ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2014-YL-027

ALTDİZİSEL YAKINSAKLIK İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Muhammet Ali OKUR

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Ümit TOTUR

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Muhammet Ali OKUR tarafından hazırlanan Altdizisel Yakınsaklık İçin Tauber Tipi Teoremler başlıklı tez, 18.06.2014 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. İbrahim ÇANAK	Ege Ü. Fen Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. Ümit TOTUR	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. İnci EGE	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2014 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN**

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

18.06.2014

Muhammet Ali OKUR

ÖZET

ALTDİZİSEL YAKINSAKLIK İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Muhammet Ali OKUR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ümit TOTUR
2014, 47 sayfa

Bu tezde iyi bilinen bazı toplanabilme metotları, düzenli üretilen diziler ve yakınsak dizilerin sınıfını içeren bazı dizi sınıfları için Tauber tipi teoremler verilmiştir. Bu teoremlerde verilen koşullarda dizinin salınım davranışlarının genel kontrol modülosu, yavaş salınımlılığı ve ılımlı salınımlılığı gibi kavramlar kullanılarak o dizinin altdizisel yakınsaklığı elde edilmiştir. Ayrıca altdizisel yakınsaklığın elde edildiği teoremlerin genelleştirilmelerine yer verilmiştir.

Birinci bölümde teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak tanımlamalar ve gösterimler verilmiştir ve Tauber teorisinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde altdizisel yakınsaklık kavramından kapsamlı olarak bahsedilmiştir ve altdizisel yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde düzenli üretilen dizi kavramı ve bu dizilerin altdizisel yakınsaklıklarının elde edildiği Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler
Tauber tipi teorem, altdizisel yakınsak dizi, genel kontrol modülo, klasik kontrol modülo, yavaş salınımlı dizi, ılımlı salınımlı dizi.

ABSTRACT

TAUBERIAN THEOREMS FOR SUBSEQUENTIAL CONVERGENCE

Muhammet Ali OKUR

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ümit TOTUR
2014, 47 pages

In this thesis, some well-known summability methods, regular generated sequences and Tauberian theorems for some classes of sequence which contain the class of convergent sequences are given. On the conditions that are given in this theorems, subsequential convergence of a sequence is obtained by using concepts like general control modulo of oscillatory behaviors of the sequence, slow oscilation of the sequence and moderate oscilation of the sequence. Also generalizations of theorems, from which subsequential convergence is obtained, are given.

In the first chapter, introduction is done to thesis.

In the second chapter, all the definitions and notations used in the thesis are given, and Tauberian theory is mentioned.

In the third chapter, the concept of subsequential convergent is mentioned comprehensively, and Tauberian theorems, from which subsequential convergence is obtained, are given.

In the fourth chapter, the concept of regular generated sequence is given, and Tauberian theorems, from which subsequential convergence of these sequences is obtained, are given.

Key Words
Tauberian theorem, subsequential convergent sequence, general control modulo, classical control modulo, slowly oscillating sequence, moderately oscillating sequence.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca benden yardımlarını, sabrını ve bilgisini esirgemeyen, her konuda değerli birikimlerinden ve görüşlerinden faydalandığım danışman hocam Doç. Dr. Ümit TOTUR'a;

bu süreçte tecrübelerinden faydalandığım hocalarım Prof. Dr. İbrahim ÇANAK'a, Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ERDEM'e ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER'e;

başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU olmak üzere tüm bölüm hocalarıma ve bölüm arkadaşlarıma;

yüksek lisans öğrenimim boyunca derslerde ve seminerlerde beraber olduğum arkadaşım Harun BOLAT'a;

beni yetiştirerek bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan, maddi manevi her türlü desteklerini benden hiç bir zaman esirgemeyen anneme, babama ve ablama

teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve 12007 numaralı proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Öğretim Görevlisi Yetiştirme Programı'na teşekkürü bir borç bilirim.

Muhammet Ali OKUR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(\sigma_n^{(1)}(u))$	(u_n) dizisinin aritmetik ortalamalar dizisi
$u_n = O(1)$	(u_n) dizisinin sınırlı olması
$u_n \geq -C$	(u_n) dizisinin tek taraflı sınırlı olması
$u_n = o(1)$	(u_n) dizisinin sıfıra yakınsak olması
Δu_n	(u_n) dizisinin geri farkı
$(\sigma_n^{(m)}(u))$	(u_n) dizisinin $m.$ mertebeden aritmetik ortalamalar dizisi
$V_n^{(0)}(\Delta u)$	(u_n) dizisinin bir üreteci
$(V_n^{(m)}(\Delta u))$	$(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin $m.$ mertebeden aritmetik ortalamalar dizisi
$\omega_n^{(0)}(u)$	(u_n) dizisinin klasik kontrol modülosu
$\omega_n^{(m)}(u)$	(u_n) dizisinin $m.$ mertebeden genel kontrol modülosu
$[\lambda n]$	λn sayısının tam değeri
$\tau_{n,[\lambda n]}(u)$	(u_n) dizisinin De la Vallée Poussin ortalaması
$\mathscr{S}$	Yavaş salınımlı dizilerin uzayı
$\mathscr{M}$	Ilımlı salınımlı dizilerin uzayı

1. GİRİŞ

Matematik analizin önemli ve derin bir geçmişe sahip olan çalışma alanlarından biri XVIII. yüzyılda başlayıp günümüze kadar devam eden toplanabilme teorisidir. Toplanabilme metotlarının genel amacı belli koşullar altında ıraksak dizilerin yapıları hakkında bazı bilgiler elde etmektir. Her yakınsak dizi aynı noktaya regüler bir metot tarafından toplanabilirdir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Yani, bir metot tarafından toplanabilen her dizinin yakınsak olması gerekmez. Tersinin doğru olabilmesi, dizi üzerine konulan bazı ek koşullar ile mümkündür. Bir metot tarafından toplanabilen bir dizinin yakınsaklığının elde edildiği ilk çalışma A. Tauber [1] tarafından yapılmıştır. Tauber [1], Abel toplanabilme metodu tarafından toplanabilen bir dizinin bazı ek koşullar altında yakınsak olduğunu göstermiştir. Bu alandaki ilk çalışma Tauber tarafından yapıldığı için bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesini sağlayan koşullara Tauber koşulu ve bu türdeki teoremlere Tauber tipi teoremler adı verilmektedir. Literatürdeki klasik çalışmalarda belli bir toplanabilme metodu üzerine konan Tauber koşullarının zayıflatılmasına odaklanılmıştır. Fakat bir dizi için verilen bazı Tauber koşulları ile bir toplanabilme metodundan dizinin yakınsaklığının elde edilmesi her zaman mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda dizi hakkında başka ne tür bilgiler elde edebiliriz sorusu düşünülebilir. Bu bilgilerden biri de dizinin altdizisel yakınsaklığıdır.

Bolzano-Weierstrass teoremi ile sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisinin mevcut olduğu bilinmektedir. Sınırlı olan diziler ile yakınsak olan diziler arasındaki ilişki, monoton olan her sınırlı dizinin yakınsak olduğunu ifade eden monoton yakınsaklık teoremi ile verilmiştir. Ayrıca sınırlı dizilerin uzayının yakınsak dizilerin uzayını kapsadığı bilinmektedir. Akla “Sınırlı dizilerin uzayının yakınsak dizilerin uzayından farklı, başka alt uzayları mevcut mudur?” sorusu gelebilir. Bu yönde yapılan çalışmalar neticesinde altdizisel yakınsaklık kavramı ortaya atılmıştır ve Dik [2] tarafından tanımlanmıştır. Bununla birlikte, altdizisel yakınsaklık kavramı kullanılarak klasik Tauber teorisine farklı bir bakış açısı kazandırılmıştır. Klasik Tauber teorisine benzer olarak "Dizinin sınırlılığına hangi koşulların eklenmesi ile dizinin altdizisel yakınsaklığı elde edilebilir?" sorusuna cevap aranmıştır.

Altdizisel yakınsaklık ile ilgili ilk çalışma Dik [2] tarafından yapılan doktora tezi çalışmasıdır. Sonraki süreçte yapılan başlıca çalışmalar ise Dik vd. [3], Çanak vd. [4], Çanak ve Totur [5], Çanak ve Dik [6], Totur ve Çanak [7] şeklinde sıralanabilir. Altdizisel yakınsaklık ile ilgili çalışmalar günümüzde de hala devam etmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Iraksak serilere değer atayabilmek için elde edilen kurallara toplanabilme metodu denmektedir. Bu bölümde, tez boyunca verilecek teoremlerde kullanılacak olan toplanabilme metotları, tanımlar, gösterimler ve Tauber teorisinin temel teoremleri verilecektir.

2.1. Tanımlar ve Gösterimler

Toplanabilme teorisinin başlangıcından günümüze kadar pek çok toplanabilme metodu tanımlanmıştır. Bunların en önemlilerinden ikisi $(C,1)$ ve $Abel$ toplanabilme metotlarıdır.

Tanım 2.1.1. [8] Bir $u=(u_n)$ reel sayı dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{(1)}(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k=s \tag{2.1.1}$$

ise (u_n) dizisi s ye $(C,1)$ toplanabilirdir denir ve $u_n\to s(C,1)$ ile gösterilir.

Her yakınsak dizi $(C,1)$ toplanabilirdir, fakat tersi doğru olmayabilir. Örneğin

$$u_n=\begin{cases}0, & n \text{ tek } \mathit{ise}\\ 2, & n \text{ çift } \mathit{ise}\end{cases}$$

dizisinin ıraksak olduğu açıktır. Fakat bu dizi $(C,1)$ toplanabilirdir. Gerçekten (u_n) dizisinin aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(u)=\frac{u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k=\begin{cases}1, & n \text{ tek ise}\\ \frac{n+2}{n+1}, & n \text{ çift ise}\end{cases}$$

dir. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{(1)}(u)=1$ dir. Yani (u_n), 1 e $(C,1)$ toplanabilirdir.

Tanım 2.1.2. [8] Eğer, $0\leq x<1$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n=s \tag{2.1.2}$$

ise (u_n) dizisi, s ye $Abel$ toplanabilirdir denir ve $u_n\to s(A)$ ile gösterilir.

Her yakınsak dizi *Abel* toplanabilirdir, fakat tersi doğru olmayabilir. Örneğin $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k\right)$ dizisi ıraksaktır. Fakat bu dizi *Abel* toplanabilirdir. Gerçekten, $0 \le x < 1$ için,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k\right)x^n &= \lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k\right)x^n\right.\\
&\quad \left. -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k\right)x^{n+1}\right)\\
&= \lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k\right)x^n\right.\\
&\quad \left. -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2(-1)^k\right)x^{n}\right)\\
&= \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k-\sum_{k=0}^{n-1} 2(-1)^k\right)x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k-\sum_{k=0}^{n-1} 2(-1)^k\right)x^n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n = \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{1+x} = 1$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 1$$

elde edilir. Yani $\sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k$, 1 e *Abel* toplanabilirdir.

Ayrıca $(C,1)$ toplanabilir her dizi *Abel* toplanabilirdir ve tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örneğin $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k\right)$ dizisi Abel toplanabilirdir fakat $(C,1)$ toplanabilir değildir.

Buradan

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k(-1)^k = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \\[2ex] \frac{-n-1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur ve aritmetik ortalamalarının dizisi

$$\sigma_n^{(1)}(u) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ -\frac{1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Açıkça görülür ki (u_n) dizisi $(C,1)$ toplanabilir değildir. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \qquad (0 \leq x < 1)$$

olduğundan eşitliğin her iki tarafının türevine geçilirse,

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{-x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{4}$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen dizinin $-\frac{1}{4}$ e *Abel* toplanabilir olduğu görülmüş olur.

$\mathscr{L}$, dizilerin bir lineer uzayı ve $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}$ nin bir altsınıfı olsun. Bir $(\alpha_n) \in \mathscr{A}$ dizisi için,

$$u_n = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} + u_0$$

ise o zaman (u_n) dizisine (α_n) tarafından düzenli olarak üretilen bir dizi ve (α_n) dizisine de (u_n) dizisinin bir *üreteci* denir. $\mathscr{A}$ daki (α_n) dizileri tarafından düzenli olarak üretilen tüm dizilerin sınıfı $U(\mathscr{A})$ ile gösterilir.

$(\alpha_n^{(0)}) = (\alpha_n) \in \mathscr{A}$ olmak üzere her $m \geq 1$ tamsayısı için $\mathscr{A}^{(m)}$ sınıfı ise,

$$\mathscr{A}^{(m)} = \left\{ (\alpha_n^{(m)}) | \alpha_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{(m-1)}}{k} \right\}$$

ile gösterilir. Daha genel olarak, $u = (u_n) \in \mathscr{L}$ ve $\alpha^{(m)} = (\alpha_n^{(m)}) \in \mathscr{A}^{(m)}$ için

$$u_n = \alpha_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{(m)}}{k} + u_0$$

ise, o zaman (u_n) dizisine $(\alpha_n^{(m)})$ tarafından düzenli olarak üretilen bir dizi ve $(\alpha_n^{(m)})$ dizisine de (u_n) dizisinin üreteci denir. $\mathscr{A}^{(m)}$ daki $(\alpha_n^{(m)})$ dizileri tarafından düzenli olarak üretilen tüm dizilerin sınıfı $U(\mathscr{A}^{(m)})$ ile gösterilir.

Bir (u_n) dizisinin geri farkı,

$$\Delta u_n = \begin{cases} u_n - u_{n-1}, & n \geq 1 \\ u_0, & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Bir (u_n) dizisi ile aritmetik ortalaması arasındaki fark

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k \Delta u_k$$

olmak üzere

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u) \tag{2.1.3}$$

şeklindeki eşitlikle ifade edilir. Yukarıdaki (2.1.3) eşitliği literatürde *Kronecker eşitliği* olarak bilinmektedir. Tauber tipi teoremlerin ispatlarının büyük bir kısmında bu eşitlik kullanılır.

Bir dizinin aritmetik ortalamalar dizisi

$$\sigma_n^{(1)}(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k} + u_0$$

şeklinde ifade edilebildiğinden (2.1.3) eşitliği

$$u_n = u_0 + V_n^{(0)}(\Delta u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k}$$

olarak yeniden yazılabilir. Böylece $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin (u_n) dizisinin bir üreteci olduğu kolayca görülür.

Negatif olmayan bir m tamsayısı için,(u_n) ve $(V_n^0(\Delta u))$ dizilerinin m. mertebeden aritmetik ortalamaları sırasıyla

$$\sigma_n^{(m)}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(m-1)}(u), & m \geq 1 \\ u_n, & m = 0 \end{cases}$$

ve

$$V_n^{(m)}(\Delta u)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}V_k^{(m-1)}(\Delta u), & m\geq 1\\ V_n^{(0)}(\Delta u), & m=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca m pozitif bir tamsayı olmak üzere, bir (u_n) dizisi için,

$$(n\Delta)_m u_n=(n\Delta)_{m-1}((n\Delta)u_n)=n\Delta((n\Delta)_{m-1}u_n)$$

dir. Burada $(n\Delta)_0 u_n=u_n$ ve $(n\Delta)_1 u_n=n\Delta u_n$ dir.
Bir (u_n) dizisinin salınım davranışlarının klasik kontrol modülosu

$$\omega_n^{(0)}(u)=n\Delta u_n$$

şeklinde ifade edilir. Pozitif bir m tamsayısı için, dizinin salınım davranışlarının m. mertebeden genel kontrol modülosu ise

$$\omega_n^{(m)}(u)=\omega_n^{(m-1)}(u)-\sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m-1)}(u))$$

şeklinde tanımlanmıştır. [2, 9]
Daha sonra dizilerin salınım davranışlarının m. mertebeden genel kontrol modülosunun ispatlarda daha işlevsel kullanılabilmesi amacıyla iki farklı yazılış daha gösterilmiştir.

Lemma 2.1.3. [10] *Her $m\geq 1$ tamsayısı için,*

(i) $\omega_n^{(m)}(u)=(n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)$ *dir.*

(ii) $\begin{pmatrix} m-1\\ j\end{pmatrix}=\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-j)}{j!}$ *olmak üzere,*

$$\omega_n^{(m)}(u)=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\begin{pmatrix} m-1\\ j\end{pmatrix}n\Delta V_n^{(j)}(\Delta u)$$

dir.

Bir (u_n) dizisinin *De la Vallée Poussin ortalaması*, n yeterince büyük olmak üzere, $\lambda > 1$ için

$$\tau^{>}_{n,[\lambda n]}(u) = \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k$$

ve $1 < \lambda < 2$ için

$$\tau^{<}_{n-[(\lambda-1)n]-1,n}(u) = \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} u_k$$

şeklinde tanımlanır.

Bir (u_n) dizisinin *De la Vallée Poussin ortalaması* yardımı ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$\lambda > 1$ için

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma^{(1)}_{[\lambda n]}(u) - \sigma^{(1)}_n(u)) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j$$

ve $1 < \lambda < 2$ için

$$\begin{aligned} u_n - \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) &= -\frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1}(\sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) - \sigma^{(1)}_n(u)) \\ &\quad + \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j \end{aligned}$$

Bir (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olmasını Schmidt [11], aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.1.4. [8,12,13] (u_n) bir reel sayı dizisi için $n > m \to \infty$ için $\frac{n}{m} \to 1$ olmak üzere $u_n - u_m = o(1)$ ise, o zaman (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır denir.

Stanojević ise yavaş salınımlı dizi tanımını daha işlevsel olarak kullanabilmek için yavaş salınımlılık kavramını aşağıdaki gibi yeniden tanımlamıştır.

Tanım 2.1.5. [14] Eğer,

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{n}\max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right| = 0$$

ise (u_n) dizisine yavaş salınımlı dizi denir ve $\mathscr{S}$ tüm yavaş salınımlı dizilerin uzayı olmak üzere $(u_n) \in \mathscr{S}$ ile gösterilir.

$\mathscr{S}$ deki (α_n) dizileri tarafından düzenli olarak üretilen tüm dizilerin sınıfı $U(\mathscr{S})$ ile gösterilir. $\Delta\alpha_n \in \mathscr{S}$ şeklindeki (α_n) dizileri tarafından düzenli olarak üretilen tüm dizilerin sınıfı ise $U(\mathscr{S}_\Delta)$ ile gösterilir.

Her yakınsak dizi yavaş salınımlıdır fakat tersi her zaman doğru değildir. $(\log n)$ dizisi buna bir örnektir. Gerçekten,

$$\sum_{j=n+1}^{k} \Delta \log j = \sum_{j=n+1}^{k} \log \frac{j}{j-1} = \log \prod_{j=n+1}^{k} \frac{j}{j-1} = \log \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdots \frac{k}{k-1} \right)$$

dir. Böylece

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_n \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \left| \log \left(\frac{k}{n} \right) \right| = \lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_n \log \left(\frac{[\lambda n]}{n} \right) = 0$$

bulunur. Böylece verilen dizinin yakınsak olmadığı halde yavaş salınımlı olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca Dik [9] bir (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter şartın $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin yavaş salınımlı ve sınırlı olması gerektiği göstermiştir.

Daha sonra ise yavaş salınımlılık tanımının bir genelleştirilmesi olan ılımlı salınımlılık kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.6. $[2,9]$ $\lambda > 1$ olsun. Eğer,

$$\limsup_n \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta u_j \right| < \infty$$

ise (u_n) dizisine ılımlı salınımlı dizi denir ve $\mathscr{M}$ tüm ılımlı salınımlı dizilerin uzayı olmak üzere $(u_n) \in \mathscr{M}$ ile gösterilir.

$\mathscr{M}$ deki (α_n) dizileri tarafından düzenli olarak üretilen tüm dizilerin sınıfı $U(\mathscr{M})$ ile gösterilir. $(\Delta\alpha_n) \in \mathscr{M}$ şeklindeki (α_n) dizileri tarafından düzenli olarak üretilen tüm dizilerin sınıfı ise $U(\mathscr{M}_\Delta)$ ile gösterilir.

Tanımdan görüldüğü gibi yavaş salınımlı her dizi ılımlı salınımlıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin,

$$u_n = \begin{cases} 1, & k = 2^n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ -1, & k = 2^n + 1, \; n = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

dizisi ılımlı salınımlıdır fakat yavaş salınımlı değildir.
Daha sonra ise Dik [9] bir (u_n) dizisi ılımlı salınımlı ise $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin sınırlı olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla ılımlı salınımlı bir dizinin aritmetik ortalamalar dizisinin yavaş salınımlı olduğu görülür.

2.2. Tauber Teorisinin Özeti

Klasik Tauber teorisinde dizinin kendisine ya da salınım davranışlarının klasik kontrol modülosu üzerine konulan koşullar yardımıyla dizinin yakınsaklığı elde edilmiştir.
Tauber [1] ilk olarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır. Bu teoreme literatürde *Tauber'in Birinci Teoremi* denir.

Teorem 2.2.1. [8, 12, 13] *(u_n) bir reel sayı dizisi ve s ye Abel toplanabilir olsun. Eğer,*

$$n\Delta u_n = o(1) \tag{2.2.4}$$

ise o zaman, (u_n) dizisi s ye yakınsaktır.

Ayrıca Tauber [1], (2.2.4) koşulunu zayıflatarak başka bir teorem daha ispatlamıştır. Burada koşul dizinin üreteci üzerine konulmuştur. Bu teoreme literatürde *Tauber'in İkinci Teoremi* denir.

Teorem 2.2.2. [8, 13, 15, 16] *(u_n) bir reel sayı dizisi ve s ye Abel toplanabilir olsun. Eğer,*

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1) \tag{2.2.5}$$

ise o zaman, (u_n) dizisi s ye yakınsaktır.

Daha sonraki süreçte koşullar zayıflatılmaya çalışılmıştır ve dizinin Abel toplanabilirliğinden dizinin yakınsaklığının elde edildiği daha genel teoremler ispatlanmıştır. Littlewood [17], dizinin Abel toplanabilirliğine klasik kontrol modülonun sınırlılığı koşulunu ekleyerek aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.2.3. [8, 13, 15, 16] *(u_n) bir reel sayı dizisi olsun ve (u_n) Abel toplanabilir olsun. Eğer,*

$$n\Delta u_n = O(1) \tag{2.2.6}$$

ise o zaman, (u_n) dizisi yakınsaktır.

Rényi [18], (2.2.6) koşulu yerine $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ koşulunun eklenmesi durumunda (u_n) dizisinin yakınsaklığının elde edilemeyebileceğini göstermiştir. Fakat bu durumda dizinin yakınsaklığı yerine $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisinin yakınsaklığının elde edildiği görülür.

Landau [19] ise dizinin $(C,1)$ toplanabilirliğine ek olarak bir $C > 0$ sabiti için $n\Delta u_n \geq -C$ koşulunu koyarak dizinin yakınsaklığını elde etmiştir.

Daha sonra Hardy ve Littlewood [20], Landau'nun teoreminin Abel toplanabilir dizilere genişletilebildiğini göstermiştir.

Teorem 2.2.4. [8, 13] *(u_n) bir reel sayı dizisi olsun ve (u_n) Abel toplanabilir olsun. Eğer bir C > 0 sabiti için,*

$$n\Delta u_n \geq -C \tag{2.2.7}$$

ise o zaman, (u_n) dizisi yakınsaktır.

Bu teorem literatürde *Hardy-Littlewood Teoremi* olarak bilinmektedir.

Bu temel çalışmalarda dizinin yakınsaklığı dizinin klasik kontrol modülosu veya onun aritmetik ortalaması üzerine konulan koşullar yardımı ile elde edilmiştir. Sonrasında ise yeni kavramlar yardımıyla bir çok Tauber tipi teorem elde edilmiştir. Örneğin Schmidt [11], dizinin yavaş salınımlı olması koşulu ile Littlewood'un verdiği (2.2.6) koşulunu yer değiştirerek aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.2.5. [8, 13] (u_n) *bir reel sayı dizisi ve s ye Abel toplanabilir olsun. Eğer* (u_n) *yavaş salınımlı ise* (u_n) *dizisi s ye yakınsaktır.*

Bu teoreme Littlewood'un teoremini genelleştirdiği için literatürde *Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi denir*. Karamata ise Abel toplanabilir bir dizinin kendi üzerine konulan koşul yardımıyla $(C,1)$ toplanabilir olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.2.6. [21] (u_n) *dizisi Abel toplanabilir olsun,* $C > 0$ *sabiti için*

$$u_n \geq -C,$$

ise (u_n) *dizisi* $(C,1)$ *toplanabilirdir.*

Bu teoreme literatürde *Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu* denir.

3. ALTDİZİSEL YAKINSAKLIĞIN ELDE EDİLDİĞİ TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde altdizisel yakınsaklık kavramından kapsamlı olarak bahsedilecektir. Daha sonra dizilerin sınırlılığından bu diziler ile ilgili bazı diziler üzerine konulan yavaş salınımlılık koşulu ile altdizisel yakınsaklık elde edilecektir. Ayrıca bir dizinin klasik kontrol modülosu veya genel kontrol modülosunun bir dizi ile sınırlandırılması yardımıyla altdizisel yakınsaklığın elde edildiği teoremler verilecektir.

3.1. Altdizisel Yakınsaklığa Giriş

Bir önceki bölümde de bahsedildiği gibi klasik Tauber teorisinde bir dizinin Abel toplanabilir olmasına ek olarak bazı koşullar verilerek (u_n) dizisinin yakınsaklığı elde edilmeye çalışılmıştır. Verilen bu ek koşulları bulmak klasik Tauber teorisinin temel problemlerinden biri olmuştur. Fakat (2.1.2) limitinin varlığı ile beraber (u_n) dizisinin yakınsaklığının elde edilmesine imkan sağlamayan bazı önemli koşullar vardır. Bu durum bizi Tauber teorisinin farklı bir alanına yönlendirir. Bazı klasik Tauber koşulları altında bile (2.1.2) limitinin varlığı, dizinin yakınsaklığını elde etmemizi sağlamadığından aşağıdaki iki soruya yöneliriz:

(i) (u_n) dizisinin ıraksaklık türü ile ilgili neler söyleyebiliriz?

(ii) (u_n) dizisinin ıraksaklık davranışı ile (u_n) nin yapısı arasında nasıl bir bağlantı vardır?

Abel toplanabilir olan dizilerin yakınsaklığı için $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ koşulu yeterli değildir. Ancak $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ koşulunun eklenmesi ile beraber (u_n) dizisinin altdizisel davranışı hakkında bazı bilgiler elde edilebilir. Gerçekten, bir (u_n) dizisi için $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ ise, o zaman bir $C \geq 0$ için $V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$ dir. Ayrıca dizinin bir s değerine Abel toplanabilir olmasından Littlewood teoremi gereği

$\sigma_n^{(1)}(u) \to s$ olur. (2.1.3) eşitliğinden ise $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ sıfıra *Abel* toplanabilirdir. O zaman Teorem 2.2.6 dan $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$ dir. Ayrıca (2.1.3) eşitliği ve $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ kabulünden $u_n = O(1)$ olur. O halde, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ kabulü ve (2.1.3) eşitliğinden dolayı $\Delta u_n = o(1)$ dir.
Bu sonuç bizi aşağıdaki teoreme yönlendirir.

Teorem 3.1.1. [22] *Bir (u_n) dizisi verilsin. Eğer $u_n = O(1)$ ve $\Delta u_n = o(1)$ sağlanıyorsa $(\liminf\limits_n u_n, \limsup\limits_n u_n)$ aralığındaki tüm noktalar (u_n) nin bir yığılma noktasıdır.*

İspat. $\liminf_n u_n = l$ ve $\limsup_n u_n = L$ olsun. Eğer, $l = L$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. O zaman, $l \neq L$ olsun ve bir $x \in (l, L)$ noktası (u_n) nin bir yığılma noktası olmasın. O zaman,

(i) $l < b < x < c < L$ olacak şekilde birbirinden farklı b ve c noktaları vardır,

(ii) bir n_1 pozitif tamsayısı vardır ve her $n \geq n_1$ için $[b, c]$ aralığında (u_n) nin bir noktası yoktur.

Kabulden $u_n - u_{n-1} = o(1)$ dir. Yani bir n_2 tamsayısı vardır ve her $n \geq n_2$ için $|u_n - u_{n-1}| < c - b$ dir. l ve L iki farklı yığılma noktası olduğundan $u_m < b$ olacak şekilde bir $m > \max(n_1, n_2)$ pozitif tamsayısı vardır. $[b, c]$ aralığında u_n nin bir noktası olmadığından $n > m$ için $u_n < b$ dir. O zaman,
$u_{n+1} \leq u_n + |u_{n+1} - u_n| < b + c - b = c$ dir. Böylece $u_{n+1} < c$ dir fakat $u_{n+1} \notin [b, c]$ idi. Böylece $u_{n+1} < b$ dir. Daha sonra n üzerinde tümevarım yapılırsa her $n > m$ için $u_n < b$ dir. Böylece $\limsup_n u_n = L \leq b < c < L$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(\liminf\limits_n u_n, \limsup\limits_n u_n)$ aralığındaki her nokta (u_n) nin bir yığılma noktasıdır. Dolayısıyla, her $z \in (\liminf\limits_n u_n, \limsup\limits_n u_n)$ için (u_n) nin bir $(u_{n(z)})$ altdizisi vardır ve $\lim_{n(z)} u_{n(z)} = z$ dir. □

Bu teoremden hareketle altdizisel yakınsaklık olarak isimlendirilen yeni yakınsaklık türünün tanımı aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.1.2. [22] (u_n) bir reel sayı dizisi olsun. (u_n) dizisinin tüm yığılma noktalarını içeren ve tüm noktaları (u_n) dizisinin bir yığılma noktası olan sonlu bir $I(u)$ aralığı mevcut ise; ya da denk olarak, her $r \in I(u)$ için (u_n) dizisinin $\lim_{n(r)} u_{n(r)} = r$ olacak şekilde bir $(u_{n(r)})$ altdizisi mevcut ise (u_n) dizisine *altdizisel yakınsak* denir.

Yakınsak her dizi altdizisel yakınsaktır. Ayrıca tanımdan bir dizinin altdizisel yakınsak olmasının dizinin sınırlılığını gerektirdiği açıkça görülmektedir. Fakat tersi doğru değildir. Yani sınırlı olan fakat altdizisel yakınsak olmayan diziler mevcuttur. Örneğin, $((-1)^n)$ dizisinin sınırlı olduğu açıktır fakat bu dizi altdizisel yakınsak değildir.

Yavaş salınımlı dizileri sınıfı ile altdizisel yakınsak dizilerin sınıfı arasında bir ilişki yoktur. Yani, yavaş salınımlı olmayıp altdizisel yakınsak olan diziler mevcuttur. Örneğin $\left(\sin(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k})\right)$ dizisi altdizisel yakınsaktır fakat yavaş salınımlı değildir. Altdizisel yakınsak olan fakat yavaş salınımlı olmayan diziler olabileceği gibi altdizisel yakınsak olmayan fakat yavaş salınımlı olan diziler de vardır. Örneğin, $(\log n)$ dizisi yavaş salınımlıdır fakat altdizisel yakınsak değildir.

Altdizisel yakınsaklık tanımından hareketle aşağıdaki lemma verilir.

Lemma 3.1.3. [2,22] *Bir (u_n) dizisi için, $\Delta u_n = o(1)$ ve $u_n = O(1)$ ise (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.*

$(\sin(\log n))$ dizisinin altdizisel yakınsak olduğu tanımdan ziyade Lemma 3.1.3 kullanılarak daha kolay gösterilebilir. Gerçekten, $(\sin(\log n))$ dizisinin sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca $|\Delta \sin(\log n)| = |\sin(\log n) - \sin(\log(n-1))| \leq |\log n - \log(n-1)| = |\log\left(\frac{n}{n-1}\right)| = o(1)$ dir. Böylece Lemma 3.1.3 gereği $(\sin(\log n))$ dizisi altdizisel yakınsaktır.

Açıktır ki yakınsak olmayan her sınırlı dizi yakınsak bir altdiziye sahiptir. Bu yüzden bir (u_n) sınırlı dizisi için $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ olmasa bile (u_n) nin yakınsak bir altdizisi olabilir. Doğal olarak "(u_n) *dizisi hangi koşullar altında sınırlıdır?*"

sorusu akla gelir. Örneğin bu bölümde *Abel* toplanabilir bir (u_n) dizisinin, $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ koşulu ile sınırlılığı elde edilmişti. Ilımlı salınımlılık tanımı hatırlanırsa, (u_n) dizisinin ılımlı salınımlı olması durumda $u_n = O(1)$ sonucuna varılır. Çünkü (u_n) dizisi ılımlı salınımlı ise, o zaman $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ ve $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi yakınsak olduğundan $u_n = O(1)$ elde edilir.

Aslında (u_n) nin sınırlılığını elde etmek için (u_n) nin ılımlı salınımlı olması koşulu yerine $(V_n^0(\Delta u))$ dizisinin ılımlı salınımlı olma koşulu konulduğunda da (u_n) nin sınırlılığı elde edilebilir. Aşağıdaki teorem daha sonra verilecek olan teoremler ve sonuçlar için gereklidir.

Teorem 3.1.4. [2] *(u_n) bir reel sayı dizisi olsun.*

$$\sigma_n^{(1)}(u) \to s(A) \tag{3.1.1}$$

olsun. Eğer $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ ılımlı salınımlı ve $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ ise, o zaman bir I aralığı vardır ve her $z \in I$ için (u_n) dizisinin s ye yakınsayan bir $(u_{n(z)})$ altdizisi vardır.

İspat. $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi ılımlı salınımlı olduğundan,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1) \tag{3.1.2}$$

olur ve

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) = O(1) \tag{3.1.3}$$

dir. O halde negatif olmayan her n tamsayısı ve $C > 0$ için,

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) \geq -C \tag{3.1.4}$$

elde edilir. (3.1.1) hipotezinden $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ ve $(V_n^{(2)}(\Delta u))$ 0 a *Abel* toplanabilirdir. Dolayısıyla,

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) \to 0(A) \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Daha sonra (3.1.4) ve (3.1.5) a Teorem 2.2.6 uygulanırsa

$$\sigma_n^{(1)}(n\Delta V^{(2)}(\Delta u)) = o(1)$$

olur. Böylece $V_n^{(2)}(\Delta u) \to 0(A)$ olduğu için Tauber'in ikinci teoreminden

$$V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1)$$

elde edilir. De la Vallée Poussin ortalaması yardımıyla $\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(1)}(\Delta u) &= V_n^{(2)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(2)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u)) \\ &\quad - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(1)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(1)}(\Delta u)) \end{aligned}$$

olduğundan $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$ olur. Sonuç olarak (3.1.2) den

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$$

dir. Daha sonra (3.1.1) ile $\sigma_n^{(2)}(u) \to s(A)$ dir ve $V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1)$ olduğundan dolayı Teorem 2.2.2 den

$$\sigma_n^{(2)}(u) \to s$$

olur. Ayrıca Kronecker eşitliğinde her iki tarafın aritmetik ortalaması alınırsa $\sigma_n^{(1)}(u) \to s$ elde edilir. Dolayısıyla $u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ olduğundan $u_n = O(1)$ olur. Teoremde verilen $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ hipotezi ise Kronecker eşitliğinin geri farkı alınıp kullanılırsa $\Delta u_n = o(1)$ olur.

Böylece önceden ispatlandığı gibi $u_n = O(1)$ ve $\Delta u_n = o(1)$ olmasıyla $(\liminf_n u_n, \limsup_n u_n)$ aralığındaki tüm noktalar (u_n) dizisinin yığılma noktasıdır. Dolayısıyla, her $z \in (\liminf_n u_n, \limsup_n u_n)$ için (u_n) nin bir $(u_{n(z)})$ altdizisi vardır ve $\lim_{n(z)} u_{n(z)} = z$ dir.

Burada "(u_n) dizisi sınırsız olduğunda da dizinin altdizisi hakkında bilgi elde etmek mümkün müdür?" sorusu akla gelebilir. Bu soruya cevap bulmak için (u_n) dizisinin yavaş salınımlı ve sınırsız olduğunu kabul edelim. Dizi yavaş salınımlı olduğundan aritmetik ortalaması da yavaş salınımlıdır. Böylece $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ yavaş salınımlıdır. O halde $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ dir. Ayrıca (u_n) yavaş salınımlı olduğundan $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ dir. Sonuç olarak $I = (\liminf_n V_n^{(0)}(\Delta u), \limsup_n V_n^{(0)}(\Delta u))$

aralığındaki tüm noktalar $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin yığılma noktasıdır. O zaman her $z \in I = (\liminf_n V_n^{(0)}(\Delta u), \limsup_n V_n^{(0)}(\Delta u))$ için $V_n^{(0)}(\Delta u)$ dizisinin z ye yakınsayan bir $(V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u))$ altdizisi vardır.

Görülüyor ki bir dizinin yavaş salınımlı olduğunu bilmek, üreteç dizisinin davranışı hakkında altdizisel bilgiye sahip olmak demektir. □

Aşağıdaki teoremde $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin altdizisel davranışı hakkında bilgi elde etmeyi sağlayan bir başka koşul verilecektir.

Teorem 3.1.5. [2] *$(V_n^{(0)}(\Delta u))$ bir reel sayı dizisi ve $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ yakınsak olsun. Eğer $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ ve $\lambda > 1$ için,*

$$\limsup_n \frac{1}{[\lambda n]-n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \right| < \infty \tag{3.1.6}$$

ise, o zaman bir I aralığı vardır ve her $z \in I$ için $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin z ye yakınsayan bir $(V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u))$ altdizisi vardır.

İspat. *De la Vallée Poussin ortalaması* yardımıyla $\lambda > 1$ için

(i)

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &\quad - \frac{1}{[\lambda n]-n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^{k} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \end{aligned}$$

ve $1 < \lambda < 2$ için,

(ii)

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1}(V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &\quad + \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (i) den $\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &\leq V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &\quad + \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u))\right| \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın üst limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \limsup_n V_n^{(0)}(\Delta u) &\leq \limsup_n V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\limsup_n (V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &\quad + \limsup_n \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u))\right| \end{aligned}$$

elde edilir. $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ yakınsak olduğundan eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim sıfır olur ve böylece,

$$\begin{aligned} \limsup_n V_n^{(0)}(\Delta u) &\leq \lim_n (V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &+ \limsup_n \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u))\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremdeki kabulden

$$K = \limsup_n \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)\right| < \infty$$

yazılırsa,

$$\limsup_n V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) + K$$

olur. (ii) den $1 < \lambda < 2$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &\geq V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1}(V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &\quad - \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n}\left|\sum_{j=k+1}^{n}(V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u))\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizlikte her iki tarafın alt limiti alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\liminf_n V_n^{(0)}(\Delta u) \quad \geq \quad & \liminf_n V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) \\
& -\frac{1}{\lambda-1}\liminf_n (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\
& +\liminf_n \Bigg(-\frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \\
& \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right| \Bigg)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(V_n^{(1)}(\Delta u))$ yakınsak olduğundan eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim sıfır olur ve böylece,

$$
\begin{aligned}
\liminf_n V_n^{(0)}(\Delta u) \quad \geq \quad & \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) \\
& +\liminf_n \left(-\frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right| \right) \\
\geq \quad & \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) \\
& -\limsup_n \left(-\frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right| \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada
$M = \limsup_n \left(\frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right| \right) < \infty$
yazılırsa,

$$\liminf_n V_n^{(0)}(\Delta u) \geq \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) - M$$

olur. Sonuç olarak,

$$\lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) - M \leq \liminf_n V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \limsup_n V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \lim_n (V_n^{(1)}\Delta u) + K$$

elde edilir. Bu ise $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ olması demektir. Böylece $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ ve $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ olduğundan bir I aralığı vardır ve her $z \in I$ için $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin z ye yakınsayan bir $(V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u))$ altdizisi vardır. $\square$

Bu teoremin genelleştirilmesi olarak $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisinin Abel toplanabilir olduğu kabul edilirse (u_n) dizisinin altdizisel yakınsaklığı hakkında bilgi elde edilir.

Teorem 3.1.6. [2] *(u_n) bir reel sayı dizisi ve $\sigma_n^{(1)}(u) \to s(A)$ olsun. Eğer*

$$\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$$

ve $\lambda > 1$ için,

$$\limsup_n \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \right| < \infty$$

ise, o zaman bir I aralığı vardır ve her her $z \in I$ için (u_n) dizisinin z ye yakınsayan bir $(u_{n(z)})$ altdizisi vardır.

İspat. Bir önceki teoremin ispatındaki adımlar uygulanarak $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ bulunur. Daha sonra Kronecker eşitliğinde her iki tarafın aritmetik ortalaması alınırsa, o zaman

$$\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u) = n\Delta\sigma_n^{(2)}(u) = O(1)$$

olur. Ayrıca $\sigma_n^{(1)}(u) \to s(A)$ olduğundan $\sigma_n^{(2)}(u) \to s(A)$ elde edilir. Böylece Teorem 2.2.3 uygulanırsa $(\sigma_n^{(2)}(u))$ yakınsak bulunur. Dolayısıyla $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ olduğu için Kronecker eşitliğinin aritmetik ortalaması kullanılırsa $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yakınsak olur. Bu ise (u_n) dizisinin sınırlılığını verir. Son olarak Kronecker eşitliğinde her iki tarafın geri farkına geçilirse $\Delta u_n = o(1)$ bulunur. Böylece önceden ispatlandığı gibi $u_n = O(1)$ ve $\Delta u_n = o(1)$ olmasıyla $(\liminf_n u_n, \limsup_n u_n)$ aralığındaki tüm noktalar (u_n) dizisinin yığılma noktasıdır. Dolayısıyla, her $z \in (\liminf_n u_n, \limsup_n u_n)$ için (u_n) nin bir $(u_{n(z)})$ altdizisi vardır ve $\lim_{n(z)} u_{n(z)} = z$ dir.
□

Şimdiye kadar (u_n) dizisinin salınım davranışlarının üzerine konulan koşullar büyük ölçüde zayıflatılarak Tauber teorisine yeni bir yaklaşım getirilmiş ve (u_n) dizisinin Abel toplanabilirliğinden yakınsaklığının elde edilemediği görülmüştür.

Fakat dizinin yapısı hakkında daha derin bilgiler elde edilmiştir. Örneğin, $u_n = O(1)$ ve $\Delta u_n = o(1)$ ise her $z \in (\liminf_n u_n, \limsup_n u_n)$ için (u_n) nin bir $(u_{n(z)})$ altdizisinin var olduğu gösterildi.

3.2. Yavaş Salınımlılık Yardımıyla Altdizisel Yakınsaklığın Elde Edildiği Tauber Tipi Teoremler

Bu kısımda yavaş salınımlılık kavramı kullanılarak, verilen bir dizinin altdizisel yakınsaklığının elde edildiği Tauber tipi teoremler verilecektir.

Teoremlerin ispatı için aşağıda verilen lemmalara ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 3.2.1. [22] *Bir (u_n) dizisi yavaş salınımlı ve $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yakınsak ise o zaman (u_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_n u_n = \lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ dir.*

İspat. $\lambda > 1$ için (u_n) dizisinin *De la Vallée Poussin* ortalaması yardımıyla,

$$\begin{aligned}
|u_n - \sigma_n^{(1)}(u)| &= \left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right| \\
&\leq \left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))\right| + \left|\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right| \\
&\leq \left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))\right| + \max_{n+1\leq[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın üst limiti alınırsa,

$$\limsup_n |u_n - \sigma_n^{(1)}u| \leq \frac{\lambda}{\lambda-1}\limsup_n \left|(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))\right| + \limsup_n \max_{n+1\leq k\leq[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right|$$

bulunur. Daha sonra $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yakınsak olduğundan yukarıdaki eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim sıfır olur. Böylece,

$$\limsup_n |u_n - \sigma_n^{(1)}u| \leq \limsup_n \max_{n+1\leq k\leq[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right|$$

elde edilir. Son olarak her iki tarafın $\lambda \to 1^+$ için limitine geçilirse,

$$\limsup_n |u_n - \sigma_n^{(1)} u| \quad \leq \quad \lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_n \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta u_j \right| = 0$$

bulunur. Böylece $\lim_n u_n = \lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ elde edilir.

□

Lemma 3.2.2. [3] *Bir (u_n) dizisi yavaş salınımlı ve sınırlı ise altdizisel yakınsaktır.*

Bir dizi yavaş salınımlı ise geri farkı sıfıra yakınsak olur. Dolayısıyla tanım gereği dizi altdizisel yakınsaktır.

Bir (u_n) dizisinin geri farkının yavaş salınımlı olması koşulu ile dizinin altdizisel yakınsaklığı aşağıdaki teoremde elde edilmiştir.

Teorem 3.2.3. [3] *(u_n) sınırlı bir dizi olsun. Eğer (Δu_n) yavaş salınımlı ise (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.*

İspat. Kronecker eşitliğininden,

$$\Delta u_n = \Delta \sigma_n^{(1)}(u) + \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta u_n = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} + \Delta V_n^{(0)}(\Delta u) \tag{3.2.7}$$

dir. (u_n) sınırlı olduğundan $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ sınırlıdır. (Δu_n) yavaş salınımlı olduğundan (3.2.7) eşitliğinden $(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u))$ yavaş salınımlı olur. Böylece

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k^{(0)}(\Delta u) = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} = o(1)$$

ve $(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u))$ nin yavaş salınımlı olması ile Lemma 3.2.1 den $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ olur. Dolayısıyla (3.2.7) eşitliğinden $\Delta u_n = o(1)$ elde edilir. Böylece Lemma 3.1.3 den (u_n) altdizisel yakınsaktır. □

Sadece (u_n) dizisinin sınırlılığından (u_n) ile ilgili bazı dizilerin altdizisel yakınsaklıkları elde edilebilir.

Teorem 3.2.4. [3] *(u_n) sınırlı bir dizi olsun. O zaman her bir $m \geq 1$ tamsayısı için, $(\sigma_n^{(m)}(u))$ ve $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizileri altdizisel yakınsaktır.*

İspat. (u_n) sınırlı olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ ve $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ sınırlıdır. Böylece $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yavaş salınımlıdır. Dolayısıyla her bir $m \geq 1$ tamsayısı için, $(\sigma_n^{(m)}(u))$ yavaş salınımlıdır. Ayrıca (u_n) sınırlı olduğundan her bir $m \geq 1$ tamsayısı için, $(\sigma_n^{(m)}(u))$ sınırlıdır. Bu nedenle Lemma 3.2.2 den $(\sigma_n^{(m)}(u))$ altdizisel yakınsaktır. Diğer yandan Kronecker eşitliğinde her iki tarafın m kez aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma_n^{(m)}(u) - \sigma_n^{(m+1)}(u) = V_n^{(m)}(\Delta u)$$

elde edilir ve böylece $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ nin yavaş salınımlı olduğu bulunur. Ayrıca $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ sınırlı olduğundan her bir $m \geq 1$ tamsayısı için $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ sınırlı olur ve bu durumda Lemma 3.2.2 gereği $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ altdizisel yakınsaktır. □

Yukarıdaki teoremde $m = 0$ için verilen dizilerin altdizisel yakınsaklığı elde edilemez fakat (u_n) dizisi üzerindeki koşul değiştirilirse $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ dizisinin her bir $m \geq 0$ için altdizisel yakınsaklığı elde edilir.

Teorem 3.2.5. [3] *(u_n) yavaş salınımlı ise, her bir $m \geq 0$ tamsayısı için $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ altdizisel yakınsaktır.*

İspat. (u_n) yavaş salınımlı ise $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yavaş salınımlı olur. Dolayısıyla Kronecker eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ yavaş salınımlı olur. Ayrıca (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olması $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$ olmasını gerektirir. Böylece her bir $m \geq 0$ tamsayısı için $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ yavaş salınımlıdır ve

$$V_n^{(m)}(\Delta u) = O(1)$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.2.2 gereği her bir $m \geq 0$ tamsayısı için $(V_n^{(m)}(\Delta u))$ altdizisel yakınsaktır. □

Sınırlı bir dizinin genel kontrol modülosu üzerine yavaş salınımlı olma koşulu konulmasıyla da altdizisel yakınsaklık elde edilmiştir. Aşağıdaki teoremde dizinin m. mertebeden genel kontrol modülosunun önce aritmetik ortalaması ve daha sonra geri farkı alınmıştır. Bulunan bu yeni dizinin yavaş salınımlı olmasıyla dizi altdizisel yakınsak bulunmuştur. Bulunan yeni dizinin yavaş salınımlı olması, dizinin yavaş salınımlı olması ile elde edilebilir fakat tersi genelde doğru değildir.

Teorem 3.2.6. [6] *(u_n) sınırlı bir dizi ve m negatif olmayan bir tamsayı olsun. Eğer $(\Delta(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u))))$ yavaş salınımlı ise o zaman (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.*

İspat. $u_n = O(1)$ olduğundan Kronecker eşitliğinden

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = O(1)$$

dir. Ayrıca $\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(0)}(u)) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))$ eşitliğinden

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = O(1)$$

dir. Bu şekilde devam edilirse

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = O(1)$$

ve dolayısıyla

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = O(1)$$

bulunur. Böylece,

$$(n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u) = O(1) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)}(\Delta((n\Delta)_m V^{(m)}(\Delta u))) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Delta((k\Delta)_{m-1} V_k^{(m-1)}(\Delta u)) \\ &= \frac{(n\Delta)_m V^{(m)}(\Delta u)}{n} = o(1) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca hipotezden $(\Delta\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ nin yavaş salınımlı olması $(\Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)))$ nin yavaş salınımlı olmasını gerektirir. O halde Lemma 3.2.1 den

$$\Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u) = o(1) \tag{3.2.9}$$

olur. Kronecker eşitliğinden $\omega_n^{(m)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m+1)}(u)$ yazılırsa,

$$(n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u) - \sigma_n^{(1)}((n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = (n\Delta)_{m+1} V_n^{(m)}(\Delta u)$$

bulunur. Böylece eşitliğin her iki tarafı n ye bölünürse

$$\Delta((n\Delta)_{m-1} V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = \frac{(n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)}{n} + \Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u))$$

elde edilir. O halde (3.2.9) ve (3.2.8) eşitliklerinden dolayı

$$\Delta((n\Delta)_{m-1} V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = o(1)$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ elde edilir. Kronecker eşitliğinden $\Delta u_n = \Delta V_n^{(0)}(\Delta u) + \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}$ ve $u_n = O(1)$ olduğundan $\Delta u_n = o(1)$ bulunur. Böylece Lemma 3.1.3 den (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır. □

Yukarıdaki teoremde $m = 0$ alınırsa Lemma 3.1.3 elde edilir. Gerçekten de $m = 0$ için, $(\Delta(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u))))$ yavaş salınımlı olur. Bu ise $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$ nin yavaş salınımlı olması demektir. Ayrıca $\sigma_n^{(1)}(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)) = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}$ ve hipotezden (u_n) sınırlı olduğundan

$$\sigma_n^{(1)}(\Delta V_n^{(0)} \Delta u) = o(1)$$

dir. O zaman Lemma 3.2.1 gereği

$$\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$$

olur. Dolayısıyla Kronecker eşitliğinden $\Delta u_n = o(1)$ elde edilir. Böylece Lemma 3.1.3 bulunmuş olur.

Sonuç 3.2.7. [6] *(u_n) sınırlı bir dizi ve m negatif olmayan bir tamsayı olsun. Eğer $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ yavaş salınımlı ise o zaman (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.*

İspat. $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ yavaş salınımlı ise $((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u))$ yavaş salınımlıdır. Dolayısıyla

$$\Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)) = o(1)$$

elde edilir. Böylece $(\Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)))$ yavaş salınımlıdır. İspatın gerisi Teorem 3.2.6 deki gibidir. □

3.3. Kontrol Modülosu Bir Dizi İle Sınırlanan Diziler İçin Altdizisel Yakınsaklığın Elde Edildiği Tauber Tipi Teoremler

(A_n) sınırlı olmayan bir dizi olmak üzere $n\Delta u_n = O(A_n)$ koşulu Littlewood'un Teorem 2.2.3 deki klasik Tauber koşulunun bir genelleştirilmesidir. Açıktır ki (u_n) dizisinin sınırlılığından altdizisel yakınsaklığını elde etmek için (A_n) üzerine bazı ek koşullar koymak gerekebilir.

Teorem 3.3.1. [3] *(u_n) sınırlı bir dizi ve (A_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere, $p > 1$ için*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |A_k|^p = O(1) \tag{3.3.10}$$

olsun. Eğer $n\Delta u_n = O(A_n)$ ise, o zaman (u_n) altdizisel yakınsaktır.

İspat. Teoremdeki (3.3.10) kabulünden $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k}\right)$ dizisi yavaş salınımlıdır. Gerçekten de,

$$
\begin{aligned}
\max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\frac{A_j}{j}\right| &\le \max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\left|\frac{A_j}{j}\right|\le\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\frac{|A_j|}{j}\le\frac{1}{n+1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|A_j|\\
&= \frac{[\lambda n]-n}{n+1}\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|A_j|\\
&\le \frac{[\lambda n]-n}{n+1}\frac{1}{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n+1}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{n+1}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\
&\le \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1}\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}\frac{([\lambda n]+1)^{\frac{1}{p}}}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

olur. Her iki tarafın üst limitine geçilirse;

$$
\begin{aligned}
\limsup_n \max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\frac{A_j}{j}\right| &\le \limsup_n\left(\left(\frac{[\lambda n]-n}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\quad \limsup_n\left(\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\limsup_n \max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\frac{A_j}{j}\right| &\le \lim_n\left(\left(\frac{[\lambda n]-n}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\quad \limsup_n\left(\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]}|A_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

olur. Daha sonra (3.3.10) kullanılırsa $C > 0$ olmak üzere,

$$\limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{A_j}{j} \right| \le (\lambda-1)^{\frac{1}{q}} \lambda^{\frac{1}{p}} C$$

elde edilir. Son olarak $\lambda \to 1^+$ için her iki tarafın limitine geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{A_j}{j} \right| \le \lim_{\lambda\to 1^+} (\lambda-1)^{\frac{1}{q}} \lambda^{\frac{1}{p}} C = 0$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{A_j}{j} \right| = 0$$

elde edilir. Yani $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k} \right)$ yavaş salınımlıdır. Dolayısıyla $\frac{A_n}{n} = o(1)$ dir ve bu ise $n\Delta u_n = O(A_n)$ kabulünden dolayı $\Delta u_n = o(1)$ eşitliğini gerektirir. Sonuç olarak $(u_n) = O(1)$ ve Lemma 3.1.3 den dolayı (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır. □

Teorem 3.3.1 de, $n\Delta u_n = O(A_n)$ koşulu yerine $\omega_n^{(m)}(u) = O(A_n)$ koşulunun eklenmesi ile teoremin genelleştirilmiş hali elde edilir. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.3.2. [6] *(u_n) sınırlı bir dizi olsun. (A_n) reel sayı dizisi, m negatif olmayan tamsayı ve $p > 1$ için,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |A_k|^p = O(1) \tag{3.3.11}$$

şartını sağlasın. Eğer

$$\omega_n^{(m)}(u) = O(A_n)$$

ise, o zaman (u_n) altdizisel yakınsaktır.

İspat. Teorem 3.3.1 deki işlemlerin aynısı yapılarak $\frac{A_n}{n} = o(1)$ bulunur. $\omega_n^{(m)}(u) = O(A_n)$ olduğundan dolayı,

$$(n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u) = (n\Delta)((n\Delta)_{m-1} V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = O(A_n)$$

elde edilir. Böylece $\frac{A_n}{n} = o(1)$ eşitliğinden

$$\Delta((n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = o(1) \tag{3.3.12}$$

bulunur. Ayrıca (u_n) sınırlı olduğundan Kronecker eşitliğinden

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = O(1)$$

dir. Ayrıca $\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(0)}(u)) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))$ eşitliğinden

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = O(1)$$

dir. Bu şekilde devam edilirse

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-2)}(u)) = O(1)$$

ve dolayısıyla

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = O(1)$$

bulunur. Böylece,

$$(n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-1)}(\Delta u) = O(1) \tag{3.3.13}$$

elde edilir. Kronecker eşitliğinden $\omega_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = \omega_n^{(m)}(u)$ yazılırsa,

$$(n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-2)}(\Delta u) - \sigma_n^{(1)}((n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-2)}(\Delta u)) = (n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)$$

bulunur. Böylece eşitliğin her iki tarafı n ye bölünürse

$$\Delta((n\Delta)_{m-2}V_n^{(m-2)}(\Delta u)) = \frac{(n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-1)}(\Delta u)}{n} + \Delta((n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-1)}(\Delta u))$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki (3.3.12) ve (3.3.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Delta((n\Delta)_{m-2}V_n^{(m-2)}(\Delta u)) = o(1)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $\Delta V_n^{(0)}\Delta u = o(1)$ bulunur. Kronecker eşitliğinden $\Delta u_n = \Delta V_n^{(0)}(\Delta u) + \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}$ ve $u_n = O(1)$ olduğundan $\Delta u_n = o(1)$ bulunur. Böylece Lemma 3.1.3 den (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır. □

Teorem 3.3.3. [6] *(u_n) sınırlı bir dizi olsun. Eğer her negatif her m tamsayısı ve $p>1$ için,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|k\Delta\sigma_k^{(1)}(\omega^{(m)}(u))|^p = O(1) \tag{3.3.14}$$

ise o zaman, (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.

İspat.

Teorem 3.3.1 de (A_n) dizisi yerine $(n\Delta\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi alınır ve aynı işlemler uygulanırsa $\Delta\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = o(1)$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)) = o(1)$$

bulunur. İspatın kalan kısmı için Sonuç 3.2.7 uygulanır ve ispat biter. □

4. DÜZENLİ ÜRETİLEN DİZİLER İÇİN ALTDİZİSEL YAKINSAKLIĞIN ELDE EDİLDİĞİ TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bir (α_n) dizisi için,

$$u_n = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} + u_0$$

şeklinde ifade edildiğinde (u_n) dizisine (α_n) tarafından düzenli olarak üretilen bir dizi ve (α_n) dizisine de (u_n) dizisinin bir *üreteci* dendiğini ilk bölümde tanımlanmıştı. Stanojević [23], $(S_n(\alpha)) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$ yavaş salınımlı ise, o zaman $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu ispatlamıştır. Bu bölümdeki amaç; $(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k})$ dizisinin yakınsaklığı için gerekli olan koşulları zayıflatmak ve bazı dizi sınıflarındaki düzenli üretilen (u_n) dizilerinin altdizisel yakınsaklığını elde etmektir.

4.1. Lemmalar

Teoremlerin ispatı için aşağıda verilen lemmalara ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 4.1.1. [4] *$(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n}$ yakınsaktır.*

Lemma 4.1.2. [4] *(α_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}\right)$ yakınsak ise, o zaman $\sigma_n^{(1)}(\alpha) = o(1)$ dir.*

İspat. $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}$ olsun. Her iki tarafın geri farkına geçilirse, $\Delta\gamma_n = \frac{\alpha_n}{n}$ olur ve böylece

$$n\Delta\gamma_n = \alpha_n$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(\alpha) = \sigma_n^{(1)}(n\Delta\gamma) = V_n^{(0)}(\Delta\gamma)$$

olur. Ayrıca (γ_n) yakınsak olduğundan $V_n^{(0)}(\Delta\gamma) = o(1)$ elde edilir ve böylece $\sigma_n^{(1)}(\alpha) = o(1)$ bulunur. □

Lemma 4.1.3. [5] *$\mathscr{L}$ dizilerin bir lineer uzayı ve $(u_n) \in \mathscr{L}$ olsun. Eğer her $m \geq 0$ tamsayısı için $(u_n) \in U(\mathscr{A}^{(m)})$ ise, o zaman $(\alpha_n) \in \mathscr{A}$ olmak üzere, $(n\Delta)_{(m)} V_n^{(0)}(\Delta u) = \alpha_n$ dir.*

İspat. Eğer $(u_n) \in U(\mathscr{A}^{(m)})$ ise, o zaman $m \geq 0$ tamsayı ve $(\alpha_n^{(m)}) \in \mathscr{A}^{(m)}$ olmak üzere

$$u_n = \alpha_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{(m)}}{k} + u_0 \tag{4.1.1}$$

dir. (4.1.1) eşitliğinde her iki tarafın geri farkına geçilirse,

$$n\Delta u_n = n\Delta \alpha_n^{(m)} + \alpha_n^{(m)} \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Daha sonra her iki tarafın aritmetik ortalaması alınırsa

$$\sigma_n^{(1)}(n\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(n\Delta \alpha^{(m)}) + \sigma_n^{(1)}(\alpha^{(m)})$$

bulunur ve (4.1.2) ile son eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$n\Delta u_n - V_n^{(0)}(\Delta u) = n\Delta \alpha_n^{(m)}$$

elde edilir. Böylece

$$n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = \alpha_n^{(m-1)}$$

eşitliği bulunur. Bu şekilde devam edilirse

$$(n\Delta)_m V_n^{(0)}(\Delta u) = \alpha_n^{(0)} = \alpha_n$$

elde edilir. □

Lemma 4.1.4. [24] *$\mathscr{L}$ dizilerin bir lineer uzayı ve $(u_n) \in \mathscr{L}$ olsun. Eğer her $m \geq 1$ tamsayısı için $(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \in U(\mathscr{A}^{(m)})$ ise, o zaman $(\alpha_n) \in \mathscr{A}$ olmak üzere, $(n\Delta)_{m+1} V_n^{(m)}(\Delta u) = \alpha_n$ dir.*

Yukarıdaki lemmanın ispatı Lemma 4.1.3 de $m-1$ kez aritmetik ortalama alınarak yapılır.

4.2. Teoremler ve Sonuçlar

Teorem 4.2.1. [4] *$(u_n) \in U(\mathscr{S}_\Delta)$ dizisi (α_n) ile düzenli üretilmiş bir dizi olsun. Eğer $(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) altdizisel yakınsaktır.*

İspat. (u_n) dizisi (α_n) tarafından düzenli üretilmiş bir dizi olduğundan

$$u_n = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} + u_0 \tag{4.2.3}$$

dir. Lemma 4.1.1 den $(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı olduğu için $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}\right) = (\gamma_n)$ yakınsaktır. Dolayısıyla Lemma 4.1.2 den $\sigma_n^{(1)}(\alpha) = o(1)$ elde edilir. Böylece (4.2.3) de her iki tarafın aritmetik ortalamasına geçilirse

$$\sigma_n^{(1)}(u) = \sigma_n^{(1)}(\alpha) + \sigma_n^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}\right)$$

bulunur ve böylece $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yakınsaktır. Ayrıca $\frac{\alpha_n}{n} = o(1)$ olduğundan dolayı $\sigma_n^{(1)}(\Delta\alpha) = o(1)$ elde edilir. Bununla birlikte $(u_n) \in U(\mathscr{S}_\Delta)$ olması $(\Delta\alpha_n)$ nin yavaş salınımlı olmasını gerektirir. Dolayısıyla Lemma 3.2.1 den $\Delta\alpha_n = o(1)$ dir. O halde (4.2.3) eşitliğinde her iki tarafın geri farkı alınırsa,

$$\Delta u_n = \Delta\alpha_n + \frac{\alpha_n}{n}$$

dir. Böylece $\Delta u_n = o(1)$ bulunur. İspatın geri kalan kısmı için $u_n = O(1)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı olduğundan $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$ ılımlı salınımlıdır. Dolayısıyla $V_n^{(0)}(\alpha) = O(1)$ elde edilir. Kronecker eşitliğinden

$$\alpha_n = \frac{V_n^{(0)}(\alpha)}{n} + \Delta V_n^{(0)}(\alpha) \tag{4.2.4}$$

olduğundan, $\alpha_n = O(1)$ bulunur. Böylece (4.2.3) den $u_n = O(1)$ elde edilir. Sonuç olarak $\Delta u_n = o(1)$ ve $u_n = O(1)$ olduğundan Lemma 3.1.3 gereği (u_n) altdizisel yakınsaktır. $\square$

Not 4.2.2. Teorem 4.2.1 de $(\Delta\alpha_n)$ nin yavaş salınımlı olma koşulu ile $(\Delta V_n(\Delta\alpha))$ nin yavaş salınımlı olma koşulu yer değiştirebilir. Çünkü (α_n) dizisi için Kronecker eşitliği yazılırsa $(\Delta V_n(\Delta\alpha))$ nin yavaş salınımlı olması gereği $(\Delta\alpha_n)$ yavaş salınımlıdır sonucu elde edilir.

Not 4.2.3. Eğer (u_n) dizisi $\alpha = (\alpha_n)$ ile düzenli olarak üretiliyorsa o zaman $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi, $m \geq 1$ için $\sigma^{(m)}(\alpha) = (\sigma_n^{(m)}(\alpha))$ ile düzenli olarak üretilir. Eğer $(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(m)}(\alpha))$ ılımlı salınımlı ve $(0 \leq j \leq m)$ için $(\sigma_n^{(j)}(\alpha))$ yavaş salınımlı ise, o zaman Teorem 4.2.1 gereği $(\sigma_n^{(m)}(u))$ dizisi yakınsaktır.

Sonuç 4.2.4. [4] *$(u_n) \in U(\mathscr{S})$ ve (α_n) tarafından düzenli olarak üretilen bir dizi olsun. Eğer $(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı ise o zaman $\lim_n u_n = \lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ dir.*

İspat. (α_n) tarafından düzenli olarak üretilen bir dizi için,

$$u_n = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} + u_0$$

dir. Eşitlikte her iki tarafın geri farkına geçilirse,

$$n\Delta u_n = n\Delta\alpha_n + \alpha_n$$

olur. Daha sonra her iki tarafın aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(n\Delta u) = \sigma_n^{(1)}(n\Delta\alpha) + \sigma_n^{(1)}(\alpha)$$

olur ve dolayısıyla,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta\alpha) + \sigma_n^{(1)}(\alpha) \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Lemma 4.1.1 gereği $(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n}$ yakınsaktır ve Lemma 4.1.2 den dolayı $\sigma_n^{(1)}(\alpha) = o(1)$ dir.

Yavaş salınımlılık tanımı hatırlanırsa (α_n) yavaş salınımlı olduğundan (4.2.5) gereği $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin yavaş salınımlı ve sınırlı olması elde edilir. O halde

(u_n) dizisi yavaş salınımlıdır. Sonuç olarak Lemma 3.2.1 den (u_n) dizisi yavaş salınımlı ve $(\sigma_n^{(1)}(u))$ yakınsak ise $\lim_n(u_n) = \lim_n(\sigma_n^{(1)}(u))$ dir. □

Teorem 4.2.5. [7] *$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ dizi uzayları için,*

(i) *$\mathscr{B}$ deki her bir (b_n) dizisi için, $(\frac{b_n}{a_n})$ sınırlı olacak şekilde $\mathscr{A}$ da bir (a_n) dizisi vardır.*

(ii) *$\mathscr{A}$ daki bir dizi tarafindan düzenli olarak üretilen her dizi ılımlı salınımlıdır.*

koşulları sağlansın. Eğer $(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$, $(\alpha_n^{(m)})$ ile düzenli üretilen bir dizi ve $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.

İspat. $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı olduğundan $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)}\right)$ ılımlı salınımlıdır. Dolayısıyla,

$$V_n^{(0)}(\alpha^{(m)}) = O(1) \tag{4.2.6}$$

dir. Kronecker eşitliği $(S_n(\alpha^{(m)}))$ için yazılırsa,

$$S_n(\alpha^{(m)}) - \sigma_n^{(1)}(S(\alpha^{(m)})) = V_n^{(0)}(\Delta S(\alpha^{(m)}))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S_n(\alpha^{(m)}) - \sigma_n^{(1)}(S(\alpha^{(m)})) = V_n^{(0)}(\alpha^{(m)})$$

dir. Her iki tarafın geri farkı alındığında,

$$\alpha_n^{(m)} - \frac{V_n^{(0)}(\alpha^{(m)})}{n} = \Delta V_n^{(0)}(\alpha^{(m)}) \tag{4.2.7}$$

bulunur. Böylece (4.2.6) ve (4.2.7) den $\alpha_n^{(m)} = O(1)$ elde edilir. Lemma 4.1.1 den $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n}$ yakınsaktır. Dolayısıyla (u_n) sınırlıdır. $(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$ olduğundan Lemma 4.1.4 gereği $((n\Delta)_{m+1} V_n^{(m)}(\Delta u)) \in \mathscr{B}$ dir. Böylece (i) den

$$\omega_n^{(m+1)}(u) = O(a_n) \tag{4.2.8}$$

elde edilir. $(a_n) \in \mathscr{A}$ olduğundan dolayı (ii) den

$$a_n^{(1)} = a_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} + u_0 \tag{4.2.9}$$

ve $(a_n^{(1)})$ ılımlı salınımlıdır. (4.2.9) eşitliğinde her iki tarafın ortalaması alınırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(a^{(1)}) = \sigma_n^{(1)}(a_n) + \sigma_n^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right) \tag{4.2.10}$$

bulunur. Ayrıca,

$$V_n^{(0)}\left(\Delta \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right) = n\Delta\sigma_n^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right) = \sigma_n^{(1)}(a)$$

eşitliği ve (4.2.10) gereği

$$\sigma_n^{(1)}(a^{(1)}) = V_n^{(0)}\left(\Delta \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right) + \sigma_n^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)$$

elde edilir. Böylece Kronecker eşitliğinden
$(\sigma_n^{(1)}(a^{(1)})) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)$ ılımlı salınımlıdır. Yavaş azalan her $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisi için $c_n = o(1)$ olduğundan $\frac{a_n}{n} = o(1)$ dir. Dolayısıyla,

$$a_n = o(n) \tag{4.2.11}$$

dir. Daha sonra (4.2.8) ve (4.2.11) den dolayı $\omega_n^{(m+1)}(u) = o(n)$ dir ve bu ise

$$\Delta\sigma_n(\omega^{(m)}(u)) = \Delta(n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u) = o(1)$$

demektir. Öyleyse $\Delta(n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)$ nin aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\frac{(n\Delta)_m V_n^{(m)}}{n} = o(1)$$

elde edilir. Kronecker eşitliğinden $\omega_n^{(m)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m+1)}(u)$ yazılırsa,

$$(n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u) - \sigma_n^{(1)}((n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = (n\Delta)_{m+1} V_n^{(m)}(\Delta u)$$

bulunur. Böylece eşitliğin her iki tarafı n ye bölünürse

$$\Delta((n\Delta)_{m-1}V_n^{(m-1)}(\Delta u)) = \frac{(n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)}{n} + \Delta((n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u)) = o(1)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $\Delta V_n^{(0)}\Delta u = o(1)$ bulunur. Kronecker eşitliğinden $\Delta u_n = \Delta V_n^{(0)}(\Delta u) + \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}$ ve $u_n = O(1)$ olduğundan $\Delta u_n = o(1)$ bulunur. Böylece Lemma 3.1.3 den (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır. □

Sonuç 4.2.6. [7] *$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ dizi uzayları için,*

(i) *$\mathscr{B}$ deki her bir (b_n) dizisi için, $(\frac{b_n}{a_n})$ sınırlı olacak şekilde $\mathscr{A}$ da bir (a_n) dizisi vardır.*

(ii) *$\mathscr{A}$ daki bir dizi tarafından düzenli olarak üretilen her dizi ılımlı salınımlıdır.*

koşulları sağlansın. Eğer $(u_n) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$, $(\alpha_n^{(m)})$ ile düzenli üretilen bir dizi ve $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.

İspat. $(u_n) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$ ise, o zaman bazı $(\alpha_n^{(m)}) \in \mathscr{B}^{(m)}$ dizileri için

$$u_n = \alpha_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{(m)}}{k} + u_0 \tag{4.2.12}$$

dir. (4.2.12) eşitliğinde her iki tarafın geri farkı alındığında,

$$n\Delta u_n = n\Delta\alpha_n^{(m)} + \alpha_n^{(m)} \tag{4.2.13}$$

elde edilir. (4.2.13) de her iki tarafın aritmetik ortalaması alınıp kendisinden çıkarılırsa,

$$n\Delta u_n - V_n^{(0)}(\Delta u) = n\Delta\alpha_n^{(m)}$$

eşitliği bulunur. Böylece son eşitlikten $n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = \alpha_n^{(m-1)}$ elde edilir ve dolayısıyla $(n\Delta)_2 V_n^{(0)}(\Delta u) = \alpha_n^{(m-2)}$ dir. Bu şekilde devam edilirse $((n\Delta)_m V_n^{(0)}(\Delta u)) = (\alpha_n^{(0)}) = (\alpha_n) \in \mathscr{B}$ dir. (i) den dolayı $(n\Delta)_m V_n^{(0)}(\Delta u) = O(a_n)$ olduğundan

$$\omega_n^{(m+1)} = O(a_n)$$

bulunur. Sonuç olarak $(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$ bulunur ve ispatın geri kalan kısmı Teorem 4.2.5 deki gibidir. □

Teorem 4.2.7. [7] *$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ dizi uzayları için,*

(i) *$\mathscr{B}$ deki her bir (b_n) dizisi için, $(\frac{b_n}{a_n})$ sınırlı olacak şekilde $\mathscr{A}$ da bir (a_n) dizisi vardır.*

(ii) *$p > 1$ ve r negatif olmayan tamsayı olmak üzere, $(a_n) \in \mathscr{A}$ dizisi için $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |\omega_k^{(r)}(a)|^p = O(1)$ dir.*

koşulları sağlansın. Eğer $(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$, $(\alpha_n^{(m)})$ ile düzenli üretilen bir dizi ve $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır.

İspat. r negatif olmayan tamsayı olsun. $\lambda > 1$ için,

$$
\begin{aligned}
\max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\frac{\omega_j^{(r)}(a)}{j}\right| &\le \max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\left|\frac{\omega_j^{(r)}(a)}{j}\right| \le \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\frac{|\omega_j^{(r)}(a)|}{j}\\
&\le \frac{1}{n+1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|\\
&= \frac{[\lambda n]-n}{n+1}\,\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|\\
&\le \frac{[\lambda n]-n}{n+1}\,\frac{1}{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n+1}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{n+1}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\
&\le \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1}\,\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}\,\frac{([\lambda n]+1)^{\frac{1}{p}}}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]}|\omega_j^{(r)}(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Her iki tarafın üst limiti alındığında;

$$\limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\omega_j^{(r)}(a)}{j} \right|$$

$$\le \limsup_{n} \left(\left(\frac{[\lambda n]-n}{n+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \limsup_{n} \left(\frac{1}{[\lambda n]+1} \sum_{j=0}^{[\lambda n]} |\omega_j^{(r)}(a)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{n} \left(\left(\frac{[\lambda n]-n}{n+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \limsup_{n} \left(\frac{1}{[\lambda n]+1} \sum_{j=0}^{[\lambda n]} |\omega_j^{(r)}(a)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Daha sonra (ii) kullanılırsa $C \ge 0$ olmak üzere,

$$\limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\omega_j^{(r)}(a)}{j} \right| \le (\lambda-1)^{\frac{1}{q}} \lambda^{\frac{1}{p}} C$$

elde edilir. Son olarak $\lambda \to 1^+$ için her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\omega_j^{(r)}(a)}{j} \right| \le \lim_{\lambda\to 1^+} (\lambda-1)^{\frac{1}{q}} \lambda^{\frac{1}{p}} C = 0$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\omega_j^{(r)}(a)}{j} \right| = 0$$

elde edilir. Yani $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k^{(r)}(a)}{k} \right)$ yavaş salınımlıdır. Bu ise

$$\frac{\omega_n^{(r)}(a)}{n} = o(1) \tag{4.2.14}$$

olmasını gerektirir. Ayrıca $(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \in U(\mathscr{B}^{(m)})$ olduğundan Lemma 4.1.4 gereği

$$((n\Delta)_{m+1} V_n^{(m)}(\Delta u)) \in \mathscr{B}$$

dir ve hipotezden dolayı

$$\omega_n^{(m+1)}(u) = O(a_n)$$

dir. Bu durumda

$$\omega_n^{(m+r+1)}(u) = O(\omega_n^{(r)}(a))$$

dir ve (4.2.14) den dolayı

$$\Delta\sigma_n(\omega^{(m+r)}(u)) = \Delta(n\Delta)_{(m+r)}V_n^{(m+r)}(\Delta u) = o(1) \qquad (4.2.15)$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın aritmetik ortalaması alındığında,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta(k\Delta)_{m+r}V_n^{(m+r)}(\Delta u) = \frac{(n\Delta)_{(m+r)}V_n^{(m+r)}(\Delta u)}{n} = \Delta(n\Delta)_{(m+r-1)}V_n^{(m+r)}(\Delta u) = o(1)$$

olur. Böylece Kronecker eşitliğinden

$$\Delta((n\Delta)_{m+r-1}V_n^{(m+r-1)}(\Delta u)) = \frac{(n\Delta)_{m+r}V_n^{(m+r)}(\Delta u)}{n} + \Delta((n\Delta)_{m+r}V_n^{(m+r)}(\Delta u)) = o(1)$$

dir. İşlemler bu şekilde devam edilirse $\Delta V_n^{(0)}\Delta u = o(1)$ bulunur. Ayrıca Teorem 4.2.5 den $(S_n(\alpha^{(m)}))$ nin ılımlı salınımlı olmasının $(u_n) = O(1)$ olmasını gerektirdiği biliniyor. Dolayısıyla Kronecker eşitliğinden $\Delta u_n = \Delta V_n^{(0)}(\Delta u) + \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}$ yazılırsa $\Delta u_n = o(1)$ bulunur. Böylece Lemma 3.1.3 den (u_n) dizisi altdizisel yakınsaktır. □

Teorem 4.2.8. [5] *$m \geq 0$ tamsayı olmak üzere, $(u_n) \in U(\mathscr{M}_\Delta^{(m)})$, $(\alpha_n^{(m)})$ tarafından düzenli üretilen bir dizi olsun. Eğer $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) altdizisel yakınsaktır.*

İspat. $S(\alpha^m) = (S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise

$$(V_n^{(0)}(\alpha^{(m)})) = O(1) \qquad (4.2.16)$$

dir. Kronecker eşitliği $(S_n(\alpha^{(m)}))$ için yazılırsa

$$S_n(\alpha^{(m)}) - \sigma_n^{(1)}(S(\alpha^{(m)})) = V_n^{(0)}(\alpha^{(m)})$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın geri farkı alınırsa,

$$\alpha^{(m)} - \frac{V_n^{(0)}(\alpha^{(m)})}{n} = \Delta V_n^{(0)}(\alpha^{(m)}) \qquad (4.2.17)$$

bulunur. Böylece (4.2.16) ve (4.2.17) den $(\alpha^{(m)})$ nin sınırlı olduğu bulunur. Lemma 4.1.1 den $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(m)}}{n}$ yakınsaktır. Ayrıca

$$u_n = \alpha_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{(m)}}{k} + u_0$$

olduğundan (u_n) sınırlıdır. Kabulden $(u_n) \in U(\mathscr{M}_\Delta^{(m)})$ olduğundan (4.1.3) den $\Delta(n\Delta)_n V_n^{(m)}(\Delta u)$ nin ılımlı salınımlı olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_n^{(1)}(\Delta(n\Delta)_m V_n^{(0)}(\Delta u)) = \Delta((n\Delta)_{m-1} V_n^{(0)}(\Delta u))$ yavaş salınımlıdır. Tekrar aritmetik ortalaması alınırsa, $\sigma_n^{(1)}(\Delta((n\Delta)_{m-1} V_n^{(0)}(\Delta u))) = \Delta(n\Delta)_{m-2} V_n^{(0)}(\Delta u)$ nin yavaş salınımlı olduğu bulunur. Bu şekilde devam edilirse, $\Delta((n\Delta)_0 V_n^{(0)}(\Delta u)) = \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$ nin yavaş salınımlı olduğu elde edilir. Ayrıca (u_n) sınırlı olduğundan $(\sigma_n(\Delta V^{(0)}(\Delta u))) = \left(\frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}\right) \in c_0$ dır. Böylece Lemma 3.2.1 gereği $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ dır. Daha sonra Kronecker eşitliği yazılıp geri farkı alınırsa

$$\Delta u_n = \Delta V_n^{(0)}(\Delta u) + \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n}$$

olduğundan $\Delta u_n = o(1)$ elde edilir. Sonuç olarak Lemma 3.1.3 den (u_n) altdizisel yakınsaktır. □

Sonuç 4.2.9. [5] *$m \geq 0$ tamsayı olmak üzere, $(u_n) \in U(\mathscr{S}_\Delta^{(m)})$, $(\alpha_n^{(m)})$ tarafından düzenli üretilen bir dizi olsun. Eğer $(S_n(\alpha^{(m)}))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) altdizisel yakınsaktır.*

İspat. $(u_n) \in U(\mathscr{S}_\Delta^{(m)})$ olsun. O zaman Lemma 4.1.3 den $\Delta((n\Delta)_m V_n^{(0)}(\Delta u))$ yavaş salınımlıdır. Aritmetik ortalaması alınırsa, $\Delta((n\Delta)_{m-1} V_n^{(0)}(\Delta u))$ nin yavaş salınımlı olduğu elde edilir. İspatın geri kalan kısmı ise Teorem 4.2.8 deki gibidir. □

Sonuç 4.2.10. [5] *$(u_n) \in U(\mathscr{S}_\Delta)$, (α_n) tarafından düzenli üretilen bir dizi olsun. Eğer $(S_n(\alpha))$ ılımlı salınımlı ise, o zaman (u_n) altdizisel yakınsaktır.*

İspat. Sonuç 4.2.9 de $m = 0$ alınırsa ispat biter. Bu Teorem 4.2.1 dir. □

KAYNAKLAR

[1] Tauber, A. 1897. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. **Monatshefte für Mathematik und Physik**, 8: 273-277.

[2] Dik, F. 2001a. Tauberian theorems for convergence and subsequential convergence with moderately oscillatory behavior. **Mathematica Moravica**, 5: 19-56.

[3] Dik, F., Dik, M., Çanak, İ. 2007. Applications of subsequential Tauberian theory to classical Tauberian theory. **Applied Mathematics Letters**, 20: 946-950.

[4] Çanak, İ., Dik, M., Dik, F. 2006. Conditions for convergence and subsequential convergence. **Applied Mathematics Letters**, 19: 1042-1045.

[5] Çanak. İ., Totur, Ü. 2012. Some conditions for subsequential convergence and ordinary convergence, **Journal of Computational Analysis and Applications**, 14: 466-474.

[6] Çanak, İ., Dik, M. 2008. Some conditions under which subsequential convergence follows from boundedness. **Applied Mathematics Letters**, 21: 957-960.

[7] Totur, Ü., Çanak, İ. 2011. Some sufficient conditions for subsequential convergence of a sequence. **Computers and Mathematics with Applications**, 61: 567-572.

[8] Hardy, G. H. 1991. Divergent series. Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 396s, USA.

[9] Dik, M. 2001b. Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli. **Mathematica Moravica**, 5: 57-94.

[10] Çanak, İ., Totur, Ü. 2007. A Tauberian theorem with a generalized one-sided condition. **Abstract and Applied Analysis**, Article ID 60360.

[11] Schmidt, R. 1925. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. **Mathematische Zeitschrift**, 22: 89-152.

[12] Boos, J., 2000. Classical and modern methods in summability. Oxford University Press, 586s, New York.

[13] Korevaar, J. 2004. Tauberian Theory - A century of developments. Springer-Verlag, 483s, New York.

[14] Stanojević, Č. V. 1998. Analysis of divergence: Control and Management of Divergent Process, Graduate Research Seminar Lecture Notes, edited by İ. Çanak. University of Missouri- Rolla, Fall 1998, 56s, USA.

[15] Peyerimhoff, A. 1969. Lecture Notes in Mathematics. Springer- Verlag, 111s, New York.

[16] Powell, R. E., Shah, S. M. 1972. Summability theory and its applications. Van Nostrand Reinhold Company Limited, 178s, London.

[17] Littlewood, J. E., 1910. The converse of Abel's theorem on power series. **Proceedings of the London Mathematical Society**, 9: 434 - 448.

[18] Rényi, A. 1946. On a Tauberian Theorem of O. Szász. **Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math.**, 11, 119-123.

[19] Landau, E. 1910. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. **Prace Mat - Fiz**, 21: 97-177.

[20] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1914. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. **Proceedings of the London Mathematical Society**, 13: 174-191.

[21] Karamata, J. 1930. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. **Mathematische Zeitschrift**, 32: 319-320.

[22] Stanojević, Č. V. 1999, Analysis of divergence: Applications to the Tauberian theory, in: Graduate Research Seminar, University of Misouri- Rolla, Winter 1999.

[23] Stanojević, Č. V. 1995. Slow oscillation in norms and structure of linear functionals. **Publ. Ins. Math., Nouv. Sér.**, 58: 93-100.

[24] Çanak, İ., Totur, Ü., 2008. A note on Tauberian theorems for regularly generated sequences. **Tamkang Journal of Mathematics**, 39: 187-191.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Muhammet Ali OKUR
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Karşıyaka, 25.09.1989

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar		
-SCI		
-Diğer		
b) Bildiriler		
-Uluslararası	:	1) Some classical Tauberian theorems for the weighted mean methods of integrals, 13th Serbian Mathematical Congress, Sırbistan, 22-25 Mayıs, 2014. 2) Some Tauberian remainder theorems for Hölder summability, Karatekin Mathematics Days, Türkiye, 11-13 Haziran, 2014.
-Ulusal	:	1) İntegrallerin ağırlıklı ortalamalar metodu için bazı klasik Tauber tipi teoremler, Ankara Matematik Günleri, Türkiye, 12-13 Haziran, 2014.
c) Katıldığı Projeler	:	1) Altdizisel Yakınsaklık İçin Tauber Tipi Teoremler, ÖYP 12007 numaralı proje, 2013-2014.

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurum	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Çalıştığı Yıl	:	2012 - ...

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	mali.okur@adu.edu.tr
Tarih	:	18.06.2014