_5) + k_{10}(p_7 - p_6) + k_{11}(p_4 - p_5) \\
&+ k_{12}(p_2 - p_8) + k_{13}(p_8 - p_4) + k_{14}(p_3 - p_8) + k_{15}(p_3 - p_4) \\
&+ k_{16}(p_7 - p_4) + k_{17}(p_2 - p_3) + k_{18}(p_2 - p_7) + k_{19}(p_3 - p_7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_0(-k_0 - k_1 + k_2 - k_3) + p_1(k_0 + k_5 + k_7 - k_8) \\
&\quad + p_2(k_8 + k_{12} + k_{17} + k_{18}) + p_3(k_{14} + k_{15} - k_{17} + k_{19}) \\
&\quad + p_4(k_{11} - k_{13} - k_{15} - k_{16}) + p_5(-k_2 - k_6 - k_9 - k_{11}) \\
&\quad + p_6(k_3 - k_7 + k_9 - k_{10}) + p_7(k_{10} + k_{16} - k_{18} - k_{19}) \\
&\quad + p_8(k_4 - k_{12} + k_{13} - k_{14}) + p_9(k_1 - k_4 - k_5 + k_6)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&p_0(-k_0 - k_1 + k_2 - k_3) + p_1(k_0 + k_5 + k_7 - k_8) + p_2(k_8 + k_{12} + k_{17} + k_{18}) \\
&+ p_3(k_{14} + k_{15} - k_{17} + k_{19}) + p_4(k_{11} - k_{13} - k_{15} - k_{16}) \\
&+ p_5(-k_2 - k_6 - k_9 - k_{11}) + p_6(k_3 - k_7 + k_9 - k_{10}) + p_7(k_{10} + k_{16} - k_{18} - k_{19}) \\
&+ p_8(k_4 - k_{12} + k_{13} - k_{14}) + p_9(k_1 - k_4 - k_5 + k_6) = 0
\end{aligned}$$

denklemini çözümlerse

$$\begin{aligned}
Z_1^8(MSS_{18}) = \text{Ker} \partial_1 &= \{k_0 p_0 + k_1 p_1 + k_2 p_2 + (-k_0 - k_1 + k_2) p_3 + k_4 p_4 + k_5 p_5 \\
&+ (-k_1 + k_4 + k_5) p_6 + k_7 p_7 + (k_0 + k_5 + k_7) p_8 + k_9 p_9 \\
&+ (-k_0 - k_1 + k_2 - k_7 + k_9) p_{10} + (-k_2 - k_9 + k_1 - k_4 - k_5) p_{11} \\
&+ k_{12} p_{12} + k_{13} p_{13} + (k_4 - k_{12} + k_{13}) p_{14} + (k_1 - k_2 - k_4 - k_5 - k_9 - k_{13} - k_{16}) p_{15} \\
&+ k_{16} p_{16} + k_{17} p_{17} + (-k_0 - k_5 - k_7 - k_{12} - k_{17}) p_{18} \\
&+ (-k_1 + k_2 + k_5 + k_9 + k_{12} + k_{16} + k_{17}) p_{19} \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^{11}
\end{aligned}$$

bulunur. $\text{Ker} \partial_2 = \{0\}$ olduğundan ∂_2 dönüşümü birebirdir. Dolayısıyla

$$B_1^{18}(MSS_{18}) \cong C_2^{18}(MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}^8$$

olur. Bu durumda

$$H_1^{18}(MSS_{18}) = Z_1^{18}(MSS_{18}) / B_1^{18}(MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}^3$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
B_0^{18}(MSS_{18}) &= \{t_0 \langle p_0 \rangle + t_1 \langle p_1 \rangle + t_2 \langle p_2 \rangle + t_3 \langle p_3 \rangle + t_4 \langle p_4 \rangle + t_5 \langle p_5 \rangle + t_6 \langle p_6 \rangle \\
&+ t_7 \langle p_7 \rangle + t_8 \langle p_8 \rangle + (-t_0 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 - t_8) \langle p_9 \rangle\}
\end{aligned}$$

$$\{i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \forall t_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^9$$

ve

$$\begin{aligned} Z_0^{18}(MSS_{18}) = \{k_0 \langle p_0 \rangle + k_1 \langle p_1 \rangle + k_2 \langle p_2 \rangle + k_3 \langle p_3 \rangle + k_4 \langle p_4 \rangle + k_5 \langle p_5 \rangle + k_6 \langle p_6 \rangle \\ + k_7 \langle p_7 \rangle + k_8 \langle p_8 \rangle + k_9 \langle p_9 \rangle \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \forall k_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^{10} \end{aligned}$$

olduğundan

$$H_0^{18}(MSS_{18}) = Z_0^{18}(MSS_{18}) / B_0^{18}(MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. Böylece

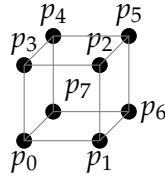
$$H_q^{18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

elde edilir. □

Teorem 3.23 [7] MSS'_6 nün dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^6(MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır.



Şekil 3.5. MSS'_6

İspat: MSS'_6 nün noktalarını $\{p_0 = (1,0,0), p_1 = (1,1,0), p_2 = (1,1,1), p_3 = (1,0,1), p_4 = (0,0,1), p_5 = (0,1,1), p_6 = (0,1,0), p_7 = (0,0,0)\} \subset \mathbb{Z}^3$ olarak gösterelim ve bu noktaların $p_7 < p_4 < p_6 < p_5 < p_0 < p_3 < p_1 < p_2$ şeklinde sıralandığını kabul edelim. MSS'_6 dijital görüntüsünde $q > 2$ için

$$H_q^6(MSS'_6) = \{0\}$$

dir. $C_0^6(MSS'_6)$ ve $C_1^6(MSS'_6)$ serbest abel gruplarının bazları sırasıyla

0-simpleksler $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle, \langle p_6 \rangle, \langle p_7 \rangle$

1-simpleksler $e_0 = \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_0 p_3 \rangle, e_2 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_3 = \langle p_6 p_1 \rangle, e_4 = \langle p_5 p_2 \rangle,$

$e_5 = \langle p_3 p_2 \rangle, e_6 = \langle p_4 p_3 \rangle, e_7 = \langle p_7 p_4 \rangle, e_8 = \langle p_4 p_5 \rangle, e_9 = \langle p_6 p_5 \rangle,$

$e_{10} = \langle p_7 p_6 \rangle, e_{11} = \langle p_7 p_0 \rangle$

dir. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^6(MSS'_6) \xrightarrow{\partial_1} C_0^6(MSS'_6) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir. $\text{Im } \partial_2 = B_1^6(MSS'_6) = \{0\}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial_1\left(\sum_{i=0}^{11} n_i e_i\right) &= n_0 \partial_1(e_0) + n_1 \partial_1(e_1) + n_2 \partial_1(e_2) + n_3 \partial_1(e_3) + n_4 \partial_1(e_4) + n_5 \partial_1(e_5) \\ &\quad + n_6 \partial_1(e_6) + n_7 \partial_1(e_7) + n_8 \partial_1(e_8) + n_9 \partial_1(e_9) + n_{10} \partial_1(e_{10}) + n_{11} \partial_1(e_{11}) \\ &= n_0(p_1 - p_0) + n_1(p_3 - p_0) + n_2(p_2 - p_1) + n_3(p_1 - p_6) \\ &\quad + n_4(p_2 - p_5) + n_5(p_2 - p_3) + n_6(p_3 - p_4) + n_7(p_4 - p_7) \\ &\quad + n_8(p_5 - p_4) + n_9(p_5 - p_6) + n_{10}(p_6 - p_7) + n_{11}(p_0 - p_7) \\ &= p_0(-n_0 - n_1 + n_{11}) + p_1(n_0 - n_2 + n_3) + p_2(n_2 + n_4 + n_5) \\ &\quad + p_3(n_1 - n_5 + n_6) + p_4(-n_6 + n_7 - n_8) + p_5(-n_4 + n_8 + n_9) \\ &\quad + p_6(-n_3 - n_9 + n_{10}) + p_7(-n_7 - n_{10} - n_{11}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &p_0(-n_0 - n_1 + n_{11}) + p_1(n_0 - n_2 + n_3) + p_2(n_2 + n_4 + n_5) + p_3(n_1 - n_5 + n_6) \\ &+ p_4(-n_6 + n_7 - n_8) + p_5(-n_4 + n_8 + n_9) + p_6(-n_3 - n_9 + n_{10}) \\ &+ p_7(-n_7 - n_{10} - n_{11}) = 0 \end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$n_0 = n_2 - n_3$$

$$n_4 = -n_2 - n_5$$

$$n_6 = -n_1 + n_5$$

$$n_7 = -n_1 + n_5 + n_8$$

$$n_9 = -n_2 - n_5 - n_8$$

$$n_{10} = n_3 - n_2 - n_5 - n_8$$

$$n_{11} = n_1 + n_2 - n_3$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} Z_1^6(MSS'_6) = \text{Ker}\partial_1 = & \{(n_2 - n_3)e_0 + n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + (-n_2 - n_5)e_4 + n_5e_5 \\ & + (-n_1 + n_5)e_6 + (-n_1 + n_5 + n_8)e_7 + n_8e_8 + (-n_2 - n_5 - n_8)e_9 \\ & + (n_3 - n_2 - n_5 - n_8)e_{10} + (n_1 + n_2 - n_3)e_{11} \mid n_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 5, 8\} \\ & \cong \mathbb{Z}^5 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$H_1^6(MSS'_6) = Z_1^6(MSS'_6) / B_1^6(MSS'_6) \cong \mathbb{Z}^5$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} B_0^6(MSS'_6) = \text{Im}\partial_1 = & \{t_0\langle p_0 \rangle + t_1\langle p_1 \rangle + t_2\langle p_2 \rangle + t_3\langle p_3 \rangle + t_4\langle p_4 \rangle + t_5\langle p_5 \rangle + t_6\langle p_6 \rangle \\ & + (-t_0 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_6)\langle p_7 \rangle \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \forall t_i \in \mathbb{Z}\} \\ & \cong \mathbb{Z}^7 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Z_0^6(MSS'_6) = & \{n_0\langle p_0 \rangle + n_1\langle p_1 \rangle + n_2\langle p_2 \rangle + n_3\langle p_3 \rangle + n_4\langle p_4 \rangle + n_5\langle p_5 \rangle + n_6\langle p_6 \rangle \\ & + n_7\langle p_7 \rangle \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \forall n_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^8 \end{aligned}$$

olduğundan

$$H_0^6(MSS'_6) = Z_0^6(MSS'_6) / B_0^6(MSS'_6) \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. Böylece

$$H_q^6(MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

elde edilir. □

3.1. Euler Karakteristik

Tanım 3.24 [7] $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ bir dijital görüntü ve $q \geq 0$ için α_q , (X, κ) daki dijital q -simplekslerin sayısı olsun. (X, κ) nın Euler karakteristiği;

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.25 [7] Bir $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü için

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank} H_q^\kappa(X)$$

dir.

İspat:

$$0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

zincir kompleksini gözönüne alalım. Her bir $C_q^\kappa(X)$ rankı α_q olan bir serbest değişmeli gruptur. Ayrıca

$$H_q^\kappa(X) = Z_q^\kappa(X) / B_q^\kappa(X) = \ker \partial_q / \text{Im} \partial_{q+1}$$

olduğundan $\text{rank} H_q^\kappa(X) = \text{rank} Z_q^\kappa(X) - \text{rank} B_q^\kappa(X)$ olur. Her $q \geq 0$ için

$$0 \rightarrow Z_q^\kappa(X) \rightarrow C_q^\kappa(X) \rightarrow B_{q-1}^\kappa(X) \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Buradan

$$\alpha_q = \text{rank} C_q^\kappa(X) = \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \chi(X, \kappa) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^m (-1)^q (\text{rank} Z_q^\kappa(X) + \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X)) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X) \end{aligned}$$

bulunur. $\text{rank} B_{-1}^\kappa(X) = 0 = \text{rank} B_m^\kappa(X)$ olduğundan $q - 1$ yerine q alabiliriz.

$$\begin{aligned} \chi(X, \kappa) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \sum_{q=0}^m (-1)^{q+1} \text{rank} B_q^\kappa(X) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q [\text{rank} Z_q^\kappa(X) - \text{rank} B_q^\kappa(X)] \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} H_q^\kappa(X) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.26 [7] $(X, \kappa_0) \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ve $(Y, \kappa_1) \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, (κ_0, κ_1) -izomorf iki dijital görüntü olsun. Bu durumda

$$\chi(X, \kappa_0) = \chi(Y, \kappa_1)$$

dir.

İspat: X ve Y dijital görüntüleri arasında (κ_0, κ_1) -izomorfizm varsa Teorem 3.12 den

$$H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y)$$

olur. Teorem 3.25 den ispat elde edilir. □

Örnek 3.27 MSS_{18} in Euler karakteristiğini hesaplayalım.

$$\chi(MSS_{18}, 18) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 10 - 20 + 8 = -2$$

Teorem 3.25 i kullanarak hesaplarsak yine aynı sonucu elde ederiz:

$$\chi(MSS_{18}, 18) = \text{rank}H_0^{18}(MSS_{18}) - \text{rank}H_1^{18}(MSS_{18}) = 1 - 3 = -2.$$

Örnek 3.28 MSS'_{18} nün Euler karakteristiğini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \chi(MSS'_{18}, 18) &= \text{rank}H_0^{18}(MSS'_{18}) - \text{rank}H_1^{18}(MSS'_{18}) + \text{rank}H_2^{18}(MSS'_{18}) \\ &= 1 - 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

3.2. Dijital Görüntülerin Relatif Homoloji Grupları

Tanım 3.29 [24] Bir (K, κ) dijital simpleksler kompleks, K_0, K nın alt kompleksi ise $C_p^\kappa(K)/C_p^\kappa(K_0)$ bölüm grubuna p -boyutlu relatif zincir grubu denir ve $C_p^\kappa(K, K_0)$ ile gösterilir.

$$\partial_p : C_p^\kappa(K, K_0) \rightarrow C_{p-1}^\kappa(K, K_0)$$

homomorfizmine sınır operatörü denir.

Tanım 3.30 [24] $(K_0, \kappa), (K, \kappa)$ dijital simpleksler kompleksinin bir alt kompleksi olsun.

- $Z_p^\kappa(K, K_0) = \text{Ker } \partial_p$ grubuna dijital simpleksler relatif p - devirlerin grubu denir.
- $B_p^\kappa(K, K_0) = \text{Im } \partial_{p+1}$ grubuna dijital simpleksler relatif p - sınırların grubu denir.
- $H_p^\kappa(K, K_0) = Z_p^\kappa(K, K_0) / B_p^\kappa(K, K_0)$ bölüm grubuna p . dijital simpleksler relatif homoloji grubu denir.

$C_p^\kappa(K, K_0), C_p^\kappa(K)$ nın alt grubu ve $C_p^\kappa(K)$ nın $C_p^\kappa(K_0)$ a bölüm grubudur. Yani

$$C_p^\kappa(K, K_0) = C_p^\kappa(K) / C_p^\kappa(K_0)$$

şeklinde yazılabilir. Zincirler için

$$0 \longrightarrow C_p^\kappa(K_0) \xrightarrow{i} C_p^\kappa(K) \xrightarrow{j} C_p^\kappa(K, K_0) \longrightarrow 0$$

tam dizisi mevcuttur. Şimdi simpleksler dönüşümüyle üretilen relatif homoloji homomorfizmini ele alalım.

$$f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$$

bir simpleksler dönüşümü ise buna karşılık gelen zincir dönüşümü

$$f_\# : C_p^\kappa(K, K_0) \rightarrow C_p^\kappa(L, L_0)$$

şeklindedir. $f_\#, \partial$ ile değişmeli yani $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$ dır.

Teorem 3.31 [27] K bir dijital simpleksler kompleks, K_0 alt kompleks olsun.

$$\dots \rightarrow H_p^\kappa(K_0) \rightarrow H_p^\kappa(K) \rightarrow H_p^\kappa(K, K_0) \rightarrow H_{p-1}^\kappa(K_0) \rightarrow \dots$$

tam dizisi mevcuttur.

İspat:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_p^\kappa(K_0) & \xrightarrow{i} & C_p^\kappa(K) & \xrightarrow{j} & C_p^\kappa(K, K_0) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial'' \\ 0 & \longrightarrow & C_{p-1}^\kappa(K_0) & \xrightarrow{i} & C_{p-1}^\kappa(K) & \xrightarrow{j} & C_{p-1}^\kappa(K, K_0) \longrightarrow 0 \end{array}$$

değişmeli diyagramını ele alalım.

$$\dots \longrightarrow H_p^\kappa(K_0) \xrightarrow{i_*} H_p^\kappa(K) \xrightarrow{j_*} H_p^\kappa(K, K_0) \xrightarrow{d} H_{p-1}^\kappa(K_0) \longrightarrow \dots$$

dizisinin tam olması için $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$, $\text{Im } j_* = \text{Ker } d$ ve $\text{Im } d = \text{Ker } i_*$ olmalıdır.

1) İlk olarak $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$ olduğunu gösterelim.

$$j_*(i_*(z' + B')) = j_*(i(z') + B) = j(i(z')) + B'' = B''$$

olduğundan $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$ bulunur.

$z + B \in \text{Ker } j_*$ olsun. Bu durumda

$$j_*(z + B) = j(z) + B'' = B''$$

olduğundan $j(z) = \partial''(c'')$ ve j örten olduğundan $c'' = j(c)$ dir. Dolayısıyla $j(z) = \partial''(j(c)) = j(\partial(c))$ ve $j(z - \partial(c)) = 0$ dir. Tamlıktan c' mevcuttur ve $i(c') = z - \partial(c)$ dir. Buradan

$$i_*(c' + B') = i(c') + B = z - \partial(c) + B = z + B$$

olur. Böylece $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$ elde edilir.

2) Şimdi $\text{Im } j_* = \text{Ker } d$ olduğunu gösterelim. Burada d homomorfizminin yerine $i^{-1}\partial j^{-1}$ homomorfizmini alalım.

$$d(j_*(z + B)) = d(j(z) + B'') = i^{-1}\partial j^{-1}(j(z) + B'') = i^{-1}\partial(z) + B' = B'$$

olduğundan $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } d$ bulunur.

$z'' + B'' \in \text{Ker } d$ olsun. Bu durumda

$$d(z'' + B'') = d(z'') + B' = i^{-1}\partial j^{-1}(z'') + B' = B'$$

olduğundan $x' = i^{-1}\partial j^{-1}(z'') \in B'$ ve $x' = \partial'(c')$ dür. Dolayısıyla

$$i(x') = i(\partial'(c')) = \partial(i(c')) = \partial(j^{-1}(z''))$$

olur. Buradan $\partial(j^{-1}(z'')) - i(c') = 0$ ve $j^{-1}(z'') - i(c') \in Z$ olduğundan

$$j_*(j^{-1}(z'') - i(c') + B) = j(j^{-1}(z'')) - j(i(c')) + B'' = z'' + B''$$

Böylece $\text{Ker } d \subset \text{Im } j_*$ elde edilir.

3) Son olarak $\text{Im } d = \text{Ker } i_*$ olduğunu gösterelim.

$$i_*(d(z'' + B'')) = i_*(d(z'') + B') = i_*(i^{-1}\partial j^{-1}(z'') + B') = \partial(j^{-1}(z'')) + B = B$$

olduğundan $\text{Im } d \subset \text{Ker } i_*$ bulunur.

$z' + B' \in \text{Ker } i_*$ olsun. Bu durumda

$$i_*(z' + B') = i(z') + B = B$$

olduğundan $i(z') = \partial(c)$ ve $\partial''(j(c)) = j(\partial(c)) = j(i(z')) = 0$ ve buradan $j(c) \in Z''$ olur. Dolayısıyla

$$d(j(c) + B'') = i^{-1}\partial j^{-1}(j(c) + B'') = i^{-1}\partial(c) + B' = i^{-1}i(z') + B' = z' + B'$$

Böylece $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } d$ elde edilir. \square

Örnek 3.32 $MSC'_8 = \{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1), p_2 = (0,1), p_3 = (1,0)\} \subset \mathbb{Z}^2$ dijital görüntüsünün alt uzayı olarak $A = \{(0,1)\}$ i ele alalım.

Teorem 3.31 in yardımıyla $H_q^8(MSC'_8, A)$ yı hesaplayalım. A tek nokta kümesi olduğu için Teorem 3.13 den

$$H_q^8(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. Teorem 3.20 den,

$$H_q^8(MSC'_8) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,1 \\ 0, & q \neq 0,1 \end{cases}$$

bulunur. Teorem 3.31 den,

$$\dots \rightarrow H_q^8(A) \rightarrow H_q^8(MSC'_8) \rightarrow H_q^8(MSC'_8, A) \rightarrow H_{q-1}^8(A) \rightarrow \dots$$

tam dizisini elde ederiz. Teorem 3.15 den $H_0^8(MSC'_8, A) \cong \mathbb{Z}$ dir.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k_*} H_1^8(MSC'_8, A) \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Birinci İzomorfizm Teoremini uyguladığımızda,

$$H_1^8(MSC'_8, A) / \text{Ker } d \cong \text{Im } d$$

olur. Dizinin tamlığından $\text{Im } k_* = \text{Ker } d$ ve $\text{Im } d = \text{Ker } i_*$ dir. i_* izomorfizm olduğundan, $\text{Ker } i_* = 0$ bulunur. $\text{Im } d = 0$ dir. Tekrar Birinci İzomorfizm Teoremini uygularsak,

$$\mathbb{Z} / \text{Ker } k_* \cong \text{Im } k_*$$

bulunur. k_* monomorfizm olduğundan $\text{Ker } k_* = 0$ dir. $\text{Im } k_* = \text{Ker } d = \mathbb{Z}$ ve

$$H_1^8(MSC'_8, A) \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir. Böylece

$$H_q^8(MSC'_8, A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

olur.

3.3. Eilenberg-Steenrod Aksiyonları

Aksiyom 1 (Birimlilik aksiyomu) [10, 24] X , κ -yakınlıklı bir dijital görüntü olsun.

$i : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ birim fonksiyonu ise $i_* : H_*^k(X) \rightarrow H_*^k(X)$ da birim fonksiyonudur.

Aksiyom 2 (Birleşmelilik aksiyomu) [10, 24] X , Y ve Z sırasıyla κ_0 , κ_1 , κ_2 -yakınlıklı dijital görüntüler olsun. $h : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ ve $k : (Y, \kappa_1) \rightarrow (Z, \kappa_2)$ dijital sürekli fonksiyonlar ise $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ dir.

Aksiyom 3 (Değişmelilik aksiyomu) [10, 24] (X, A) ve (Y, B) sırasıyla κ_0 ve κ_1 -yakınlıklı dijital görüntü çiftleri olsun. $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ise aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
H_q^{\kappa_0}(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_q^{\kappa_1}(Y, B) \\
\partial_* \downarrow & & \downarrow \partial_* \\
H_{q-1}^{\kappa_0}(A) & \xrightarrow{(f|_A)_*} & H_{q-1}^{\kappa_1}(B)
\end{array}$$

Aksiyom 4 (Tamlık aksiyomu) [10, 24] $i : A \rightarrow X$ ve $p : X \rightarrow (X, A)$ kapsama dönüşümleri olmak üzere

$$\dots \rightarrow H_q^{\kappa}(A) \xrightarrow{i_*} H_q^{\kappa}(X) \xrightarrow{p_*} H_q^{\kappa}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^{\kappa}(A) \rightarrow \dots$$

dizisi tamdır.

Aksiyom 5 (Boyut aksiyomu) [1, 10, 24] X , κ -yakınlıklı tek noktalı uzay ise $q \neq 0$ için $H_q^{\kappa}(X) = 0$ ve $H_0^{\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$ dir.

Dijital görüntülerde homotopi ve excision aksiyomları sağlanmaz. Bu aksiyomların cebirsel topolojideki tanımlarını verelim.

Homotopi Aksiyomu: [10, 24] X ve Y topolojik uzaylar, $h : X \rightarrow Y$ ve $k : X \rightarrow Y$ homotopik ise $h_* = k_*$ dir.

Homotopi aksiyomunun sağlanmadığı Örnek 3.16 da verilmiştir.

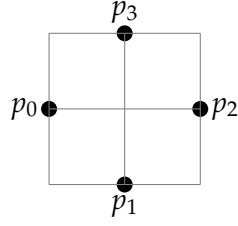
Excision Aksiyomu: [10, 24] (X, A) ikilisi için $\overline{U} \subset \text{Int}A$ olacak şekilde U , X in açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$H_q(X - U, A - U) \cong H_q(X, A)$$

izomorfizmi vardır.

Önerme 3.33 [10] Dijital görüntülerde simpleksler homoloji için excision aksiyomu sağlanmaz.

İspat: 8-yakınlıklı $X = \{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1), p_2 = (1,0), p_3 = (0,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ dijital görüntüsünü ele alalım.



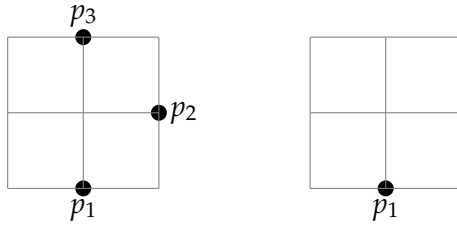
Şekil 3.6. X

Teorem 3.20 den

$$H_q^8(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır. $A = \{p_1 = (0,-1), p_2 = (1,0), p_3 = (0,1)\}$ ve $U = \{p_1 = (0,-1)\}$ olsun.

$A \subset X, U \subset A$ ve $\bar{U} \subset \text{Int}A$ dır. $H_1^8(X - U, A - U)$ ve $H_1^8(X, A)$ yı hesaplayalım.



Şekil 3.7. A ve U

$$H_q^k(A) = H_q^k(U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır. Aksiyom 4 den

$$\dots \rightarrow H_q^k(A) \xrightarrow{i_*} H_q^k(X) \xrightarrow{p_*} H_q^k(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^k(A) \rightarrow \dots$$

tam dizisi vardır. $q > 1$ için $H_q^k(A) = 0$ olduğundan

$$0 \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} H_1^8(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{q_*} H_0^8(X, A) \xrightarrow{k_*} 0$$

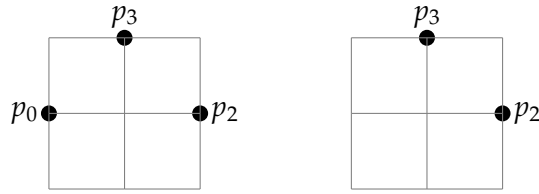
tam dizisi elde edilir. Dizinin tamlığından q_* epimorfizmdir. Buradan $H_0^8(X, A) \cong \mathbb{Z}$ olur. j_* kapsama dönüşümü olduğundan $\text{Ker } j_* = 0$ dır. Dizi tam olduğu için $\text{Ker } j_* = \text{Im } \partial_*$ dır. Birinci İzomorfizm Teoreminden

$$H_1^8(X, A) / \text{Ker } \partial_* \cong \text{Im } \partial_*$$

olur. Bu durumda $H_1^8(X, A) = \text{Ker } \partial_*$ elde edilir. Dizinin tamlığından $\text{Im } p_* = \text{Ker } \partial_*$ dır. Dolayısıyla $H_1^8(X, A) = \text{Im } p_*$ olur. Böylece p_* bir epimorfizmdir. Diğer taraftan dizi tam olduğu için p_* monomorfizmdir. Böylece p_* bir izomorfizmdir ve $H_1^8(X, A) \cong \mathbb{Z}$ olur. Böylece

$$H_q^8(X, A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

bulunur.



Şekil 3.8. $X - U$ ve $A - U$

Şimdi $H_q^8(X - U, A - U)$ yu hesaplayalım. $A - U \subset X - U$ dur. $X - U$ ve $A - U$ nun simpleksler homoloji grupları

$$H_q^k(X - U) = H_q^k(A - U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır. Aksiyom 4 den

$$\dots \rightarrow H_q^k(A - U) \xrightarrow{i_*} H_q^k(X - U) \xrightarrow{p_*} H_q^k(X - U, A - U) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^k(A - U) \rightarrow \dots$$

tam dizisi vardır. $q > 1$ için $H_q^k(X - U) = 0$ olduğundan

$$0 \xrightarrow{p_*} H_1^8(X-U, A-U) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{q_*} H_0^8(X-U, A-U) \xrightarrow{k_*} 0$$

tam dizisi elde edilir. Dizinin tamlığından q_* epimorfizmdir. Buradan

$H_0^8(X-U, A-U) \cong \mathbb{Z}$ olur. j_* kapsama dönüşümü olduğundan $\text{Ker } j_* = 0$ dır.

Dizi tam olduğu için $\text{Ker } j_* = \text{Im } \partial_*$ dır. Birinci İzomorfizm Teoreminden

$$H_1^8(X-U, A-U) / \text{Ker } \partial_* \cong \text{Im } \partial_*$$

elde edilir. Bu durumda $H_1^8(X-U, A-U) = \text{Ker } \partial_*$ olur. Dizinin tamlığından ∂_* monomorfizmdir. Dolayısıyla $\text{Ker } \partial_* = 0$ bulunur. Böylece $H_1^8(X-U, A-U) = 0$ olduğundan

$$H_q^8(X-U, A-U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. $q = 1$ için $H_q^8(X, A) \neq H_q^8(X-U, A-U)$ olduğundan simpleksler homoloji için excision aksiyomu dijital görüntülerde sağlanmaz. \square

3.4. Dijital Görüntüler İçin Lefschetz Sabit Nokta Teoremi

Tanım 3.34 [11] (X, κ) bir dijital görüntü ve $f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$, (κ, κ) -süreklili bir fonksiyon olsun. $f(x) = x$ olacak şekilde $x \in X$ mevcutsa (X, κ) dijital görüntüsü sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

Sabit nokta özelliği topolojik bir invariantsdır. Yani dijital izomorfizm ile korunur.

Tanım 3.35 [11] (X, κ) , dijital homoloji grupları sonlu üretilmiş ve bazı boyutlarda yok olan bir dijital görüntü olsun. $f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ dönüşümü için $\lambda(f)$ Lefschetz sayısı, $f_* : H_i^k(X) \rightarrow H_i^k(X)$ olmak üzere

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_*)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.36 [11] G , bir serbest abel grup ve $1_G : G \rightarrow G$ birim homomorfizm olsun. $tr(1_G)$, 1_G nin izi olmak üzere $tr(1_G) = \text{rank}(G)$ dir.

İspat: G serbest abel grup olduğundan G nin rankı 1 dir. $1_G : G \rightarrow G$ birim dönüşüm olduğundan ve 1_G , birim 1×1 -matrise sahip olduğundan 1_G nin izi 1 dir. Dolayısıyla $tr(1_G) = \text{rank}(G)$ dir. \square

Teorem 3.37 [11] (X, κ) , sonlu bir dijital simpleksler kompleks veya sonlu dijital simpleksler kompleksin retraktı ve $f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$, $\lambda(f) \neq 0$ olan bir dönüşüm ise f sabit bir noktaya sahiptir.

İspat: f nin sabit noktalara sahip olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\lambda(f) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Buna göre tüm $tr(f_* : H_i^{\kappa}(X) \rightarrow H_i^{\kappa}(X))$ ler sıfır olarak elde edilmelidir. Bunun için Lefschetz ilkesi denilen

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i tr(f_{\#} : C_i^{\kappa}(X) \rightarrow C_i^{\kappa}(X))$$

eşitliğine ihtiyaç vardır. (X, κ) nin dijital homoloji gruplarını hesaplamak için $C_i^{\kappa}(X)$ dijital simpleksler zincirleri kullanılır. f nin sabit noktaları olmadığından ve (X, κ) kompakt olduğundan f , noktaları en az bir sabit pozitif aralıkta hareket ettirmek zorundadır. Bu sabit aralık δ olsun. Bu durumda çapı $\delta/10$ dan daha küçük olan simpleksler kullanılır ve f ye, g dijital simpleksler dönüşümüyle yaklaşırsa g , f nin $\delta/2$ içinde olur. δ nın g , f ye homotopik olacak şekilde çok küçük olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $g = f$ olarak alınabilir. f , noktaları en az δ üzerinde hareket ettirdiğinden ve bizim dijital simplekslerimizin çapları en fazla $\delta/10$ olduğundan f nin her bir dijital simpleksi kendisine dönüştürmesi imkansızdır. Buradan her i için

$$tr(f_{\#} : C_i^{\kappa}(X) \rightarrow C_i^{\kappa}(X)) = 0$$

elde edilir. \square

Teorem 3.38 (*Bir Boyutlu Brouwer Sabit Nokta Teoremi*) [11] Her $(2,2)$ -sürekli $f : [0,1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow [0,1]_{\mathbb{Z}}$ fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir.

İspat: $f : [0,1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow [0,1]_{\mathbb{Z}}$, $(2,2)$ -sürekli olsun. $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olduğundan f , sabit bir noktaya sahiptir. \square

Teorem 3.39 (*İki Boyutlu Brouwer Sabit Nokta Teoremi*) [11]

$X = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$, 4-yakınlıklı bir dijital görüntü olsun. Her $(4,4)$ -sürekli $f : (X,4) \rightarrow (X,4)$ fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir.

İspat: X in Lefschetz sayısını hesaplayalım. $f : (X,4) \rightarrow (X,4)$ olsun.

$f_* : H_q^4(X) \rightarrow H_q^4(X)$ dönüşümünü ele alalım. $q = 0$ için $f_* : H_0^4(X) \rightarrow H_0^4(X)$ yani $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ birim homomorfizmi elde edilir. Teorem 3.36 den

$$tr(f_*) = \text{rank}(\mathbb{Z}) = 1$$

dir. $q > 0$ için f_* sıfır dönüşümüdür. Böylece

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i tr(f_*) = 1 - 0 + 0 - 0 + \dots = 1$$

elde edilir. $\lambda(f) = 1 \neq 0$ olduğundan Teorem 3.37 den f sabit bir noktaya sahiptir.

O halde iki boyutlu Brouwer Sabit Nokta Teoremi dijital görüntüler için sağlanır. \square

Sabit nokta özelliğinin bir topolojik özellik olduğu sonucuna ulaşılır. Yani topolojik olarak denk olan iki topolojik uzayın her ikisinde de sabit nokta özelliği ya vardır ya da yoktur.

Teorem 3.40 [11] (X, κ) ve (Y, κ') dijital görüntüleri için $X \approx_{(\kappa, \kappa')} Y$ olsun. (X, κ) sabit nokta özelliğine sahipse (Y, κ') de sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat: $X \approx_{(\kappa, \kappa')} Y$ olduğundan (κ, κ') -sürekli ve tersi (κ', κ) -sürekli olan

$f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \kappa')$ bijektif fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca X sabit nokta özelliğine sahiptir yani her (κ, κ) -sürekli $g : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir. $h : (Y, \kappa') \rightarrow (Y, \kappa')$, (κ', κ') -sürekli olsun. Bu durumda

$$h \circ f : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \kappa') \quad \text{ve} \quad f^{-1} \circ h \circ f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$$

fonksiyonları sırasıyla (κ, κ') -sürekli ve (κ, κ) -sürekli. X sabit nokta özelliğine sahip olduğundan bir $x \in X$ için $f^{-1}(h(f(x))) = x$ dir. $f(f^{-1}(h(f(x)))) = f(x)$ olduğundan $h(f(x)) = f(x)$ olur. Bu durumda h sabit bir noktaya sahiptir. \square

Sonuç 3.41 [11] Sabit nokta özelliği dijital görüntüler için topolojik bir invariantsdır.

Teorem 3.42 [11] (X, κ) bir dijital görüntü ve $f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ bir (κ, κ) -sürekli dönüşüm olsun. X , κ -büzülebilir ise f sabit bir noktaya sahiptir.

İspat: X , κ -büzülebilir ise $f \simeq_{(\kappa, \kappa)} 1_X$ dir. Dolayısıyla X ve tek noktalı görüntü aynı dijital homoloji grubuna sahiptir. Bu durumda

$$H_i^\kappa(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. $f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ olsun. $f_* : H_q^\kappa(X) \rightarrow H_q^\kappa(X)$ homomorfizmi alınır, $q = 0$ için $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ birim homomorfizmi elde edilir. Teorem 3.36 dan

$$tr(f_*) = \text{rank}(\mathbb{Z}) = 1$$

olur. $q > 0$ için f_* sıfır dönüşümdür. Dolayısıyla f in Lefschetz sayısı

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i tr(f_i) = 1 - 0 + 0 - 0 + \dots = 1$$

elde edilir. $\lambda(f) = 1 \neq 0$ olduğu için Teorem 3.37 den f sabit bir noktaya sahiptir. \square

Örnek 3.43 [11] X , Örnek 3.19 daki dijital görüntü ise her $(8, 8)$ -sürekli

$f : (X, 8) \rightarrow (X, 8)$ dönüşümü için $\lambda(f)$ Lefschetz sayısı

$$f_* : H_0^8(X) = \mathbb{Z} \rightarrow H_0^8(X) = \mathbb{Z}$$

dönüşümünün izidir. f_* birim dönüşüm olduğundan izi sıfırdan farklıdır. Teorem 3.37 den $(X, 8)$ dijital görüntüsü üzerindeki her dönüşüm en az bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.44 [11] Tek nokta görüntüsüyle aynı dijital homoloji gruplarına sahip (X, κ) dijital görüntüsü her zaman sabit bir noktaya sahiptir.

I^{n+1} , $(n+1)$ -küpün sınırı $\text{Bd}(I^{n+1})$ ile S^n , n -küresi homeomorftir. Bir dijital küpün sınırını kullanarak bir dijital küre oluşturulabilir. \mathbb{Z}^n nin orjinini 0_n ile gösterelim. Boxer [5] küre benzeri dijital görüntüyü

$$S_n = [-1, 1]_{\mathbb{Z}}^{n+1} \setminus \{0_{n+1}\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Lefschetz Sabit Nokta Teoreminin tersinin dijital görüntüler için doğru olması gerekmez. Bunu bir örnekle görelim.

Örnek 3.45 [11] $S_1 = \{(1,0), (1,-1), (1,1), (0,1), (0,-1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1)\}$, \mathbb{Z}^2 de 4-yakınlıklı dijital bir küredir. Bu MSC_4 dijital 4-kapalı eğrisidir. Teorem 3.14 den

$$H_q^4(S_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

elde edilir. $\phi : (S_1, 4) \rightarrow (S_1, 4)$, dijital $(4,4)$ -sürekli dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $z \in S_1$ için $\phi(z) = z$ olarak tanımlanır. ϕ nin Lefschetz sayısı, ϕ_0, ϕ_1 birim fonksiyonlar olduğundan

$$\lambda(\phi) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \text{tr}(\phi_i : H_i^4(S_1) \rightarrow H_i^4(S_1)) = 1 - 1 = 0$$

dır. Böylece $\lambda(\phi) = 0$ olmasına rağmen ϕ sabit noktaya sahiptir. Sonuç olarak aşağıdaki elde edilir.

Sonuç 3.46 [11] Lefschetz Sabit Nokta Teoreminin tersinin dijital görüntüler için doğru olması gerekmez.

S_2 nin Lefschetz sayısını hesaplayalım.

Örnek 3.47 [11] $S_2 = [-1, 1]_{\mathbb{Z}}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, \mathbb{Z}^3 de 6-yakınlıklı dijital bir 2-küredir. Bu MSS_6 dijital görüntüsüdür. $f : (S_2, 6) \rightarrow (S_2, 6)$, dijital $(6,6)$ -sürekli dönüşüm olsun. Teorem 3.36 dan f nin Lefschetz sayısı, $f_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ birim fonksiyon ve $f_1 : \mathbb{Z}^{23} \rightarrow \mathbb{Z}^{23}$ olduğundan

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \text{tr}(f_* : H_i^6(S_2) \rightarrow H_i^6(S_2)) = 1 - 23 = -22$$

dir. Sonuç olarak f sabit noktaya sahiptir.

Önerme 3.48 [11] (X, κ) bir dijital görüntü ve $\chi(X, \kappa)$, (X, κ) nin Euler karakteristiği olsun. $f : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ dönüşümü birim dönüşüme homotopik ise $\lambda(f) = \chi(X, \kappa)$ dir.

İspat: Lefschetz sayısını homoloji olmaksızın, $f_{\#} : C_i^{\kappa}(X) \rightarrow C_i^{\kappa}(X)$ olmak üzere

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_* : H_i^{\kappa}(X) \rightarrow H_i^{\kappa}(X)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_{\#})$$

şeklinde tanımlanır. Homotopik dönüşümler n -zincirler üzerinde aynı dönüşümü ürettiğinden $1_{\#} : C_i^{\kappa}(X) \rightarrow C_i^{\kappa}(X)$ dönüşümü incelenebilir. $1_{\#}$ dönüşümü $\alpha_i(X, \kappa) \times \alpha_i(X, \kappa)$ birim matrisidir ve böylece izi $\alpha_i(X, \kappa)$ dir. Sonuç olarak

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_{\#}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i(X, \kappa) = \chi(X, \kappa)$$

elde edilir. □

Örnek 3.49 [11] MSS'_6 nü $(X, 6)$ ile gösterelim ve $f : (X, 6) \rightarrow (X, 6)$, dijital $(6, 6)$ -sürekli dönüşüm olsun. $q > 1$ için $f_q : H_q^6(X) \rightarrow H_q^6(X)$ bir sıfır dönüşümüdür. Dolayısıyla $\text{tr}(f_q) = 0$ dir. $q = 0$ için f_0, \mathbb{Z} üzerinde birim fonksiyon olduğundan $\text{tr}(f_0) = 1$ dir. Diğer taraftan $q = 1$ için $\text{tr}(f_1) = \text{rank}(\mathbb{Z}^5) = 5$ olur. Lefschetz sayısı

$$\lambda(f) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \text{tr}(f_i) = 1 - 5 + 0 = -4 \neq 0$$

elde edilir. Teorem 3.37 den f sabit noktaya sahiptir. MSS'_6 nün Euler karakteristiği $\chi(MSS'_6, 6) = -4$ dür.

4. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Tanım 4.1 [9] Bir (X, κ) dijital simpleksler kompleks olsun. Her bir $q \in \mathbb{Z}$ için q -boyutlu dijital eşzincir grubu

$$C^{q, \kappa}(X) = \text{Hom}(C_q^\kappa(X), \mathbb{Z})$$

eşitliğiyle ve q -boyutlu eşsınır operatörü

$$\delta^q : C^{q, \kappa}(X; G) \rightarrow C^{q+1, \kappa}(X; G)$$

∂_{q+1} sınır operatörünün duali olarak tanımlanır. Bu durumda dijital simpleksler eşzincir kompleksi

$$C^*(X) = \{C^{q, \kappa}(X), \delta^q\}$$

şeklinde tanımlanır.

c^q , q -boyutlu bir eşzincir ve c_q , q -boyutlu bir zincir ise c^q nun c_q üzerindeki değeri $\langle c^q, c_q \rangle$ ile gösterilir. Bu durumda eşsınır operatörünün tanımı

$$\langle \delta(c^q), c_q \rangle = \langle c^q, \partial(c_q) \rangle$$

şeklinde olur. σ_i^* temel eşzincirinin değeri σ_i üzerinde 1, diğer baz elemanları üzerinde 0 dir. $g \in G$ ise $g\sigma_i^*$ ın değeri σ_i üzerinde g , diğer baz elemanları üzerinde 0 dir. $c^q = \sum g_i \sigma_i^*$ olarak yazılabildiğinden

$$\delta(c^q) = \sum g_i \delta(\sigma_i^*)$$

elde edilir. $\delta(c^q)$ yu belirlemek için her bir yönlü σ , p -simpleksi için $\delta(\sigma^*)$ ı hesaplamak yeterlidir. τ_j , yüzlerinden biri σ olan tüm $p+1$ -simpleksler ve $\varepsilon_j = \mp 1$ olmak üzere

$$\delta(\sigma^*) = \sum \varepsilon_j \tau_j^*$$

olur.

Önerme 4.2 [24] Her $1 \leq q \leq m$ için $\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0$ dir.

İspat: Her $1 \leq q \leq m$ için $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ olduğunu biliyoruz. q -boyutlu σ^* eşzinciri ve $q + 1$ -boyutlu τ_j zincirini ele alalım.

$$\begin{aligned} \langle (\delta_{q+1} \circ \delta_q)(\sigma^*), \tau_j \rangle &= \langle \delta_{q+1}(\delta_q(\sigma^*)), \tau_j \rangle \\ &= \langle \delta_q(\sigma^*), \partial_{q+1}(\tau_j) \rangle \\ &= \langle \sigma^*, (\partial_q \circ \partial_{q+1})(\tau_j) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ dır. \square

Tanım 4.3 [9] $(K, \kappa) = \{K^{q, \kappa}, \delta^q\}$ bir dijital simpleksler eşzincir kompleks olsun. $\delta^q : K^{q, \kappa} \rightarrow K^{q+1, \kappa}$ homomorfizminin çekirdeğine dijital eşdevirler grubu denir ve $Z^{q, \kappa}(K)$ ile gösterilir. δ^q nun görüntüsüne dijital eşsınırlar grubu denir ve $B^{q+1, \kappa}(K)$ ile gösterilir. Buradan dijital kohomoloji grubu

$$H^{q, \kappa}(K) = Z^{q, \kappa}(K) / B^{q, \kappa}(K)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4 [27] Her $q \geq 0$ için, $H^{q, \kappa}$, dijital simpleksler eşzincir kompleksler ve simpleksler dönüşümler kategorisinden, abel gruplar kategorisine bir kontravaryant funktordur.

İspat: $H^{q, \kappa_0}(X)$, dijital simpleksler eşzincir kompleks olan X objesi üzerinde tanımlanmıştır. $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ bir dijital simpleksler dönüşüm ise

$$\varphi^* : H^{q, \kappa_1}(Y) \rightarrow H^{q, \kappa_0}(X)$$

dönüşümü $z \in Z^{q, \kappa_1}(Y)$ olmak üzere

$$\varphi^*(z + B^{q, \kappa_1}(Y)) = \varphi^\#(z) + B^{q, \kappa_0}(X)$$

şeklinde tanımlanır. $1_{(Y, \kappa_1)} : (Y, \kappa_1) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ birim dönüşümü için

$$(1_{(Y, \kappa_1)})^* : H^{q, \kappa_1}(Y) \rightarrow H^{q, \kappa_1}(Y)$$

dönüşümünde $z \in Z^{q, \kappa_1}(Y)$ için

$(1_{(Y,\kappa_1)})^*(z + B^{q,\kappa_1}(Y)) = (1_{(Y,\kappa_1)})^\sharp(z) + B^{q,\kappa_1}(Y) = z + B^{q,\kappa_1}(Y)$
 olur. Bu durumda $(1_{(Y,\kappa_1)})^* = 1_{H^{q,\kappa_1}(Y)}$ bulunur. $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ ve
 $\psi : (Y, \kappa_1) \rightarrow (W, \kappa_2)$ dijital simpleksler dönüşümleri için

$\varphi^* : H^{q,\kappa_1}(Y) \rightarrow H^{q,\kappa_0}(X)$ ve $\psi^* : H^{q,\kappa_2}(W) \rightarrow H^{q,\kappa_1}(Y)$
 dönüşümlerinde $z \in Z^{q,\kappa_2}(W)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\varphi^* \circ \psi^*)(z + B^{q,\kappa_2}(W)) &= \varphi^*(\psi^*(z + B^{q,\kappa_2}(W))) \\ &= \varphi^*(\psi^\sharp(z) + B^{q,\kappa_1}(Y)) \\ &= \varphi^\sharp(\psi^\sharp(z)) + B^{q,\kappa_0}(X) \\ &= (\varphi^\sharp \circ \psi^\sharp)(z) + B^{q,\kappa_0}(X) \\ &= (\psi \circ \varphi)^\sharp(z) + B^{q,\kappa_0}(X) \\ &= (\psi \circ \varphi)^*(z + B_q^{\kappa_2}(W)) \end{aligned}$$

olur. Buradan $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ elde edilir. \square

Teorem 4.5 (X, κ) tek noktalı dijital görüntü ise

$$H^{q,\kappa}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır.

İspat: (X, κ) tek noktalı dijital görüntü ise $q > 0$ için

$$C^{q,\kappa}(X) = \text{Hom}(C_q^\kappa(X), \mathbb{Z}) = 0$$

olduğundan $H^{q,\kappa}(X) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $q = 0$ için

$$C^{0,\kappa}(X) = \text{Hom}(C_0^\kappa(X), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

dir. Dolayısıyla

$$0 \xrightarrow{\delta^0} C^{0,\kappa}(X) \xrightarrow{\delta^1} 0$$

kısa dizisi vardır. $\text{Ker } \delta^1 = \mathbb{Z}$ ve $\text{Im } \delta^0 = 0$ olduğundan $H^{0,\kappa}(X) = \mathbb{Z}$ elde edilir. \square

Teorem 4.6 X dijital basit kapalı κ -eğri ise

$$H^{q,\kappa}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dir.

İspat: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_q\} \subset \mathbb{Z}^2$ bir dijital basit kapalı κ -eğri olsun. Bu durumda, x_i ve x_j , κ -yakındır $\Leftrightarrow i = j \pm 1 \pmod{q}$ dur. $C_0^\kappa(X)$ ve $C_1^\kappa(X)$ bazları, sırasıyla

$$\{\langle x_0 \rangle, \langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_q \rangle\} \\ \{e_0 = \langle x_0, x_1 \rangle, e_1 = \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, e_q = \langle x_q, x_0 \rangle\}$$

olan serbest abel gruplardır. $m > q > 1$ için $C_q^\kappa(X) = 0$ olduğundan $H_q^\kappa(X) = 0$ dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi bulunur. $C^{0,\kappa}(X) = \text{Hom}(C_0^\kappa(X), \mathbb{Z})$ ve $C^{1,\kappa}(X) = \text{Hom}(C_1^\kappa(X), \mathbb{Z})$ olduğundan

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,\kappa}(X) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,\kappa}(X) \xrightarrow{\delta^1} 0$$

kısa dizisi elde edilir.

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0) &= x_1 - x_0, \\ \partial_1(e_1) &= x_2 - x_1, \\ \partial_1(e_2) &= x_3 - x_2, \\ &\vdots \\ \partial_1(e_q) &= x_0 - x_q \end{aligned}$$

olduğundan 0-eşzincirleri

$$\begin{aligned}
\delta^0 x_0^* &= e_q - e_0, \\
\delta^0 x_1^* &= e_0 - e_1, \\
\delta^0 x_2^* &= e_1 - e_2, \\
&\vdots \\
\delta^0 x_q^* &= e_{q-1} - e_q
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\delta^0 \left(\sum_{i=0}^q n_i x_i^* \right) &= n_0(e_q - e_0) + n_1(e_0 - e_1) + n_2(e_1 - e_2) + \cdots + n_q(e_{q-1} - e_q) \\
&= e_0(-n_0 + n_1) + e_1(-n_1 + n_2) + e_2(-n_2 + n_3) + \cdots + e_q(n_0 - n_q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$e_0(-n_0 + n_1) + e_1(-n_1 + n_2) + e_2(-n_2 + n_3) + \cdots + e_q(n_0 - n_q) = 0$$

denklemini çözüldüğünde $n_0 = n_1 = \cdots = n_q = n$ olur. Dolayısıyla

$$Z^{0,\kappa}(X) = \{n(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_q) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. $B^{0,\kappa}(X) = \text{Im } \delta^{-1} = \{0\}$ olduğundan

$$H^{0,\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$$

dir.

$$B^{1,\kappa}(X) = \text{Im } \delta^0 = \{t_0 e_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_{q-1} e_{q-1} + (-t_0 - t_1 - t_2 - \cdots - t_{q-1}) e_q\}$$

$$\{t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, \dots, q-1\} \cong \mathbb{Z}^q$$

olur. $Z^{1,\kappa}(X) = \text{Ker } \delta^1 \cong \mathbb{Z}^{q+1}$ olduğundan

$$H^{1,\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$$

dir. Bu durumda

$$H^{q,\kappa}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

elde edilir. □

Teorem 4.7 $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü κ -yol bağlantılı ise $H^{0,\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$ dir.

İspat: X in 0-simplekslerinin $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle$ olduğunu kabul edelim.

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,\kappa}(X) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,\kappa}(X)$$

dizisi elde edilir. δ^{-1} in görüntüsü sıfır olduğundan $B^{0,\kappa}(X) = \text{Im } \delta^{-1} = \{0\}$ dır. $Z^{0,\kappa}(X) = \text{Ker } \delta^0$ dır.

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^n k_i p_i \mid k_i = k, i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

olsun. $Z^{0,\kappa}(X) = A$ olduğunu iddia ediyoruz. İddiamız doğruysa, $Z^{0,\kappa}(X) = \mathbb{Z}$ olur ve $H^{0,\kappa}(X) = \mathbb{Z}$ elde edilir.

İddamızı ispat edelim. $p_{r_i}, p_{s_i} \in X$ noktalarını seçelim. X , κ -yol bağlantılı olduğundan, X de her i için p_{r_i} den p_{s_i} ye bir σ_i yolu vardır. X de p_{r_i} den p_{s_i} ye bir κ -yol olan σ_i , dijital 1-simplekslerin kümesidir.

$$\sigma_i = \{ \langle p_{r_i}, p_{r+1_i} \rangle, \langle p_{r+1_i}, p_{r+2_i} \rangle, \dots, \langle p_{s-1_i}, p_{s_i} \rangle \}$$

$k = r, r+1, \dots, s$ için $e_{k_i} = \langle p_{k_i}, p_{k+1_i} \rangle$ olsun.

$$\sigma_i = \{ e_{r_i}, e_{r+1_i}, \dots, e_{s-1_i} \}$$

olur.

$$\partial_1(e_{r_i}) = p_{r+1_i} - p_{r_i},$$

$$\partial_1(e_{r+1_i}) = p_{r+2_i} - p_{r+1_i},$$

$$\partial_1(e_{r+2_i}) = p_{r+3_i} - p_{r+2_i},$$

⋮

$$\partial_1(e_{s-2_i}) = p_{s-1_i} - p_{s-2_i},$$

$$\partial_1(e_{s-1_i}) = p_{s_i} - p_{s-1_i},$$

olduğundan

$$\delta^0(p_{r+1_i}) = e_{r_i} - e_{r+1_i},$$

$$\delta^0(p_{r+2_i}) = e_{r+1_i} - e_{r+2_i},$$

⋮

$$\delta^0(p_{s-1_i}) = e_{s-2_i} - e_{s-1_i}$$

elde edilir. γ_i, σ_i yolu üzerindeki dijital 0-simplekslerin kümesi olsun.

$$\omega = \sum k\gamma_i \in A \text{ için}$$

$$\delta^0(\omega) = \delta^0(\sum k\gamma_i) = k\sum \delta^0(\gamma_i) = k\sum(e_{r_i} - e_{s-1_i}) = k\sum e_{r_i} - k\sum e_{s-1_i} = 0$$

olur. Bu durumda $\omega \in Z^{0,\kappa}(X)$ elde edilir.

Tersine, $\theta \in Z^{0,\kappa}(X)$ ise $\theta = \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C^{0,\kappa}(X)$ ve

$$\delta^0(\theta) = \delta^0\left(\sum_{i=0}^n k_i p_i\right) = \sum_{i=0}^n k_i \delta^0(p_i) = 0$$

dır.

$$\sum_{i=0}^n k_i \delta^0(\gamma_i) = \sum_{i=0}^n k_i (e_{r_i} - e_{s-1_i}) = \sum_{i=0}^n k_i e_{r_i} - \sum_{i=0}^n k_i e_{s-1_i} = 0$$

bulunur. $\sum k_i e_{r_i} = \sum k_i e_{s-1_i}$ olduğundan $i = 0, \dots, n$ için $k_i = k$ dır. Buradan $\theta \in A$

olur. Böylece $Z^{0,\kappa}(X) = A \cong \mathbb{Z}$ ve

$$H^{0,\kappa}(X) = Z^{0,\kappa}(X) / B^{0,\kappa}(X) \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir. □

Örnek 4.8 MSS'_{18} nün kohomoloji gruplarını hesaplayalım.

MSS'_{18} nün noktalarını $\{p_0 = (1, 1, 0), p_1 = (0, 2, 0), p_2 = (-1, 1, 0), p_3 = (0, 0, 0),$

$p_4 = (0, 1, -1), p_5 = (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^3$ olarak alalım ve bu noktalar

$$p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_1 < p_0$$

şeklinde sıralansın.

$C_0^{18}(MSS'_{18}), C_1^{18}(MSS'_{18})$ ve $C_2^{18}(MSS'_{18})$ serbest abel gruplarının bazları olan

0-simpleksler, 1-simpleksler ve 2-simpleksleri Teorem 3.21 deki gibi alalım.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.

$$C^{0,18}(MSS'_{18}) = \text{Hom}(C_0^{18}(MSS'_{18}), \mathbb{Z}),$$

$$C^{1,18}(MSS'_{18}) = \text{Hom}(C_1^{18}(MSS'_{18}), \mathbb{Z}),$$

$$C^{2,18}(MSS'_{18}) = \text{Hom}(C_2^{18}(MSS'_{18}), \mathbb{Z}),$$

olduğundan

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\delta^1} C^{2,18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\delta^2} 0$$

kısa dizisi bulunur.

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0) &= p_1 - p_2, & \partial_1(e_6) &= p_0 - p_4, \\ \partial_1(e_1) &= p_3 - p_2, & \partial_1(e_7) &= p_1 - p_5, \\ \partial_1(e_2) &= p_4 - p_2, & \partial_1(e_8) &= p_5 - p_3, \\ \partial_1(e_3) &= p_5 - p_2, & \partial_1(e_9) &= p_0 - p_5, \\ \partial_1(e_4) &= p_1 - p_4, & \partial_1(e_{10}) &= p_0 - p_1, \\ \partial_1(e_5) &= p_4 - p_3, & \partial_1(e_{11}) &= p_0 - p_3 \end{aligned}$$

olduğundan 0-eşzincirler,

$$\delta^0 p_0^* = e_6 + e_9 + e_{10} + e_{11},$$

$$\delta^0 p_1^* = e_0 + e_4 + e_7 - e_{10},$$

$$\delta^0 p_2^* = -e_0 - e_1 - e_2 - e_3,$$

$$\delta^0 p_3^* = e_1 - e_5 - e_8 - e_{11},$$

$$\delta^0 p_4^* = e_2 - e_4 + e_5 - e_6,$$

$$\delta^0 p_5^* = e_3 - e_7 + e_8 - e_9$$

elde edilir.

$$\partial_2(\sigma_0) = \partial_2(\langle p_2 p_4 p_1 \rangle) = \langle p_4 p_1 \rangle - \langle p_2 p_1 \rangle + \langle p_2 p_4 \rangle = e_4 - e_0 + e_2,$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(\sigma_1) &= \partial_2(\langle p_4 p_1 p_0 \rangle) = \langle p_1 p_0 \rangle - \langle p_4 p_0 \rangle + \langle p_4 p_1 \rangle = e_{10} - e_6 + e_4, \\
\partial_2(\sigma_2) &= \partial_2(\langle p_3 p_4 p_0 \rangle) = \langle p_4 p_0 \rangle - \langle p_3 p_0 \rangle + \langle p_3 p_4 \rangle = e_6 - e_{11} + e_5, \\
\partial_2(\sigma_3) &= \partial_2(\langle p_2 p_3 p_4 \rangle) = \langle p_3 p_4 \rangle - \langle p_2 p_4 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle = e_5 - e_2 + e_1, \\
\partial_2(\sigma_4) &= \partial_2(\langle p_2 p_5 p_1 \rangle) = \langle p_5 p_1 \rangle - \langle p_2 p_1 \rangle + \langle p_2 p_5 \rangle = e_7 - e_0 + e_3, \\
\partial_2(\sigma_5) &= \partial_2(\langle p_2 p_3 p_5 \rangle) = \langle p_3 p_5 \rangle - \langle p_2 p_5 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle = e_8 - e_3 + e_1, \\
\partial_2(\sigma_6) &= \partial_2(\langle p_5 p_1 p_0 \rangle) = \langle p_1 p_0 \rangle - \langle p_5 p_0 \rangle + \langle p_5 p_1 \rangle = e_{10} - e_9 + e_7, \\
\partial_2(\sigma_7) &= \partial_2(\langle p_3 p_5 p_0 \rangle) = \langle p_5 p_0 \rangle - \langle p_3 p_0 \rangle + \langle p_3 p_5 \rangle = e_9 - e_{11} + e_8,
\end{aligned}$$

olduğundan 1-eşzincirler,

$$\begin{aligned}
\delta^1 e_0^* &= -\sigma_0 - \sigma_4, & \delta^1 e_6^* &= -\sigma_1 + \sigma_2, \\
\delta^1 e_1^* &= \sigma_3 + \sigma_5, & \delta^1 e_7^* &= \sigma_4 + \sigma_6, \\
\delta^1 e_2^* &= \sigma_0 - \sigma_3, & \delta^1 e_8^* &= \sigma_5 + \sigma_7, \\
\delta^1 e_3^* &= \sigma_4 - \sigma_5, & \delta^1 e_9^* &= -\sigma_6 + \sigma_7, \\
\delta^1 e_4^* &= \sigma_0 + \sigma_1, & \delta^1 e_{10}^* &= \sigma_1 + \sigma_6, \\
\delta^1 e_5^* &= \sigma_2 + \sigma_3, & \delta^1 e_{11}^* &= -\sigma_2 - \sigma_7
\end{aligned}$$

olur. Öncelikle δ^0 in çekirdeğini bulalım.

$$\begin{aligned}
\delta^0\left(\sum_{i=0}^5 n_i p_i^*\right) &= n_0(e_6 + e_9 + e_{10} + e_{11}) + n_1(e_0 + e_4 + e_7 - e_{10}) + n_2(-e_0 - e_1 - e_2 - e_3) \\
&\quad + n_3(e_1 - e_5 - e_8 - e_{11}) + n_4(e_2 - e_4 + e_5 - e_6) + n_5(e_3 - e_7 + e_8 - e_9)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&e_0(n_1 - n_2) + e_1(-n_2 + n_3) + e_2(-n_2 + n_4) + e_3(-n_2 + n_5) + e_4(n_1 - n_4) \\
&+ e_5(-n_3 + n_4) + e_6(n_0 - n_4) + e_7(n_1 - n_5) + e_8(-n_3 + n_5) + e_9(-n_5 + n_0) \\
&+ e_{10}(n_0 - n_1) + e_{11}(n_0 - n_3) = 0,
\end{aligned}$$

denklemleri çözümlerse

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n$$

olur. Bu durumda

$$Z^{0,18}(MSS'_{18}) = \{n(p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. $B^{0,18}(MSS'_{18}) \cong 0$ olduğundan,

$$H^{0,18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

dir.

$$\begin{aligned} \delta^1\left(\sum_{i=0}^{11} k_i e_i^*\right) &= k_0(-\sigma_0 - \sigma_4) + k_1(\sigma_3 + \sigma_5) + k_2(\sigma_0 - \sigma_3) + k_3(\sigma_4 - \sigma_5) \\ &\quad + k_4(\sigma_0 + \sigma_1) + k_5(\sigma_2 + \sigma_3) + k_6(-\sigma_1 + \sigma_2) + k_7(\sigma_4 + \sigma_6) \\ &\quad + k_8(\sigma_5 + \sigma_7) + k_9(-\sigma_6 + \sigma_7) + k_{10}(\sigma_1 + \sigma_6) + k_{11}(-\sigma_2 - \sigma_7) \end{aligned}$$

δ^1 in çekirdeğini bulalım.

$$\sigma_0(-k_0 + k_2 + k_4) + \sigma_1(k_4 - k_6 + k_{10}) + \sigma_2(k_5 + k_6 - k_{11}) + \sigma_3(k_1 - k_2 + k_5)$$

$$+ \sigma_4(k_3 + k_7 - k_0) + \sigma_5(k_1 + k_8 - k_3) + \sigma_6(k_7 - k_9 + k_{10}) + \sigma_7(k_8 + k_9 - k_{11}) = 0$$

denklemini çözümlerse

$$k_0 = k_1 + k_4 + k_5$$

$$k_2 = k_1 + k_5$$

$$k_3 = k_1 + k_5 + k_4 - k_7$$

$$k_6 = k_4 + k_{10}$$

$$k_8 = k_4 + k_5 - k_7$$

$$k_9 = k_7 + k_{10}$$

$$k_{11} = k_4 + k_5 + k_{10}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} Z^{1,18}(MSS'_{18}) &= \{(k_1 + k_4 + k_5)e_0^* + k_1 e_1^* + (k_1 + k_5)e_2^* + (k_1 + k_4 + k_5 - k_7)e_3^* \\ &\quad + k_4 e_4^* + k_5 e_5^* + (k_4 + k_{10})e_6^* + k_7 e_7^* + (k_4 + k_5 - k_7)e_8^* + (k_7 + k_{10})e_9^* \\ &\quad + k_{10} e_{10}^* + (k_4 + k_5 + k_{10})e_{11}^* \mid k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 4, 5, 7, 10\} \cong \mathbb{Z}^5 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} B^{1,18}(MSS'_{18}) &= \{t_0 e_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + (t_0 - t_2)e_4 + (t_2 - t_1)e_5 + t_4 e_6 \\ &\quad + (t_0 - t_3)e_7 + (t_3 - t_1)e_8 + (t_2 - t_3 + t_4)e_9 + (-t_0 + t_2 + t_4)e_{10}\} \end{aligned}$$

$$+(-t_1 + t_2 + t_4)e_{11} | t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4\} \cong \mathbb{Z}^5$$

bulunur. $B^{1,18}(MSS'_{18}) = Z^{1,18}(MSS'_{18})$ olduğundan

$$H^{1,18}(MSS'_{18}) \cong \{0\}$$

dir.

$$B^{2,18}(MSS'_{18}) = \{h_0\sigma_0 + h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3 + h_4\sigma_4 + h_5\sigma_5 + h_6\sigma_6$$

$$+ (h_5 - h_6 + h_4 - h_0 - h_3 + h_2 + h_1)\sigma_7 | h_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\cong \mathbb{Z}^7$$

olur. $Z^{2,18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}^8$ olduğundan

$$H^{2,18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

dir. Bu durumda

$$H^{q,18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek 4.9 MSS_{18} in kohomoloji gruplarını hesaplayalım.

MSS_{18} in noktalarını $\{p_0 = (0, 0, 1), p_1 = (1, 1, 1), p_2 = (1, 2, 1), p_3 = (0, 3, 1),$
 $p_4 = (-1, 2, 1), p_5 = (-1, 1, 1), p_6 = (0, 1, 0), p_7 = (0, 2, 0), p_8 = (0, 2, 2),$
 $p_9 = (0, 1, 2)\} \subset \mathbb{Z}^3$ olarak alalım ve bu noktalar

$$p_5 < p_4 < p_0 < p_6 < p_9 < p_7 < p_8 < p_3 < p_1 < p_2$$

şeklinde sıralansın.

$C_0^{18}(MSS_{18})$, $C_1^{18}(MSS_{18})$ ve $C_2^{18}(MSS_{18})$ serbest abel gruplarının bazıları olan 0-simpleksler, 1-simpleksler ve 2-simpleksleri Teorem 3.22 deki gibi alalım.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.

$$C^{0,18}(MSS_{18}) = Hom(C_0^{18}(MSS_{18}), \mathbb{Z}),$$

$$C^{1,18}(MSS_{18}) = Hom(C_1^{18}(MSS_{18}), \mathbb{Z}),$$

$$C^{2,18}(MSS_{18}) = Hom(C_2^{18}(MSS_{18}), \mathbb{Z}),$$

olduğundan

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\delta^1} C^{2,18}(MSS_{18}) \xrightarrow{\delta^2} 0$$

kısa dizisi bulunur.

$$\begin{array}{ll} \partial_1(e_0) = p_1 - p_0, & \partial_1(e_{10}) = p_7 - p_6, \\ \partial_1(e_1) = p_9 - p_0, & \partial_1(e_{11}) = p_4 - p_5, \\ \partial_1(e_2) = p_0 - p_5, & \partial_1(e_{12}) = p_2 - p_8, \\ \partial_1(e_3) = p_6 - p_0, & \partial_1(e_{13}) = p_8 - p_4, \\ \partial_1(e_4) = p_8 - p_9, & \partial_1(e_{14}) = p_3 - p_8, \\ \partial_1(e_5) = p_1 - p_9, & \partial_1(e_{15}) = p_3 - p_4, \\ \partial_1(e_6) = p_9 - p_5, & \partial_1(e_{16}) = p_7 - p_4, \\ \partial_1(e_7) = p_1 - p_6, & \partial_1(e_{17}) = p_2 - p_3, \\ \partial_1(e_8) = p_2 - p_1, & \partial_1(e_{18}) = p_2 - p_7, \\ \partial_1(e_9) = p_6 - p_5, & \partial_1(e_{19}) = p_3 - p_7, \end{array}$$

olduğundan 0-eşzincirleri,

$$\delta^0 p_0^* = -e_0 - e_1 + e_2 - e_3,$$

$$\delta^0 p_1^* = e_0 + e_5 + e_7 - e_8,$$

$$\delta^0 p_2^* = e_8 + e_{12} + e_{17} + e_{18},$$

$$\delta^0 p_3^* = e_{14} + e_{15} - e_{17} + e_{19},$$

$$\delta^0 p_4^* = e_{11} - e_{13} - e_{15} - e_{16},$$

$$\delta^0 p_5^* = -e_2 - e_6 - e_9 - e_{11},$$

$$\delta^0 p_6^* = e_3 - e_7 + e_9 - e_{10},$$

$$\delta^0 p_7^* = e_{10} + e_{16} - e_{18} - e_{19},$$

$$\delta^0 p_8^* = e_4 - e_{12} + e_{13} - e_{14},$$

$$\delta^0 p_9^* = e_1 - e_4 - e_5 + e_6$$

şeklinde elde edilir.

$$\partial_2(\sigma_0) = \langle p_9 p_1 \rangle - \langle p_0 p_1 \rangle + \langle p_0 p_9 \rangle = e_5 - e_0 + e_1,$$

$$\partial_2(\sigma_1) = \langle p_6 p_1 \rangle - \langle p_0 p_1 \rangle + \langle p_0 p_6 \rangle = e_7 - e_0 + e_3,$$

$$\partial_2(\sigma_2) = \langle p_0 p_6 \rangle - \langle p_5 p_6 \rangle + \langle p_5 p_0 \rangle = e_3 - e_9 + e_2,$$

$$\partial_2(\sigma_3) = \langle p_0 p_9 \rangle - \langle p_5 p_9 \rangle + \langle p_5 p_0 \rangle = e_1 - e_6 + e_2,$$

$$\partial_2(\sigma_4) = \langle p_8 p_3 \rangle - \langle p_4 p_3 \rangle + \langle p_4 p_8 \rangle = e_{14} - e_{15} + e_{13},$$

$$\partial_2(\sigma_5) = \langle p_7 p_3 \rangle - \langle p_4 p_3 \rangle + \langle p_4 p_7 \rangle = e_{19} - e_{15} + e_{16},$$

$$\partial_2(\sigma_6) = \langle p_3 p_2 \rangle - \langle p_8 p_2 \rangle + \langle p_8 p_3 \rangle = e_{17} - e_{12} + e_{14},$$

$$\partial_2(\sigma_7) = \langle p_3 p_2 \rangle - \langle p_7 p_2 \rangle + \langle p_7 p_3 \rangle = e_{17} - e_{18} + e_{19},$$

olduğundan 1-eşzincirleri,

$$\begin{array}{ll} \delta^1 e_0^* = -\sigma_0 - \sigma_1, & \delta^1 e_{10}^* = \{0\}, \\ \delta^1 e_1^* = \sigma_0 + \sigma_3, & \delta^1 e_{11}^* = \{0\}, \\ \delta^1 e_2^* = \sigma_2 + \sigma_3, & \delta^1 e_{12}^* = -\sigma_6, \\ \delta^1 e_3^* = \sigma_1 + \sigma_2, & \delta^1 e_{13}^* = \sigma_4, \\ \delta^1 e_4^* = \{0\}, & \delta^1 e_{14}^* = \sigma_4 + \sigma_6, \\ \delta^1 e_5^* = \sigma_0, & \delta^1 e_{15}^* = -\sigma_4 - \sigma_5, \\ \delta^1 e_6^* = -\sigma_3, & \delta^1 e_{16}^* = \sigma_5, \\ \delta^1 e_7^* = \sigma_1, & \delta^1 e_{17}^* = \sigma_6 + \sigma_7, \\ \delta^1 e_8^* = \{0\}, & \delta^1 e_{18}^* = -\sigma_7, \\ \delta^1 e_9^* = -\sigma_2, & \delta^1 e_{19}^* = \sigma_5 + \sigma_7 \end{array}$$

olarak bulunur. Öncelikle δ^0 in çekirdeğini bulalım.

$$\begin{aligned} \delta^0 \left(\sum_{i=0}^9 n_i p_i^* \right) &= n_0(-e_0 - e_1 + e_2 - e_3) + n_1(e_0 + e_5 + e_7 - e_8) \\ &+ n_2(e_8 + e_{12} + e_{17} + e_{18}) + n_3(e_{14} + e_{15} - e_{17} + e_{19}) \\ &+ n_4(e_{11} - e_{13} - e_{15} - e_{16}) + n_5(-e_2 - e_6 - e_9 - e_{11}) \\ &+ n_6(e_3 - e_7 + e_9 - e_{10}) + n_7(e_{10} + e_{16} - e_{18} - e_{19}) \end{aligned}$$

$$+n_8(e_4 - e_{12} + e_{13} - e_{14}) + n_9(e_1 - e_4 - e_5 + e_6)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &e_0(-n_0 + n_1) + e_1(-n_0 + n_9) + e_2(n_0 - n_5) + e_3(-n_0 + n_6) + e_4(n_8 - n_9) \\ &+ e_5(n_1 - n_9) + e_6(-n_5 + n_9) + e_7(n_1 - n_6) + e_8(n_2 - n_1) + e_9(-n_5 + n_6) \\ &+ e_{10}(-n_6 + n_7) + e_{11}(n_4 - n_5) + e_{12}(n_2 - n_8) + e_{13}(-n_4 + n_8) + e_{14}(n_3 - n_8) \\ &+ e_{15}(n_3 - n_4) + e_{16}(-n_4 + n_7) + e_{17}(n_2 - n_3) + e_{18}(n_2 - n_7) + e_{19}(n_3 - n_7) = 0, \end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = n$$

elde edilir. Bu durumda,

$$Z^{0,18}(MSS_{18}) = \{n(p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9) | n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

olur. $B^{0,18}(MSS_{18}) \cong 0$ olduğundan,

$$H^{0,18}(MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

dir.

$$\begin{aligned} \delta^1\left(\sum_{i=0}^{19} k_i e_i^*\right) &= k_0(-\sigma_0 - \sigma_1) + k_1(\sigma_0 + \sigma_3) + k_2(\sigma_2 + \sigma_3) + k_3(\sigma_1 + \sigma_2) + k_4(\{0\}) \\ &+ k_5(\sigma_0) + k_6(-\sigma_3) + k_7(\sigma_1) + k_8(\{0\}) + k_9(-\sigma_2) + k_{10}(\{0\}) \\ &+ k_{11}(\{0\}) + k_{12}(-\sigma_6) + k_{13}(\sigma_4) + k_{14}(\sigma_4 + \sigma_6) + k_{15}(-\sigma_4 - \sigma_5) \\ &+ k_{16}(\sigma_5) + k_{17}(\sigma_6 + \sigma_7) + k_{18}(-\sigma_7) + k_{19}(\sigma_5 + \sigma_7) \end{aligned}$$

δ^1 in çekirdeğini bulalım.

$$\begin{aligned} &\sigma_0(-k_0 + k_1 + k_5) + \sigma_1(-k_0 + k_3 + k_7) + \sigma_2(k_2 + k_3 - k_9) + \sigma_3(k_1 + k_2 - k_6) \\ &+ \sigma_4(k_{13} + k_{14} - k_{15}) + \sigma_5(-k_{15} + k_{16} + k_{19}) + \sigma_6(-k_{12} + k_{14} + k_{17}) \\ &+ \sigma_7(k_{17} - k_{18} + k_{19}) = 0 \end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$k_0 = k_1 + k_5$$

$$k_6 = k_1 + k_2$$

$$k_7 = k_1 + k_5 - k_3$$

$$k_9 = k_2 + k_3$$

$$k_{12} = k_{14} + k_{17}$$

$$k_{15} = k_{13} + k_{14}$$

$$k_{18} = k_{13} + k_{14} - k_{16} + k_{17}$$

$$k_{19} = k_{13} + k_{14} - k_{16}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} Z^{1,18}(MSS_{18}) = & \{(k_1 + k_5)e_0^* + k_1e_1^* + k_2e_2^* + k_3e_3^* + k_4e_4^* + k_5e_5^* + (k_1 + k_2)e_6^* \\ & + (k_1 + k_5 - k_3)e_7^* + k_8e_8^* + (k_2 + k_3)e_9^* + k_{10}e_{10}^* + k_{11}e_{11}^* \\ & + (k_{14} + k_{17})e_{12}^* + k_{13}e_{13}^* + k_{14}e_{14}^* + (k_{13} + k_{14})e_{15}^* + k_{16}e_{16}^* \\ & + k_{17}e_{17}^* + (k_{13} + k_{14} - k_{16} + k_{17})e_{18}^* + (k_{13} + k_{14} - k_{16})e_{19}^* \\ & | k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 4, 5, 7, 10\} \cong \mathbb{Z}^{12} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} B^{1,18}(MSS_{18}) = & \{t_0e_0 + t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + t_4e_4 + (t_0 - t_1)e_5 + (t_1 + t_2)e_6 \\ & + (t_0 - t_3)e_7 + t_5e_8 + (t_2 + t_3)e_9 + t_6e_{10} + t_7e_{11} + (t_0 - t_1 - t_4 + t_5)e_{12} \\ & + (t_1 + t_2 + t_4 - t_7)e_{13} + t_8e_{14} + (t_1 + t_2 + t_4 - t_7 + t_8)e_{15} \\ & + (t_2 + t_3 + t_6 - t_7)e_{16} + (t_0 - t_1 - t_4 + t_5 - t_8)e_{17} + (t_0 - t_3 + t_5 - t_6)e_{18} \\ & + (t_1 - t_3 + t_4 - t_6 + t_8)e_{19} | t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cong \mathbb{Z}^9 \end{aligned}$$

dur. Bu durumda

$$H^{1,18}(MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}^3$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} B^{2,18}(MSS_{18}) = & \{h_0\sigma_0 + h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3 + h_4\sigma_4 + h_5\sigma_5 + h_6\sigma_6 \\ & + h_7\sigma_7 | h_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cong \mathbb{Z}^8 \end{aligned}$$

olur. $Z^{2,18}(MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}^8$ olduğundan

$$H^{2,18}(MSS_{18}) \cong \{0\}$$

bulunur. Bu durumda

$$H^{q,18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek 4.10 MSS'_6 nün kohomoloji gruplarını hesaplayalım.

MSS'_6 nün noktalarını $\{p_0 = (1,0,0), p_1 = (1,1,0), p_2 = (1,1,1), p_3 = (1,0,1), p_4 = (0,0,1), p_5 = (0,1,1), p_6 = (0,1,0), p_7 = (0,0,0)\} \subset \mathbb{Z}^3$ olarak gösterelim ve bu noktaların $p_7 < p_4 < p_6 < p_5 < p_0 < p_3 < p_1 < p_2$ şeklinde sıralandığını kabul edelim. MSS'_6 üç boyutlu dijital bir görüntü olduğundan $q > 3$ için

$$H^{q,6}(MSS'_6) = \{0\}$$

dır. $C_0^6(MSS'_6)$ ve $C_1^6(MSS'_6)$ serbest abel gruplarının bazıları olan 0-simpleksler ve 1-simpleksleri Teorem 3.23 deki gibi alalım.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^6(MSS'_6) \xrightarrow{\partial_1} C_0^6(MSS'_6) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.

$$C^{0,6}(MSS'_6) = \text{Hom}(C_0^6(MSS'_6), \mathbb{Z}),$$

$$C^{1,6}(MSS'_6) = \text{Hom}(C_1^6(MSS'_6), \mathbb{Z}),$$

olduğundan

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,6}(MSS'_6) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,6}(MSS'_6) \xrightarrow{\delta^1} 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\partial_1(e_0) &= p_1 - p_0, & \partial_1(e_6) &= p_3 - p_4, \\
\partial_1(e_1) &= p_3 - p_0, & \partial_1(e_7) &= p_4 - p_7, \\
\partial_1(e_2) &= p_2 - p_1, & \partial_1(e_8) &= p_5 - p_4, \\
\partial_1(e_3) &= p_1 - p_6, & \partial_1(e_9) &= p_5 - p_6, \\
\partial_1(e_4) &= p_2 - p_5, & \partial_1(e_{10}) &= p_6 - p_7, \\
\partial_1(e_5) &= p_2 - p_3, & \partial_1(e_{11}) &= p_0 - p_7
\end{aligned}$$

olduğundan 0-eşzincirler,

$$\delta^0 p_0^* = -e_0 - e_1 + e_{11},$$

$$\delta^0 p_1^* = e_0 - e_2 + e_3,$$

$$\delta^0 p_2^* = e_2 + e_4 + e_5,$$

$$\delta^0 p_3^* = e_1 - e_5 + e_6,$$

$$\delta^0 p_4^* = -e_6 + e_7 - e_8,$$

$$\delta^0 p_5^* = -e_4 + e_8 + e_9,$$

$$\delta^0 p_6^* = -e_3 - e_9 + e_{10},$$

$$\delta^0 p_7^* = -e_7 - e_{10} - e_{11}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\delta^0 \left(\sum_{i=0}^7 n_i p_i \right) &= n_0 \delta^0(p_0) + n_1 \delta^0(p_1) + n_2 \delta^0(p_2) + n_3 \delta^0(p_3) \\
&\quad + n_4 \delta^0(p_4) + n_5 \delta^0(p_5) + n_6 \delta^0(p_6) + n_7 \delta^0(p_7) \\
&= n_0(-e_0 - e_1 + e_{11}) + n_1(e_0 - e_2 + e_3) + n_2(e_2 + e_4 + e_5) \\
&\quad + n_3(e_1 - e_5 + e_6) + n_4(-e_6 + e_7 - e_8) + n_5(-e_4 + e_8 + e_9) \\
&\quad + n_6(-e_3 - e_9 + e_{10}) + n_7(-e_7 - e_{10} - e_{11}) \\
&= e_0(-n_0 + n_1) + e_1(-n_0 + n_3) + e_2(-n_1 + n_2) + e_3(n_1 - n_6) \\
&\quad + e_4(n_2 - n_5) + e_5(n_2 - n_3) + e_6(n_3 - n_4) + e_7(n_4 - n_7)
\end{aligned}$$

$$+e_8(-n_4 + n_5) + e_9(n_5 - n_6) + e_{10}(n_6 - n_7) + e_{11}(n_0 - n_7)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e_0(-n_0 + n_1) + e_1(-n_0 + n_3) + e_2(-n_1 + n_2) + e_3(n_1 - n_6) + e_4(n_2 - n_5) \\ + e_5(n_2 - n_3) + e_6(n_3 - n_4) + e_7(n_4 - n_7) + e_8(-n_4 + n_5) + e_9(n_5 - n_6) \\ + e_{10}(n_6 - n_7) + e_{11}(n_0 - n_7) = 0 \end{aligned}$$

denklemini çözümlerse

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n$$

olur. Bu durumda

$$Z^{0,6}(MSS'_6) = \text{Ker} \delta^0 = \{n(p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

bulunur. $B^{0,6}(MSS'_6) = \text{Im} \delta^{-1} \cong \{0\}$ olduğundan,

$$H^{0,6}(MSS'_6) \cong \mathbb{Z}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} B^{1,6}(MSS'_6) = \text{Im} \delta^0 = \{t_0 e_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4 + (t_2 - t_1) e_5 + t_5 e_6 + t_6 e_7 \\ + (-t_1 + t_2 - t_4 + t_5) e_8 + (t_2 + t_3 - t_4) e_9 + (t_0 - t_1 - t_3 + t_5 + t_6) e_{10} \\ + (-t_1 + t_5 + t_6) e_{11} \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \forall t_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^7 \end{aligned}$$

elde edilir. $Z^{1,6}(MSS'_6) = \text{Ker} \delta^1 \cong \mathbb{Z}^{12}$ olduğundan

$$H^{1,6}(MSS'_6) = Z^{1,6}(MSS'_6) / B^{1,6}(MSS'_6) \cong \mathbb{Z}^5$$

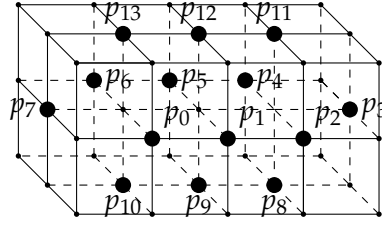
olur. Böylece

$$H^{q,6}(MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dir.

Örnek 4.11 $MSS_{18} \# MSS_{18}$ in kohomoloji gruplarını hesaplayalım.

$MSS_{18} \# MSS_{18}$ in noktalarını $\{p_0 = (1, 1, 1), p_1 = (1, 2, 1), p_2 = (1, 3, 1), p_3 = (0, 4, 1),$
 $p_4 = (-1, 3, 1), p_5 = (-1, 2, 1), p_6 = (-1, 1, 1), p_7 = (0, 0, 1), p_8 = (0, 3, 0), p_9 = (0, 2, 0),$

Şekil 4.1. $MSS_{18} \# MSS_{18}$

$p_{10} = (0, 1, 0), p_{11} = (0, 3, 2), p_{12} = (0, 2, 2), p_{13} = (0, 1, 2) \} \subset \mathbb{Z}^3$ şeklinde alalım ve bu noktalar

$p_6 < p_5 < p_4 < p_7 < p_{13} < p_{10} < p_{12} < p_9 < p_{11} < p_8 < p_3 < p_0 < p_1 < p_2$ olarak sıralansın.

$C_0^{18}(MSS_{18} \# MSS_{18}), C_1^{18}(MSS_{18} \# MSS_{18})$ ve $C_2^{18}(MSS_{18} \# MSS_{18})$ serbest abel gruplarının bazıları olan

0-simpleksler $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle, \langle p_6 \rangle, \langle p_7 \rangle, \langle p_8 \rangle, \langle p_9 \rangle,$
 $\langle p_{10} \rangle, \langle p_{11} \rangle, \langle p_{12} \rangle, \langle p_{13} \rangle,$

1-simpleksler $e_0 = \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_2 = \langle p_3 p_2 \rangle, e_3 = \langle p_4 p_3 \rangle, e_4 = \langle p_5 p_4 \rangle,$

$e_5 = \langle p_6 p_5 \rangle, e_6 = \langle p_6 p_7 \rangle, e_7 = \langle p_7 p_0 \rangle, e_8 = \langle p_7 p_{10} \rangle, e_9 = \langle p_{10} p_9 \rangle,$

$e_{10} = \langle p_9 p_8 \rangle, e_{11} = \langle p_8 p_3 \rangle, e_{12} = \langle p_{11} p_3 \rangle, e_{13} = \langle p_{12} p_{11} \rangle, e_{14} = \langle p_{13} p_{12} \rangle,$

$e_{15} = \langle p_7 p_{13} \rangle, e_{16} = \langle p_{13} p_0 \rangle, e_{17} = \langle p_{10} p_0 \rangle, e_{18} = \langle p_6 p_{10} \rangle, e_{19} = \langle p_6 p_{13} \rangle,$

$e_{20} = \langle p_9 p_1 \rangle, e_{21} = \langle p_5 p_9 \rangle, e_{22} = \langle p_5 p_{12} \rangle, e_{23} = \langle p_{12} p_1 \rangle, e_{24} = \langle p_8 p_2 \rangle,$

$e_{25} = \langle p_4 p_8 \rangle, e_{26} = \langle p_4 p_{11} \rangle, e_{27} = \langle p_{11} p_2 \rangle$

ve

2-simpleksler $\sigma_0 = \langle p_7 p_{10} p_0 \rangle, \sigma_1 = \langle p_7 p_{13} p_0 \rangle, \sigma_2 = \langle p_6 p_7 p_{10} \rangle, \sigma_3 = \langle p_6 p_7 p_{13} \rangle,$

$\sigma_4 = \langle p_8 p_3 p_2 \rangle, \sigma_5 = \langle p_{11} p_3 p_2 \rangle, \sigma_6 = \langle p_4 p_{11} p_3 \rangle, \sigma_7 = \langle p_4 p_8 p_3 \rangle$

şeklinindedir. $m \geq 3$ için $C_m^{18}(MSS_{18} \# MSS_{18})$ aşikar grup olduğundan

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.

$$C^{0,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \cong \text{Hom}(C_0^{18}(MSS_{18}\#MSS_{18}), \mathbb{Z}),$$

$$C^{1,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \cong \text{Hom}(C_1^{18}(MSS_{18}\#MSS_{18}), \mathbb{Z}),$$

$$C^{2,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \cong \text{Hom}(C_2^{18}(MSS_{18}\#MSS_{18}), \mathbb{Z})$$

olur. Buradan

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \xrightarrow{\delta^1} C^{2,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \xrightarrow{\delta^2} 0.$$

dizisi bulunur.

$$\begin{array}{ll} \partial_1(e_0) = p_1 - p_0, & \partial_1(e_{14}) = p_{12} - p_{13}, \\ \partial_1(e_1) = p_2 - p_1, & \partial_1(e_{15}) = p_{13} - p_7, \\ \partial_1(e_2) = p_2 - p_3, & \partial_1(e_{16}) = p_0 - p_{13}, \\ \partial_1(e_3) = p_3 - p_4, & \partial_1(e_{17}) = p_0 - p_{10}, \\ \partial_1(e_4) = p_4 - p_5, & \partial_1(e_{18}) = p_{10} - p_6, \\ \partial_1(e_5) = p_5 - p_6, & \partial_1(e_{19}) = p_{13} - p_6, \\ \partial_1(e_6) = p_7 - p_6, & \partial_1(e_{20}) = p_1 - p_9, \\ \partial_1(e_7) = p_0 - p_7, & \partial_1(e_{21}) = p_9 - p_5, \\ \partial_1(e_8) = p_{10} - p_7, & \partial_1(e_{22}) = p_{12} - p_5, \\ \partial_1(e_9) = p_9 - p_{10}, & \partial_1(e_{23}) = p_1 - p_{12}, \\ \partial_1(e_{10}) = p_8 - p_9, & \partial_1(e_{24}) = p_2 - p_8, \\ \partial_1(e_{11}) = p_3 - p_8, & \partial_1(e_{25}) = p_8 - p_4, \\ \partial_1(e_{12}) = p_3 - p_{11}, & \partial_1(e_{26}) = p_{11} - p_4, \\ \partial_1(e_{13}) = p_{11} - p_{12}, & \partial_1(e_{27}) = p_2 - p_{11} \end{array}$$

olduğundan 0-eşzincirler,

$$\begin{aligned}
\delta^0 p_0^* &= -e_0 + e_7 + e_{16} + e_{17}, \\
\delta^0 p_1^* &= e_0 - e_1 + e_{20} + e_{23}, \\
\delta^0 p_2^* &= e_1 + e_2 + e_{24} + e_{27}, \\
\delta^0 p_3^* &= -e_2 + e_3 + e_{11} + e_{12}, \\
\delta^0 p_4^* &= -e_3 + e_4 - e_{25} - e_{26}, \\
\delta^0 p_5^* &= -e_4 + e_5 - e_{21} - e_{22}, \\
\delta^0 p_6^* &= -e_5 - e_6 - e_{18} - e_{19}, \\
\delta^0 p_7^* &= e_6 - e_7 - e_8 - e_{15}, \\
\delta^0 p_8^* &= e_{10} - e_{11} - e_{24} + e_{25}, \\
\delta^0 p_9^* &= e_9 - e_{10} - e_{20} + e_{21}, \\
\delta^0 p_{10}^* &= e_8 - e_9 + e_{18} - e_{17}, \\
\delta^0 p_{11}^* &= -e_{12} + e_{13} + e_{26} - e_{27}, \\
\delta^0 p_{12}^* &= -e_{13} + e_{14} + e_{22} - e_{23}, \\
\delta^0 p_{13}^* &= -e_{14} + e_{15} - e_{16} + e_{19}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\partial_2(\sigma_0) &= \langle p_{10}p_0 \rangle - \langle p_7p_0 \rangle + \langle p_7p_{10} \rangle = e_{17} - e_7 + e_8, \\
\partial_2(\sigma_1) &= \langle p_{13}p_0 \rangle - \langle p_7p_0 \rangle + \langle p_7p_{13} \rangle = e_{16} - e_7 + e_{15}, \\
\partial_2(\sigma_2) &= \langle p_7p_{10} \rangle - \langle p_6p_{10} \rangle + \langle p_6p_7 \rangle = e_8 - e_{18} + e_6, \\
\partial_2(\sigma_3) &= \langle p_7p_{13} \rangle - \langle p_6p_{13} \rangle + \langle p_6p_7 \rangle = e_{15} - e_{19} + e_6, \\
\partial_2(\sigma_4) &= \langle p_3p_2 \rangle - \langle p_8p_2 \rangle + \langle p_8p_3 \rangle = e_2 - e_{24} + e_{11}, \\
\partial_2(\sigma_5) &= \langle p_3p_2 \rangle - \langle p_{11}p_2 \rangle + \langle p_{11}p_3 \rangle = e_2 - e_{27} + e_{12}, \\
\partial_2(\sigma_6) &= \langle p_{11}p_3 \rangle - \langle p_4p_3 \rangle + \langle p_4p_{11} \rangle = e_{12} - e_3 + e_{26}, \\
\partial_2(\sigma_7) &= \langle p_8p_3 \rangle - \langle p_4p_3 \rangle + \langle p_4p_8 \rangle = e_{11} - e_3 + e_{25}
\end{aligned}$$

olduğundan 1-eşzincirler,

$$\begin{aligned}
\delta^1 e_0^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{14}^* &= \{0\}, \\
\delta^1 e_1^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{15}^* &= \sigma_1 + \sigma_3, \\
\delta^1 e_2^* &= \sigma_4 + \sigma_5, & \delta^1 e_{16}^* &= \sigma_1, \\
\delta^1 e_3^* &= -\sigma_6 - \sigma_7, & \delta^1 e_{17}^* &= \sigma_0, \\
\delta^1 e_4^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{18}^* &= -\sigma_2, \\
\delta^1 e_5^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{19}^* &= -\sigma_3, \\
\delta^1 e_6^* &= \sigma_2 + \sigma_3, & \delta^1 e_{20}^* &= \{0\}, \\
\delta^1 e_7^* &= -\sigma_0 - \sigma_1, & \delta^1 e_{21}^* &= \{0\}, \\
\delta^1 e_8^* &= \sigma_0 + \sigma_2, & \delta^1 e_{22}^* &= \{0\}, \\
\delta^1 e_9^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{23}^* &= \{0\}, \\
\delta^1 e_{10}^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{24}^* &= -\sigma_4, \\
\delta^1 e_{11}^* &= \sigma_4 + \sigma_7, & \delta^1 e_{25}^* &= \sigma_7, \\
\delta^1 e_{12}^* &= \sigma_5 + \sigma_6, & \delta^1 e_{26}^* &= \sigma_6, \\
\delta^1 e_{13}^* &= \{0\}, & \delta^1 e_{27}^* &= -\sigma_5
\end{aligned}$$

olur. δ^0 in çekirdeğini bulalım. δ^0 in tanımından,

$$\begin{aligned} \delta^0\left(\sum_{i=0}^{13} n_i p_i^*\right) &= n_0(-e_0 + e_7 + e_{16} + e_{17}) + n_1(e_0 - e_1 + e_{20} + e_{23}) \\ &+ n_2(e_1 + e_2 + e_{24} + e_{27}) + n_3(-e_2 + e_3 + e_{11} + e_{12}) \\ &+ n_4(-e_3 + e_4 - e_{25} - e_{26}) + n_5(-e_4 + e_5 - e_{21} - e_{22}) \\ &+ n_6(-e_5 - e_6 - e_{18} - e_{19}) + n_7(e_6 - e_7 - e_8 - e_{15}) \\ &+ n_8(e_{10} - e_{11} - e_{24} + e_{25}) + n_9(e_9 - e_{10} - e_{20} + e_{21}) \\ &+ n_{10}(e_8 - e_9 + e_{18} - e_{17}) + n_{11}(-e_{12} + e_{13} + e_{26} - e_{27}) \\ &+ n_{12}(-e_{13} + e_{14} + e_{22} - e_{23}) + n_{13}(-e_{14} + e_{15} - e_{16} + e_{19}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &e_0(-n_0 + n_1) + e_1(-n_1 + n_2) + e_2(n_2 - n_3) + e_3(n_3 - n_4) + e_4(n_4 - n_5) \\ &+ e_5(n_5 - n_6) + e_6(-n_6 + n_7) + e_7(n_0 - n_7) + e_8(-n_7 + n_{10}) + e_9(n_9 - n_{10}) \\ &+ e_{10}(-n_9 + n_8) + e_{11}(n_3 - n_8) + e_{12}(n_3 - n_{11}) + e_{13}(n_{11} - n_{12}) + e_{14}(n_{12} - n_{13}) \\ &+ e_{15}(n_{13} - n_7) + e_{16}(n_0 - n_{13}) + e_{17}(n_0 - n_{10}) + e_{18}(-n_6 + n_{10}) \\ &+ e_{19}(-n_6 + n_{13}) + e_{20}(n_1 - n_9) + e_{21}(-n_5 + n_9) + e_{22}(-n_5 + n_{12}) \\ &+ e_{23}(n_1 - n_{12}) + e_{24}(n_2 - n_8) + e_{25}(-n_4 + n_8) + e_{26}(-n_4 + n_{11}) + e_{27}(n_2 - n_{11}) = 0, \end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = n_{10} = n_{11} = n_{12} = n_{13} = n$$

bulunur. Bu durumda sıfır boyutlu eşdeğerlerin grubu

$$\begin{aligned} Z^{0,18}(MSS_{18}) &= \{n(p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} \\ &+ p_{11} + p_{12} + p_{13}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

elde edilir. $B^{0,18}(MSS_{18} \# MSS_{18}) \cong 0$ olduğundan

$$H^{0,18}(MSS_{18} \# MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

dir.

$$\begin{aligned} \delta^1\left(\sum_{i=0}^{27} k_i e_i^*\right) = & k_0(\{0\}) + k_1(\{0\}) + k_2(\sigma_4 + \sigma_5) + k_3(-\sigma_6 - \sigma_7) + k_4(\{0\}) + k_5(\{0\}) \\ & + k_6(\sigma_2 + \sigma_3) + k_7(-\sigma_0 - \sigma_1) + k_8(\sigma_0 + \sigma_2) + k_9(\{0\}) + k_{10}(\{0\}) \\ & + k_{11}(\sigma_4 + \sigma_7) + k_{12}(\sigma_5 + \sigma_6) + k_{13}(\{0\}) + k_{14}(\{0\}) + k_{15}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ & + k_{16}(\sigma_1) + k_{17}(\sigma_0) + k_{18}(-\sigma_2) + k_{19}(-\sigma_3) + k_{20}(\{0\}) + k_{21}(\{0\}) \\ & + k_{22}(\{0\}) + k_{23}(\{0\}) + k_{24}(-\sigma_4) + k_{25}(\sigma_7) + k_{26}(\sigma_6) + k_{27}(-\sigma_5) \end{aligned}$$

δ^1 in çekirdeğini bulalım.

$$\begin{aligned} & \sigma_0(-k_7 + k_8 + k_{17}) + \sigma_1(-k_7 + k_{15} + k_{16}) + \sigma_2(k_6 - k_{18} + k_8) \\ & + \sigma_3(k_6 - k_{19} + k_{15}) + \sigma_4(k_2 + k_{11} - k_{24}) + \sigma_5(k_2 + k_{12} - k_{27}) \\ & + \sigma_6(-k_3 + k_{12} + k_{26}) + \sigma_7(-k_3 + k_{11} + k_{25}) = 0 \end{aligned}$$

denklemleri çözümlerse,

$$\begin{aligned} k_3 &= k_{12} + k_{26}, \\ k_6 &= k_8 + k_{18}, \\ k_7 &= k_8 + k_{17}, \\ k_{16} &= k_8 - k_{15} + k_{17}, \\ k_{19} &= k_8 + k_{15} + k_{18}, \\ k_{24} &= k_2 + k_{11}, \\ k_{25} &= -k_{11} + k_{12} + k_{26}, \\ k_{27} &= k_2 + k_{12} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} Z^{1,18}(MSS_{18} \# MSS_{18}) = & \{k_0 e_0^* + k_1 e_1^* + k_2 e_2^* + (k_{12} + k_{26}) e_3^* + k_4 e_4^* \\ & + k_5 e_5^* + (k_8 + k_{18}) e_6^* + (k_8 + k_{17}) e_7^* + k_8 e_8^* + k_9 e_9^* \\ & + k_{10} e_{10}^* + k_{11} e_{11}^* + k_{12} e_{12}^* + k_{13} e_{13}^* + k_{14} e_{14}^* + k_{15} e_{15}^* \\ & + (k_8 - k_{15} + k_{17}) e_{16}^* + k_{17} e_{17}^* + k_{18} e_{18}^* + (k_8 + k_{15} + k_{18}) e_{19}^* \\ & + k_{20} e_{20}^* + k_{21} e_{21}^* + k_{22} e_{22}^* + k_{23} e_{23}^* + (k_2 + k_{11}) e_{24}^* \\ & + (-k_{11} + k_{12} + k_{26}) e_{25}^* + k_{26} e_{26}^* + (k_2 + k_{12}) e_{27}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |k_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 26\} \\ & \cong \mathbb{Z}^{20} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} B^{1,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) = & \{t_0e_0 + t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + t_4e_4 + t_5e_5 + t_6e_6 \\ & + (-t_0 - t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 - t_6)e_7 + t_7e_8 + t_8e_9 + t_9e_{10} \\ & + (t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 - t_9)e_{11} + t_{10}e_{12} + t_{11}e_{13} + t_{12}e_{14} \\ & + (t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + 2t_7 + 2t_8 - t_{10} - t_{11} - t_{12})e_{15} \\ & + (-t_0 - t_1 + t_2 + t_{10} + t_{11} + t_{12})e_{16} \\ & + (-t_0 - t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 - t_6 - t_7)e_{17} + (t_6 + t_7)e_{18} \\ & + (t_3 + t_4 + t_5 + 2t_6 + 2t_7 + 2t_8 - t_{10} - t_{11} - t_{12})e_{19} \\ & + (-t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 - t_6 - t_7 - t_8)e_{20} + (-t_5 + t_6 + t_7 + t_8)e_{21} \\ & + (t_3 + t_4 - t_{10} - t_{11})e_{22} + (-t_1 + t_2 + t_{10} + t_{11})e_{23} \\ & + (t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 - t_9)e_{24} \\ & + (-t_5 - t_6 - t_7 - t_8)e_{25} + (t_3 - t_{10})e_{26} + (t_2 + t_{10})e_{27} \\ & |t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cong \mathbb{Z}^{13} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$H^{1,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}^7$$

dir.

$$\begin{aligned} B^{2,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) = & \{h_0\sigma_0 + h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3 + h_4\sigma_4 + h_5\sigma_5 + h_6\sigma_6 \\ & + h_7\sigma_7 | h_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cong \mathbb{Z}^8 \end{aligned}$$

olur. $Z^{2,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \cong \mathbb{Z}^8$ olduğundan,

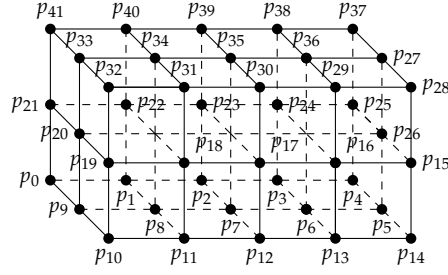
$$H^{2,18}(MSS_{18}\#MSS_{18}) \cong \{0\}$$

dır. Sonuç olarak

$$H^{q,18}(MSS_{18}\sharp MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0 \\ \mathbb{Z}^7 & , q = 1 \\ 0 & , q \geq 2 \end{cases}$$

dır.

Örnek 4.12 $MSS_6\sharp MSS_6$ nın kohomoloji gruplarını hesaplayalım.



Şekil 4.2. $MSS_6\sharp MSS_6$

$MSS_6\sharp MSS_6$ nın noktalarını

$$\begin{aligned} & \{p_0 = (0,0,0), p_1 = (0,1,0), p_2 = (0,2,0), p_3 = (0,3,0), p_4 = (0,4,0), \\ & p_5 = (1,4,0), p_6 = (1,3,0), p_7 = (1,2,0), p_8 = (1,1,0), p_9 = (1,0,0), \\ & p_{10} = (2,0,0), p_{11} = (2,1,0), p_{12} = (2,2,0), p_{13} = (2,3,0), p_{14} = (2,4,0), \\ & p_{15} = (2,4,1), p_{16} = (2,3,1), p_{17} = (2,2,1), p_{18} = (2,1,1), p_{19} = (2,0,1), \\ & p_{20} = (1,0,1), p_{21} = (0,0,1), p_{22} = (0,1,1), p_{23} = (0,2,1), p_{24} = (0,3,1), \\ & p_{25} = (0,4,1), p_{26} = (1,4,1), p_{27} = (1,4,2), p_{28} = (2,4,2), p_{29} = (2,3,2), \\ & p_{30} = (2,2,2), p_{31} = (2,1,2), p_{32} = (2,0,2), p_{33} = (1,0,2), p_{34} = (1,1,2), \\ & p_{35} = (1,2,2), p_{36} = (1,3,2), p_{37} = (0,4,2), p_{38} = (0,3,2), p_{39} = (0,2,2), \\ & p_{40} = (0,1,2), p_{41} = (0,0,2)\} \subset \mathbb{Z}^3 \end{aligned}$$

olarak alalım ve bu noktalar

$$\begin{aligned} & p_0 < p_{21} < p_{41} < p_1 < p_{22} < p_{40} < p_2 < p_{23} < p_{39} < p_3 < p_{24} < p_{38} \\ & < p_4 < p_{25} < p_{37} < p_9 < p_{20} < p_{33} < p_8 < p_{34} < p_7 < p_{35} < p_6 < p_{36} \\ & < p_5 < p_{26} < p_{27} < p_{10} < p_{19} < p_{32} < p_{11} < p_{18} < p_{31} < p_{12} < p_{17} < p_{30} \end{aligned}$$

$$\langle p_{13} \rangle < \langle p_{16} \rangle < \langle p_{29} \rangle < \langle p_{14} \rangle < \langle p_{15} \rangle < \langle p_{28} \rangle$$

şeklinde sıralansın $C_0^{18}(MSS_6 \sharp MSS_6)$ ve $C_1^{18}(MSS_6 \sharp MSS_6)$ serbest abel gruplarının

bazları sırasıyla

$$0\text{-simpleksler } \langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle, \langle p_6 \rangle, \langle p_7 \rangle, \langle p_8 \rangle, \langle p_9 \rangle, \langle p_{10} \rangle, \langle p_{11} \rangle, \langle p_{12} \rangle, \langle p_{13} \rangle,$$

$$\langle p_{14} \rangle, \langle p_{15} \rangle, \langle p_{16} \rangle, \langle p_{17} \rangle, \langle p_{18} \rangle, \langle p_{19} \rangle, \langle p_{20} \rangle, \langle p_{21} \rangle, \langle p_{22} \rangle, \langle p_{23} \rangle, \langle p_{24} \rangle, \langle p_{25} \rangle, \langle p_{26} \rangle, \langle p_{27} \rangle,$$

$$\langle p_{28} \rangle, \langle p_{29} \rangle, \langle p_{30} \rangle, \langle p_{31} \rangle, \langle p_{32} \rangle, \langle p_{33} \rangle, \langle p_{34} \rangle, \langle p_{35} \rangle, \langle p_{36} \rangle, \langle p_{37} \rangle, \langle p_{38} \rangle, \langle p_{39} \rangle, \langle p_{40} \rangle, \langle p_{41} \rangle,$$

$$1\text{-simpleksler } e_0 = \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_0 p_9 \rangle, e_2 = \langle p_0 p_{21} \rangle, e_3 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_4 = \langle p_1 p_8 \rangle,$$

$$e_5 = \langle p_1 p_{22} \rangle, e_6 = \langle p_2 p_3 \rangle, e_7 = \langle p_2 p_7 \rangle, e_8 = \langle p_2 p_{23} \rangle, e_9 = \langle p_3 p_4 \rangle, e_{10} = \langle p_3 p_6 \rangle,$$

$$e_{11} = \langle p_3 p_{24} \rangle, e_{12} = \langle p_4 p_5 \rangle, e_{13} = \langle p_4 p_{25} \rangle, e_{14} = \langle p_6 p_5 \rangle, e_{15} = \langle p_5 p_{14} \rangle, e_{16} = \langle p_5 p_{26} \rangle,$$

$$e_{17} = \langle p_7 p_6 \rangle, e_{18} = \langle p_6 p_{13} \rangle, e_{19} = \langle p_8 p_7 \rangle, e_{20} = \langle p_7 p_{12} \rangle, e_{21} = \langle p_9 p_8 \rangle, e_{22} = \langle p_8 p_{11} \rangle,$$

$$e_{23} = \langle p_9 p_{20} \rangle, e_{24} = \langle p_9 p_{10} \rangle, e_{25} = \langle p_{10} p_{11} \rangle, e_{26} = \langle p_{10} p_{19} \rangle, e_{27} = \langle p_{11} p_{12} \rangle,$$

$$e_{28} = \langle p_{11} p_{18} \rangle, e_{29} = \langle p_{12} p_{13} \rangle, e_{30} = \langle p_{12} p_{17} \rangle, e_{31} = \langle p_{13} p_{14} \rangle, e_{32} = \langle p_{13} p_{16} \rangle,$$

$$e_{33} = \langle p_{14} p_{15} \rangle, e_{34} = \langle p_{16} p_{15} \rangle, e_{35} = \langle p_{26} p_{15} \rangle, e_{36} = \langle p_{15} p_{28} \rangle, e_{37} = \langle p_{17} p_{16} \rangle,$$

$$e_{38} = \langle p_{16} p_{29} \rangle, e_{39} = \langle p_{18} p_{17} \rangle, e_{40} = \langle p_{17} p_{30} \rangle, e_{41} = \langle p_{19} p_{18} \rangle, e_{42} = \langle p_{18} p_{31} \rangle,$$

$$e_{43} = \langle p_{19} p_{32} \rangle, e_{44} = \langle p_{21} p_{20} \rangle, e_{45} = \langle p_{20} p_{33} \rangle, e_{46} = \langle p_{20} p_{19} \rangle, e_{47} = \langle p_{21} p_{41} \rangle,$$

$$e_{48} = \langle p_{21} p_{22} \rangle, e_{49} = \langle p_{22} p_{23} \rangle, e_{50} = \langle p_{22} p_{40} \rangle, e_{51} = \langle p_{23} p_{24} \rangle, e_{52} = \langle p_{23} p_{39} \rangle,$$

$$e_{53} = \langle p_{24} p_{25} \rangle, e_{54} = \langle p_{24} p_{38} \rangle, e_{55} = \langle p_{25} p_{26} \rangle, e_{56} = \langle p_{25} p_{37} \rangle, e_{57} = \langle p_{26} p_{27} \rangle,$$

$$e_{58} = \langle p_{27} p_{28} \rangle, e_{59} = \langle p_{37} p_{27} \rangle, e_{60} = \langle p_{36} p_{27} \rangle, e_{61} = \langle p_{29} p_{28} \rangle, e_{62} = \langle p_{30} p_{29} \rangle,$$

$$e_{63} = \langle p_{36} p_{29} \rangle, e_{64} = \langle p_{31} p_{30} \rangle, e_{65} = \langle p_{35} p_{30} \rangle, e_{66} = \langle p_{32} p_{31} \rangle, e_{67} = \langle p_{34} p_{31} \rangle,$$

$$e_{68} = \langle p_{33} p_{32} \rangle, e_{69} = \langle p_{33} p_{34} \rangle, e_{70} = \langle p_{41} p_{33} \rangle, e_{71} = \langle p_{40} p_{34} \rangle, e_{72} = \langle p_{34} p_{35} \rangle,$$

$$e_{73} = \langle p_{39} p_{35} \rangle, e_{74} = \langle p_{35} p_{36} \rangle, e_{75} = \langle p_{38} p_{36} \rangle, e_{76} = \langle p_{38} p_{37} \rangle, e_{77} = \langle p_{39} p_{38} \rangle,$$

$$e_{78} = \langle p_{40} p_{39} \rangle, e_{79} = \langle p_{41} p_{40} \rangle,$$

olur. $m \geq 2$ için $C_m^6(MSS_6 \sharp MSS_6)$ aşikar grup olduğundan

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^6(MSS_6 \# MSS_6) \xrightarrow{\partial_1} C_0^6(MSS_6 \# MSS_6) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi bulunur.

$$C^{0,18}(MSS_6 \# MSS_6) \cong \text{Hom}(C_0^6(MSS_6 \# MSS_6), \mathbb{Z}),$$

$$C^{1,18}(MSS_6 \# MSS_6) \cong \text{Hom}(C_1^6(MSS_6 \# MSS_6), \mathbb{Z})$$

dir. Böylece

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0,6}(MSS_6 \# MSS_6) \xrightarrow{\delta^0} C^{1,6}(MSS_6 \# MSS_6) \xrightarrow{\delta^1} 0$$

dizisi elde edilir.

$\partial_1(e_0) = p_1 - p_0,$	$\partial_1(e_{27}) = p_{12} - p_{11},$	$\partial_1(e_{54}) = p_{38} - p_{24},$
$\partial_1(e_1) = p_9 - p_0,$	$\partial_1(e_{28}) = p_{18} - p_{11},$	$\partial_1(e_{55}) = p_{26} - p_{25},$
$\partial_1(e_2) = p_{21} - p_0,$	$\partial_1(e_{29}) = p_{13} - p_{12},$	$\partial_1(e_{56}) = p_{37} - p_{25},$
$\partial_1(e_3) = p_2 - p_1,$	$\partial_1(e_{30}) = p_{17} - p_{12},$	$\partial_1(e_{57}) = p_{27} - p_{26},$
$\partial_1(e_4) = p_8 - p_1,$	$\partial_1(e_{31}) = p_{14} - p_{13},$	$\partial_1(e_{58}) = p_{28} - p_{27},$
$\partial_1(e_5) = p_{22} - p_1,$	$\partial_1(e_{32}) = p_{16} - p_{13},$	$\partial_1(e_{59}) = p_{27} - p_{37},$
$\partial_1(e_6) = p_3 - p_2,$	$\partial_1(e_{33}) = p_{15} - p_{14},$	$\partial_1(e_{60}) = p_{27} - p_{36},$
$\partial_1(e_7) = p_7 - p_2,$	$\partial_1(e_{34}) = p_{15} - p_{16},$	$\partial_1(e_{61}) = p_{28} - p_{29},$
$\partial_1(e_8) = p_{23} - p_2,$	$\partial_1(e_{35}) = p_{15} - p_{26},$	$\partial_1(e_{62}) = p_{29} - p_{30},$
$\partial_1(e_9) = p_4 - p_3,$	$\partial_1(e_{36}) = p_{28} - p_{15},$	$\partial_1(e_{63}) = p_{29} - p_{36},$
$\partial_1(e_{10}) = p_6 - p_3,$	$\partial_1(e_{37}) = p_{16} - p_{17},$	$\partial_1(e_{64}) = p_{30} - p_{31},$
$\partial_1(e_{11}) = p_{24} - p_3,$	$\partial_1(e_{38}) = p_{29} - p_{16},$	$\partial_1(e_{65}) = p_{30} - p_{35},$
$\partial_1(e_{12}) = p_5 - p_4,$	$\partial_1(e_{39}) = p_{17} - p_{18},$	$\partial_1(e_{66}) = p_{31} - p_{32},$
$\partial_1(e_{13}) = p_{25} - p_4,$	$\partial_1(e_{40}) = p_{30} - p_{17},$	$\partial_1(e_{67}) = p_{31} - p_{34},$
$\partial_1(e_{14}) = p_5 - p_6,$	$\partial_1(e_{41}) = p_{18} - p_{19},$	$\partial_1(e_{68}) = p_{32} - p_{33},$
$\partial_1(e_{15}) = p_{14} - p_5,$	$\partial_1(e_{42}) = p_{31} - p_{18},$	$\partial_1(e_{69}) = p_{34} - p_{33},$
$\partial_1(e_{16}) = p_{26} - p_5,$	$\partial_1(e_{43}) = p_{32} - p_{19},$	$\partial_1(e_{70}) = p_{33} - p_{41},$
$\partial_1(e_{17}) = p_6 - p_7,$	$\partial_1(e_{44}) = p_{20} - p_{21},$	$\partial_1(e_{71}) = p_{34} - p_{40},$
$\partial_1(e_{18}) = p_{13} - p_6,$	$\partial_1(e_{45}) = p_{33} - p_{20},$	$\partial_1(e_{72}) = p_{35} - p_{34},$
$\partial_1(e_{19}) = p_7 - p_8,$	$\partial_1(e_{46}) = p_{19} - p_{20},$	$\partial_1(e_{73}) = p_{35} - p_{39},$
$\partial_1(e_{20}) = p_{12} - p_7,$	$\partial_1(e_{47}) = p_{41} - p_{21},$	$\partial_1(e_{74}) = p_{36} - p_{35},$
$\partial_1(e_{21}) = p_8 - p_9,$	$\partial_1(e_{48}) = p_{22} - p_{21},$	$\partial_1(e_{75}) = p_{36} - p_{38},$
$\partial_1(e_{22}) = p_{11} - p_8,$	$\partial_1(e_{49}) = p_{23} - p_{22},$	$\partial_1(e_{76}) = p_{37} - p_{38},$
$\partial_1(e_{23}) = p_{20} - p_9,$	$\partial_1(e_{50}) = p_{40} - p_{22},$	$\partial_1(e_{77}) = p_{38} - p_{39},$
$\partial_1(e_{24}) = p_{10} - p_9,$	$\partial_1(e_{51}) = p_{24} - p_{23},$	$\partial_1(e_{78}) = p_{39} - p_{40},$
$\partial_1(e_{25}) = p_{11} - p_{10},$	$\partial_1(e_{52}) = p_{39} - p_{23},$	$\partial_1(e_{79}) = p_{40} - p_{41}$
$\partial_1(e_{26}) = p_{19} - p_{10},$	$\partial_1(e_{53}) = p_{25} - p_{24},$	

olduğundan 0-eşzincirler,

$$\begin{aligned}
\delta^0 p_0^* &= -e_0 - e_1 - e_2, & \delta^0 p_{21}^* &= e_2 - e_{44} - e_{47} - e_{48}, \\
\delta^0 p_1^* &= e_0 - e_3 - e_4 - e_5, & \delta^0 p_{22}^* &= e_5 + e_{48} - e_{49} - e_{50}, \\
\delta^0 p_2^* &= e_3 - e_6 - e_7 - e_8, & \delta^0 p_{23}^* &= e_8 + e_{49} - e_{51} - e_{52}, \\
\delta^0 p_3^* &= e_6 - e_9 - e_{10} - e_{11}, & \delta^0 p_{24}^* &= e_{11} - e_{53} - e_{54} + e_{51}, \\
\delta^0 p_4^* &= e_9 - e_{12} - e_{13}, & \delta^0 p_{25}^* &= e_{13} + e_{53} - e_{55} - e_{56}, \\
\delta^0 p_5^* &= e_{12} + e_{14} - e_{15} - e_{16}, & \delta^0 p_{26}^* &= e_{16} + e_{55} - e_{57} - e_{35}, \\
\delta^0 p_6^* &= e_{10} - e_{14} + e_{17} - e_{18}, & \delta^0 p_{27}^* &= e_{57} - e_{58} + e_{59} + e_{60}, \\
\delta^0 p_7^* &= e_7 - e_{17} + e_{19} - e_{20}, & \delta^0 p_{28}^* &= e_{36} + e_{58} + e_{61}, \\
\delta^0 p_8^* &= e_4 - e_{19} + e_{21} - e_{22}, & \delta^0 p_{29}^* &= e_{38} - e_{61} + e_{62} + e_{63}, \\
\delta^0 p_9^* &= e_1 - e_{21} - e_{23} - e_{24}, & \delta^0 p_{30}^* &= e_{40} - e_{62} + e_{64} + e_{65}, \\
\delta^0 p_{10}^* &= e_{24} - e_{25} - e_{26}, & \delta^0 p_{31}^* &= e_{42} - e_{64} + e_{66} + e_{67}, \\
\delta^0 p_{11}^* &= e_{22} + e_{25} - e_{27} - e_{28}, & \delta^0 p_{32}^* &= e_{43} - e_{66} + e_{68}, \\
\delta^0 p_{12}^* &= e_{20} + e_{27} - e_{29} - e_{30}, & \delta^0 p_{33}^* &= e_{45} - e_{68} - e_{69} + e_{70}, \\
\delta^0 p_{13}^* &= e_{18} + e_{29} - e_{31} - e_{32}, & \delta^0 p_{34}^* &= -e_{67} + e_{69} + e_{71} - e_{72}, \\
\delta^0 p_{14}^* &= e_{15} + e_{31} - e_{33}, & \delta^0 p_{35}^* &= e_{72} + e_{73} - e_{74} - e_{65}, \\
\delta^0 p_{15}^* &= e_{34} + e_{35} - e_{36} + e_{33}, & \delta^0 p_{36}^* &= e_{63} + e_{74} + e_{75} - e_{60}, \\
\delta^0 p_{16}^* &= e_{32} - e_{34} + e_{37} - e_{38}, & \delta^0 p_{37}^* &= e_{56} - e_{59} + e_{76}, \\
\delta^0 p_{17}^* &= e_{30} - e_{37} + e_{39} - e_{40}, & \delta^0 p_{38}^* &= e_{54} - e_{75} - e_{76} + e_{77}, \\
\delta^0 p_{18}^* &= e_{28} - e_{39} + e_{41} - e_{42}, & \delta^0 p_{39}^* &= e_{52} - e_{73} - e_{77} + e_{78}, \\
\delta^0 p_{19}^* &= e_{26} - e_{41} - e_{43} + e_{46}, & \delta^0 p_{40}^* &= e_{50} - e_{71} - e_{78} + e_{79}, \\
\delta^0 p_{20}^* &= e_{23} + e_{44} - e_{45} - e_{46}, & \delta^0 p_{41}^* &= e_{47} - e_{70} - e_{79}
\end{aligned}$$

elde edilir. δ^0 ın çekirdeğini bulalım. δ^0 ın tanımından

$$\begin{aligned}
\delta^0 \left(\sum_{i=0}^{41} k_i p_i^* \right) &= k_0(-e_0 - e_1 - e_2) + k_1(e_0 - e_3 - e_4 - e_5) + k_2(e_3 - e_6 - e_7 - e_8) \\
&+ k_3(e_6 - e_9 - e_{10} - e_{11}) + k_4(e_9 - e_{12} - e_{13}) \\
&+ k_5(e_{12} + e_{14} - e_{15} - e_{16}) + k_6(e_{10} - e_{14} + e_{17} - e_{18}) \\
&+ k_7(e_7 - e_{17} + e_{19} - e_{20}) + k_8(e_4 - e_{19} + e_{21} - e_{22}) \\
&+ k_9(e_1 - e_{21} - e_{23} - e_{24}) + k_{10}(e_{24} - e_{25} - e_{26}) \\
&+ k_{11}(e_{22} + e_{25} - e_{27} - e_{28}) + k_{12}(e_{20} + e_{27} - e_{29} - e_{30}) \\
&+ k_{13}(e_{18} + e_{29} - e_{31} - e_{32}) + k_{14}(e_{15} + e_{31} - e_{33}) \\
&+ k_{15}(e_{34} + e_{35} - e_{36} + e_{33}) + k_{16}(e_{32} - e_{34} + e_{37} - e_{38})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+k_{17}(e_{30} - e_{37} + e_{39} - e_{40}) + k_{18}(e_{28} - e_{39} + e_{41} - e_{42}) \\
&+k_{19}(e_{26} - e_{41} - e_{43} + e_{46}) + k_{20}(e_{23} + e_{44} - e_{45} - e_{46}) \\
&+k_{21}(e_2 - e_{44} - e_{47} - e_{48}) + k_{22}(e_5 + e_{48} - e_{49} - e_{50}) \\
&+k_{23}(e_8 + e_{49} - e_{51} - e_{52}) + k_{24}(e_{11} - e_{53} - e_{54} + e_{51}) \\
&+k_{25}(e_{13} + e_{53} - e_{55} - e_{56}) + k_{26}(e_{16} + e_{55} - e_{57} - e_{35}) \\
&+k_{27}(e_{57} - e_{58} + e_{59} + e_{60}) + k_{28}(e_{36} + e_{58} + e_{61}) \\
&+k_{29}(e_{38} - e_{61} + e_{62} + e_{63}) + k_{30}(e_{40} - e_{62} + e_{64} + e_{65}) \\
&+k_{31}(e_{42} - e_{64} + e_{66} + e_{67}) + k_{32}(e_{43} - e_{66} + e_{68}) \\
&+k_{33}(e_{45} - e_{68} - e_{69} + e_{70}) + k_{34}(-e_{67} + e_{69} + e_{71} - e_{72}) \\
&+k_{35}(e_{72} + e_{73} - e_{74} - e_{65}) + k_{36}(e_{63} + e_{74} + e_{75} - e_{60}) \\
&+k_{37}(e_{56} - e_{59} + e_{76}) + k_{38}(e_{54} - e_{75} - e_{76} + e_{77}) \\
&+k_{39}(e_{52} - e_{73} - e_{77} + e_{78}) + k_{40}(e_{50} - e_{71} - e_{78} + e_{79}) \\
&+k_{41}(e_{47} - e_{70} - e_{79})
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
&e_0(-k_0 + k_1) + e_1(-k_0 + k_9) + e_2(-k_0 + k_{21}) + e_3(-k_1 + k_2) + e_4(-k_1 + k_8) \\
&+e_5(-k_1 + k_{22}) + e_6(-k_2 + k_3) + e_7(-k_2 + k_7) + e_8(-k_2 + k_{23}) \\
&+e_9(-k_3 + k_4) + e_{10}(-k_3 + k_6) + e_{11}(-k_3 + k_{24}) + e_{12}(-k_4 + k_5) \\
&+e_{13}(-k_4 + k_{25}) + e_{14}(k_5 - k_6) + e_{15}(-k_5 + k_{14}) + e_{16}(-k_5 + k_{26}) \\
&+e_{17}(-k_7 + k_6) + e_{18}(-k_6 + k_{13}) + e_{19}(k_7 - k_8) + e_{20}(-k_7 + k_{12}) \\
&+e_{21}(k_8 - k_9) + e_{22}(-k_8 + k_{11}) + e_{23}(-k_9 + k_{20}) + e_{24}(-k_9 + k_{10}) \\
&+e_{25}(-k_{10} + k_{11}) + e_{26}(-k_{10} + k_{19}) + e_{27}(-k_{11} + k_{12}) + e_{28}(-k_{11} + k_{18}) \\
&+e_{29}(-k_{12} + k_{13}) + e_{30}(-k_{12} + k_{17}) + e_{31}(-k_{13} + k_{14}) + e_{32}(-k_{13} + k_{16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e_{33}(-k_{14} + k_{15}) + e_{34}(k_{15} - k_{16}) + e_{35}(k_{15} - k_{26}) + e_{36}(-k_{15} + k_{28}) \\
& +e_{37}(k_{16} - k_{17}) + e_{38}(-k_{16} + k_{29}) + e_{39}(k_{17} - k_{18}) + e_{40}(-k_{17} + k_{30}) \\
& +e_{41}(k_{18} - k_{19}) + e_{42}(-k_{18} + k_{31}) + e_{43}(-k_{19} + k_{32}) + e_{44}(k_{20} - k_{21}) \\
& +e_{45}(-k_{20} + k_{33}) + e_{46}(k_{19} - k_{20}) + e_{47}(-k_{21} + k_{41}) + e_{48}(-k_{21} + k_{22}) \\
& +e_{49}(-k_{22} + k_{23}) + e_{50}(-k_{22} + k_{40}) + e_{51}(-k_{23} + k_{24}) + e_{52}(-k_{23} + k_{39}) \\
& +e_{53}(-k_{24} + k_{25}) + e_{54}(-k_{24} + k_{38}) + e_{55}(-k_{25} + k_{26}) + e_{56}(-k_{25} + k_{37}) \\
& +e_{57}(-k_{26} + k_{27}) + e_{58}(-k_{27} + k_{28}) + e_{59}(k_{27} - k_{37}) + e_{60}(k_{27} - k_{36}) \\
& +e_{61}(k_{28} - k_{29}) + e_{62}(k_{29} - k_{30}) + e_{63}(k_{29} - k_{36}) + e_{64}(k_{30} - k_{31}) \\
& +e_{65}(k_{30} - k_{35}) + e_{66}(k_{31} - k_{32}) + e_{67}(k_{31} - k_{34}) + e_{68}(k_{32} - k_{33}) \\
& +e_{69}(-k_{33} + k_{34}) + e_{70}(k_{33} - k_{41}) + e_{71}(k_{34} - k_{40}) + e_{72}(-k_{34} + k_{35}) \\
& +e_{73}(k_{35} - k_{39}) + e_{74}(-k_{35} + k_{36}) + e_{75}(k_{36} - k_{38}) + e_{76}(k_{37} - k_{38}) \\
& +e_{77}(k_{33} - k_{41}) + e_{78}(k_{39} - k_{40}) + e_{79}(k_{40} - k_{41}) = 0,
\end{aligned}$$

denklemi çözümlerse

$$\begin{aligned}
k_0 & = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = k_9 = k_{10} = k_{11} = k_{12} = k_{13} \\
& = k_{14} = k_{15} = k_{16} = k_{17} = k_{18} = k_{19} = k_{20} = k_{21} = k_{22} = k_{23} = k_{24} = k_{25} \\
& = k_{26} = k_{27} = k_{28} = k_{29} = k_{30} = k_{31} = k_{32} = k_{33} = k_{34} = k_{35} = k_{36} = k_{37} \\
& = k_{38} = k_{39} = k_{40} = k_{41} = k
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan sıfır boyutlu eşdevirlerin grubu

$$Z^{0,6}(MSS_6 \sharp MSS_6) = \{k(p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{40} + p_{41}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

olur. $B^{0,6}(MSS_6 \sharp MSS_6) \cong \{0\}$ olduğundan

$$H^{0,18}(MSS_6 \sharp MSS_6) \cong \mathbb{Z}$$

dir. Diğer taraftan

$$B^{1,6}(MSS_6 \sharp MSS_6) = \{t_0 e_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4 + t_5 e_5 + t_6 e_6$$

$$\begin{aligned}
& t_7e_7 + t_8e_8 + t_9e_9 + t_{10}e_{10} + t_{11}e_{11} + t_{12}e_{12} + t_{13}e_{13} \\
& + (t_9 - t_{10} + t_{12})e_{14} + t_{14}e_{15} + t_{15}e_{16} + (t_6 - t_7 + t_{10})e_{17} \\
& + t_{16}e_{18} + (t_3 - t_4 + t_7)e_{19} + t_{17}e_{20} + (t_0 - t_1 + t_4)e_{21} \\
& + t_{18}e_{22} + t_{19}e_{23} + t_{20}e_{24} + (t_0 - t_1 + t_4 + t_{18} - t_{20})e_{25} \\
& + t_{21}e_{26} + (t_3 - t_4 + t_7 + t_{17} - t_{18})e_{27} + t_{22}e_{28} \\
& + (t_6 - t_7 + t_{10} + t_{16} - t_{17})e_{29} + t_{23}e_{30} \\
& + (t_9 - t_{10} + t_{12} + t_{14} - t_{16})e_{31} + t_{24}e_{32} + t_{25}e_{33} \\
& + (t_9 - t_{10} + t_{12} + t_{14} - t_{16} - t_{24} + t_{25})e_{34} + (t_{14} - t_{15} + t_{25})e_{35} \\
& + t_{25}e_{36} + (t_6 - t_7 + t_{10} + t_{16} - t_{17} - t_{23} + t_{24})e_{37} \\
& + t_{27}e_{38} + (t_3 - t_4 + t_7 + t_{17} - t_{18} - t_{22} + t_{23})e_{39} \\
& + t_{28}e_{40} + (t_0 - t_1 + t_4 + t_{18} - t_{20} - t_{21} + t_{22})e_{41} \\
& + t_{29}e_{42} + t_{30}e_{43} + (t_1 - t_2 + t_{19})e_{44} + t_{31}e_{45} \\
& + (-t_{19} + t_{20} + t_{21})e_{46} + t_{32}e_{47} + (t_0 - t_2 + t_5)e_{48} \\
& + (t_3 - t_5 + t_8)e_{49} + t_{33}e_{50} + (t_6 - t_8 + t_{11})e_{51} + t_{34}e_{52} \\
& + (t_9 - t_{11} + t_{13})e_{53} + t_{35}e_{54} + (t_{12} - t_{13} + t_{15})e_{55} + t_{36}e_{56} \\
& + t_{37}e_{57} + (t_{14} - t_{15} + t_{25} + t_{26} - t_{37})e_{58} \\
& + (t_{12} - t_{13} + t_{15} - t_{36} + t_{37})e_{59} + t_{38}e_{60} \\
& + (-t_6 + t_9 - t_{10} + t_{12} + t_{14} - t_{24} + t_{25} + t_{26} - t_{27})e_{61} \\
& + (t_6 - t_7 + t_{10} + t_{16} - t_{17} - t_{23} + t_{24} + t_{27} - t_{28})e_{62} \\
& + (-t_9 + t_{10} - t_{12} - t_{15} + t_{16} + t_{24} + t_{27} - t_{37} + t_{38})e_{63} \\
& + (t_3 - t_4 + t_7 + t_{17} - t_{18} - t_{22} + t_{23} + t_{28} - t_{29})e_{64} + t_{39}e_{65} \\
& + (t_0 - t_1 + t_4 + t_{18} - t_{20} - t_{21} + t_{22} + t_{29} - t_{30})e_{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +t_{40}e_{67} + (-t_{19} + t_{20} + t_{21} + t_{30} - t_{31})e_{68} \\
& +(t_0 - t_1 + t_4 + t_{18} - t_{19} + t_{22} + t_{29} - t_{31} - t_{40})e_{69} \\
& +(t_1 - t_2 + t_{19} + t_{31} - t_{32})e_{70} \\
& +(t_4 - t_5 + t_{18} + t_{19} + t_{22} - t_{33} - t_{40})e_{71} \\
& +(t_3 - t_4 + t_7 + t_{17} - t_{18} - t_{22} + t_{23} + t_{28} - t_{29} - t_{39} + t_{40})e_{72} \\
& +(t_7 - t_8 + t_{17} + t_{23} + t_{28} - t_{34} - t_{39})e_{73} \\
& +(t_6 - t_7 + t_9 + t_{12} + t_{15} - t_{17} - t_{23} - t_{28} + t_{37} - t_{38} + t_{39})e_{74} \\
& +(t_9 - t_{11} + t_{12} + t_{15} - t_{35} + t_{37} - t_{38})e_{75} \\
& +(t_9 - t_{11} + t_{13} - t_{35} + t_{36})e_{76} \\
& +(t_6 - t_8 + t_{11} - t_{34} + t_{35})e_{77} + (t_3 - t_5 + t_8 - t_{33} + t_{34})e_{78} \\
& +(t_0 - t_2 + t_5 - t_{19} + t_{29} - t_{32} + t_{33})e_{79} \mid t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, \dots, 40\} \\
& \cong \mathbb{Z}^{41}
\end{aligned}$$

bulunur. $Z^{1,18}(MSS_6 \# MSS_6) \cong \mathbb{Z}^{80}$ olduğundan

$$H^{1,18}(MSS_6 \# MSS_6) \cong \mathbb{Z}^{39}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$H^{q,6}(MSS_6 \# MSS_6) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0 \\ \mathbb{Z}^{39} & , q = 1 \\ 0 & , q \geq 2 \end{cases}$$

dır.

4.1. Dijital Görüntülerin Relatif Kohomoloji Grupları

Tanım 4.13 Bir (K, κ) dijital simpleksler kompleksi, K_0 , K nın alt kompleksi ve G bir abel grup olsun. p boyutlu relatif eşzincirlerin grubu

$$C^{p,\kappa}(K, K_0; G) = \text{Hom}(C_p^\kappa(K, K_0), G)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Relatif eşsınır operatörü δ , relatif sınır operatörünün duali olarak tanımlanır:

$$\delta : C^{p,\kappa}(K, K_0; G) \rightarrow C^{p+1,\kappa}(K, K_0; G)$$

Bu homomorfizmin çekirdeği $Z^{p,\kappa}(K, K_0; G)$, görüntüsü $B^{p+1,\kappa}(K, K_0; G)$ olmak üzere, bunlar sırasıyla relatif eşdevirler grubu ve relatif eşsınırlar grubu olarak adlandırılır. Buradan relatif kohomoloji grubu

$$H^{p,\kappa}(K, K_0; G) = Z^{p,\kappa}(K, K_0; G) / B^{p,\kappa}(K, K_0; G)$$

şeklinde tanımlanır.

$C^{p,\kappa}(K, K_0; G)$, $C^{p,\kappa}(K; G)$ nin alt grubu ve $C^{p,\kappa}(K; G)$ nin $C^{p,\kappa}(K_0; G)$ ye bölüm grubudur. Yani $C^{p,\kappa}(K, K_0; G) = C^{p,\kappa}(K; G) / C^{p,\kappa}(K_0; G)$ olarak yazılabilir.

Bir relatif eşzincir $C_p^\kappa(K, K_0)$ dan G ye bir homomorfizmdir. Bu homomorfizmlerin grubu $C_p^\kappa(K_0)$ alt grubu üzerinde sıfırlanan $C_p^\kappa(K)$ dan G ye tüm homomorfizmlerin grubuna karşılık gelir. Bu $C_p^\kappa(K)$ dan G ye tüm homomorfizmlerin grubunun alt grubudur. Böylece $C^{p,\kappa}(K, K_0; G)$, $K - K_0$ ile oluşturulan K nın eşzincirlerinin grubudur.

Zincirler için

$$0 \longrightarrow C_p^\kappa(K_0) \xrightarrow{i} C_p^\kappa(K) \xrightarrow{j} C_p^\kappa(K, K_0) \longrightarrow 0$$

tam dizisi mevcuttur. Relatif zincir grupları serbest olduğu için bu dizi parçalanandır.

Bu durumda

$$0 \longleftarrow C^{p,\kappa}(K_0; G) \xleftarrow{\tilde{i}} C^{p,\kappa}(K; G) \xleftarrow{\tilde{j}} C^{p,\kappa}(K, K_0; G) \longleftarrow 0$$

dizisi tam ve parçalanandır. j projeksiyon dönüşümünün duali \tilde{j} kapsama dönüşümü ve i kapsama dönüşümünün duali \tilde{i} kısıtlama dönüşümüdür.

Şimdi simpleksler dönüşümüyle üretilen kohomoloji homomorfizmini ele alalım.

$$f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$$

bir simpleksler dönüşümü ise buna karşılık gelen zincir dönüşümü

$$f_{\#} : C_p^{\kappa}(K, K_0) \rightarrow C_p^{\kappa}(L, L_0)$$

şeklindedir. $f_{\#}$ in duali eşzincirleri eşzincirlere dönüştürür. Genelde $f^{\#}$ ile gösterilir. $f_{\#}$, ∂ ile değişmeli olduğundan, $f^{\#}$ dönüşümü δ ile değişmelidir. $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$ denkleminin duali $\delta \circ f^{\#} = f^{\#} \circ \delta$ denklemdir. Bu durumda $f^{\#}$ eşdevirleri eşdevirlere ve eşsınırları eşsınırlara taşır. $f^{\#}$ a eşzincir dönüşümü denir. Bu kohomoloji gruplarının

$$H^{p,\kappa}(K, K_0; G) \xleftarrow{f^*} H^{p,\kappa}(L, L_0; G)$$

homomorfizmini üretir. Funktor özellikleri sağlanır. i birim ise $i_{\#}$ birim ve dolayısıyla $i^{\#}$ da birimdir. Benzer olarak $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ denklemi dual olarak $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$ denklemini verir.

Teorem 4.14 [27] K bir dijital simpleksler kompleks, K_0 alt kompleks olsun.

$$\dots \leftarrow H^{p,\kappa}(K_0; G) \leftarrow H^{p,\kappa}(K; G) \leftarrow H^{p,\kappa}(K, K_0; G) \leftarrow H^{p-1,\kappa}(K_0; G) \leftarrow \dots$$

tam dizisi mevcuttur.

İspat:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{p-1,\kappa}(K, K_0) & \xrightarrow{i} & C^{p-1,\kappa}(K) & \xrightarrow{j} & C^{p-1,\kappa}(K_0) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta' & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta'' \\ 0 & \longrightarrow & C^{p,\kappa}(K, K_0) & \xrightarrow{i} & C^{p,\kappa}(K) & \xrightarrow{j} & C^{p,\kappa}(K_0) \longrightarrow 0 \end{array}$$

değişmeli diyagramını ele alalım.

$$\dots \longrightarrow H^{p-1,\kappa}(K_0) \xrightarrow{d} H^{p,\kappa}(K, K_0) \xrightarrow{i^*} H^{p,\kappa}(K) \xrightarrow{j^*} H^{p,\kappa}(K_0) \longrightarrow \dots$$

dizisinin tam olması için $\text{Im } d = \text{Ker } i^*$, $\text{Im } i^* = \text{Ker } j^*$ ve $\text{Im } j^* = \text{Ker } d$ olmalıdır.

1) İlk olarak $\text{Im } d = \text{Ker } i^*$ olduğunu gösterelim. Burada d homomorfizminin yerine $i^{-1}\delta j^{-1}$ homomorfizmini alalım.

$$i^*(d(z'' + B'')) = i^*(d(z'') + B') = i^*(i^{-1}\delta j^{-1}(z'') + B') = \delta(j^{-1}(z'')) + B = B$$

olduğundan $\text{Im } d \subset \text{Ker } i^*$ bulunur.

$z' + B' \in \text{Ker } i^*$ olsun. Bu durumda

$$i^*(z' + B') = i(z') + B = B$$

olduğundan $i(z') = \delta(c)$ ve $\delta''(j(c)) = j(\delta(c)) = j(i(z')) = 0$ dır ve buradan $j(c) \in Z''$ olur. Dolayısıyla

$$d(j(c) + B'') = i^{-1}\delta j^{-1}(j(c) + B'') = i^{-1}\delta(c) + B' = i^{-1}i(z') + B' = z' + B'$$

dür. Böylece $\text{Ker } i^* \subset \text{Im } d$ elde edilir.

2) Şimdi $\text{Im } i^* = \text{Ker } j^*$ olduğunu gösterelim.

$$j^*(i^*(z' + B')) = j^*(i(z') + B) = j(i(z')) + B'' = B''$$

olduğundan $\text{Im } i^* \subset \text{Ker } j^*$ bulunur.

$z + B \in \text{Ker } j^*$ olsun. Bu durumda

$$j^*(z + B) = j(z) + B'' = B''$$

olduğundan $j(z) = \delta''(c'')$ ve j örten olduğundan $c'' = j(c)$ dir. Dolayısıyla $j(z) = \delta''(j(c)) = j(\delta(c))$ ve $j(z - \delta c) = 0$ dır. Tamlıktan c' mevcuttur ve $i(c') = z - \delta(c)$ dir. Buradan

$$i^*(c' + B') = i(c') + B = z - \delta(c) + B = z + B$$

olur. Böylece $\text{Ker } j^* \subset \text{Im } i^*$ elde edilir.

3) Son olarak $\text{Im } j^* = \text{Ker } d$ olduğunu gösterelim.

$$d(j^*(z + B)) = d(j(z) + B'') = i^{-1}\delta j^{-1}(j(z) + B'') = i^{-1}\delta(z) + B' = B'$$

olduğundan $\text{Im } j^* \subset \text{Ker } d$ bulunur.

$z'' + B'' \in \text{Ker } d$ olsun. Bu durumda

$$d(z'' + B'') = d(z'') + B' = i^{-1}\delta j^{-1}(z'') + B' = B'$$

olduğundan $x' = i^{-1}\delta j^{-1}(z'') \in B'$ ve $x' = \delta'(c')$ dür. Dolayısıyla

$$i(x') = i(\delta'(c')) = \delta(i(c')) = \delta(j^{-1}(z''))$$

olur. Buradan $\delta(j^{-1}(z'') - i(c')) = 0$ ve $j^{-1}(z'') - i(c') \in Z$ olduğundan

$$j^*(j^{-1}(z'') - i(c') + B) = j(j^{-1}(z'')) - j(i(c')) + B'' = z'' + B''$$

bulunur. Böylece $\text{Ker } d \subset \text{Im } j^*$ elde edilir. \square

Örnek 4.15 $MSS'_{18} = \{p_0 = (1, 1, 0), p_1 = (0, 2, 0), p_2 = (-1, 1, 0), p_3 = (0, 0, 0), p_4 = (0, 1, -1), p_5 = (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^3$ dijital görüntüsünün alt uzayı olarak $A = \{(0, 1, 1)\}$ y1 ele alalım.

Teorem 4.14 ün yardımıyla $H^{q,18}(MSS'_{18}, A)$ y1 hesaplayalım. A tek nokta kümesi olduğu için, Teorem 4.5 den

$$H^{q,18}(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. Örnek 4.8 den,

$$H^{q,18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

bulunur. Teorem 4.14 den,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q,18}(MSS'_{18}, A) \rightarrow H^{q,18}(MSS'_{18}) \rightarrow H^{q,18}(A) \rightarrow \\ H^{q+1,18}(MSS'_{18}, A) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

tam dizisi elde edilir. Teorem 4.7 den $H^{0,18}(MSS'_{18}, A) \cong \mathbb{Z}$ olur.

$$0 \xrightarrow{\delta^0} \mathbb{Z} \xrightarrow{j^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^1} H^{1,18}(MSS'_{18}, A) \xrightarrow{k^*} 0$$

Birinci İzomorfizm Teoremi uygulandığında,

$$H^{1,18}(MSS'_{18}, A)/\text{Ker } k^* \cong \text{Im } k^*$$

olur. Dizinin tamlığından $\text{Im } \delta^1 = \text{Ker } k^*$ ve $\text{Im } i^* = \text{Ker } \delta^1$ dir. i^* izomorfizm olduğundan, $\text{Ker } i^* = 0$ ve $\text{Im } i^* = \mathbb{Z}$ bulunur. $\text{Ker } \delta^1 = \mathbb{Z}$ dir. Tekrar Birinci İzomorfizm Teoremi uygulanırsa,

$$\mathbb{Z}/\text{Ker } \delta^1 \cong \text{Im } \delta^1$$

olduğundan $\text{Im } \delta^1 = 0 = \text{Ker } k^*$ ve

$$H^{1,18}(MSS'_{18}, A) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$H^{q,18}(MSS'_{18}, A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

olur.

4.2. Eilenberg-Steenrod Aksiyonları

Aksiyom 1 (Birimlilik aksiyomu) [10,24] X , κ -yakınlıklı bir dijital görüntü olsun.

$i : (X, \kappa) \rightarrow (X, \kappa)$ birim fonksiyonu ise $i^* : H^{*,\kappa}(X) \rightarrow H^{*,\kappa}(X)$ da birim fonksiyondur.

Aksiyom 2 (Birleşmelilik aksiyomu) [10,24] X , Y ve Z sırasıyla κ_0 , κ_1 , κ_2 -yakınlıklı dijital görüntüler olsun. $h : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ ve $k : (Y, \kappa_1) \rightarrow (Z, \kappa_2)$ dijital sürekli fonksiyonlar ise $(k \circ h)^* = h^* \circ k^*$ dir.

Aksiyom 3 (Değişmelilik aksiyomu) [10, 24] (X, A) ve (Y, B) sırasıyla κ_0 ve κ_1 -yakınlıklı dijital görüntü çiftleri olsun. $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ise aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
H^{q-1, \kappa_1}(Y, B) & \xrightarrow{f^*} & H^{q-1, \kappa_0}(X, A) \\
\delta^* \downarrow & & \downarrow \delta^* \\
H^{q, \kappa_1}(B) & \xrightarrow{(f|_A)^*} & H^{q, \kappa_0}(A)
\end{array}$$

Aksiyom 4 (Tamlık aksiyomu) [10, 24] $i : A \rightarrow X$ ve $p : X \rightarrow (X, A)$ kapsama dönüşümleri olmak üzere

$$\dots \rightarrow H^{q, \kappa}(X, A) \xrightarrow{p^*} H^{q, \kappa}(X) \xrightarrow{i^*} H^{q, \kappa}(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1, \kappa}(X, A) \rightarrow \dots$$

dizisi tamdır.

Aksiyom 5 (Boyut aksiyomu) [1, 10, 24] X , κ -yakınlıklı tek noktalı uzay ise

$$H^{q, \kappa}(X, G) = \begin{cases} G, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

dır.

Dijital görüntülerde homotopi ve excision aksiyomları sağlanmaz. Bu aksiyomların cebirsel topolojideki tanımlarını verelim.

Homotopi Aksiyomu: [10, 24] X ve Y topolojik uzaylar, $h : X \rightarrow Y$ ve $k : X \rightarrow Y$ dönüşümleri homotopik ise $h^* = k^*$ dir.

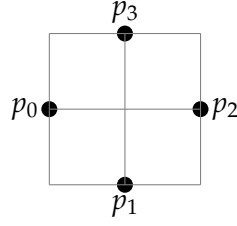
Excision Aksiyomu: [10, 24] (X, A) ikilisi için $\bar{U} \subset \text{Int}A$ olacak şekilde U , X in açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$H^q(X - U, A - U) \cong H^q(X, A)$$

izomorfizmi vardır.

Önerme 4.16 [10] *Dijital görüntülerde simpleksler kohomoloji için excision aksiyomu sağlanmaz.*

İspat: 8-yakınlıklı $X = \{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1), p_2 = (1,0), p_3 = (0,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ dijital görüntüsünü ele alalım.



Şekil 4.3. X

Teorem 4.6 dan

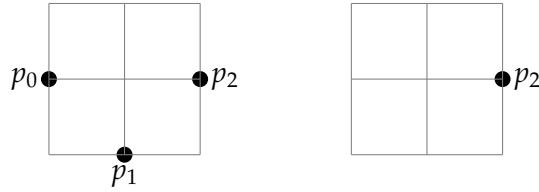
$$H^{q,8}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,1 \\ 0, & q \neq 0,1 \end{cases}$$

dır. $A = \{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1), p_2 = (1,0)\}$ ve $U = \{p_2 = (1,0)\}$ olsun.

$A \subset X$, $U \subset A$ ve $\bar{U} \subset \text{Int}A$ dır. $H^{1,8}(X - U, A - U)$ ve $H^{1,8}(X, A)$ yı hesaplayalım.

$$H^{q,\kappa}(A) = H^{q,\kappa}(U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır.



Şekil 4.4. A ve U

Aksiyom 4 den

$$\dots \longrightarrow H^{q,8}(X, A) \xrightarrow{p^*} H^{q,8}(X) \xrightarrow{i^*} H^{q,8}(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1,8}(X, A) \longrightarrow \dots$$

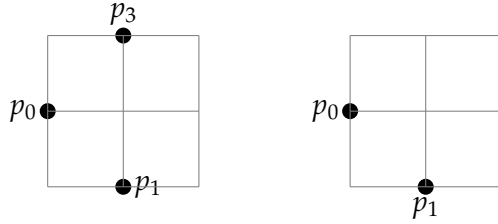
tam dizisi vardır. $q > 1$ için $H^{q,\kappa}(A) = 0$ olduğundan

$$0 \xrightarrow{\delta^0} H^{0,8}(X,A) \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^1} H^{1,8}(X,A) \xrightarrow{q^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{k^*} 0$$

tam dizisi elde edilir. q^* epimorfizm olduğundan $\text{Im } q^* = \mathbb{Z}$ dir. Dizinin tamlığından $\text{Im } \delta^1 = \text{Ker } q^*$ ve $\text{Im } i^* = \text{Ker } \delta^1$ bulunur. i^* izomorfizm olduğundan $\text{Im } i^* = \mathbb{Z}$, dolayısıyla $\text{Ker } \delta^1 = \mathbb{Z}$ olur. Buradan $\text{Im } \delta^1 = \text{Ker } q^* = 0$ dir. Birinci İzomorfizm Teoreminden

$$H^{1,8}(X,A) / \text{Ker } q^* \cong \text{Im } q^*$$

olur ve $H^{1,8}(X,A) = \mathbb{Z}$ elde edilir. Şimdi $H^{1,8}(X-U, A-U)$ yu belirleyelim.



Şekil 4.5. $X - U$ ve $A - U$

$$X - U = \{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1), p_3 = (0,1)\}$$

$$A - U = \{p_0 = (-1,0), p_1 = (0,-1)\}$$

olur. $A - U \subset X - U$ dur. $X - U$ ve $A - U$ nun simpleksler kohomoloji grupları

$$H^{q,\kappa}(X-U) = H^{q,\kappa}(A-U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır. Aksiyom 4 den

$$\dots \rightarrow H^{q,\kappa}(X-U, A-U) \xrightarrow{i^*} H^{q,\kappa}(X-U) \xrightarrow{j^*} H^{q,\kappa}(A-U) \xrightarrow{\delta^*} \dots$$

tam dizisi vardır. $q > 0$ için $H^{q,\kappa}(X-U) = 0$ olduğundan

$$0 \xrightarrow{\delta^0} H^{0,8}(X-U, A-U) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{j^*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^1} H^{1,8}(X-U, A-U) \xrightarrow{k^*} 0$$

tam dizisi elde edilir. Dizinin tamlığından $\text{Im } \delta^1 = \text{Ker } k^*$ ve $\text{Im } j^* = \text{Ker } \delta^1$ olur. j^* izomorfizm olduğundan $\text{Im } j^* = \mathbb{Z} = \text{Ker } \delta^1$ dir. Buradan $\text{Im } \delta^1 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\text{Ker } k^* = 0$ dır. Birinci İzomorfizm Teoreminden

$$H^{1,8}(X - U, A - U) / \text{Ker } k^* \cong \text{Im } k^*$$

olur ve $H^{1,8}(X - U, A - U) = 0$ elde edilir.

$q = 1$ için $H^{q,8}(X, A) \neq H^{q,8}(X - U, A - U)$ olduğundan simpleksler kohomoloji için excision aksiyomu dijital görüntülerde sağlanmaz. \square

5. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE KOHOMOLOJİ GRUPLARI ÜZERİNDE CUP ÇARPIMI

Tanım 5.1 [9] (X, κ) bir dijital simpleksler kompleksi, R , değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere R toplamsal grubunu göz önüne alalım. c^p ve c^q eşzincirlerin cup çarpımı,

$$\smile: C^{p,\kappa}(X, R) \times C^{q,\kappa}(X, R) \rightarrow C^{p+q,\kappa}(X, R)$$

$$\langle c^p \smile c^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle$$

formülüyle tanımlanır. Burada $v_0 < \dots < v_{p+q}$ sıralamasıyla verilmiştir ve '!', R de çarpımdır.

Teorem 5.2 [9] *Dijital simpleksler cup çarpımı bilineerdir.*

İspat: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in H^{p,\kappa}(X, G_1)$ ve $\beta, \beta_1, \beta_2 \in H^{q,\kappa}(X, G_2)$ için

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha_1 + \alpha_2) \smile \beta, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle (\alpha_1 + \alpha_2), [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle \beta, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = (\langle \alpha_1, [v_0, \dots, v_p] \rangle + \langle \alpha_2, [v_0, \dots, v_p] \rangle) \cdot \langle \beta, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = \langle \alpha_1, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle \beta, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle + \langle \alpha_2, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle \beta, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = \langle \alpha_1 \smile \beta, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle + \langle \alpha_2 \smile \beta, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = \langle \alpha_1 \smile \beta + \alpha_2 \smile \beta, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \langle \alpha \smile (\beta_1 + \beta_2), [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle \alpha, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle (\beta_1 + \beta_2), [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = \langle \alpha, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot (\langle \beta_1, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle + \langle \beta_2, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle) \\ & = \langle \alpha, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle \beta_1, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle + \langle \alpha, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle \beta_2, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = \langle \alpha \smile \beta_1, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle + \langle \alpha \smile \beta_2, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & = \langle \alpha \smile \beta_1 + \alpha \smile \beta_2, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle \end{aligned}$$

Bu durumda

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \smile \beta = \alpha_1 \smile \beta + \alpha_2 \smile \beta \quad \text{ve} \quad \alpha \smile (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \smile \beta_1 + \alpha \smile \beta_2$$

elde edilir. \square

Teorem 5.3 [9] c^p, c^q eşzincirleri ve δ eşsınır operatörü için

$$\delta(c^p \smile c^q) = \delta c^p \smile c^q + (-1)^p c^p \smile \delta c^q$$

dur.

İspat: $\delta c^p \smile c^q$ ve $(-1)^p c^p \smile \delta c^q$ dijital simpleksler eşzincirlerin $[v_0, \dots, v_{p+q+1}]$ üzerindeki değerleri sırasıyla

$$\sum_{0 \leq i \leq p+1} (-1)^i c^p [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+1}] c^q [v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1}] \quad (1)$$

ve

$$(-1)^p \sum_{p \leq i \leq p+q+1} (-1)^{i-p} c^p [v_0, \dots, v_p] c^q [v_p, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+q+1}] \quad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) ifadelerini topladığımızda (1) in son terimiyle (2) nin ilk terimi birbirine eşit ve zıt işaretli olduğundan toplamdan çıkarılır. Diğer terimlerin toplamı, $\delta(c^p \smile c^q)$ dijital simpleksler eşzincirinin $[v_0, \dots, v_{p+q+1}]$ üzerindeki değerine eşittir. \square

Teorem 5.4 [9] (X, κ) bir dijital simpleksler kompleks olsun. Dijital simpleksler eşzincirler üzerinde cup çarpımı birleşmelidir, yani

$$(c^p \smile c^q) \smile c^r = c^p \smile (c^q \smile c^r)$$

dir. 1_X ile verilen dijital simpleksler eşzincir birim elemandır, yani

$$1_X \smile c^p = c^p \smile 1_X = c^p$$

dir.

İspat: $c^p \in H^{p,\kappa}(X, G_1)$, $c^q \in H^{q,\kappa}(X, G_2)$ ve $c^r \in H^{r,\kappa}(X, G_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} & \langle (c^p \smile c^q) \smile c^r, [v_0, \dots, v_{p+q+r}] \rangle = \langle (c^p \smile c^q), [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle \\ & \quad \cdot \langle c^r, [v_{p+q}, \dots, v_{p+q+r}] \rangle \\ & = (\langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle) \cdot \langle c^r, [v_{p+q}, \dots, v_{p+q+r}] \rangle \\ & = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot (\langle c^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \cdot \langle c^r, [v_{p+q}, \dots, v_{p+q+r}] \rangle) \end{aligned}$$

$$= \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot (\langle c^q \smile c^r, [v_p, \dots, v_{p+q+r}] \rangle)$$

$$= \langle c^p \smile (c^q \smile c^r), [v_0, \dots, v_{p+q+r}] \rangle$$

Diğer taraftan

$$\langle 1_X \smile c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle = \langle 1_X, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle$$

$$= \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle$$

ve

$$\langle c^p \smile 1_X, [v_0, \dots, v_p] \rangle = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle 1_X, [v_0, \dots, v_p] \rangle$$

$$= \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle$$

elde edilir. □

Teorem 5.5 [9] $c^p \in H^{p,\kappa}(X, G_1)$ ve $c^q \in H^{q,\kappa}(X, G_2)$ dijital eşdevirler ise

$$c^p \smile c^q = (-1)^{pq} c^q \smile c^p$$

dir.

İspat:

$$\langle c^p \smile c^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle$$

ve

$$\langle c^q \smile c^p, [v_{p+q}, \dots, v_0] \rangle = \langle c^q, [v_{p+q}, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^p, [v_p, \dots, v_0] \rangle$$

elde edilir. $[v_r, \dots, v_0] = (-1)^{r(r+1)/2} [v_0, \dots, v_r]$ olduğundan

$$(p+q)(p+q+1) - p(p+1) - q(q+1) = 2pq$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 5.6 $(X, \kappa_1) \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ve $(Y, \kappa_2) \subset \mathbb{Z}^{n_2}$ dijital görüntüler olsun.

$f: (X, \kappa_1) \rightarrow (Y, \kappa_2)$ dijital sürekli bir dönüşüm ve $c^p \in H^{p,\kappa}(X, G_1)$ ve

$c^q \in H^{q,\kappa}(X, G_2)$ dijital eşdevirler ise

$$f^*(c^p \smile c^q) = f^*(c^p) \smile f^*(c^q)$$

dur.

İspat:

$$\begin{aligned}
\langle f^*(c^p \smile c^q), [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle &= \langle c^p \smile c^q, [f(v_0), \dots, f(v_{p+q})] \rangle \\
&= \langle c^p, [f(v_0), \dots, f(v_p)] \rangle \cdot \langle c^q, [f(v_p), \dots, f(v_{p+q})] \rangle \\
&= \langle f^*(c^p), [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle f^*(c^q), [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle \\
&= \langle f^*(c^p) \smile f^*(c^q), [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 5.7 (X, κ) bir dijital simpleksler kompleks olsun. $H^{*,\kappa}(X; R) = \bigoplus H^{i,\kappa}(X; R)$ grubu cup çarpımıyla birimli bir halka olur. Buna X in dijital simpleksler kohomoloji halkası denir.

5.1. Dijital Görüntülerde Kohomoloji Halkası

Örnek 5.8 MSS'_{18} nü ele alalım.

MSS'_{18} nün noktalarını ve simplekslerini 3.21 deki gibi alalım.

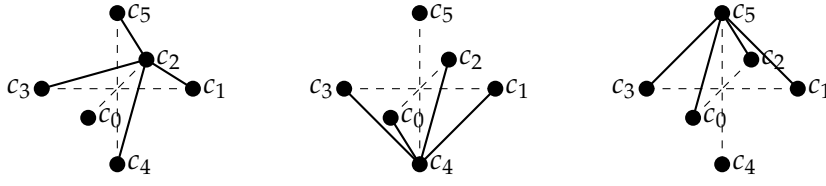
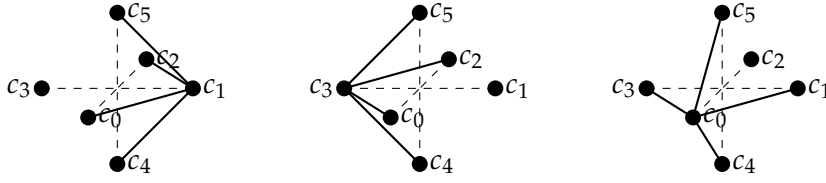
Simpleksler kompleksinin 1-eşdeğerleri

$$\begin{aligned}
\omega &= e_0^* + e_1^* + e_2^* + e_3^*, \\
z &= -e_2^* + e_4^* - e_5^* + e_6^*, \\
\alpha &= -e_3^* + e_7^* - e_8^* + e_9^*, \\
\beta &= -e_0^* - e_4^* - e_7^* + e_{10}^*, \\
\gamma &= -e_1^* + e_5^* + e_8^* + e_{11}^*, \\
\delta &= -e_6^* - e_9^* - e_{10}^* - e_{11}^*
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$\langle \omega \smile z, [c_2 c_4 c_1] \rangle = \langle \omega, [c_2 c_4] \rangle \cdot \langle z, [c_4 c_1] \rangle = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\langle \omega \smile \alpha, [c_2 c_5 c_1] \rangle = \langle \omega, [c_2 c_5] \rangle \cdot \langle \alpha, [c_5 c_1] \rangle = 1 \cdot 1 = 1,$$

Şekil 5.1. ω eşdevri, z eşdevri ve α eşdevriŞekil 5.2. β eşdevri, γ eşdevri ve δ eşdevri

$$\langle \omega \smile \beta, [c_2c_4c_1] \rangle = \langle \omega, [c_2c_5] \rangle \cdot \langle \beta, [c_5c_1] \rangle = 1 \cdot -1 = -1,$$

$$\langle \omega \smile \gamma, [c_2c_3c_4] \rangle = \langle \omega, [c_2c_3] \rangle \cdot \langle \gamma, [c_3c_4] \rangle = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\langle \omega \smile \delta, [c_2c_4c_1] \rangle = \langle \omega, [c_2c_4] \rangle \cdot \langle \delta, [c_4c_1] \rangle = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\langle \omega \smile \omega, [c_2c_4c_1] \rangle = \langle \omega, [c_2c_4] \rangle \cdot \langle \omega, [c_4c_1] \rangle = 1 \cdot 0 = 0.$$

Benzer şekilde diğer eşdevirlerin cup çarpımı alınarak aşağıdaki tablo elde edilir.

\smile	ω	z	α	β	γ	δ
ω	0	1	1	-1	1	0
z	0	-1	0	1	0	-1
α	0	0	-1	1	0	1
β	0	0	0	-1	0	1
γ	0	1	1	0	-1	-1
δ	0	0	0	0	0	0

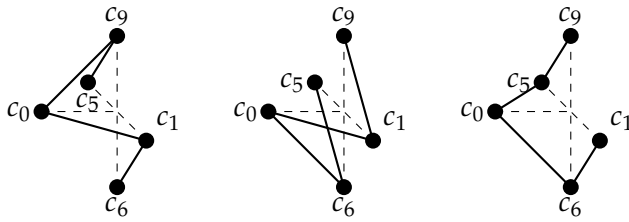
Örnek 5.9 MSS_{18} i ele alalım.

MSS_{18} in noktalarını ve simplekslerini Teorem 3.22 deki gibi alalım.

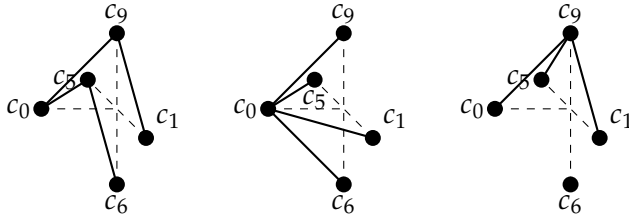
Simpleksler kompleksinin 1-eşdevirleri

$$\begin{aligned}
x &= e_0^* + e_1^* + e_7^* + e_6^*, & a &= e_{13}^* + e_{15}^* + e_{18}^* + e_{19}^*, \\
y &= e_0^* + e_5^* + e_3^* + e_9^*, & b &= e_{16}^* + e_{17}^* - e_{19}^* + e_{12}^*, \\
z &= e_2^* - e_3^* + e_6^* - e_7^*, & c &= e_{14}^* + e_{15}^* + e_{16}^* + e_{12}^*, \\
r &= e_1^* - e_2^* - e_5^* + e_9^*, & d &= e_{14}^* - e_{17}^* + e_{19}^* - e_{16}^*, \\
w &= e_0^* + e_1^* + e_3^* - e_2^*, & e &= e_{14}^* + e_{15}^* - e_{17}^* + e_{19}^*, \\
k &= e_1^* - e_5^* + e_6^*, & f &= e_{14}^* - e_{13}^* + e_{12}^*, \\
l &= e_3^* - e_7^* + e_9^*, & g &= e_{15}^* + e_{13}^* + e_{16}^*, \\
u &= e_0^* + e_5^* + e_7^*, & h &= e_{17}^* + e_{12}^* + e_{18}^*, \\
v &= e_2^* + e_6^* + e_9^*, & i &= e_{19}^* - e_{16}^* + e_{18}^*
\end{aligned}$$

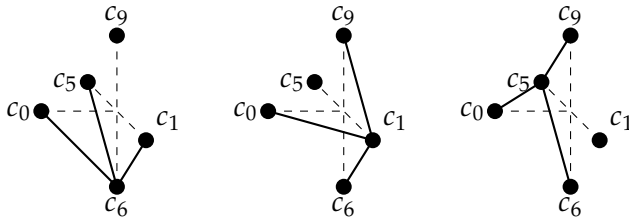
şeklinde olur.



Şekil 5.3. x eşdevri, y eşdevri ve z eşdevri



Şekil 5.4. r eşdevri, w eşdevri ve k eşdevri



Şekil 5.5. l eşdevri, u eşdevri ve v eşdevri

$$\langle x \smile x, [c_5 c_0 c_9] \rangle = \langle x, [c_5 c_0] \rangle \cdot \langle x, [c_0 c_9] \rangle = 0.1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle x \smile y, [c_0c_9c_1] \rangle &= \langle x, [c_0c_9] \rangle \cdot \langle y, [c_9c_1] \rangle = 1.1 = 1, \\
\langle x \smile z, [c_0c_9c_1] \rangle &= \langle x, [c_0c_9] \rangle \cdot \langle z, [c_9c_1] \rangle = 1.0 = 0, \\
\langle x \smile r, [c_0c_9c_1] \rangle &= \langle x, [c_0c_9] \rangle \cdot \langle r, [c_9c_1] \rangle = 1. - 1 = -1, \\
\langle x \smile w, [c_5c_0c_6] \rangle &= \langle x, [c_5c_0] \rangle \cdot \langle w, [c_0c_6] \rangle = 0.1 = 0, \\
\langle x \smile k, [c_0c_9c_1] \rangle &= \langle x, [c_0c_9] \rangle \cdot \langle k, [c_9c_1] \rangle = 1. - 1 = -1, \\
\langle x \smile l, [c_5c_0c_6] \rangle &= \langle x, [c_5c_0] \rangle \cdot \langle l, [c_0c_6] \rangle = 0.1 = 0, \\
\langle x \smile u, [c_0c_9c_1] \rangle &= \langle x, [c_0c_9] \rangle \cdot \langle u, [c_9c_1] \rangle = 1.1 = 1, \\
\langle x \smile v, [c_0c_9c_1] \rangle &= \langle x, [c_0c_9] \rangle \cdot \langle v, [c_9c_1] \rangle = 1.0 = 0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde diğer eşdevirlerin cup çarpımı alınarak aşağıdaki tablo elde edilir.

\smile	x	y	z	r	w	k	l	u	v
x	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0
y	1	0	-1	0	0	0	-1	1	0
z	1	1	1	1	1	1	1	-1	0
r	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0
w	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0
k	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0
l	1	0	-1	0	0	0	-1	1	0
u	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v	1	1	-1	1	1	1	1	0	0

5.2. Dijital Görüntülerde Kohomoloji Cebri

Tanım 5.10 $\forall i \in I, M_i$ modül ise $M = \bigoplus M_i$ graded modüldür. M graded modülü için

$$\Phi : M \otimes M \rightarrow M$$

homomorfizması varsa M graded cebirdir denir.

Teorem 5.11 (X, κ) dijital simpleksler kompleksi için $H^{*\kappa}(X, G)$, çarpımı cup çarpımı olan bir graded G -cebirdir.

İspat: $H^{*,\kappa}(X, G)$ nin bir graded G -modül olduğunu gösterelim. Bunun için

$H^{*,\kappa}(X, G) = \bigoplus H^{q,\kappa}(X, G)$ olmak üzere $H^{q,\kappa}(X, G)$ nin bir G -modül olduğu gösterilmelidir.

Burada G bir değişmeli halka, $H^{q,\kappa}(X, G)$ bir halkadır.

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in H^{q,\kappa}(X, G)$ ve $g, g_1, g_2, 1 \in G$ için

$$G \times H^{q,\kappa}(X, G) \rightarrow H^{q,\kappa}(X, G), \quad (g, \alpha) \rightarrow g.\alpha$$

skaler çarpımı

- $g.(\alpha_1 + \alpha_2) = g.\alpha_1 + g.\alpha_2$
- $(g_1 + g_2).\alpha = g_1.\alpha + g_2.\alpha$
- $(g_1.g_2).\alpha = g_1.(g_2.\alpha)$
- $1.\alpha = \alpha$

koşullarını sağladığından $H^{q,\kappa}(X, G)$ bir G -modüldür. Dolayısıyla $H^{*,\kappa}(X, G)$ bir graded G -modül olur. Bu durumda $H^{*,\kappa}(X, G)$,

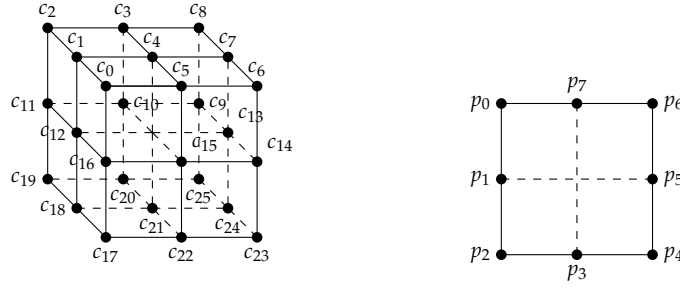
$$\smile: H^{q,\kappa}(X, G) \times H^{p,\kappa}(X, G) \rightarrow H^{q+p,\kappa}(X, G)$$

cup çarpımıyla bir graded G -cebirdir. □

Teorem 5.12 Her $x \in S^2$ için $g(-x) = -g(x)$ olacak şekilde sürekli bir $g: S^2 \rightarrow S^1$ dönüşümü yoktur.

İspat: S^1 de $p_0 = -p_4, p_1 = -p_5, p_2 = -p_6$ ve $p_3 = -p_7$ dir. S^2 de

$$\begin{array}{ll} c_0 = -c_{25} & c_7 = -c_{18} \\ c_1 = -c_{24} & c_8 = -c_{17} \\ c_2 = -c_{23} & c_9 = -c_{16} \\ c_3 = -c_{22} & c_{10} = -c_{15} \\ c_4 = -c_{21} & c_{11} = -c_{14} \\ c_5 = -c_{20} & c_{12} = -c_{13} \\ c_6 = -c_{19} & \end{array}$$

Şekil 5.6. S^2 ve S^1

olur. $g : S^2 \rightarrow S^1$ dönüşümünü

$$\begin{array}{lll}
 g(c_0) = p_0 & g(c_9) = p_5 & g(c_{18}) = p_2 \\
 g(c_1) = p_0 & g(c_{10}) = p_5 & g(c_{19}) = p_2 \\
 g(c_2) = p_0 & g(c_{11}) = p_1 & g(c_{20}) = p_3 \\
 g(c_3) = p_7 & g(c_{12}) = p_1 & g(c_{21}) = p_3 \\
 g(c_4) = p_7 & g(c_{13}) = p_5 & g(c_{22}) = p_3 \\
 g(c_5) = p_7 & g(c_{14}) = p_5 & g(c_{23}) = p_4 \\
 g(c_6) = p_6 & g(c_{15}) = p_1 & g(c_{24}) = p_4 \\
 g(c_7) = p_6 & g(c_{16}) = p_1 & g(c_{25}) = p_4 \\
 g(c_8) = p_6 & g(c_{17}) = p_2 &
 \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre $g : S^2 \rightarrow S^1$ fonksiyonunda her $x \in S^2$ için

$g(-x) = -g(x)$ koşulu sağlanmış olur. Fakat bu fonksiyon sürekli değildir.

$c_{10}, c_{11} \in S^2$ birbirine 6-yakın olmasına rağmen $g(c_{10}) = p_5$ ile $g(c_{11}) = p_1$ birbirine 4-yakın değildir. Her $x \in S^2$ için $g(-x) = -g(x)$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon tanımlanamaz. \square

Teorem 5.13 (Borsuk-Ulam) $n = 1, 2$ için $f : S^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ sürekli dönüşümü verilsin.

$f(x) = f(-x)$ olacak şekilde $x \in S^n$ mevcuttur.

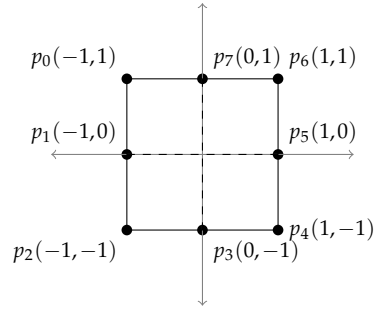
İspat: Böyle bir x olmadığını kabul edelim. $g : S^2 \rightarrow S^1$ dönüşümü

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

olarak alınırsa $g(-x) = -g(x)$ olur. Bir önceki teoremden çelişki elde edilir.

$f(x) = f(-x)$ olacak şekilde $x \in S^n$ mevcuttur. \square

Örnek 5.14 $f : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$ sürekli dönüşümünü tanımlayalım.



Şekil 5.7. S^1

S^1 de $p_0 = -p_4$, $p_1 = -p_5$, $p_2 = -p_6$, $p_3 = -p_7$ dir. $f : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$ dönüşümünü

$$f(p_0) = f(p_4) = 0$$

$$f(p_1) = f(p_5) = 1$$

$$f(p_2) = f(p_6) = 1$$

$$f(p_3) = f(p_7) = 0$$

sürekli bir dönüşümdür.

5.3. Sonuç

Bu çalışmada cebirsel topolojideki bazı özelliklerin dijital versiyonları bulunmaya çalışıldı. İlk olarak dijital topolojinin temel kavramları verilerek, dijital temel grubun nasıl oluşturulduğu ifade edildi. Sonra dijital simpleksler homoloji grubu tanımlanarak, çeşitli dijital görüntülerin homoloji grupları belirlendi. Ayrıca Euler karakteristiği, relatif homoloji grupları ve homoloji için Eilenberg-Steenrod aksiyomlarıyla ilgili çeşitli sonuçlara ulaşıldı. Daha sonra dijital kohomoloji tanımlanarak, bazı dijital yüzeylerin dijital kohomoloji grupları hesaplandı. Dijital kohomoloji için de relatif gruplar ve Eilenberg-Steenrod aksiyomları ifade edildi. Son olarak dijital simpleksler cup çarpımının tanımı verilerek, cup çarpımı yardımıyla MSS'_{18} ve MSS_{18} yüzeylerinin dijital kohomoloji halkaları belirlendi ve $H^{*,\kappa}(X, G)$ nin cup çarpımıyla bir graded G -cebir olduğu gösterildi. Bundan sonraki aşamada ulaşılan sonuçlar kullanılarak, dijital kohomoloji operatörleri tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Arslan, H., Karaca, I., Oztel, A. 2008. Homology groups of n -dimensional digital images XXI. **Turkish National Mathematics Symposium**, B1-13, Turkey.
- [2] Boxer, L. 1994. Digitally continuous functions. **Pattern Recognition Letters**, 15: 833-839.
- [3] Boxer, L. 1999. A classical construction for the digital fundamental group. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, 10: 51-62.
- [4] Boxer, L. 2005. Properties of digital homotopy. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, 22: 19-26.
- [5] Boxer, L. 2006. Homotopy properties of sphere-like digital images. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, 24: 167-175.
- [6] Boxer, L. 2006. Digital products, wedges, and covering spaces. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, 25: 159-171.
- [7] Boxer, L., Karaca, I., Oztel, A. 2011. Topological Invariants in Digital Images. **Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications**, 11(2): 109-140.
- [8] Unver Demir, E., Karaca, I. 2013. Simplicial Homology Groups of certain digital surfaces. Preprint.
- [9] Ege, O., Karaca, I. 2013. Cohomology theory for digital images. **Romanian Journal of Information Science and Technology**, 16(1): 10-28.
- [10] Ege, O., Karaca, I. 2013. Fundamental Properties of Digital Simplicial Homology Groups. **American Journal of Computer Technology and Application**, 1(2): 25-42.
- [11] Ege, O., Karaca, I. 2013. Lefschetz fixed point theorem for digital images. **Fixed Point Theory and Applications**, 1: 253.
- [12] Gonzalez-Diaz, R., Real, P. 2005. On the cohomology of 3D digital images. **Discrete Applied Mathematics**, 147: 245-263.
- [13] Gonzalez-Diaz, R., Jimenez, M.J., Medrano, B. 2011. Cubical cohomology ring of 3D photographs. **International Journal of Imaging Systems and Technology**, 21(1):765.

- [14] Gonzalez-Diaz, R., Lamar, J., Umble, R. 2011. Cup products on polyhedral approximations of 3D digital images. **Combinatorial Image Analysis**, 6636: 107-119.
- [15] Han, S.E. 2006. Connected sum of digital closed surfaces. **Information Sciences**, 176: 332-348.
- [16] Han, S.E. 2007. The fundamental group of a closed k -surface. **Information Sciences**, 177: 3731-3748.
- [17] Hatcher, A. 2002. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 550s, Cambridge.
- [18] Herman, G.T. 1993. Oriented surfaces in digital spaces. **CVGIP: Graphical Models and Image Processing**, 55: 381-396.
- [19] Kaczynski, T., Mrozek, M. 2013. The cubical cohomology ring: an algorithmic approach. **Foundations of Computational Mathematics**, 13:789-818.
- [20] Karaca, I., Ege, O. 2012. Some results on simplicial homology groups of 2D digital images. **International Journal of Information and Computer Science**, 1(8): 198-203.
- [21] Kong, T.Y. 1989. A digital fundamental group. **Computers and Graphics**, 13: 159-166.
- [22] Kopperman, R., Meyer, R., Wilson, R.G. 1991. A Jordan surface theorem for three-dimensional digital spaces. **Discrete and Computational Geometry**, 6: 155-161.
- [23] Malgouyres, R., Bertrand, G. 1999. A new local property of strong n -surfaces. **Pattern Recognition Letters**, 20: 417-428.
- [24] Munkres, J.R. 1984. Elements of Algebraic Topology. Perseus Books Publishing, 452s, Cambridge.
- [25] Rosenfeld, A. 1979. Digital Topology. **American Mathematical Monthly**, 86: 76-87.
- [26] Rosenfeld, A. 1986. Continuous functions on digital images. **Pattern Recognition Letters**, 4: 177-184.
- [27] Rotman, J.J. 1998. An Introduction to Algebraic Topology. Springer-Verlag, 433s, New York.
- [28] Prasolov, V.V. 2007. Elements of Homology Theory. American Mathematical Society, 418s, Providence.

- [29] Spanier, E. 1966. Algebraic Topology. McGraw-Hill, 528s, New York.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gülseli BURAK
Doğum Yeri ve Tarihi : Denizli, 26.10.1979

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Pamukkale Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Pamukkale Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
-SCI : Karaca, İ., Burak, G. 2013. Simplicial Relative Cohomology Rings of Digital Images. Applied Mathematics and Information Sciences
- Diğer
b) Bildiriler
-Uluslararası : Relative Cohomology Rings of Digital Images, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM 2013)
- Simplicial Cohomology Rings of Digital Images, II. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2013)
- Ulusal
c) Katıldığı Projeler : Dijital Kohomoloji Grupları, BAP, 2013

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Pamukkale Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. 2003 - ...

İLETİŞİM

E-posta Adresi : germez@pau.edu.tr
Tarih :