T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

2022-YL-068

# GAMMA HALKALARIN YARI ASALLIĞININ KAYNAĞI

Nurcan DÜZKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN

AYDIN-2022

## TEŞEKKÜR

Uzun bir sürecin sonunda yüksek lisans tezimi nihayet tamamlamış bulunmaktayım. Bu sürece katkı sağlayanlar arasında ilk olarak, daima yanımda varlığını hissettiğim, bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen gerek bir abi gerekse bir baba gibi olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN'a sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum. Son olarak, daima yanımda olan, dualarını hep üzerimde hissettiğim canım annem Songül DÜZKAYA'ya zor zamanlarımda bana olan desteği için minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| | | |
|---|---|---|
| $(\boldsymbol{a})$ | : | $a$ tarafından üretilen esas ideal |
| $\subseteq$ | : | Alt küme |
| $\leq$ | : | Alt halka |
| $\in$ | : | Eleman |
| $\notin$ | : | Eleman değil |
| $\neq$ | : | Eşit değil |
| $\boldsymbol{I \trianglelefteq M}$ | : | $I$, $M$ nin ideali |
| $\times$ | : | Kartezyen çarpım |
| $\cap$ | : | Kesişim |
| $\boldsymbol{char(M)}$ | : | $M$ gamma halkasının karakteristiği |
| $\boldsymbol{M}_{mxn}(\boldsymbol{S})$ | : | $S$ üzerinde $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | : | Rasyonel sayılar kümesi |
| $(\boldsymbol{0})$ | : | Sıfır ideali |
| $\lvert \boldsymbol{S}_M \rvert$ | : | $S_M$ kümesinin eleman sayısı |
| $\mathbb{Z}$ | : | Tamsayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}_n$ | : | modülo $n$ ye göre kalan sınıflarının kümesi |

# ÖZET

## GAMMA HALKALARIN YARI ASALLIĞININ KAYNAĞI

**Düzkaya N., Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, Yüksek Lisans Tezi, Aydın, 2022.**

Bu tezin amacı, halkadaki yarı asallık kaynağı tanımından yararlanarak gamma halkaların yarı asallık kaynağını tanımlamak ve bu tanımla birlikte gamma halkanın yapısı ile ilgili bilgiler elde etmektir. Bunun için gamma halkalarda yarı asallık kaynağı tanımlanmış ve gamma halkalarda yeni özellikler elde edilmiştir.

Bu çalışma genel olarak dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde gamma halkalar ile ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, yarı asallık kaynağı kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, gamma halkalardaki temel kavramlar tanımlanmıştır ve tezde elde edilen yeni özelliklerin ispatlanmasında gerekli olan bazı özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki alt başlık ile sunulmuştur. İlk kısımda bir gamma halkada yarı-asallık kaynağı olarak adlandırılan ve $S_M$ ile gösterilen küme tanımlanmış ve bununla ilgili özellikler verilmiştir. İkinci kısımda ise $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka, $|S_M|$-gamma bölge, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olarak isimlendirilen yeni yapılar verilmiş ve bu yapılarla ilgili yeni özellikler ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve konunun geliştirilmesine yönelik bazı tahminlerde bulunulmuştur.



**Anahtar kelimeler:** Yarı asal ideal, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka, $|S_M|$-gamma bölge, $|S_M|$-bölümlü gamma halka.

# ABSTRACT

## THE SOURCE OF SEMI-PRIMENESS OF GAMMA RINGS

**Düzkaya N., Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics, Master Thesis, Aydın, 2022.**

The aim of this thesis is to define the source of semi-primeness of gamma rings by using the definition of source of semi-primeness in the ring and to obtain information about the structure of the gamma ring with this definition. For this reason, we defined the notion of source of semi-primeness in gamma rings and obtained new properties in gamma rings.

This study generally consists of four parts. In the first chapter, some information about gamma rings in the literature is given. In addition, in this section, the studies on the notion of source of semi-primeness are summarized.

In the second chapter, the basic notions in gamma rings are defined and some properties required to prove the new properties obtained in the thesis are given.

The third chapter is presented with two subtitles. In the first part, the set denoted $S_M$, which is called the source of semi-primeness in a gamma ring, is defined and its related properties are given. In the second part, new notions called $|S_M|$-reduced gamma ring, $|S_M|$-gamma domain and $|S_M|$-division gamma ring are given and new properties related to these structures are proved.

In the fourth chapter, the results obtained are summarized and some conjectures are made for the development of the subject.

**Keywords:** Semi-prime ideal, $|S_M|$-reduced gamma ring, $|S_M|$-gamma domain, $|S_M|$-division gamma ring.

# 1. GİRİŞ

Cebirsel yapılar üzerinde çalışılırken ilgili yapının özellikleri hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak istenir. Bir cebirsel yapı olarak gamma halka kavramı ilk olarak Nobusawa tarafından verilmiştir(Nobusawa, 1964). Nobusawa çalışmasında, $A$ ve $B$ toplamsal değişmeli grupları için $\mathrm{Hom}(A,B)$ ve $\mathrm{Hom}(B,A)$ nın altgrupları $\Gamma$ ve $M$ olmak üzere $M \times \Gamma \times M$ den $M$ ye ve $\Gamma \times M \times \Gamma$ dan $\Gamma$ ya üçlü çarpımları model olarak almıştır. Nobusawa, gamma halka tanımını verdiği bu çalışmasında ayrıca basit halkalar üzerindeki Wedderburn teoremi gamma halkalar üzerine genelleştirmiştir. Daha sonraki yıllarda Barnes, Nobusawa'nın verdiği koşulları zayıflatmış ve yeni bir gamma halka tanımı vermiştir (Barnes, 1966). Barnes'in bu çalışmasından sonra gamma halka üzerinde yapılan çalışmalar hız kazanarak bir çok matematikçi bu kavramın yapısı üzerinde sonuçlar elde etmiştir. Kyuno, gamma halkalarla ilgili bilgileri topladığı kitabında, literatürde yer alan gamma halka tanımlarını bir araya getirerek Nobusawa ve Barnes gamma halkalar ile zayıf Nobusawa ve kuvvetli Nobusawa gamma halka kavramlarını vermiştir (Kyuno, 1991).

Sağ ve sol idealleri üzerinde azalan zincir şartını sağlayan basit bir $M$, $\Gamma$-halkası için $M$ ve $\Gamma$ bir bölümlü halka üzerinde sırasıyla $n \times m$ ve $m \times n$ tipinden toplamsal matris gruplarına eşit olduğunu göstermiştir (Nobusawa, 1964). Barnes, gamma halkalarda asal ideali ve $m$-sistemi tanımlamış ve $M$, $\Gamma$-halkasının bir $A$ idealinin asal radikalinin $M$ nin $A$ yı kapsayan tüm asal ideallerinin arakesiti olduğunu ispatlamıştır (Barnes, 1966). Kyuno, gamma halkalarda asal ve yarı asal idealler üzerine çalışarak bazı sonuçlar elde etmiştir (Kyuno, 1978).

Gamma halkaların yarı asallık kaynağı üzerine literatürde çalışma bulunmamaktadır. Fakat farklı cebirsel yapı üzerinde yapılan çalışmalar vardır. İlk olarak, halkada yarı asallık kaynağı 2017 yılında Camcı tarafından doktara tezinde tanımlanmıştır (Camcı, 2017). Daha sonra Aydın, Demir ve Camcı bu tezdeki sonuçları genişleterek halkalarda yarı asallığın kaynağı ile ilgili olarak literatüre katkıda bulunmuşlardır (Aydın vd., 2018). Sonraki yıllarda yarı asallığın kaynağı kavramı yarıgruplar için çalışılmış ve bu yapıda bazı özelliklerin sağlandığı gösterilmiştir (Mekera, 2022). Bu çalışmada yarı asallığın kaynağı kavramı ile ilgili çalışmalar incelenmiş ve gamma halkalarda benzer özellikler araştırılmıştır. Bu amaçla, gamma halkalarda yarı asallığın kaynağı tanımlanmış ve bu tanım yardımıyla gamma halka teorisindeki indirgenmiş gamma halka, gamma bölge ve bölümlü gamma halka kavramlarının genellemesi olan yeni başka tanımlar verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, verilen yeni tanımlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

# 2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez oluşturulurken kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca literatürde yer almayan ancak bu çalışma içinde kullanılacak bazı temel özellikler de bu bölümde kanıtlanmıştır.

**Tanım 2.1.** (Kyuno, 1991) $M$ ile $\Gamma$ birer toplamsal değişmeli grup olsun. Buna göre $(x,\alpha,y) \mapsto x\alpha y$ olarak tanımlanan $M \times \Gamma \times M \to M$ fonksiyonu her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

(**i**) $(x+y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z, \quad x(\alpha+\beta)z = x\alpha z + x\beta z, \quad x\alpha(y+z) = x\alpha y + x\alpha z$
(**ii**) $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$

oluyorsa $M$ ye **Barnes $\Gamma$-halka** denir. Ayrıca, $M$ bir $\Gamma$-halka olmak üzere $(\alpha,x,\beta) \mapsto \alpha x\beta$ olarak tanımlanan $\Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$ fonksiyonu her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

(**iii**) $(x\alpha y)\beta z = x(\alpha y\beta)z$

olursa $M$ **ye zayıf Nobusawa $\Gamma$-halka** denir. Ayrıca,

(**iv**) Herhangi bir $\sigma \in \Gamma$ verildiğinde her $x,y \in M$ için $x\sigma y = 0$ olduğunda $\sigma = 0$

koşulu da sağlanıyorsa $M$ zayıf Nobusawa $\Gamma$-halkasına **Nobusawa $\Gamma$-halka** denir. Üstelik,

(**v**) Herhangi bir $m \in M$ verildiğinde her $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $\alpha m\beta = 0$ olduğunda $m = 0$

koşulu da sağlanırsa $M$ Nobusawa $\Gamma$-halkasına **güçlü Nobusawa $\Gamma$-halka** denir.

Tez boyunca aksinden belirtilmedikçe gamma halka kavramı kullanıldığında Barnes gamma halkası anlaşılacaktır.

**Örnek 2.2.** $U$ ile $V$, $F$ cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. Eğer,

$$M = L(U,V) = \{f \mid f : U \to V \text{ lineer dönüşüm}\}$$

ve

$$\Gamma = L(V,U) = \{f \mid f : V \to U \text{ lineer dönüşüm}\}$$

ise bu durumda $M$ Nobusawa anlamında $\Gamma$-halkadır.

**Örnek 2.3.** $R$ bir halka, $I$ kümesi $R$ nin bir ideali, $R_n$ kümesi $R$ üzerinde tüm $n \times n$ matrislerin kümesi ve $R_1$ de birimli bir halka olsun. Bu durumda,

**(i)** $\mathbb{Z}$ tamsayıların toplamsal grubu olmak üzere $R$ Barnes anlamında $\mathbb{Z}$-halka olur.

**(ii)** $R_n$ Barnes anlamında $R$-halka olur.

**(iii)** $I$ Barnes anlamında $R$-halka olur.

**(iv)** $R_1$ Nobusawa anlamında $R_1$-halka olur.

**Örnek 2.4.** $R$ herhangi bir halka ve $\mathbb{Z}$ tamsayıların toplamsal grubu olsun. $R' = R \times \mathbb{Z}$ kümesi,

$$(r,n)+(s,m) = (r+s, n+m) \qquad \text{ve} \qquad (r,n).(s,m) = (rs+mr+ns, nm)$$

ikili işlemleri ile bir halka olur. Buna göre, $R'$ Nobusawa anlamında $R$-halkadır.

**Tanım 2.5.** (Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun ve $M$ nin bir toplamsal $A$ alt grubu verilsin.

(**i**) Her $a \in A$, $\beta \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $m\beta a \in A$ ise $A$ ya $M$ $\Gamma$-halkasının bir **sol ideali** denir.

(**ii**) Her $a \in A$, $\beta \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $a\beta m \in A$ ise $A$ ya $M$ $\Gamma$-halkasının bir **sağ ideali** denir.

(**iii**) $A$, $M$ $\Gamma$-halkasının sağ ve sol ideali ise bu durumda $A$ ya $M$ $\Gamma$-halkasının **iki yanlı ideali** (veya kısaca **ideali**) denir ve $U \trianglelefteq M$ ile gösterilir.

**Tanım 2.6.** $U$ ile $V$, bir $M$ $\Gamma$ halkasının sol (sağ veya iki yanlı) idealleri ise $U+V = \{u+v \mid u \in U, v \in V\}$ kümesi de $M$ nin sol (sağ veya iki yanlı) idealidir. Bu ideale $U$ ile $V$ **ideallerinin toplamı** denir. Ayrıca $U$, $M$ nin bir sağ ideali; $V$ , $M$ nin bir sol ideali ve $S$ de $M$ nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere,

$$S\Gamma U = \left\{ \sum_{k=1}^{n} s_k \alpha_k u_k \mid s_k \in S,\ \alpha_k \in \Gamma,\ u_k \in U,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi $M$ nin bir sağ ideali; $V\Gamma S$, $M$ nin bir sol ideali ve $V\Gamma U$ da $M$ nin bir ideali olur. $M$ nin sonlu (veya sonsuz) sayıda sol (sağ veya iki yanlı) ideallerinin arakesiti de $M$ nin bir sol (sağ veya iki yanlı) idealidir.

**Tanım 2.7.** $M$ bir $\Gamma$-halka olmak üzere $a \in M$ olsun. $M$ nin $a$ elemanın içeren bütün ideallerinin arakesitine $M$ nin $a$ tarafından üretilen **esas ideali** denir ve bu ideal $(a)$ ile gösterilir.

**Önerme 2.8.** *(Barnes, 1966)M bir $\Gamma$-halka ve $a \in M$ olsun. Bu durumda,*

$$(a) = \{ \sum_{sonlu} na + x\alpha a + a\beta y + u\gamma a\delta v \mid x,y,u,v \in M,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Gamma,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

*olur.*

**Tanım 2.9.** $S$ bir yarıgrup ve $I$, onun boştan farklı bir alt kümesi olsun. $IS \subseteq I$ ise $I$ ya $S$ yarıgrubunun **sağ ideali**, $SI \subseteq I$ ise $I$ ya $S$ yarıgrubunun **sol ideali** denir. $I$ hem sol hem sağ ideal ise $I$ ya $S$ yarıgrubunun bir ideali denir.

**Tanım 2.10.** $M$ bir $\Gamma$-halka ve $A$, $M$ nin alt kümesi olsun. Buna göre her $a \in A, \alpha \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $a\alpha m \in A$ ve $m\alpha a \in A$ oluyorsa $A$ kümesine **yarı grup ideal** denir. Gerçekten de, $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ olmak üzere $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Bununla birlikte, $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi $M$ nin bir alt kümesidir. Buradan hareketle, her $a = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \in A$, $\alpha = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ ve $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ için

$$m\alpha a = \begin{bmatrix} 0 & ayd & 0 \\ 0 & ayd & 0 \end{bmatrix} \in A \quad ve \quad a\alpha m = \begin{bmatrix} 0 & ayd & 0 \\ 0 & ayd & 0 \end{bmatrix} \in A$$

bulunur. Dolayısıyla $A$ kümesi $M$ nin bir yarı grup idealidir.

**Tanım 2.11.** (Kyuno, 1991, 2.1.1 Definitions) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $P$, $M$ nin bir ideali olsun. $M$ $\Gamma$- halkasının herhangi iki $A$ ve $B$ ideali için $A\Gamma B \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa $P$ idealine **asal ideal** denir.

**Tanım 2.12.** (Kyuno, 1991, 2.1.1 Definitions) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $Q$, $M$ nin bir ideali olsun. $M$ $\Gamma$- halkasının herhangi bir $A$ ideali için $A\Gamma A \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ oluyorsa $Q$ idealine **yarı-asal ideal** denir.

**Önerme 2.13.** *(Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $P$, $M$ nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.*

(**i**) $P$ asal idealdir.
(**ii**) $a, b \in M$ için $a\Gamma M\Gamma b \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olur.
(**iii**) $I$ ve $J$ , $M$ $\Gamma$- halkasının sağ idealleri için $I\Gamma J \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olur .
(**iv**) $U$ ve $V$ , $M$ $\Gamma$- halkasının sol idealleri için $U\Gamma V \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ olur.

**Teorem 2.14.** *(Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.*

(**i**) $M$ yarı asal $\Gamma$-halkadır.
(**ii**) $a \in M$ ve $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ iken $a = 0$ .
(**iii**) $(a)$, $M$ $\Gamma$-halkasının bir esas ideali olmak üzere $(a)\Gamma(a) = (0)$ iken $a = 0$ olur.

(**iv**) $U$, $M$ $\Gamma$- halkasının sağ ideali için $U\Gamma U = (0)$ iken $U = (0)$ olur.

(**v**) $V$, $M$ $\Gamma$- halkasının sol ideali için $V\Gamma V = (0)$ iken $V = (0)$ olur.

(**vi**) $P(M)$, $M$ $\Gamma$-halkasının asal radikali sıfırdır.

(**vii**) $M$ sıfırdan farklı güçlü nilpotent idealler içerir.

(**viii**) $M$ nin bütün güçlü nilpotent ideallerinin toplamı $S(M)$ sıfırdır.

**Tanım 2.15.** (Kyuno, 1978) Bir $M$ $\Gamma$-halkasının sıfır ideali asal ideal ise $M$ ye **asal** $\Gamma$-halka denir. Benzer şekilde $M$ $\Gamma$-halkasının sıfır ideali yarı asal ideal ise $M$ ye **yarı asal** $\Gamma$-halka denir.

**Sonuç 2.16.** (Kyuno, 1991, 2.1.7 Corollary) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. Eğer $a, b \in M$ için $a\Gamma M\Gamma b = (0)$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa $M$ ye **asal** $\Gamma$-halka denir. Benzer şekilde $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ iken $a = 0$ oluyorsa $M$ ye **yarı asal** $\Gamma$-halka denir.

**Tanım 2.17.** (Kyuno, 1991, p. 3.1.1) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $S$, $M$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer $S \neq \emptyset$ veya $a, b \in S$ için $(a)\Gamma(b) \cap S \neq \emptyset$ ise $S$ alt kümesine **m-sistem** denir.

**Tanım 2.18.** (Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. $M$ $\Gamma$-halkasının **asal radikali,**

$$\{m \in M \mid m \in S \ \ olacak \ şekilde \ \ her \ \ S \ \ m-sistemi \ \ 0 \ \ elemanını \ \ içerir\}$$

kümesi olarak tanımlanır ve $P(M)$ ile gösterilir.

**Sonuç 2.19.** (Kyuno, 1991) Eğer $P$ asal ideal ise o zaman bir minimal asal ideal $P$ tarafından kapsanır.

**Teorem 2.20.** *(Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. $M$ nin asal radikali $P(M)$, $M$ $\Gamma$-halkasının minimal asal ideallerinin kesişimidir.*

**Teorem 2.21.** *(Kyuno, 1991, 3.1.7 Theorem) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. $M$ nin asal radikali $P(M)$, $M$ $\Gamma$-halkasının bütün asal ideallerinin kesişimidir.*

**Teorem 2.22.** *(Kyuno, 1975)$M$ bir $\Gamma$-halka olsun. $M$ nin asal radikali $P(M)$, $M$ $\Gamma$-halkasının bütün yarı asal ideallerini içeren bir yarı asal idealdir.*

**Tanım 2.23.** (Luh, 1969) $M_1$, $\Gamma_1$-halka ve $M_2$, $\Gamma_2$-halka olsun. Buna göre,

(**i**) $f$, $M_1$ den $M_2$ ye bir grup homomorfizması

(**ii**) $\phi$, $\Gamma_1$ den $\Gamma_2$ ye bir grup homomorfizması (**iii**) Her $x, y \in M_1$ ve $\alpha \in \Gamma_1$ için $f(x\alpha y) = f(x)\phi(\alpha)f(b)$

özelliklerini sağlayan $(\phi, f)$ sıralı ikilisine **$\Gamma$-homomorfizma** denir.

**Önerme 2.24.** $(\phi, f)$ sıralı ikilisi $(\Gamma_1, M_1)_B$ halkasından $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkasına bir $\Gamma$-homomorfizma olsun. O zaman $(\phi(\Gamma_1), f(M_1))_B$ *bir gamma halkadır.*

**İspat.** $(\phi, f)$ sıralı ikilisi $(\Gamma_1, M_1)_B$ halkasından $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkasına bir $\Gamma$-homomorfizma olsun. Buna göre $f(M_1)\times\phi(\Gamma)\times f(M_1)\longrightarrow f(M_1)$, $(f(a), \phi(\alpha), f(b)) \mapsto f(a)\phi(\alpha)f(b)$ ile tanımlanan işlem kapalıdır. Her $a, b, c \in M_1$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma_1$ için $f$ grup homomorfizması ve $(\Gamma_1, M_1)_B$ halka olduğundan

$$[f(a)+f(b)]\,\phi(\alpha)f(c) = f(a+b)\phi(\alpha)f(c) = f((a+b)\alpha c) = f(a)\phi(\alpha)f(c)+f(b)\phi(\alpha)f(c)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde,

$$f(a)\,[\phi(\alpha)+\phi(\beta)]\,f(b) = f(a)\phi(\alpha)f(b)+f(a)\phi(\beta)f(b)$$

ve

$$f(a)\phi(\alpha)\,[f(b)+f(c)] = f(a)\phi(\alpha)f(b)+f(a)\phi(\alpha)f(c)$$

eşitliklikleri sağlanır. Dolayısıyla Tanım 2.23 ile (i) şıkkı ispatlanmış olur. Bununla birlikte, Tanım 2.23 (ii) şıkkı gereği $(f(a)\phi(\alpha)f(b))\,\phi(\beta)f(c) = f(a)\phi(\alpha)\,(f(b)\phi(\beta)f(c))$ eşitliği sağlandığından $(\phi(\Gamma_1), f(M_1))_B$ gamma halka olur.

**Tanım 2.25.** (Rahman ve Paul, 2014) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $x \in M$ olsun. Eğer $2x = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa $M$ $\Gamma$-halkasına **$2-$ torsion free** denir.

**Tanım 2.26.** $M$ bir $\Gamma$-halka olmak üzere her $x \in M$ elemanı için $nx = 0_M$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif $n$ tamsayısına $M$ nin karakteristiği denir ve $charM = n$ ile gösterilir.

**Tanım 2.27.** (Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-*halka* olsun. Her $x \in M$ için,

$$x\delta e = e\delta x = x$$

olacak şekilde $\delta \in \Gamma$ ve $e \in M$ varsa $(\delta, e)$ çiftine $M$, $\Gamma$-halkasının **güçlü birimi** denir. Gamma halkalarda birim eleman tek olmayabilir. Gerçekten de, $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ bir $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ halka olmak üzere

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{ve} \quad \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

çiftleri birer güçlü birimdir.

**Tanım 2.28.** (Kyuno, 1991) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. Eğer her $a,b \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b = b\gamma a$ eşitliği sağlanıyorsa $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası **değişmelidir** denir.

**Tanım 2.29.** (Luh, 1969) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $a \in M$ olsun. Buna göre $(a\Gamma)^n a = (0)$ olacak şekilde öyle bir $n$ pozitif tamsayısı varsa $a$ elemanına $M$ $\Gamma$-halkasının bir **güçlü nilpotent elemanı** denir.

**Tanım 2.30.** (Selvaraj ve Petchimuthu, 2008) $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. Eğer $M$ $\Gamma$-halkası sıfırdan farklı güçlü nilpotent eleman içermiyorsa $M$ $\Gamma$-halkasına **indirgenmiş gamma halka** denir.

**Tanım 2.31.** (Rao ve Venkateswarlu, 2018) $M$ bir $\Gamma$-halka ve $a \neq 0$ olsun.

(**i**) Eğer $s\alpha a = 0$ olacak şekilde öyle bir sıfırdan farklı $s \in M$ , $\alpha \in \Gamma$ varsa $a$ elemanına **sağ sıfır bölen** denir.
(**ii**) Eğer $a\beta t = 0$ olacak şekilde öyle bir sıfırdan farklı $t \in M$ , $\beta \in \Gamma$ varsa $a$ elemanına **sol sıfır bölen** denir.
(**iii**) Eğer bir $a \in M$ elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise $a$ elemanına **sıfır bölen** denir.

Gerçekten de, $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ olmak üzere $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Buradan hareketle, $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ ve $\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ alınırsa $m\beta n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

**Tanım 2.32.** $M$ bir $\Gamma$-halka olsun. Eğer $M$ $\Gamma$-halkası sıfır bölen eleman içermiyorsa gamma halkasına **gamma bölge** denir. Eğer $M$ gamma bölgesi birimli ve değişmeli ise bu durumda $M$ ye **gamma tamlık bölgesi** denir.

**Tanım 2.33.** (Kyuno, 1991) Bir $M$ bir $\Gamma$-halkası $(\delta, e)$ güçlü birime sahip olsun. Sıfırdan farklı her $a \in M$ için $a\delta b = b\delta a = e$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasına **bölümlü gamma halka** denir. Değişmeli bölümlü gamma halkasına da **gamma cisim** denir.

**Önerme 2.34.** *$M_1$ $\Gamma$-halka ve $M_2$ $\Gamma$-halka olsun. O zaman $M_1 \times M_2$, $\Gamma \times \Gamma$ bir gamma halkadır.*

**İspat.** $M_1$ $\Gamma$-halka ve $M_2$ $\Gamma$-halka olsun. $(M_1 \times M_2) \times (\Gamma \times \Gamma) \times (M_1 \times M_2) \longrightarrow (M_1 \times M_2)$, $((a,b),(\alpha,\beta),(c,d)) \mapsto (a\alpha c, b\beta d)$ ile tanımlanan işlem kapalıdır. Tanım 2.1 gereğince her

$a, c, e \in M_1$, $b, d, f \in M_2$ ve her $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \Gamma$ için,

$[(a,b)+(c,d)]\,(\alpha,\beta)(e,f) = ((a+c)\alpha e\,,\,(b+d)\beta f) = (a,b),(\alpha,\beta),(e,f)+(c,d)(\alpha,\beta)(e,f)$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde ispat adımları kullanırsa,

$$(a,b)\,[(\alpha,\beta)+(\gamma,\theta)]\,(c,d) = (a,b),(\alpha,\beta),(c,d)+(a,b)(\gamma,\theta)(c,d)$$

ve

$$(a,b)(\alpha,\beta)\,[(c,d)+(e,f)] = (a,b),(\alpha,\beta),(e,f)+(a,b)(\alpha,\beta)(e,f)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan hareketle, Tanım 2.1 (i) şıkkı eşitliği ispatlanmış olur. Son olarak, Tanım 2.1 (ii) şıkkı gereğince $((a,b)(\alpha,\beta)(c,d))\,(\gamma,\theta)(e,f) = (a,b),(\alpha,\beta),((c,d)(\gamma,\theta)(d,f))$ eşitliği ile birlikte $M_1 \times M_2$ , $\Gamma \times \Gamma$ bir gamma halka olur.

# 3. GAMMA HALKALARIN YARI ASALLIĞININ KAYNAĞI

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, gamma halkalarda yarı asallığın kaynağı tanımlanarak elde edilen özellikler verilmiştir. Bununla birlikte gamma halkalarda yarı asallığının kaynağı ile gamma halkadaki ideal, asal radikal ve homomorfizma kavramları arasındaki ilişkiler incelenerek elde edilen çalışmalar verilmiştir. İkinci kısımda ise, bu tanım yardımıyla gamma halka teorisindeki indirgenmiş gamma halka, gamma bölge ve bölümlü gamma halka kavramlarının birer genellemesi olan $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka, $|S_M|$-gamma bölge ve $|S_M|$-bölümlü gamma halka tanımları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, verilen yeni tanımlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunlara ek olarak, gamma halkalarda yarı asallığının kaynağı ile gamma halkanın karakteristiği arasındaki ilişki incelenerek elde edilen çalışmalar verilmiştir.

## 3.1. Yarı Asallığın Kaynağı Kümesinin Tanımı ve Temel Özellikleri

**Tanım 3.1.** $M$ bir $\Gamma$-halka ve $A$, $M$ kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre,

$$S_M(A) = \{a \in M \mid a\Gamma A\Gamma a = (0)\}$$

kümesine $M$ $\Gamma$-halkasının $A$ alt kümesinin yarı asallığının kaynağı denir. Eğer $A = M$ ise $S_M(M) = \{a \in M \mid a\Gamma M\Gamma a = (0)\}$ olup bu kümeye $M$ $\Gamma$-halkasının yarı asallığının kaynağı denir ve kısaca $S_M$ ile gösterilir.

Tanım 3.1 göz önüne alınırsa $S_M$ kümesi her zaman boş kümeden farklıdır. Çünkü, $M$ nin sıfır elemanı açıkça $S_M$ kümesindedir.

**Lemma 3.2.** *$M$ bir $\Gamma$-halka olsun.*

*(i) $S_M = (0)$ ise $M$ yarı asal $\Gamma$-halka olur.*

*(ii) $S_M = M$ ise her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $a\alpha b\beta c + c\alpha b\beta a = 0$ olur.*

**İspat.** $(i)$ $M$ bir $\Gamma$-halka ve $S_M = (0)$ olsun. Buna göre her $a \in M$ için $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ olması ancak $a = 0$ iken mümkündür. $M$ yarı asal $\Gamma$-halka olur.

$(ii)$ $M$ bir $\Gamma$-halka ve $S_M = M$ olsun. Bu durumda her $a,b \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $a\alpha b\beta a = 0$ yazılır. Bununla birlikte $a$ elemanı yerine $(a+c)$ yazılırsa $(a+c)\alpha b\beta(a+c) = 0$ elde edilir.

$M$ bir $\Gamma$-halka olduğundan

$$a\alpha b\beta a + a\alpha b\beta c + c\alpha b\beta a + c\alpha b\beta c = 0$$

bulunur. Buradan hareketle Tanım 3.1 gereği

$$a\alpha b\beta c + c\alpha b\beta a = 0 \tag{3.1.1}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.2 nin (ii) şıkkında yer alan ifadenin karşıtı, $M$ $\Gamma$-halkası 2-torsion free olduğunda geçerlidir. Gerçekten de, her $a,b \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $a\alpha b\beta a + a\alpha b\beta a = 0$ olduğundan $2a\alpha b\beta a = 0$ elde edilir. Buna göre hipotez gereği $M$ $\Gamma$-halkası 2-torsion free olduğundan $a\alpha b\beta a = 0$ bulunur. Dolayısıyla $a \in S_M$ olur. Böylece $M \subseteq S_M$ dir. Bununla birlikte $S_M \subseteq M$ olduğundan $S_M = M$ eşitliği elde edilir. Bununla birlikte, 2-torsion free olma koşulu kaldırılamazdır. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.3.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} 2\bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} : \bar{a},\bar{b} \in \mathbb{Z}_{18} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 3\bar{x} \end{bmatrix} : \bar{x} \in \mathbb{Z}_{18} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Herhangi $m = \begin{bmatrix} 2\bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}$, $n = \begin{bmatrix} 2\bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 2\bar{e} & \bar{f} \end{bmatrix} \in M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 3\bar{x} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 3\bar{y} \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha n\beta p + p\alpha n\beta m = 0$ elde edilir. Yarı asallığının kaynağı incelenirse

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix} 2\bar{a} & \bar{0} \end{bmatrix} : \bar{a} \in \mathbb{Z}_{18} \right\}$$

bulunur. Herhangi bir $x = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{9} \end{bmatrix} \in M$ için $2x = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ olduğundan 2-torsion free değildir. O halde 2-torsion free olma şartı kaldırılamazdır. Aksi halde bu örnekte olduğu gibi $S_M \neq M$ olur.

**Lemma 3.4.** *Bir $M$ $\Gamma$-halkasının yarı asallığının kaynağı, nilpotentlik indeksi en fazla 3 olan bir kümedir.*

**İspat.** $M$ bir $\Gamma$-halka ve $a \in S_M$ olsun. Bu durumda $a \in M$ için $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ olur. Dolayısıyla $a\Gamma a\Gamma a = (0)$ bulunur. Buradan hareketle $(a\Gamma)^2 a = (0)$ olacağından $M$ $\Gamma$-halkasının yarı asallığının kaynağının nilpotentlik indeksi en fazla 3 olur.

**Lemma 3.5.** *$M$ bir $\Gamma$-halka ve $A$, $M$ nin sıfırdan farklı alt halkası ise $S_M(A) \cap A = S_A$ eşitliği sağlanır.*

**İspat.** $M$ bir $\Gamma$-halka ve herhangi bir $a \in S_M(A) \cap A$ olsun. O halde $a \in S_M(A)$ ve $a \in A$ olur. Buradan $a\Gamma A\Gamma a = (0)$ aynı zamanda $a \in A$ olduğundan dolayısıyla $a \in S_A$ elde edilir. Tersine, $a \in S_A$ olsun. O zaman $a \in A$ için $a\Gamma A\Gamma a = (0)$ dir. $A$, $M$ nin alt kümesi olduğundan $a \in M$ olur. Buradan hareketle $a\Gamma A\Gamma a = (0)$ ve $a \in M$ olduğundan $a \in S_M(A)$ dir. Bununla birlikte $a \in A$ ise $a \in S_M(A) \cap A$ bulunur. Dolayısıyla eşitlik sağlanır.

**Önerme 3.6.** *$M$ bir $\Gamma$-halka ve $A$ ile $B$ onun boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda $A$ kümesi $B$ kümesinin altkümesi ise $S_M(B) \subseteq S_M(A)$ olur.*

**İspat.** $A$ kümesi $B$ kümesinin alt kümesi ve $b \in S_M(B)$ olsun. O zaman $b\Gamma A\Gamma b \subseteq b\Gamma B\Gamma b = (0)$ elde edilir. Buradan hareketle $b\Gamma A\Gamma b = (0)$ yazılır. Dolayısıyla $b \in S_M(A)$ bulunur ve $S_M(B) \subseteq S_M(A)$ olur.

**Önerme 3.7.** *$M_1$ bir $\Gamma$-halka ve $M_2$ bir $\Gamma$-halka olsun. O zaman $M_1 \times M_2$ bir $\Gamma \times \Gamma$ halka olduğu Önerme 2.24 de ispatlanmıştır. Bu bilgiler ışığında $A$, $M_1$ kümesinin alt kümesi ve $B$, $M_2$ kümesinin alt kümesi olmak üzere $S_{M_1 \times M_2}(A \times B) = S_{M_1}(A) \times S_{M_2}(B)$ eşitliği sağlanır.*

**İspat.** $(\Gamma, M_1)_B$, $(\Gamma, M_2)_B$ bir gamma halka ve $(a,b) \in S_{M_1 \times M_2}(A \times B)$ olsun. Tanım 3.1 gereğince $(a,b) \in M_1 \times M_2$ için

$$(a,b)(\Gamma \times \Gamma)(A \times B)(\Gamma \times \Gamma)(a,b) = (0,0)$$

olur. Buna göre her $(x,y) \in A \times B$ ve $(\alpha,\beta),(\gamma,\theta) \in (\Gamma \times \Gamma)$ için

$$(a,b)(\alpha,\beta)(x,y)(\gamma,\theta)(a,b) = (0,0)$$

yazılır. Buradan hareketle, ilk olarak $(a\alpha x, b\beta y)(\gamma,\theta)(a,b) = (0,0)$ denklemi daha sonrasında ise tekrar üçlü çarpım yapıldığında $(a\alpha x\gamma a, b\beta y\theta b) = (0,0)$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla her $x \in A, y \in B, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \Gamma$ ve $a \in M_1, b \in M_2$ için

$$a\alpha x\gamma a = 0 \quad ve \quad b\beta y\theta b = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer $a \in M_1$ ve $a\Gamma A\Gamma a = (0)$ ise $a \in S_{M_1}(A)$ olur. Benzer şekilde, $b \in M_2$ ve $b\Gamma B\Gamma b = (0)$ olduğundan $b \in S_{M_2}(B)$ olur. Bununla birlikte, $(a,b) \in S_{M_1}(A) \times S_{M_2}(B)$ elde edilir. Tersine, benzer ispat adımları ile çift yönlü kapsama sağlandığından $S_{M_1 \times M_2}(A \times B) = S_{M_1}(A) \times S_{M_2}(B)$ eşitliği sağlanır.

**Önerme 3.8.** *$M$ bir $\Gamma$- halka ve $I$, $M$ nin bir ideali olsun. Buna göre,*

*(i) $S_M(I)$, $M$ nin yarı grup idealidir. Özel olarak, $S_M(I)$ kümesi çarpma işlemi altında kapalıdır.*
*(ii) $S_M(I)\Gamma S_M(I) = (0)$ ise $S_M(I)$, $M$ nin bir ideali olur.*

**İspat.** $(i)$ Tanım 2.19 gereği her $m \in S_M(I)$, $\alpha \in \Gamma$ ve $x \in M$ için $x\alpha m \in S_M(I)$ ve $m\alpha x \in S_M(I)$ olduğu gösterilmelidir. Buradan hareketle, $m \in S_M(I)$, $\alpha \in \Gamma$ ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $m\Gamma I\Gamma m = (0)$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. O halde

$$(x\alpha m)\Gamma I\Gamma(x\alpha m) = (x\alpha m)\Gamma(I\Gamma x)\alpha m \subseteq x\alpha m\Gamma I\alpha m = (0)$$

yazılır. Dolayısıyla $x\alpha m \in S_M(I)$ elde edilir. Benzer şekilde $(m\alpha x)\Gamma I\Gamma(m\alpha x) = m\alpha(x\Gamma I)\Gamma(m\alpha x) \subseteq m\alpha I\Gamma m\alpha x = (0)$ sağlandığından $m\alpha x \in S_M(I)$ elde edilir. Böylece $S_M(I)$, $M$ nin yarı grup ideali olur. Bununla birlikte $S_M(I)$ kümesinin çarpma işlemi altında kapalı olduğu açıkca görülmektedir.

$(ii)$ Varsayalım ki, $S_M(I)\Gamma S_M(I) = (0)$ olsun. $S_M(I)$ kümesinin $M$ nin ideali olabilmesi için $S_M(I)$ yarı grup idealinin toplama işlemi altında kapalı olması gerekir. Buradan hareketle her $x, y \in S_M(I)$ için $(x+y) \in S_M(I)$ olup olmadığı incelenirse,

$$(x+y)\Gamma I\Gamma(x+y) = x\Gamma I\Gamma x + x\Gamma I\Gamma y + y\Gamma I\Gamma x + y\Gamma I\Gamma y$$

eşitliği yazılır. Bu durumda hipotez gereği $x, y \in S_M(I)$ olduğundan

$$x\Gamma I\Gamma x + x\Gamma I\Gamma y + y\Gamma I\Gamma x + y\Gamma I\Gamma y = x\Gamma I\Gamma y + y\Gamma I\Gamma x$$

elde edilir. Bununla birlikte $S_M(I)$ yarı grup ideal dolayısıyla $I\Gamma x \subseteq S_M(I)$ ve $x\Gamma I \subseteq S_M(I)$ olduğundan ve hipotez gereği

$$(x+y)\Gamma I\Gamma(x+y) = (0)$$

bulunur. Böylece $S_M(I)$ yarı grup ideali toplama işlemi altında kapalı olduğundan $M$ nin ideali olur.

**Önerme 3.9.** *$M$ bir $\Gamma$- halka ve $Q$, $M$ nin yarı asal ideali olsun. O zaman $S_M \subseteq Q$ dir. Sonuç olarak,$\{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ailesi ise $S_M \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ olur. Özel olarak, $S_M \subseteq P(M)$ dir.*

**İspat.** $Q$, $M$ nin yarı asal ideali ve $a \in S_M$ olsun. Buna göre $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ olacak şekilde $a \in M$ vardır. Buradan hareketle $a\Gamma M\Gamma a = (0) \subseteq Q$ yazılır. Bununla birlikte $Q$, yarı asal ideal olduğundan $a \in Q$ elde edilir. Dolayısıyla $S_M \subseteq Q$ olur. Sonuç olarak, $S_M \subseteq Q_1$, $S_M \subseteq$

$Q_2, \ldots, S_M \subseteq Q_\lambda$ olduğundan $S_M \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ elde edilir. Özel olarak, $P(M)$ asal radikali Teorem 2.22 gereği $M$ $\Gamma$-halkasının bütün yarı asal ideallerini içeren bir yarı asal ideal olduğundan $S_M \subseteq P(M)$ kapsaması sağlanır.

**Önerme 3.10.** $(\phi, f)$ sıralı ikilisi $(\Gamma_1, M_1)_B$ halkasından $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkasına bir $\Gamma$-homomorfizması olsun. *O zaman $f(S_{M_1}) \subseteq S_{f(M_1)}$ dir. Bununla birlikte $f$ birebir ise eşitlik sağlanır.*

**İspat.** $(\phi, f)$ sıralı ikilisi $(\Gamma_1, M_1)_B$ halkasından $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkasına bir $\Gamma$-homomorfizması olsun. Önerme 2.24 e göre $(\phi(\Gamma_1), f(M_1))_B$ bir gamma halka olduğundan

$$S_{f(M_1)} = \{f(a) \in f(M_1) \mid f(a)\phi(\Gamma_1)f(M_1)\phi(\Gamma_1)f(a) = (0)\}$$

kümesi yazılır. Varsayalım ki $f(a) \in f(S_{M_1})$ olsun. Buradan $a \in S_{M_1}$ olur. Dolayısıyla $a \in M_1$ için $a\Gamma_1 M_1 \Gamma_1 a = (0)$ elde edilir. Buradan hareketle $(\phi, f)$ sıralı ikilisi $\Gamma$- homomorfizma ise

$$f(a)\phi(\Gamma_1)f(M_1)\phi(\Gamma_1)f(a) = f(a\Gamma_1 M_1 \Gamma_1 a)$$

eşitliği sağlanır. Buradan $a \in S_{M_1}$ olduğundan

$$f(a)\phi(\Gamma_1)f(M_1)\phi(\Gamma_1)f(a) = f(a\Gamma_1 M_1 \Gamma_1 a) = f(0)$$

bulunur. Son olarak $f$ nin grup homomorfizması olduğu göz önüne alınırsa $f(a\Gamma_1 M_1 \Gamma_1 a) = f(0) = 0_{M_2}$ eşitliği sağlanır. Bu durumda $f(a) \in S_{f(M_1)}$ olur. Tersine, $f$ birebir ve $f(a) \in S_{f(M_1)}$ olsun. Buna göre $S_{f(M_1)}$ kümesinin tanımı gereği $f(a)\phi(\Gamma_1)f(M_1)\phi(\Gamma_1)f(a) = (0)$ olacak şekilde $f(a) \in f(M_1)$ vardır. Benzer şekilde Tanım 2.31 gereği $\Gamma$- homomofizma olduğu kullanılırsa $f(a)\phi(\Gamma_1)f(M_1)\phi(\Gamma_1)f(a) = f(a\Gamma_1 M_1 \Gamma_1 a) = f(0)$ yazılır. Son olarak, $f$ nin birebir olması nedeniyle $a\Gamma_1 M_1 \Gamma_1 a = (0)$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in S_{M_1}$ olur. Böylece diğer yönden de kapsama sağlandığından eşitlik elde edilir.

**Lemma 3.11.** *$M$ bir $\Gamma$- halka ve $a \in S_M$ olsun. Eğer $a\Gamma M \neq (0) \neq M\Gamma a$ ise $a$ sıfır bölendir. Sonuç olarak, $M$ 'nin sıfır bölen olmayan elemanları $M - S_M$ kümesi tarafından kapsanır.*

**İspat.** $M$ bir $\Gamma$- halka ve $a \in S_M$ için $a\Gamma M \neq (0) \neq M\Gamma a$ olsun. Buradan hareketle $a\alpha b \neq 0 \neq c\gamma a$ olacak şekilde $a, b, c \in M$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ vardır. Buna ek olarak $a \in S_M$ olduğundan $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ olacak şekilde $a \in M$ vardır. Bu eşitlikten yararlanarak

$$a\alpha b\alpha a = 0 \quad ve \quad a\gamma c\gamma a = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla $a\alpha b\alpha a = 0$ ve $a\alpha b \neq 0$ olduğundan $a$ sağ sıfır bölen olur. Benzer şekilde, $a\gamma c\gamma a = 0$ ve $c\gamma a \neq 0$ olduğundan $a$ sol sıfır bölen olur. Bununla birlikte $a$ sıfır bölendir.

$M$ de sıfır bölen olmayan bir $b$ elemanı alınsın. O halde $b\Gamma M \neq (0) \neq M\Gamma b$ dir. Aksi halde her $m \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $b\alpha m = 0$ olurdu. Bu durumda $b$ sıfır bölen olduğundan çelişki elde edilirdi. Buradan hareketle $b \in M - S_M$ elde edlir. Çünkü $b \in S_M$ ise $b\Gamma M\Gamma b = (0)$ olacak şekilde $b \in M$ vardır. Dolayısıyla $c \in M$ ve $\alpha \in \mathit{\Gamma}$ için düzenlenirse $b\alpha c\alpha b = 0$ eşitliği yazılır. Fakat $b\Gamma M \neq (0) \neq M\Gamma b$ idi. Dolayısıyla $b$ sağ sıfır bölen olurdu. Benzer şekilde $d \in M$ için $b\gamma d\gamma b = 0$ olduğundan $b$ sol sıfır bölen olur. Bununla birlikte, $b$ sıfır bölen olurdu. Böylece çelişki elde edildiğinden $b \in M - S_M$ olmalıdır.

## 3.2. $|S_M|$-İndirgenmiş Gamma Halka, $|S_M|$-Gamma Bölge ve $|S_M|$-Bölümlü Gamma Halka

**Tanım 3.12.** $M$ bir $\Gamma$- halka ve $S_M \neq M$ olsun.

(i) $M - S_M$ kümesinin sıfırdan farklı güçlü nilpotent elemanı yoksa $M$ ye **$|S_M|$-indirgenmiş gamma halka** denir.

(ii) $M - S_M$ kümesi ne sağ ne de sol sıfır bölen içermiyorsa $M$ ye **$|S_M|$-gamma bölge** denir.

(iii) Güçlü birimli ve değişmeli $M$, $|S_M|$-gamma bölgeye **$|S_M|$-gamma tamlık bölgesi** denir.

(iv) $M$ güçlü birimli ve $M - S_M$ kümesindeki her eleman tersinir ise $M$ ye **$|S_M|$-bölümlü gamma halka** denir.

(v) Değişmeli $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halkaya **$|S_M|$-gamma cisim** denir.

Tanım 3.12 de $S_M \neq M$ alınmasının gerekliliği aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

**Örnek 3.13.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{0} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{b} & \bar{0} \end{bmatrix} : \bar{a}, \bar{b} \in 4\mathbb{Z}_{16} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{0} \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z}_{16} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse $S_M = M$ elde edilir. Buna göre Tanım 3.12 de belirtilen $S_M \neq M$ olma koşulu kaldırılırsa bu tanımda verilen kavramlar anlamsız olur.

**Örnek 3.14.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse,

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

dir. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z}\, ve\, b \neq 0 \right\}$ elde edilir. Herhangi $m = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha m = \begin{bmatrix} bxa & b^2x & 0 \\ bxa & b^2x & 0 \end{bmatrix} \neq 0_M$ olduğundan $M - S_M$ kümesinde güçlü nilpotent eleman olmadığı açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olur.

**Örnek 3.15.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse,

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\}$$

olur. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z}\, ve\, a \neq 0 \right\}$ elde edilir. Herhangi $m = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix} c & 0 & d \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha n = \begin{bmatrix} axc & 0 & axd \\ axc & 0 & axd \end{bmatrix} \neq 0_M$ olduğundan $M - S_M$ de sıfır bölen eleman olmadığı açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $M$, $|S_M|$-gamma bölge olur.

**Örnek 3.16.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse, $S_M = (0)$ bulunur. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z}\, ve\, a \neq 0 \right\}$ elde edilir. Eğer $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ ve $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ alınırsa her $m = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M$ için $m\gamma e = m = e\gamma m$ eşitliği sağlanır. O halde $M$, $\Gamma$-halkası güçlü birimlidir. Herhangi $m = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha n = \begin{bmatrix} axc & axd + bxc \\ 0 & axc \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_M$ bulunur. Çünkü $M - S_M$ kümesinin tanımı gereği $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğundan her $x \in \Gamma$ elemanı için çarpımları $axc \neq 0$ olur. Dolayısıyla matrislerin çarpımı daima sıfırdan farklı olur. Buradan hareketle $M$, $|S_M|$-gamma bölge olur. Bununla birlikte her $m,n \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $m\alpha n = n\alpha m$ elde edilir. Dolayısıyla $M$ değişmeli olduğundan Tanım 3.12 gereği $M$, $|S_M|$-gamma tamlık bölgesi olur.

**Örnek 3.17.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Q} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Q} \right\}$olsun. olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse, $S_M = (0)$ elde edilir. Dolayısıyla

$M-S_M=\left\{\begin{bmatrix}0 & a & 0\\ b & 0 & b\end{bmatrix}: a,b\in\mathbb{Q},\, a\neq 0 \, veya \, b\neq 0\right\}$ olur. Eğer $e=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\in M$ ve $\gamma=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in\Gamma$ alınırsa her $m=\begin{bmatrix}0 & a & 0\\ b & 0 & b\end{bmatrix}\in M$ için $m\gamma e=m=e\gamma m$ eşitliği sağlanır. O halde $M$, $\Gamma$- halkası birimlidir. Ayrıca her $m\in M-S_M$ için $n\gamma m=e=m\gamma n$ olacak şekilde öyle bir $n=\begin{bmatrix}0 & a^{-1} & 0\\ b^{-1} & 0 & b^{-1}\end{bmatrix}\in M$ vardır. Buradan $M$ gamma $|S_M|$-bölümlü halka olur. Bununla birlikte $M$ değişmeli olduğundan $M$ , $|S_M|$ gamma cisim olur.

Örneklere ek olarak Tanım 3.12 içerisindeki tanımlamalar ile gamma halka arasındaki ilişkiler incelenerek bazı özellikler ortaya çıkmıştır. Bu özellikler bir araya getirilerek bir sonraki lemmada ifade edilmiştir.

**Lemma 3.18.** *$M$ bir $\Gamma$- halka olsun.*

*(i) Herhangi bir $M$ indirgenmiş gamma halka (bölge, bölümlü halka) aynı zamanda bir $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkadır ($|S_M|$-gamma bölge, $|S_M|$-bölümlü gamma halka).*

*(ii) $M$, $|S_M|$-gamma bölge ise $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkadır.*

*(iii) $M_1$, $|S_{M_1}|$-gamma bölge ve $M_2$, $|S_{M_2}|$-gamma bölge olsun. O zaman $M_1$ ve $M_2$ nin direkt çarpımı $M_1\times M_2$, $|S_{M_1}\times S_{M_2}|$-indirgenmiş gamma halka olur.*

*(iv) $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkasının asal radikali $P(M)$ olsun. Buna göre $P(M)$ asal radikali, $M$, $\Gamma$- halkasının her güçlü nilpotent elemanını içerir.*

**İspat.** $(i)$ $M$ indirgenmiş gamma halka ise Tanım 2.30 gereği $M$ nin güçlü nilpotent elemanı yoktur. Dolayısıyla $M$ nin herhangi bir alt kümesinde de güçlü nilpotent eleman olamaz. Buna göre Tanım 3.12 gereği $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkadır. Benzer şekilde bu durum $M$ gamma bölge ve $M$ bölümlü gamma halkası için de geçerlidir.

$(ii)$ $M$ bir $|S_M|$-gamma bölge ve $a\in M-S_M$ güçlü nilpotent bir eleman olsun. Buna göre $(a\Gamma)^n a=(0)$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Bu özellikteki pozitif tamsayılarının en küçüğü $n$ olsun. Buradan hareketle, $(a\Gamma)^n a=(a\Gamma)(a\Gamma)^{n-1}a=(0)$ eşitliği yazılır. Bununla birlikte $n$ en küçük olduğundan $(a\Gamma)^{n-1}a$ çarpımı sıfırdan farklı olmak zorundadır. Dolayısıyla $a$ sıfır bölendir. Ancak $a\in M-S_M$ ve $M$, $|S_M|$-gamma bölge olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $M-S_M$ kümesinde güçlü nilpotent eleman yoktur. O halde $M$, $|S_M|$- indirgenmiş gamma halka olur.

$(iii)$ $M_1$, $|S_{M_1}|$-gamma bölge ve $M_2$, $|S_{M_2}|$-gamma bölge olsun. Varsayalım $M_1\times M_2$, $|S_{M_1}\times S_{M_2}|$-indirgenmiş gamma halka değildir. Bu durumda $(a,b)\in(M_1\times M_2)-$

$(S_{M_1} \times S_{M_2})$ olacak şekilde güçlü nilpotent eleman vardır. O halde $(a,b) \notin S_{M_1} \times S_{M_2}$ olur. Buradan hareketle $a \notin S_{M_1}$ veya $b \notin S_{M_2}$elde edilir. Dolayısıyla $a \in M_1 - S_{M_1}$ veya $b \in M_2 - S_{M_2}$ yazılır. Hipotez ve Lemma 3.18 $(ii)$ gereği $a$ veya $b$ güçlü nilpotent eleman değildir. Buna göre $(a,b) \in (M_1 \times M_2) - (S_{M_1} \times S_{M_2})$ güçlü nilpotent eleman değildir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece, $(M_1 \times M_2) - (S_{M_1} \times S_{M_2})$ de güçlü nilpotent eleman var olamaz. Dolayısıyla $M_1 \times M_2$, $|S_{M_1} \times S_{M_2}|$-indirgenmiş gamma halka olur.

$(iv)$ $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka ve $a \in M$ güçlü nilpotent eleman olsun. Bu durumda Tanım 3.12 (i) şıkkı gereği $a \in S_M$ olur. Buna göre Önerme 3.9 gereği $a \in P(M)$ bulunur. Bu durum $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkasının her güçlü nilpotent elemanı için geçerli olduğundan $P(M)$ asal radikali $M\,\Gamma$ halkasının her güçlü nilpotent elemanını içerir.

Herhangi bir $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halkası her zaman $|S_M|$-gamma bölge olmayabilir. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.19.** $p$ herhangi bir asal sayı olmak üzere $M = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z}_p \right\}$ olsun ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak tanımlansın. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse,

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a^2xby} & \overline{a^2xby} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

yazılır. $\begin{bmatrix} \overline{a^2xby} & \overline{a^2xby} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ olması ancak $a = 0$ iken mümkün olduğundan $S_M = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ bulunur. Dolayısıyla $S_M = M - S_M$ olur. Eğer $e = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \in M$ ve $\gamma = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \Gamma$ alınırsa her $m = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} \end{bmatrix} \in M$ için $m\gamma e = m = e\gamma m$ eşitliği sağlanır. O halde $M$ $\Gamma$- halkası güçlü birimlidir. Ayrıca her $m = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} \end{bmatrix} \in M - S_M$ için $m\gamma n = e = n\gamma m$ olacak şekilde öyle bir $n = \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{b} \end{bmatrix} \in M$ vardır. Bu nedenle $M - S_M$ kümesi tersinir ve dolayısıyla $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olur. Ancak $\beta = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\beta n = \begin{bmatrix} \overline{apb} & \overline{apb} \end{bmatrix} = 0_M$ olduğundan sıfır bölen eleman bulunur. Bu durumda, $M$ bir $|S_M|$-bölümlü gamma halkadır fakat $|S_M|$-gamma bölge değildir.

Tanım 3.12 da verilen yapılar arasındaki ilişkiler incelenirken $M$, $|S_M|$- gamma cisim her zaman $|S_M|$- tamlık bölgesi olamayacağı elde edilmiştir. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.20.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Q} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Q} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse,$S_M = (0)$ elde edilir. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \; veya \; b \neq 0 \right\}$ bulunur. Eğer $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M$ ve $\gamma =$

$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \in \Gamma$ alınırsa her $m = \begin{bmatrix}a & a & 0\\0 & b & b\end{bmatrix} \in M$ için $m\gamma e = m = e\gamma m$ eşitliği sağlanır. O halde $M$, $\Gamma$- halkası birimlidir. Ayrıca her $m \in M - S_M$ için $n\gamma n = e = n\gamma m$ olacak şekilde öyle bir $p = \begin{bmatrix}a^{-1} & a^{-1} & 0\\0 & b^{-1} & b^{-1}\end{bmatrix} \in M$ vardır. Bu nedenle $M - S_M$ tersinir ve dolayısıyla $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olur. Bununla birlikte $M$ değişmeli olduğundan $M$, $|S_M|$-gamma cisim olur. Fakat $r = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & b & b\end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix}c & c & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix}x & 0\\0 & 0\\0 & x\end{bmatrix} \in \Gamma$ için $r\alpha s = 0$ elde edilir. Buradan hareketle $M - S_M$ de sıfır bölen eleman bulunur. Buradan hareketle $M$, $|S_M|$-gamma cisim fakat $|S_M|$-gamma tamlık bölgesi değildir. Halkalarda olan bu özellik gamma için her zaman sağlanmaz.

Lemma 3.18 (ii) şıkkındaki özelliğin karşıtı olarak $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkası her zaman $|S_M|$-gamma bölge olmayabilir. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.21.** $M = \left\{ \begin{bmatrix}a & 0 & b\\0 & c & 0\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & x\\x & 0\end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Buna göre Buna göre $M$ bir $\Gamma$-halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

bulunur. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix}a & 0 & b\\0 & c & 0\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\ veya\ c \neq 0 \right\}$ elde edilir. Herhangi $m = \begin{bmatrix}a & 0 & b\\0 & c & 0\end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & x\\x & 0\end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha m = \begin{bmatrix}bxa & 0 & b^2x\\0 & c^2x & 0\end{bmatrix} \neq 0$ olduğundan $M - S_M$ kümesinde güçlü nilpotent eleman olmadığı açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olur. Ancak $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\beta = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \in \Gamma$alınırsa $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ bulunur. Böylece $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olmasına rağmen $|S_M|$-gamma bölge değildir.

**Önerme 3.22.** *$M$ bir $\Gamma$-halka, $M \neq S_M$ ve $a \in M$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

*(i) $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkadır.*

*(ii) $a\Gamma a \subseteq S_M$ ise $a \in S_M$ dir.*

*(iii) Her $n \in \mathbb{Z}^+$için $(a\Gamma)^n a \subseteq S_M$ ise $a \in S_M$ dir.*

**İspat.** $(i \Rightarrow ii)$ $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka ve $a\Gamma a \subseteq S_M$ olsun. Buna göre $(a\Gamma a)\Gamma a\Gamma(a\Gamma a) = (0)$ olacak şekilde $a \in M$ vardır. Buradan hareketle $(a\Gamma)^4 a = (0)$ eşitliği yazılır. Bu durumda $a$ güçlü nilpotent eleman olur. O halde $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olduğundan $a \in S_M$ olmalıdır.

$(ii \Rightarrow iii)$ Herhangi bir $a \in M$ için $a\Gamma a \subseteq S_M$ iken $a \in S_M$ ve $(a\Gamma)^n a \subseteq S_M$ olacak şekildeki en küçük pozitif tam sayı $n$ olsun. Buna göre $n \leq 2k \leq n+1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O halde (ii) özelliği ile Önerme 3.8 göz önüne alınırsa $(a\Gamma)^{2k+1} a \subseteq S_M$ olur ve böylece $(a\Gamma)^k a \subseteq S_M$ elde edilir. Eğer $k = 1$ ise (ii) özelliğinden $a \in S_M$ bulunur. Varsayalım ki $k > 1$ dir. Bu durumda $k \leq n-k+1 < n$ olduğundan $(a\Gamma)^k a \subseteq S_M$ ifadesi $n$ nin bu özellikteki en küçük pozitif tam sayı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $n$ pozitif tam sayısı 2 den büyük olamaz. Böylece istenen sonuç elde edilmiş olur.

$(iii \Rightarrow i)$ Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a\Gamma)^n a \subseteq S_M$ olsun. $a \in M$ güçlü nilpotent eleman ise $(a\Gamma)^n a = (0)$ olacak şekilde öyle bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buna göre $0 \in S_M$ ve $(a\Gamma)^n a = (0)$ olduğundan $(a\Gamma)^n a \subseteq S_M$ olur. O halde $(iii)$ özelliğinden $(a\Gamma)^n a \subseteq S_M$ ise $a \in S_M$ elde edilir. Bu nedenle hipotez gereği her güçlü nilpotent eleman $S_M$ kümesinde olmaktadır. Bu durumda $M - S_M$ kümesinde güçlü nilpotent eleman yoktur. Dolayısıyla $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olur.

**Lemma 3.23.** *$M$ , $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka ise $S_M = \{a \in M \mid (a\Gamma)^2 a = (0)\}$ eşitliği sağlanır.*

**İspat.** $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka ve $T = \{a \in M \mid (a\Gamma)^2 a = (0)\}$ olsun. Öncelikle gösterilmesi gereken $S_M \subseteq T$ dir. Buna göre $a \in S_M$ ise $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ olacak şekilde $a \in M$ vardır. Buradan hareketle $(a\Gamma)^2 a = (0)$ elde edilir. O halde $a \in T$ dolayısıyla $S_M \subseteq T$ olduğu açıkça görülmektedir. Tersine $a \in T$ olsun. Bu durumda $(a\Gamma)^2 a = (0)$ olacak şekilde $a \in M$ vardır. Bununla birlikte $a$ güçlü nilpotent eleman ve hipotez gereği $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olduğundan $a \in S_M$ olur. Bu durumda $S_M \subseteq T$ ve $T \subseteq S_M$ ile eşitlik sağlanır.

**Önerme 3.24.** *$M$, $|S_M|$-gamma bölge ve $A$, $M$ nin sıfırdan farklı bir alt halkası olsun. O zaman $S_M(A) = S_M$ eşitliği sağlanır. Bununla birlikte $A$, $|S_A|$-gamma bölge olur.*

**İspat.** $M$, $|S_M|$-gamma bölge ve $A$, $M$ nin sıfırdan farklı alt halkası olsun. Önerme 3.6 gereği $A \subseteq M$ ise $S_M(M) \subseteq S_M(A)$ olduğu ispatlanmıştır. O halde gösterilmesi gereken $S_M(A) \subseteq S_M(M)$ dir. Buna göre varsayalım ki $m \notin S_M$ olacak şekilde $m \in S_M(A)$ olsun. Buradan hareketle $m\Gamma A\Gamma m = (0)$ elde edilir. Bununla birlikte $m \notin S_M$ ise $m \in M - S_M$ olmalıdır. O halde $M$, $|S_M|$-gamma bölge olduğundan $m$ sıfır bölen değildir. Buna göre $m$ sıfır bölen değil ve $m\Gamma A\Gamma m = (0)$ eşitliğinden $m\Gamma A = (0) = A\Gamma m$ elde edilir. O zaman $A = (0)$ olduğu açıkça görülmektedir. Fakat, hipotezde $A \neq (0)$ idi. Dolayısıyla çelişki elde edilir. Bu durumda $m \in S_M$ olur. Buradan hareketle çift yönlü kapsama olduğundan eşitlik sağlanır. Son olarak, $a \in A$ sıfır bölen eleman alınsın. Buradan hipotez gereği $A \subseteq M$ ise $a \in M$ olur. Bununla birlikte $M$, $|S_M|$-gamma bölge olduğundan $a \in S_M$ dir. O halde $S_M(A) = S_M$ eşitliğinden $a \in S_M(A)$ elde edilir. Böylece $a \in S_M(A)$ ve $a \in A$ ise $a \in S_M(A) \cap A$ olur. Lemma 3.5 gereği $a \in S_A$ elde edilir. $A$ kümesinden alınan herhangi bir sıfır bölen eleman $S_A$ kümesinde olduğundan $A$, $|S_A|$-gamma bölge olur.

$M$, $|S_M|$-gamma bölge ise $S_M(A) = S_M$ eşitliği sağlanmasına rağmen $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka için eşitlik sağlanmaz. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.25.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$- halkadır. Yarı asallığın kaynağı incelenirse,

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{Z} \right\}$$

bulunur. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z}\ a \neq 0\ veya\ b \neq 0 \right\}$ kümesi elde edilir. Herhangi $m = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha m = \begin{bmatrix} a^2x & 0 & axc \\ 0 & b^2x & 0 \end{bmatrix} \neq 0_M$ olduğundan $M - S_M$ 'de güçlü nilpotent eleman olmadığı açıkca görülmektedir. Bu nedenle $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olur. $M$' nin sıfırdan farklı $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,c \in \mathbb{Z} \right\}$ alt kümesi de bir $\Gamma$- halkadır. $A$ alt kümesinin yarı asallık kaynağı incelenirse,

$$S_M(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} : b,c \in \mathbb{Z} \right\}$$

bulunur. Buradan hareketle yukarıdaki önerme $M$, $|S_M|$- indirgenmiş gamma halkası için ele alınırsa $S_M(A) \neq S_M$ olduğu gözlemlenir.

**Önerme 3.26.** *$M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olsun. Bu durumda $M$ nin sıfırdan farklı her $A$ alt halkası $|S_A|$-indirgenmiş gamma halkadır.*

**İspat.** Varsayalım ki $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka ve $a \in A$ güçlü nilpotent eleman olsun. Buna göre $A \subseteq M$ olduğundan $a \in M$ elde edilir. Hipotez gereği $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka olması nedeniyle $a \in S_M$ olur. Önerme 3.6 gereği $A \subseteq M$ ise $S_M \subseteq S_M(A)$ dir. Buradan hareketle $a \in S_M(A)$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda $a \in A$ ve $a \in S_M(A)$

ise Lemma 3.5 gereği $a \in S_A$ elde edilir. Böylece, $A$ kümesinden alınan herhangi bir güçlü nilpotent eleman $S_A$ kümesinde olmaktadır. O halde $A$, $|S_A|$-indirgenmiş gamma halka olur.

$M$, $|S_M|$-gamma bölge ise Önerme 3.24 gereği $S_M(A) = S_M$ olmasına rağmen $S_M(A)$ kümesi $S_A$ kümesine eşit değildir. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.27.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$- halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse,

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z} \right\}$$

dir. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z}\ ve\ b \neq 0 \right\}$ kümesi elde edilir. Herhangi $m = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix} c & 0 & d \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \in M - S_M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x & x \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $m\alpha n = \begin{bmatrix} 2bxc & 0 & 2bxd \\ 2bxc & 0 & 2bxd \end{bmatrix} \neq 0_M$ olduğundan $M - S_M$ 'de sıfır bölen eleman olmadığından $M$, $|S_M|$-gamma bölge olur. $M$ nin sıfırdan farklı $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z} \right\}$ alt kümesi de bir $\Gamma$-halkadır. Önerme 3.26 gereği $S_M(A) = S_M$ eşitliği sağlanır. $A$ $\Gamma$- halkasının yarı asallığının kaynağı incelenirse,

$$S_A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

elde edilir. Buradan hareketle $A$ nın $|S_A|$-gamma bölge olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $S_M(A) = S_M$ olmasına rağmen $S_M(A) \neq S_A$ olduğu görülmektedir.

**Lemma 3.28.** *$M$, $|S_M|$-gamma bölge ise $M - S_M$ çarpımsal kümedir.*

**İspat.** $M$, $|S_M|$-gamma bölge olsun. Her $a,b \in M - S_M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \in M - S_M$ sıfır bölen eleman alınsın. Buna göre $(a\alpha b)\gamma c = 0$ olacak şekilde öyle bir sıfırdan farklı $c \in M - S_M$ ve $\gamma \in \Gamma$ vardır. $M$ bir $\Gamma$ halka olduğundan $(a\alpha b)\gamma c = a\alpha(b\gamma c) = 0$ eşitliği sağlanır. Buradan hareketle hipotez gereği $a$ sıfır bölen değil ve $a, \alpha$ sıfırdan farklı olduğundan $b\gamma c = 0$ elde edilir. Buna göre $b$ sıfır bölen olur. Benzer şekilde, $c\gamma(a\alpha b) = (c\gamma a)\alpha b = 0$ eşitliği sağlanır. Bu durumda $b$ sıfır bölen olmadığından $c\gamma a = 0$ bulunur. Dolayısıyla $a$ sıfır bölen olur. Her iki durum için de çelişki elde edilir. Çünkü hipotez gereği $a,b \in M - S_M$ ve $M$, $|S_M|$-gamma bölge olduğundan sıfır bölen değildir. Böylece $a\alpha b$ sıfır bölen değildir. Bununla birlikte Lemma 3.11 gereği $a\alpha b$ sıfır bölen değil ise $a\alpha b \in M - S_M$ olur. Bu durum gamma halkasının her elemanı için mümkün olduğundan $M - S_M$ çarpımsal kümedir.

**Teorem 3.29.** *$M$, sonlu $|S_M|$-gamma bölge ise o zaman $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olur.*

**İspat.** $M$, sonlu $|S_M|$-gamma bölge olsun. $M$ nin $|S_M|$-bölümlü gamma halka olabilmesi için $M$ güçlü birimli ve $M - S_M$ kümesindeki bütün elemanların tersinir olması gerekmektedir. İlk olarak $M$, $\Gamma$-halkasının güçlü birimli olduğunu ispatlayalım. $M$ sonlu ise $T = M - S_M$ sonlu bir küme olur. Bu durumda $T = \{a_1, a_2, , , , a_n\}$ şeklinde yazılır. Herhangi bir $a \in T$ elemanı alınsın. Lemma 3.28 gereği $T$ çarpımsal küme olur. Bununla birlikte $a$ elemanı ne sağ ne de sol sıfır bölen olduğundan $T$ kümesi üzerinde

$$x \mapsto x\alpha a \quad ve \quad x \mapsto a\alpha x$$

dönüşümleri tanımlanabilir. Bu dönüşümler sırasıyla $f$ ve $g$ olsun. Öncelikle $f$ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. Her $x, y \in T$ için $f(x) = f(y)$ olsun. O zaman $f$ dönüşümünün tanımı gereği $a\alpha x = a\alpha y$ eşitliği yazılır. Buradan hareketle $a\alpha(x - y) = 0$ elde edilir. $M$, $|S_M|$-gamma bölge ve $a$ sıfır bölen olmadığından $x = y$ eşitliği sağlanır. Böylece, $f$ dönüşümü birebirdir. Benzer şekilde $g$ dönüşümü de birebir olur. $T$ sonlu bir küme olduğundan $f$ ve $g$ dönüşümleri aynı zamanda örtendir. O halde,

$$a\gamma a_i = a = a_j\gamma a$$

olacak şekilde $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq n$ vardır. Bu denklem sağdan $\gamma a$ ile çarpıldığında $a\gamma a_i\gamma a = a\gamma a$ ve soldan $a\gamma$ ile çapıldığında $a\gamma a_j\gamma a = a\gamma a$ eşitlikleri elde edilir. Buradan hareketle $a\gamma a_i\gamma a = a\gamma a_j\gamma a$ eşitliği yazılır. Böylece $a\gamma(a_i - a_j)\gamma a = 0$ elde edilir. Fakat $a$ elemanı sıfır bölen olmadığına göre

$$a_i = a_j$$

eşitliği açıkca görülmektedir. Dolayısıyla

$$a\gamma a_i = a = a_i\gamma a$$

eşitliği bulunur. Herhangi bir $b \in T$ olsun. O halde $a$ elemanı için uygulanan işlemler $b$ elemanına uygulanırsa

$$b\gamma a_i' = a_i'\gamma b$$

olacak şekilde öyle bir $a_i' \in T$ elemanı vardır. Bu durumda,

$$(a\gamma b)\gamma a_i' = a\gamma(b\gamma a_i') = a\gamma b$$

$$a_i'\gamma(a\gamma b) = (a_i'\gamma a)\gamma b = a\gamma b$$

eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla,

$$(a\gamma b)\gamma a_i^{'} = a\gamma b = a_i^{'}\gamma(a\gamma b)$$

elde edilir. Bununla birlikte $a\gamma b \in T$ olduğundan benzer işlemler ile $a_i' = a_i$ olduğu açıkça görülmektedir. Özel olarak $e = a_i$ ve $\gamma = \delta$ alınırsa $(\delta, e)$, $T$ yarı grubunun çarpımsal güçlü birim elemanı olarak rol oynadığı açıkça görülür. Buna ek olarak $e\delta e = e$ yazılabilir.

Keyfi bir $x \in M$ elemanı alalım. Bu durumda $x \in T$ veya $x \in S_M$ olur. Eğer $x \in T$ ise $x\delta e = x = e\delta x$ olur ve ispat biter. O halde $x \in S_M$ olsun. Öncelikle $e - e\delta x \in T$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $e - e\delta x \notin T$ olsun. Böylece $e - e\delta x \in S_M$ olur. Buradan hareketle $S_M$ kümesi tanımından $(e-e\delta x)\Gamma M\Gamma(e-e\delta x) = (0)$ yazılır. $e \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ için düzenlenirse

$$e\delta e\delta e - e\delta e\delta e\delta x - e\delta x\delta e\delta e + e\delta x\delta e\delta e\delta x = 0$$

yazılır. Bununla birlikte $e = e\delta e$ eşitliğinden yararlanarak

$$e - e\delta x - e\delta x\delta e + e\delta x\delta e\delta x = 0$$

eşitliği bulunur. Buna ek olarak $x \in S_M$ olduğundan

$$e - e\delta x - e\delta x\delta e = 0$$

elde edilir. Bu denklemi sağdan $\delta x$ ile çarptığımızda $e\delta x - e\delta x\delta x - e\delta x\delta e\delta x = 0$ olur. Tekrar $x \in S_M$ kullanılırsa $e\delta x - e\delta x\delta x = 0$ dolayısıyla

$$e\delta x = e\delta x\delta x$$

elde edilir. Buna göre $e\delta x = e\delta x\delta x = e\delta x\delta x\delta x = 0$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda $e\delta x - e\delta x\delta x = 0$ ve $x \in S_M$ olduğu kullanılarak $e = e - e\delta x - e\delta x\delta x = 0$ bulunur. Bu ise $e \in T$ olmasıyla çelişir. O zaman $e - e\delta x \in S_M$ olamaz. Dolayısıyla $e - e\delta x \in T$ olmak zorundadır. Benzer şekilde $e - x\delta e \in T$ olduğu görülür. Buna göre $(\delta, e)$ elemanı $T$ yarı grubunun güçlü birimi olduğundan,

$$e\delta(e - e\delta x) = e - e\delta x \qquad ve \qquad (e - x\delta e)\delta e = e - x\delta e$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan hareketle $e\delta x = x\delta e$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $(x\delta e - x)\delta e = 0$ olur. Ayrıca, hipotez gereği $M$ nin sonlu $|S_M|$-gamma bölge olması ve $e$ nin sağ sıfır bölen olmadığı göz önüne alınırsa $x\delta e = x$ bulunur. Dolayısıyla,

$$e\delta x = x = x\delta e$$

elde edilir. Bu nedenle $(\delta, e)$ elemanı $M$ nin güçlü birimi olur. Son olarak, $f$ ve $g$ dönüşümlerinden yararlanarak $a\delta x = e = y\delta a$ olacak şekilde öyle $x, y \in T$ elemanları vardır. Bu durumda $T$ deki tüm elemanlar tersinirdir. Böylece $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olur.

**Sonuç 3.30.** Her sonlu $M$, $|S_M|$-gamma tamlık bölgesi bir $M$, $|S_M|$-gamma cisim olur.

**İspat.** $M$ bir sonlu $|S_M|$-gamma tamlık bölgesi olsun. Bu durumda, $M$ güçlü birimli ve değişmeli sonlu bir $|S_M|$-gamma bölge olur. Teorem 3.29 gereği $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olacağından buradan $M$, $|S_M|$-gamma cisim olur.

Sonuç 3.30 gereği her sonlu $|S_M|$-gamma tamlık bölgesi bir $|S_M|$-gamma cisimdir. Ancak, $M$ bir $|S_M|$-bölümlü gamma halka ise $M$, $|S_M|$-gamma cisim olmayabilir. Bu duruma örnek aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 3.31.** $M = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{c} & \bar{0} \end{bmatrix} : \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{y} \\ \bar{z} & \bar{t} \end{bmatrix} : \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ olsun. Buna göre $M$ bir $\Gamma$- halkadır. Yarı asallığının kaynağı incelenirse,

$$S_M = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{b} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} : \bar{b} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

bulunur. Buradan $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 \end{bmatrix} : \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2,\ \bar{a} \neq 0 \text{ veya } \bar{c} \neq 0 \right\}$ elde edilir. Eğer $e = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \in M$ ve $\gamma = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \Gamma$ alınırsa her $m = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 \end{bmatrix} \in M$ için $m\gamma e = m = e\gamma m$ eşitliği sağlanır. O halde $M$ $\Gamma$- halkası güçlü birimlidir. Ayrıca her $m \in M - S_M$ için $m\gamma n = e = n\gamma m$ olacak şekilde öyle bir $n = \begin{bmatrix} \bar{d} & \bar{e} & 0 \\ 0 & \bar{f} & 0 \end{bmatrix} \in M$ vardır. Bu nedenle $M - S_M$ tersinir olur. Buna göre $M$, $|S_M|$-bölümlü gamma halka olur fakat $M$ değişmeli olmadığından $M$, $|S_M|$-gamma cisim değildir.

**Teorem 3.32.** *$M$ bir $\Gamma$-halka ve $(\delta, e)$, $M$ nin güçlü birimi olsun. Eğer $M$, $|S_M|$-gamma bölge ise $p$ bir asal sayı olmak üzere $M$, $\Gamma$-halkasının karakteristiği $0$, $p$ veya $p^2$ dir.*

**İspat.** Varsayalım ki $charM = n > 1$ olmak üzere $p$ asalı $n$ tamsayısını bölsün. Buna göre, $n = pk$ olacak şekilde $1 \leq k < n$ tamsayısı vardır. Bununla birlikte $0 = ne$ yazılır. Buna göre $M$ bir $\Gamma$ halka ve $(\delta, e)$ güçlü birimi olduğundan $0 = ne = ne\delta e$ elde edilir. Buna ek olarak $n$ yerine $pk$ yazılırsa $0 = ne = (pk)e\delta e$ bulunur. Dolayısıyla $0 = (pe)\delta(ke)$ elde edilir. Bu durumda $(pe)$ sıfır bölen olur. Hipotez gereği $M$ bir $|S_M|$-gamma bölge olduğundan $pe \in S_M$ bulunur. Bu nedenle her $m \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ için $(pe)\delta m\delta(pe) = 0$ olur. Buradan hareketle her

$m \in M$ için $p^2m = 0$ bulunur. Böylece $charM = n$ olduğu kullanılarak $n$, $p^2$ elemanını böler. Fakat $p$, $n$ elemanını böldüğünden $n \in \{p, p^2\}$olur.

**Teorem 3.33.** *$M$ bir $\Gamma$-halka ve $(\delta, e)$, $M$ nin güçlü birimi olsun. Eğer $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka ise o zaman $M$ nin karakteristiği $n$ olmak üzere küpü $n$ sayısını bölen bir asal sayı yoktur.*

**İspat.** Varsayalım ki $charM = n > 1$ olmak üzere $p$ asalı $n$ tamsayısını bölsün. Buna göre, $p$ ile $k$ aralarında asal olmak üzere $n = p^t k$ olacak şekilde $t \geq 1$ ve $1 \leq k < n$ tamsayıları vardır. Buna göre

$$((pk)e)^t = p^t k^t.e = k^{t-1} p^t.k.e = k^{t-1}.(n.e) = 0$$

bulunur. Böylece $(pk).e \in S_M$ elde edilir. Bu nedenle, her $m \in M$ için,

$$(pk.e)\delta m \delta (pk.e) = p^2k^2m = 0$$

elde edilir. Buradan hareketle $charM = n$ olduğuna göre $n$, $p^2k^2$ elemanını böler. Bu durumda $n.s =p^2k^2$ olacak şekilde $s \geq 1$ tamsayısı vardır. Dolayısıyla $p^t.k.s =p^2k^2$ yazılır. Kabul edelim ki, $t \geq 3$ olsun. Son eşitliğin her iki tarafı $p^2k$ elemanı ile bölünürse $k = p^{t-2}s$ bulunur. Bu ise $p$ asalının $k$ elemanını bölmesi çelişkisine ulaştırır. Çünkü $p$ ile $k$ aralarında asal idi. O zaman $t \geq 3$ olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

# 4. SONUÇ

Bu çalışmada gamma halka ele alınmıştır. Birinci bölümde, ilk olarak tez boyunca kullanılmış olan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Tezin devamında, (Aydın vd., 2018) çalışmasında halkalardaki yarıasallığın kaynağı tanımı kullanılarak, herhangi bir $M$, $\Gamma$-halkası için yarı asallığın kaynağı $S_M = \{a \in M \mid a\Gamma M\Gamma a = (0)\}$ şeklinde tanımlanmıştır ve buna ilişkin bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra, $M$, $|S_M|$-indirgenmiş gamma halka, $|S_M|$-gamma bölge ve $|S_M|$-bölümlü gamma halka olarak isimlendirilen yeni yapılar tanımlanmış ve bu kavramların bazı özellikleri ile bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Çalışmanın son kısmında, her sonlu $M$, $|S_M|$-gamma bölgesinin bir $|S_M|$-bölümlü gamma halka olduğu ve $|S_M|$-gamma bölgeler ile $|S_M|$-indirgenmiş gamma halkaların karakteristikleri ile ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Gamma halka teorisine bu çalışma ile literatüre eklenen kavramlar ile bunların arasındaki ilişkiler çalışılmaya devam edilebilecek konular arasındadır. Bununla birlikte, $|S_M|$-yarıasal gamma halka ve $|S_M|$-asal gamma halka kavramları tanımlanarak bu kavramların özellikleri araştırılabilir. Ayrıca bir $M$, $\Gamma$-halkasının yarı asallığının kaynağı bu gamma halkanın operatör halkasının yarı asallık kaynağı arasındaki ilişkiler incelenebilir. Üzerinde çalışılabilecek bir başka konu ise bir $M$, $\Gamma$-halkasının asal radikalinin hangi durumlarda $S_M$ kümesine eşit olacağıdır.

# KAYNAKLAR

Aydın, N. vd. (2018). “The source of semiprimeness of rings”. In: *Communications of the Korean Mathematical Society* 33.4, pp. 1083–1096.

Barnes, W. E. (1966). “On the Γ-rings of Nobusawa”. In: *Pacific J. Math.* 18.3, pp. 411–422.

Camcı, D. K. (2017). *Halkalarda Yarıasallığın Kaynağı ve Çarpımsal (Genelleştirilmiş) Türevler*. PhD thesis. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi. URL: https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/(Tez%20No.457053).

Kyuno, S. (1991). *Gamma rings*. Hadronic Press Monographs in Mathematics. Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, FL, pp. viii+113. ISBN: 0-911767-49-5.

Kyuno, S. (1975). “On the radicals of Γ-rings”. In: *Osaka Journal of Mathematics* 12.3, pp. 639–645.

Kyuno, S. (1978). “On prime gamma rings”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 75.1, pp. 185–190.

Luh, J. (1969). “On the theory of simple Γ-rings.” In: *Michhigan Math. J.* 16. ISSN: 0026-2285. DOI: 10.1307/mmj/1029000167.

Mekera, R. (2022). *Yarıgrup Çeşitlerinde Yarıasallığın Kaynağı*. MA thesis. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi. URL: https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/(Tez%20No.712357).

Nobusawa, N. (1964). “On a generalization of the ring theory”. English. In: *Osaka Journal of Mathematics* 1, pp. 81–89. ISSN: 0030-6126.

Rahman, M. ve Paul, A. (2014). “Jordan higher derivations in prime?-rings”. In: *Bangladesh Journal of Scientific Research* 27.2, pp. 155–163.

Rao, M. M. K. ve Venkateswarlu, B. (2018). “Zero divisors free Γ- semiring”. In: *Bull. Int. Math. Virtual Inst* 8.1, pp. 37–43.

Selvaraj, C. ve Petchimuthu, S. (2008). “Characterization of 2-primal ideals”. In: *Far East J. Math. Sci* 28, pp. 249–256.

**T.C.**

**AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİLİMSEL ETİK BEYANI**

“Gamma Halkaların Yarı Asallığının Kaynağı” başlıklı Yüksek Lisans tezimdeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Nurcan DÜZKAYA

07/07/2022

## ÖZGEÇMİŞ

**Soyadı, Adı** : Düzkaya, Nurcan

**Yabancı Dil** : İngilizce

## EĞİTİM

| Derece | Kurum | Mezuniyet tarihi(Yıl) |
|---|---|---|
| Lisans | EGE ÜNİVERSİTESİ | 2018 |

## İŞ DENEYİMİ

| Yıl | Yer/Kurum | Ünvan |
|---|---|---|
| 2019-2020 | Şah Mat Eğitim Kurumları | |
| 2020-2022 | Orantı Koleji | |
| 2022- | Güzelyalı IQ Plus Butik Eğitim Merkezi | |