

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
2022-YL-024

**ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN YENİ BİR KESİRLİ
DERECELİ PI VE PD KONTROLÖR TASARIM METODU**

Dorukhan ASTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Münevver Mine ÖZYETKİN

AYDIN – 2022

KABUL VE ONAY

T.C. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Dorukhan ASTEKİN tarafından hazırlanan “ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN YENİ BİR KESİRLİ DERECELİ PI VE PD KONTROLÖR TASARIM METODU” başlıklı tez, aşağıdaki jüri tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 10/05/2022

Üye (Başkan) : Doç. Dr. Yılmaz KALKAN

Aydın Adnan Menderes
Üniversitesi ...

Üye (T.D.) : Dr. Öğr. Üyesi Münevver Mine
ÖZYETKİN

Aydın Adnan Menderes
Üniversitesi ...

Üye : Prof. Dr. Serdar Ethem
HAMAMCI

İnönü Üniversitesi ...

ONAY:

Bu tez Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri tarafından uygun görülmüş ve Fen Bilimleri Enstitüsünün tarih ve sayılı oturumunda alınan numaralı Yönetim Kurulu kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gönül AYDIN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca benden desteğini ve yardımını esirgemeyen, yapıcı eleştirileriyle daha ileri gitmem için beni daima teşvik eden, engin bilgi ve tecrübeleriyle yoluma ışık tutan çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Münevver Mine ÖZYETKİN'e,

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca ilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımnda beni her zaman cesaretlendiren Prof. Dr. Olcay ÜZENGİ AKTÜRK'e,

Lise eğitimim boyunca bana matematiği her daim sevdiren, bilgi ve birikimleriyle beni bugünlere getiren Urla Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni Mahtuni ATMACA'ya,

Ortaokul yıllarımdan beri yanımda olup beni yalnız bırakmayan, ayrıca tez çalışmam esnasında düzenleme ve yazım denetimi konusunda yardımlarını esirgemeyen kıymetli arkadaşım Nesil GÜVENDİK'e,

Son olarak tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, benden dualarını asla esirgemeyen, aldığım kararları her zaman destekleyen ve bana moral veren sevgili anneme, babama, anneanneme, dedeme, dayıma, yengeme ve kuzenim Can'a sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

Dorukhan ASTEKİN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ÖZET	xii
ABSTRACT	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Kesirli Dereceli Hesaplamanın Matematiksel Temeli ve Özellikleri	3
2.2. Kesirli Dereceli Sistemler İçin Yaklaşımlar	6
2.3. Kesirli Dereceli Sistemlerin Tam Sayı Dereceli Rasyonel Yaklaşımları	8
2.3.1. Sürekli Kesir Açılımı (SKA)	8
2.3.2. Genel SKA Metodu	9
2.3.3. Carlson Metodu	9
2.3.4. Matsuda Metodu	10
2.3.5. Oustaloup Metodu	10
2.3.6. Charef Metodu	11
2.4. Tam Sayı Dereceli PID Kontrolörler	12
2.5. Kesirli Dereceli PID Kontrolörler	13
2.6. Zaman Gecikmeli Sistemler için Padé Yaklaşımı	15
2.6.1. Padé Yaklaşımının Matematiksel Gösterimi	16
2.7. Dışbükey Kararlılık Bölgesinin Ağırlık Merkezi Yöntemi	16

2.8. Rekasius Dönüşümü	18
2.9. Thowsen Dönüşümü	21
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	23
3.1. Rasyonel Yaklaşım	23
3.2. Birinci Derece Padé Yaklaşımıyla PI^λ Kontrolör Tasarımı	31
3.3. İkinci Derece Padé Yaklaşımıyla PI^λ Kontrolör Tasarımı	35
3.4. Birinci Derece Padé Yaklaşımıyla PD^μ Kontrolör Tasarımı	37
3.5. İkinci Derece Padé Yaklaşımıyla PD^μ Kontrolör Tasarımı.....	39
3.6. Birinci Derece Padé Yaklaşımıyla $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı	41
3.7. İkinci Derece Padé Yaklaşımıyla $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı	45
3.8. Rekasius Dönüşümüyle PI^λ Kontrolör Tasarımı	48
3.9. Thowsen Dönüşümüyle PI^λ Kontrolör Tasarımı.....	50
3.10. Rekasius Dönüşümüyle PD^μ Kontrolör Tasarımı.....	53
3.11. Thowsen Dönüşümüyle PD^μ Kontrolör Tasarımı	54
3.12. Rekasius Dönüşümüyle $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı	56
3.13. Thowsen Dönüşümüyle $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı.....	59
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	63
4.1. Örnek 1	63
4.2. Örnek 2	65
4.3. Örnek 3	70
4.4. Örnek 4	72
4.5. Örnek 5	75
4.6. Örnek 6	79
4.7. Örnek 7	83
4.8. Örnek 8	87

4.9. Örnek 9	89
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	91
KAYNAKLAR.....	93
EKLER	104
EK 1. Carlson, Oustaloup ve Matsuda metotları ile s^α için rasyonel yaklaşımlar	104
EK 2. Zaman gecikmesi teriminin eş değerleri	113
BİLİMSEL ETİK BEYANI	114
ÖZ GEÇMİŞ.....	115



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

PI	: Oransal İntegral kontrolör
PD	: Oransal Türevsel kontrolör
PID	: Oransal İntegral Türevsel kontrolör
PI^λ	: Kesirli dereceli Oransal İntegral kontrolör
PD^μ	: Kesirli dereceli Oransal Türevsel kontrolör
$PI^\lambda D^\mu$: Kesirli dereceli Oransal İntegral Türevsel kontrolör
λ	: İntegral teriminin kesir derecesi
μ	: Türev teriminin kesir derecesi
k_p	: Oransal kazanç sabiti
k_i	: İntegral kazanç sabiti
k_d	: Türevsel kazanç sabiti
$R(s)$: Giriş sinyali
$Y(s)$: Çıkış sinyali
$C(s)$: Kontrolörün transfer fonksiyonu
$G_p(s)$: Kontrol edilen sistemin transfer fonksiyonu
$\Delta(s)$: Karakteristik denklem
j	: Karmaşık sayı
Re_Δ	: Karakteristik denklemin gerçekte kısım
Im_Δ	: Karakteristik denklemin sanal kısım
${}_a D_t^\alpha$: Kesirli dereceli türev-integral operatörü
T	: Sözde gecikme (pseudo-delay)

τ	: Zaman sabiti
$e^{-\tau s}$: Zaman gecikmesi
$\Gamma(\cdot)$: Gamma fonksiyonu
SKA	: Sürekli kesir açılımı
AGM	: Ağırlıklı geometrik merkez
DKBAM	: Dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. P-I-D düzlemi.....	14
Şekil 3.1. Tek giriş-tek çıkışlı bir kontrol sistemi	31
Şekil 4.1. Rasyonel yaklaşımların genlik yanıtlarının orijinal sistem ile karşılaştırılması ...	63
Şekil 4.2. Rasyonel yaklaşımların faz yanıtlarının orijinal sistem ile karşılaştırılması	64
Şekil 4.3. Çeşitli yöntemlerin genlik ve faz yanıtlarının orijinal sistem ile karşılaştırılması	64
Şekil 4.4. Bozulma eklenmiş olan birim geri beslemeli bir kontrol sistemi	65
Şekil 4.5. $\lambda = 1$ için birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımlarının orijinal sistem ile karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri.....	66
Şekil 4.6. $\lambda = 1$ için kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi	67
Şekil 4.7. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri	67
Şekil 4.8. Ortak kararlılık bölgesi	68
Şekil 4.9. Ortak kararlılık bölgesinden farklı λ değerleri için birim adım yanıtları	69
Şekil 4.10. Farklı λ değerleri için ağırlık merkezlerinin ayar takip noktası ve bozulma yanıtları.....	69
Şekil 4.11. $\lambda \in [0.8, 1.4]$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri	71
Şekil 4.12. $\lambda = 1$ için önerilen yöntemin AGM yöntemi ile karşılaştırılması	71
Şekil 4.13. $\lambda = 1$ için Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin orijinal sistemle karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri.....	72
Şekil 4.14. Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri....	73
Şekil 4.15. Çeşitli yöntemlerin orijinal sistemle karşılaştırılması.....	74
Şekil 4.16. Farklı λ değerleri için ağırlık merkezlerinin birim adım değişimi	74
Şekil 4.17. Farklı α değerleri için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri.....	76

Şekil 4.18. Farklı λ değerleri için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri.....	77
Şekil 4.19. Ortak kararlılık bölgesi ve bu bölgedeki ağırlık merkezleri	77
Şekil 4.20. Farklı α değerleri için birim adım yanıtları ($\lambda = 0.5$)	78
Şekil 4.21. Farklı λ değerleri için birim adım yanıtları ($\alpha = 0.5$)	78
Şekil 4.22. $\mu = 0.99$ için kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve bu bölgenin ağırlık merkezi.....	80
Şekil 4.23. $\mu = 0.9$, $\mu = 1$ ve $\mu = 1.1$ için kararlılık bölgeleri, ağırlık merkezleri ve AGM noktaları.....	81
Şekil 4.24. $\mu \in [0.1, 1.1]$ için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri	81
Şekil 4.25. $\mu = 0.5$ ve $\mu = 0.99$ için orijinal sistemin kararlılık bölgesinin çeşitli yöntemlerle karşılaştırılması	82
Şekil 4.26. $\mu = 0.9$, $\mu = 1$ ve $\mu = 1.1$ için AGM ve DKBAM metotlarının karşılaştırıldığı birim adım yanıtları	82
Şekil 4.27. Filtreli tek giriş-tek çıkışlı bir kontrol sistemi	83
Şekil 4.28. Farklı λ değerlerine göre kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri	84
Şekil 4.29. Farklı μ değerlerine göre kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri.....	85
Şekil 4.30. Farklı λ ve μ değerleriyle ortak kararlılık bölgesi	85
Şekil 4.31. PI-PD kontrolörü için kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri ..	86
Şekil 4.32. Farklı yöntemlerle birim adım yanıtları	86
Şekil 4.33. $\lambda = 0.8731$, $\lambda = 0.963957$ ve $\lambda = 1$ için kararlılık bölgeleri, AGM noktaları ve DKBAM noktaları.....	87
Şekil 4.34. Farklı λ değerlerine ve farklı metotlara göre birim adım yanıtları.....	88
Şekil 4.35. $PI^{0.99}D$ için farklı k_d değerlerine göre kararlılık sınır eğrileri, dışbükey kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri.....	89
Şekil 4.36. Farklı k_d değerlerine ve farklı metotlara göre birim adım yanıtları.....	90

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. $s^{0.1}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	27
Çizelge 3.2. $s^{0.2}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	27
Çizelge 3.3. $s^{0.3}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	28
Çizelge 3.4. $s^{0.4}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	28
Çizelge 3.5. $s^{0.5}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	29
Çizelge 3.6. $s^{0.6}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	29
Çizelge 3.7. $s^{0.7}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	30
Çizelge 3.8. $s^{0.8}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	30
Çizelge 3.9. $s^{0.9}$ için rasyonel yaklaşımlar.....	31
Çizelge 4.1. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için k_p ve k_i değerleri.....	68
Çizelge 4.2. $\lambda \in [0.8, 1.4]$ için k_p ve k_i değerleri.....	70
Çizelge 4.3. $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin farklı yöntemlere göre karşılaştırılması	70
Çizelge 4.4. Farklı λ değerleri için (k_p, k_i) değerleri.....	73
Çizelge 4.5. Farklı α değerleri için (k_p, k_i) değerleri ($\lambda = 0.5$)	75
Çizelge 4.6. Farklı λ değerleri için (k_p, k_i) değerleri ($\alpha = 0.5$)	76
Çizelge 4.7. Farklı μ değerleri için (k_p, k_d) değerleri.....	83
Çizelge 4.8. $\lambda = 0.8731$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması	88
Çizelge 4.9. $\lambda = 0.963957$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması	88
Çizelge 4.10. $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması	88

Çizelge 4.11. Dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemine göre $PI^{0.99}D$ kontrolör parametreleri.....	90
--	----



ÖZET

ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN YENİ BİR KESİRLİ DERECELİ PI VE PD KONTROLÖR TASARIM METODU

Dorukhan A. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Programı, Yüksek Lisans Tezi, Aydın, 2022.

Amaç: Bu çalışmadaki amaç, kesirli dereceli modellemenin sistem performansını ve verimliliğini genel olarak iyileştirdiği bilindiğinden bu modelleri kontrolör tasarımı kullanmaktır. Ayrıca zaman gecikmesi teriminin eş değeri olan Euler dönüşümünün yerine bu terimin alternatifleri olan Padé yaklaşımı, Rekasius ve Thowsen dönüşümlerini kullanarak kararlılık bölgelerini elde etmektir. Bir diğer amaç ise elde edilen kararlılık bölgelerini kullanarak literatüre yeni tanıtılmış bir metot olan dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi ile kesirli dereceli kontrolör tasarımı yapmaktır.

Materyal ve Yöntem: İlk olarak bu çalışmada s^α teriminin realizasyonu için önemli yöntemlerden biri olan sürekli kesir açılımı (SKA) metoduyla birinci dereceden onuncu dereceye kadar olan tam sayı dereceli yaklaşım modelleri elde edilmiştir. Daha sonra zaman gecikmeli sistemler için PI^λ , PD^μ ve $PI^\lambda D^\mu$ olmak üzere üç farklı kontrolör tasarımı yapılmıştır. Kontrolör tasarımı zaman gecikmesi terimi yerine birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımı, Rekasius ve Thowsen dönüşümü kullanılarak doğrusallaştırma yapılmıştır. Ayrıca dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi olarak adlandırılan pratik bir ayarlama yöntemi sunulmuştur.

Bulgular: Bu çalışmada birim geri beslemeli tek giriş-tek çıkışlı kontrol sistemleri ile ilgili bazı örnekler çözülmüştür. Sürekli kesir açılımı (SKA) yöntemiyle elde edilen rasyonel yaklaşımlar diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Zaman gecikmeli sistemler için farklı λ ve μ değerlerine sahip kararlılık bölgeleri elde edilmiştir. Bu kararlılık bölgeleri literatürde olan zaman gecikmesi eş değerleriyle karşılaştırılmıştır. Ayrıca dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemiyle kesirli dereceli kontrolör parametreleri hesaplanmıştır. Elde edilen kontrolör parametreleri sayesinde birim adım yanıtları gösterilmiştir.

Sonuç: Elde edilen yaklaşımlardan özellikle onuncu dereceden yaklaşımın diğer yaklaşımlara

göre orijinal sistemi daha iyi yakaladığı gözlemlenmiştir. Zaman gecikmeli sistemler için Rekasius dönüşümü, Thowsen dönüşümü ve kısmen ikinci derece Padé yaklaşımının diğer zaman gecikmesi terimlerine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Sunulan tasarım metodunun kesirli dereceli kontrolör tasarımında iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlık merkezi, Ayarlama, Kararlılık bölgesi, Kesirli dereceli PID kontrolör, Zaman gecikmesi.



ABSTRACT

A NEW DESIGN METHOD OF FRACTIONAL ORDER PI AND PD CONTROLLER FOR TIME DELAY SYSTEMS

Dorukhan A. Aydin Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Electrical and Electronics Engineering Program, Master Thesis, Aydin, 2022.

Objective: This study aims to use fractional-order modeling in controller design because that kind of modelling improves the system performance and efficiency in general. In addition, instead of Euler transform as an equivalent to time delay term, Padé approximations, Rekasius and Thowsen substitutions, as alternatives, are used to obtain stability regions. Another aim is to design fractional-order controller by using the obtained stability regions with the method of the centroid of the convex stability region, which has been introduced as a new method.

Material and Methods: First, the continued fraction expansion (CFE), one of the most efficient strategies for implementing the s^α term in this study, is achieved for integer-order approximation models ranging from the first to the tenth order. Following that, three different controllers- PI^λ , PD^μ , and $PI^\lambda D^\mu$ -are designed for time delay systems. Instead of a time delay term, linearization is applied in the controller design utilizing first and second order Padé approximation, Rekasius, and Thowsen transformation. In addition, a practical adjustment method called the centroid of the convex stability region method is presented.

Results: In this study, some examples of single input-single output control systems with unity feedback are solved. The rational approximations obtained using the continued fraction expansion (CFE) method are compared to those obtained through other methods. For time delay systems, stability regions with different λ and μ values have been found. These stability areas are compared to the literature's time delay equivalents. In addition, the fractional-order controller parameters are computed using a realistic adjustment procedure known as the centroid of the convex stability region method. Thanks to the obtained controller parameters, the unit step responses are shown.

Conclusion: It has been observed that particularly, the tenth order approximation is better

than among others to represent the original system. Rekasius transformation, Thowsen transformation, and partly second order Padé approximation have been proven to produce better results than other time delay terms for time delay systems. It has also been observed that the presented design method gives good results in fractional-order controller design.

Key Words: Centroid, Fractional-order PID controller, Stability region, Time delay, Tuning.



1. GİRİŞ

Kesirli dereceli hesaplama ya da daha yaygın adıyla bilinen kesirli hesaplama, türev veya integral operatörlerinin derecelerinin herhangi bir gerçektek sayı veya karmaşık sayı olarak ele alınıp araştırmaları halen devam etmekte olan matematiksel analizin bir dalıdır. Bu tür sistemler diferansiyel denklemlerle ifade edilen dinamik sistemlerdir. 30 Eylül 1695 tarihli bir mektuplaşmada, L'Hopital, Leibniz'e bir $D^n f(x) = d^n f(x) / dx^n$ fonksiyonunun n 'inci türevi için kullandığı özel bir gösterimde, $n = 1/2$ olsaydı sonucun ne olacağını yazmıştır (Shantanu Das, 2008). Leibniz'in yanıtı ise, "...Bu, bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradokstur..." şeklinde olmuştur. Bu mektuplaşma ile kesirli dereceli hesaplamının temeli atılmıştır. Yıllar içinde kesirli hesaplama Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Euler, Heaviside, Goldman, Laplace, Oldham, Spanier, Miller ve Ross gibi birçok ünlü matematikçinin ilgisini çekmiştir (Shah & Agashe, 2016; Xue et al., 2007).

Kesirli dereceli hesaplamının modern matematikçiler için başlangıç noktası, Laurent'in 1884 yılında genelleştirilmiş operatörler teorisinin geliştirilmesiyle ilgili yayımladığı makaleyle olmuştur (Laurent, 1884). Burada genelleştirilmiş operatörler teorisi, D^v operatöründe v 'nin rasyonel veya irrasyonel, pozitif veya negatif, gerçektek sayı olabileceği şekilde genişletilmiştir. Kesirli dereceli hesaplama, genelleştirilmiş operatörler teorisi ile yakından bağlantılıdır (Ross, 1977). Çünkü D veya d/dx ve D^2 veya d^2/dx^2 operatörleri, bir fonksiyonun başka fonksiyonlara dönüştürülmesiyle ilgili bir kural belirtir (Ross, 1977). Bunlar birinci ve ikinci adi türevlerdir. Böylelikle kesirli hesaplama ismi biraz yanlış bir isim haline gelmiştir (Miller & Ross, 1993). Daha doğru bir tanım keyfi dereceli türev ve integral olabilir, fakat matematikçiler yine de bu teoriyi kesirli hesaplama olarak isimlendirmişlerdir. (Caponetto et al., 2010; Miller & Ross, 1993).

20. yüzyıl öncesinde kesirli hesaplama sadece matematikçiler için saf teorik bir matematik dalı iken aradan geçen 300'den fazla yıl sonrasında bu konu dünyadaki pek çok bilim dalının gelişmesine olanak sağlamıştır (Narang, 2012). Özellikle 20. yüzyılda bu konu ile ilgili pek çok uygulamanın bulunduğu açıktır (Shantanu Das, 2008). Ancak bu uygulamalar ve kesirli hesaplamının matematiksel temeli anlaşılması kolay olmayan işlemler içermektedir (Shantanu Das, 2008). Kesirli hesaplama mühendislik ve diğer bilim alanları için anlaşılması kolay olmayan ileri analiz tekniklerini içerdiğinden çoğunlukla önemli

matematikçiler tarafından incelenen bir konu olarak kalmıştır (Hartley et al., 1995; Igor Podlubny, 1999a). Tanımların fiziksel anlamı anlaşılabilirse bile tam sayı dereceli hesaplamadan daha kesin olmadığı bir gerçektir (Shantanu Das, 2008). Buna rağmen birçok bilim insanı bu konuya farklı yorumlar getirerek bu konunun çok disiplinli bir alan olmasını sağlamıştır. Bilim ve teknolojinin gelişmesiyle birlikte günümüzde bu sistemler, dijital devrelerde (Zambrano-Serrano et al., 2017), biyoloji alanında (Boukhouima et al., 2020), tıp alanında (Cardoso et al., 2018; Farman et al., 2020), ekonomi ve finans alanında (Bukhari et al., 2020; Tacha et al., 2018), akıllı kirişlerde titreşim kontrolü için kesirli dereceli kontrolör tasarımı (Onat, Şahin, et al., 2012), piezoelektrik yamalara sahip akıllı kirişin titreşimlerinin kesirli dereceli denetçi yardımıyla aktif denetiminde (Onat et al., 2011), hatta COVID-19 analizinde (Ahmad et al., 2020; Rajagopal et al., 2020) bile karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca kesirli dereceli hesaplama; kontrol teorisi (Ma & Hori, 2007), fraktans (Krishna & Reddy, 2008), memristör (Petráš & Chen, 2012), sistem tanımlama (Dorcak et al., 2013), doğrusal olmayan dinamik sistemler (Yan Li et al., 2009) gibi birçok endüstriyel ve araştırma alanında kullanılabilir. Özellikle kesirli dereceli sistemlerin kontrol mühendisliği alanına girişi ilk olarak 1945'te Bode'nin geri beslemeli yükselteç tasarımı üzerine yaptığı araştırmayla gerçekleşmiştir (Bode, 1945; Manabe, 2003). Bu tür bir yükselteç tasarımının amacı, yükselteç doğrusal olmayan özellikler gösterdiğinde ve kazancının sabit kalmadığı durumlarda çok kanallı uzun mesafeli telefon iletimi için doğrusallık ve sabit bir kazanç elde etmektir (Manabe, 2003). Kesirli hesaplamaların kontrol mühendisliğindeki ilk uygulamalarından bir diğeri ise 1958'de Tustin'in büyük nesnelere konum kontrolünü tanıtmasıdır (Ma & Hori, 2007; Tustin et al., 1958). Manabe ise 1960 yılında kesirli dereceli integralin kontrol sistemlerine uygulanması konusunda bir çalışma yapmış olup fiziksel uygulama yetersizliği ve hesaplama zorluğundan dolayı kontrol mühendisliğine geniş çapta dahil edilmemiştir (Ma & Hori, 2007). Günümüzde, kesirli dereceli modeller ve kontrolörler endüstriyel kontrolde önemli gelişmeler göstererek kontrol sistemi hassasiyetinde, performansında ve enerji verimliliğinde radikal bir artış sağlamıştır (Chen et al., 2009; Koseoglu et al., 2022). Çoğu durumda temel amaç, sistemin performansını artırmak için kesirli dereceli kontrolü uygulamaktır (Chen & Moore, 2002).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Kesirli Dereceli Hesaplamanın Matematiksel Temeli ve Özellikleri

Kesirli dereceli hesaplama, tam sayı dereceli olmayan ${}_a D_t^\alpha$ operatörü için türev ve integralin bir genellemesi olup burada α , operatörün kesirli derecesini, a ve t ise operatörün sınırlarını göstermektedir (Tepljakov, 2017). Sürekli zamanlı türev ve integral (integro-diferansiyel veya differ-integral) operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada α operatörün derecesidir. Genellikle $\alpha \in R$ olarak varsayılmaktadır. Fakat α karmaşık sayı da olabilir (Tepljakov, 2017).

Farklı matematikçiler tarafından geliştirilen kesirli dereceli türev ve integralin çeşitli tanımları vardır. Bunlardan en popüler olanları Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo tanımlarıdır. Bu tanımlar aşağıdaki gibi olup (Matusů, 2011; Monje et al., 2010; Igor Podlubny, 1999b; Tang et al., 2017)'den özetlenmiştir:

1. Riemann-Liouville kesirli dereceli türev tanımı:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (2.2)$$

Burada $n-1 < \alpha < n$ ve $n \in N$ 'dir. $\Gamma(\cdot)$ ise Euler'in Gamma fonksiyonu olup şöyle ifade edilir:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.3)$$

Gamma fonksiyonunun özelliklerinden biri Denklem 2.4'teki gibidir:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.4)$$

2. Riemann-Liouville kesirli dereceli integral tanımı:

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (2.5)$$

Burada α gerçek pozitif integral derecesidir.

3. Grünwald-Letnikov kesirli dereceli türev ve integral tanımı:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.6)$$

Burada $\left[\frac{t-a}{h} \right]$ tam sayı kısmıdır, h zaman artışıdır. Aynı zamanda $\binom{\alpha}{j}$, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (2.7)$$

Aynı zamanda Denklem 2.2, Denklem 2.5 ve Denklem 2.6 için $t > a$ koşulu geçerlidir.

4. Caputo kesirli dereceli türev tanımı:

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2.8)$$

Burada $\alpha = m + \gamma$, ($0 < \gamma \leq 1$) olup m tam sayıdır.

5. Caputo kesirli dereceli integral tanımı:

$${}_0 D_t^{-\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}} d\tau; \gamma > 0 \quad (2.9)$$

Laplace dönüşümü tam sayı dereceli analizde olduğu gibi, kesirli dereceli sistemleri tanımlamak için de kullanılabilir. Buna göre, Riemann-Liouville kesirli dereceli türevin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.10)$$

Grünwald-Letnikov kesirli dereceli türevin Laplace dönüşümü Denklem 2.11'deki gibidir:

$$L\left\{{}_0D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha F(s) \quad (2.11)$$

Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli dereceli integralin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$L\left\{{}_0D_t^{-\alpha} f(t)\right\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.12)$$

Caputo kesirli dereceli türevin Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$L\left\{{}_0D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n) \quad (2.13)$$

Her $f(t)$, $t = x + jy$ fonksiyonu ve her α (rasyonel, irrasyonel veya karmaşık) sayısı için $g(t) = {}_0D_t^\alpha f(t)$ ilişkisini göz önünde bulundurursak kesirli dereceli türev ve integral aşağıdaki özelliklere sahiptir (Chen et al., 2009; Monje et al., 2010; Tepljakov, 2017):

1. Eğer $f(t)$ fonksiyonu t 'nin analitik bir fonksiyonu ise; $g(t) = {}_0D_t^\alpha f(t)$ yani $f(t)$ 'nin kesirli dereceli türevi de α ve t 'nin analitik bir fonksiyonudur.

2. Eğer $\alpha = n$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ ise, ${}_0D_t^\alpha$ operatörü tam sayı dereceli türev olan d^n / dt^n operatörüdür.

3. Eğer derece operatörü $\alpha = 0$ ise; ${}_0D_t^\alpha$ birim (özdeş) operatördür. Yani $g(t) = f(t)$ 'dir.

4. Kesirli dereceli türev ve integral operatörü doğrusal bir operatör olup eğer a, b sabitse;

$${}_0D_t^\alpha [af(t) + bh(t)] = a {}_0D_t^\alpha f(t) + b {}_0D_t^\alpha h(t) \quad (2.14)$$

5. Kesirli dereceli $\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ operatörleri için $f(t)$ fonksiyonunun uygun sınırlamaları altında üslerin toplamı kuralı aşağıdaki gibidir:

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.15)$$

6. Kesirli dereceli türev, tam sayı dereceli türev ile değişme özelliğine sahiptir:

$$\frac{d^n}{dt^n} \left({}_aD_t^\alpha f(t) \right) = {}_aD_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_aD_t^{\alpha+n} f(t) \quad (2.16)$$

$t = a$ için; $f^{(k)}(a) = 0$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 'dir.

Kesirli dereceli sürekli zamanlı dinamik sistemi aşağıdaki gibi bir kesirli dereceli diferansiyel denklem ile tanımlanabilir (Monje et al., 2010):

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.17)$$

Burada $(a_i, b_j) \in \mathbb{R}^2$ ve $(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbb{R}_+^2$ olup bu sistem aşağıdaki gibi genelleştirilebilir (Tepljakov, 2017):

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{kq} y(t) = \sum_{k=0}^n b_k D^{kq} u(t) \quad (2.18)$$

Burada $\alpha_k, \beta_k = kq, q \in \mathbb{R}^+$ 'dır. Eğer Denklem 2.17'ye sıfır başlangıç koşulunda Laplace dönüşümü uygulanıp sürekli zaman transfer fonksiyonu haline dönüştürülürse Denklem 2.19 elde edilir (Hamamci, 2008):

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n s^{\beta_n} + b_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\alpha_k}} \quad (2.19)$$

2.2. Kesirli Dereceli Sistemler İçin Yaklaşımlar

Kesirli dereceli sistemler, türev derecesi herhangi bir gerçek sayı olan ve diferansiyel denklemlerle ifade edilen dinamik sistemlerdir (Hamamci, 2008). Kesirli dereceli hesaplama, klasik hesaplamanın daha genel bir ifadesidir. Ayrıca kesirli dereceli modeller, sistem dinamiğinin tanımlanmasında klasik diferansiyel denklemlere göre daha doğru bir tanımlama imkanı sağlamaktadır (Tepljakov, 2017). Örneğin; CRONE denetleyicisi ile Oustaloup ve $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü ile Podlubny, kesirli dereceli integral alıcı ve türev alıcıyı içeren kesirli dereceli denetleyicilerin klasik olanlara göre avantajını göstermiştir (Mansouri et al., 2010).

Kesirli dereceli sistemlerin daha doğru ifade edilebilmesi ve karmaşık işlemlerin kolaylaştırılabilmesi için bazı tam sayı dereceli yaklaşım teknikleri kullanılmaktadır. Fakat yine de tam sayı dereceli gösterimleri, matematiksel model ile gerçek sistem arasında önemli farklılıklara neden olabilir (Petráš, 2000). Bu tür modellerin kullanılmasının asıl nedeni, kesirli dereceli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinin olmamasıydı (Petráš, 2000). Fakat son yıllarda kesirli dereceli sistemlerin tam sayı dereceli yaklaşımlarının elde edildiği birçok çalışma yapılmıştır (Bingi et al., 2019; Colín-Cervantes et al., 2021; Deniz et al., 2016,

2020; Hamed et al., 2018; Koseoglu et al., 2021, 2022; Yüce et al., 2017). Aslında bu yaklaşımlar ile irrasyonel olan bazı sayıların rasyonel yaklaşımlarını elde etmek rahatlıkla mümkündür. Örneğin, bu bağlamda “ π ” ve “ e ” gibi irrasyonel sayıların, sürekli kesir açılımı yöntemi ile rasyonel yaklaşımlarının elde edilmesi aşağıda gösterilmiştir:

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \ddots}}}}}$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \ddots}}}}}}$$

Kesirli dereceli sistemler s düzleminde s^α ve $1/s^\alpha$ ($\alpha \in R$ olmak üzere) gibi ifadelerden oluşan transfer fonksiyonlarına sahiptirler (Özyetkin & Tan, 2010). Mevcut simülasyon programları, böyle transfer fonksiyonlarının zaman alanındaki davranışlarını hesaplamak için yeterli olmayabilir. Bu yazılım programları bilindiği üzere s 'in tam sayı formlarını hesaplayacak şekilde oluşturulmuştur. Kesirli analiz, modelleme ve kontrol-sistem performansında önemli bir adım olarak görülse de kesirli dereceli transfer fonksiyonu modellerinin realizasyonu veya davranış gözlemi, tam sayı dereceli transfer fonksiyonu modellerinin uygulamasından daha fazla hesaplama karmaşıklığına yol açar.

Kesirli türev operatörü, yerel olmayan bir operatör olup fonksiyonun tüm geçmiş değerlerini gerektirir (Tarasov, 2020). Bu davranışa uzun bellek etkisi denir. Bu etki, kesirli dereceli operatörler için hesaplamada büyük zorluğa yol açar. Bu durum, mühendislik problemlerinde kesirli dereceli elemanların kullanılmasını engelleyen bir faktördür. Bu sorunu aşmak ve uygun bir hesaplama metodu ile kesirli dereceli elemanların hem analizini hem de realizasyonunu sağlamak için literatürde kesirli dereceli elemanların davranışına belirli frekans aralıklarında yaklaşabilen tam sayı dereceli modeller elde edilmiştir.

2.3. Kesirli Dereceli Sistemlerin Tam Sayı Dereceli Rasyonel Yaklaşımları

Podlubny'e göre kesirli dereceli bir sistem "gerçeklik" rolünü temsil ederken, tam sayı dereceli yaklaşım ise "model" rolünü temsil etmektedir (Igor Podlubny, 1999a). Diğer bir deyişle, kesirli dereceli sistemler sınırsız bir belleğe sahipken tam sayı dereceli sistemler sınırlı bir belleğe sahiptir (Petráš & Chen, 2012). Araştırmacılar en azından altmışlı yıllardan günümüze kadar kesirli dereceli sistemler için tam sayı dereceli yaklaşım modelleri ya da başka bir ifadeyle sonsuz boyutlu sistemler için sonlu boyutlu modeller elde etmektedir (Vinagre et al., 2000).

Rasyonel yaklaşım yöntemleri sürekli zaman modelleri ve ayrık zaman modelleri olmak üzere iki gruba ayrılmakta olup bu tezde sürekli zaman modelleri üzerine çalışmalar mevcuttur. $s^{\pm\alpha}$ 'yı tahmin etmek için sürekli kesir açılımı (SKA), en küçük kareler yöntemi, Oustaloup metodu, Carlson metodu, Matsuda metodu, Charef metodu, AbdelAty metodu ve El-Khazali metodu gibi kullanılan birkaç popüler yaklaşım yöntemi vardır (Agarwal et al., 2019). Literatürde çoğunlukla $s^{0.5}$ ile $1/s^{0.5}$ için yaklaşımlar verilmektedir (Chen et al., 2004; Krishna & Reddy, 2008; Vinagre et al., 2000). Kesirli dereceli Laplace operatörlerinin rasyonel yaklaşımı, sabit fazlı elemanlar olarak da nitelendirilen gerçek dereceli kesirli elemanların realizasyonunu basitleştirir (Agarwal et al., 2019).

Krishna'nın çalışmasında sürekli kesir açılımı metoduna göre birinci dereceden beşinci dereceye kadar olan yaklaşımlar bulunabilir (Krishna, 2011). Bu tezde ise altıncı dereceden onuncu dereceye kadar olan kesirli dereceli operatörün tam sayı dereceli eş değer transfer fonksiyonları SKA yöntemine dayalı olarak elde edilmiş ve $\alpha \in [0.1, 0.9]$ için s^α 'nın tam sayı dereceli yaklaşımları çizelgeler halinde sunulmuştur. s^α terimini içeren ifadeler aşağıda verilen yöntemler gibi birçok farklı teknikle belirlenebilir.

2.3.1. Sürekli Kesir Açılımı (SKA)

Sürekli kesir açılımı, fonksiyonların değerlendirilmesinde genellikle kuvvet serisi açılımlarına göre karmaşık düzlemde çok daha büyük bir alanı yakınsadığından yararlı bir yöntem olduğu bilinmektedir (Vinagre et al., 2000). İrrasyonel bir fonksiyon olan $G(s)$ 'in genelleştirilmiş hali aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
G(s) &\cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \\
&= a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s)} \frac{b_2(s)}{a_2(s)} \frac{b_3(s)}{a_3(s)} \dots
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Burada $a_i(s)$ ve $b_i(s)$, s değişkeninin rasyonel fonksiyonları veya sabittir.

2.3.2. Genel SKA Metodu

Laplace alanındaki kesirli integral operatörünün $G(s) = s^{-\alpha}$, ($0 < \alpha < 1$) rasyonel bir yaklaşımı aşağıdaki fonksiyonlara sürekli kesir açılımı yöntemi uygulanarak elde edilebilir (Vinagre et al., 2000):

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + sT)^\alpha} \tag{2.21}$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\alpha \tag{2.22}$$

Burada Denklem 2.21'deki $G_h(s)$ yüksek frekanslar için yaklaşımdır ($\omega T \gg 1$) ve Denklem 2.22'deki $G_l(s)$ ise düşük frekanslar için yaklaşımdır ($\omega \ll 1$).

2.3.3. Carlson Metodu

Carlson tarafından önerilen bu yöntem (Carlson & Halijak, 1964), SKA'ya ve Newton'un yinelemeli sürecine dayanmaktadır. Bu yöntemde kesirli operatör aşağıdaki gibi tanımlanır (Shrivastava & Varshney, 2015):

$$F(s) = s^\alpha; \alpha \in R \tag{2.23}$$

Yukarıdaki denklemin operatörü Newton'un yinelemeli süreci kullanılarak yaklaştırılır ve yaklaşık rasyonel fonksiyon $F_i(s)$, ($i \in N$) elde edilir:

$$F_i(s) = F_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) F_{i-1}^{1/\alpha}(s) + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) s}{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) F_{i-1}^{1/\alpha}(s) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) s} \quad (2.24)$$

Burada başlangıç değeri $F_0(s)=1$ alınmaktadır. Ayrıca Denklem 2.24, $1/\alpha \in \mathbb{Z}$ olduğunda geçerlidir. Başka bir deyişle α , $\pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1/3, \pm 1/4, \dots$ vb. değerler almaktadır (de Oliveira Valério, 2005; Shrivastava & Varshney, 2015). Diğer kesirli dereceli yaklaşımlar ise üslerin toplanması yasasıyla hesaplanır. Örneğin; $s^{0.3} = s^{0.1} s^{0.2}$ gibi. Hesaplanan yaklaşımlar Çizelge 1’de verilmiştir.

2.3.4. Matsuda Metodu

Sürekli kesir açılımındaki sonuçlara benzer bir yaklaşım sergilenen bu yöntemde (Matsuda & Fujii, 1993), irrasyonel bir fonksiyonda logaritmik aralıklı noktalar belirlenip rasyonel bir fonksiyona yaklaştırılmasına dayanır (I. Podlubny et al., 2002). Seçilen noktaların s_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) olduğunu varsayarsak yaklaşım aşağıdaki gibidir:

$$H(s) = a_0 + \frac{s - s_0}{a_1 +} \frac{s - s_1}{a_2 +} \frac{s - s_2}{a_3 +} \dots \quad (2.25)$$

Burada;

$$a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s), \quad v_{i+1}(s) = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (2.26)$$

şeklinde olup hesaplanan tam sayı dereceli yaklaşımlar Çizelge 11 - Çizelge 19’da görülebilir.

2.3.5. Oustaloup Metodu

Oustaloup tarafından önerilen bu yöntem (Alain Oustaloup et al., 2000), belirli bir frekans aralığında (ω_l, ω_h) kutupların ve sıfırların özyinelemeli ve geometrik dağılıma sahip seri bir filtre dizisi kullanarak s^α ’nın tam sayı dereceli transfer fonksiyonunu vermektedir (Deniz et al., 2020). Bu özyinelemeli filtre aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$G(s) = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (2.27)$$

Bu filtrede $2N + 1$ tane sıfır ve kutup olup frekanslar geometrik olarak dağıldığından Oustaloup modelinin derecesi tek sayıdır. Burada ω'_k , ω_k ve K sırasıyla sıfır, kutup ve seri filtre dizisinin kazancıdır. Bunlar aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\omega'_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)/2N+1} \quad (2.28)$$

$$\omega_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)/2N+1} \quad (2.29)$$

$$K = \omega_h^\alpha \quad (2.30)$$

Hesaplanan tek sayı dereceli yaklaşımlar Çizelge 2 - Çizelge 10'da görülebilir.

2.3.6. Charef Metodu

Oustaloup'un yöntemine çok yakın olan bu yöntem (Charef et al., 1992), aşağıda verilen $H(s)$ fonksiyonunun polinomların bölümü şeklindeki yaklaşıma dayanmaktadır (Vinagre et al., 2000).

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad (2.31)$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.32)$$

Burada katsayılar, frekans alanında y dB'lik orijinal genlik yanıtından maksimum sapma elde edilecek şekilde hesaplanır:

$$a = 10^{y/10(1-\alpha)}, \quad b = 10^{y/10\alpha}, \quad ab = 10^{y/10\alpha(1-\alpha)} \quad (2.33)$$

Yaklaşık rasyonel fonksiyonun kutupları ve sıfırları aşağıdaki formüllerle elde edilir:

$$p_0 = p_T \sqrt{b}, \quad p_i = p_0 (ab)^i, \quad z_i = ap_0 (ab)^i \quad (2.34)$$

Kutup ve sıfır sayısı, istenilen bant genişliği ve aşağıda verilen hata kriteriyle ilişkilidir:

$$N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right\rceil + 1 \quad (2.35)$$

2.4. Tam Sayı Dereceli PID Kontrolörler

Klasik PID kontrolörünün kontrol teorisi alanında köklü bir geçmişi vardır. Hem geçici hem de kalıcı durum yanıtlarında iyileşme sağlayan “üç terimli” bu kontrolör tipi, gerçek kontrol problemlerinde etkili bir çözüm sağlamaktadır (Yun Li et al., 2006). PID kontrolörün asıl temeli mikroişlemcilerde dayanmaktadır. Özellikle endüstri alanında karşımıza çıkan klasik PID, basit yapısı, uygulama kolaylığı ve parametrelerinin ayarlanma elverişliliği nedeniyle literatürde önemli bir yeri olduğu söylenebilir (Borase et al., 2021; Zhuang & Atherton, 1993). Bu sistemlerin özellikle endüstri alanında kullanılmasının nedeni ikinci dereceden sistemlere rahatlıkla uygulanabilmesidir (Jung & Dorf, 1996). PID kontrolörün en önemli avantajları; geri besleme sağlaması ve integral etkisiyle kalıcı durum hatasını gidermesidir. Standart bir PID kontrolöründe transfer fonksiyonu paralel ve ideal form olmak üzere iki şekilde belirtilebilir. Bu iki form aşağıda verilmiştir:

1. Paralel form:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (2.36)$$

2. İdeal form:

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.37)$$

Burada k_p oransal kazanç sabiti, k_i integral kazanç sabiti, k_d türevsel kazanç sabiti, T_i integral zaman sabiti ve T_d türevsel zaman sabitidir. Paralel formdaki 3 işlevin görevleri aşağıdaki gibidir (Yun Li et al., 2006):

1. Oransal kazanç sabiti, tam geçirgen kazanç faktörü aracılığıyla hata sinyaliyle orantılı genel bir kontrol eylemi sağlar.

2. İntegral kazanç sabiti, düşük frekanslı kompanzasyon yoluyla kalıcı durum hatasını azaltır.

3. Türev kazanç sabiti, yüksek frekanslı kompanzasyon yoluyla geçici yanıtı iyileştirir.

1940'lardan beri bilim insanları PID kontrolör parametrelerinin hesaplanabilmesi için birçok metot sunmuştur (Zhuang & Atherton, 1993). Cohen-Coon reaksiyon eğrisi metodu, Ziegler-Nichols metodu, Kappa-Tau metodu ve Åström-Hägglund metodu bunlara örnek olarak gösterilebilir (Tan, 2005; Valério & da Costa, 2006). İlerleyen zamanlarda Ho ve diğerleri tarafından ele alınan genelleştirilmiş Hermite-Biehler teoremini temel alan çalışmalar sayesinde tüm kararlı P, PI ve PID kontrolör parametrelerinin elde edildiği pek çok veriye ulaşılmıştır (Datta et al., 2000; Tan, 2005). Fakat yine de ince ayar gerektiren sonuçlar için bu metotlar yetersiz kalmıştır. Bunun sonucunda kesirli dereceli PID kontrolör tasarımı ortaya çıkmıştır. Çünkü prensip olarak kesirli dereceli PID kontrolörü, standart PID kontrolörüne göre seçilecek üç yerine beş parametreye sahip olduğundan kontrolör tasarımında daha fazla esneklik sağlamaktadır. (Aseem & Subeekrishna, 2019).

2.5. Kesirli Dereceli PID Kontrolörler

Kesirli dereceli sistemleri daha verimli kontrol etmenin uygun yollarından birisi kesirli dereceli kontrolörleri kullanmaktır (I. Podlubny, 2003). Kesirli dereceli kontrolör yapısı ilk olarak Oustaloup'un CRONE kontrolörünü sunmasıyla birlikte ortaya çıkmıştır (I. Podlubny et al., 1997). CRONE kontrolör yapılan çalışmalarla daha da geliştirilmiş olup (Alain Oustaloup, 2014) MATLAB araç kutusu oluşturulmuştur (A. Oustaloup et al., 2000).

Daha sonra kesirli dereceli PID kontrolörü kavramının temelleri ise Podlubny tarafından atılmış olup günümüzde pek çok bilimsel makalenin konusu olmuştur (Igor Podlubny, 1999a). Bu tip kontrolörler, $PI^\lambda D^\mu$ şeklinde gösterilip tam sayı dereceli PID kontrolörünün paralel formundaki üç farklı parametrenin yanı sıra ekstra iki farklı parametreyle karşımıza çıkmaktadır. Bu parametreler; λ integral teriminin kesir derecesi ve μ türev teriminin kesir derecesidir. Parametre sayısının artması kontrolörün ayarlanmasına yönelik çalışmaları daha da karmaşık hale getirmektedir. Fakat yine de sistemin kararlılığı,

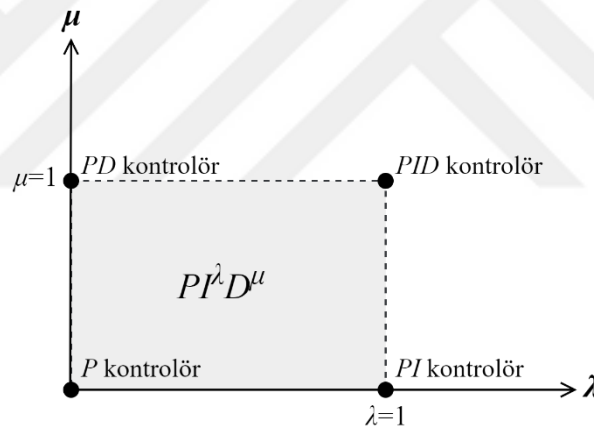
performansı ve dayanıklılığı açısından esnek yapıda olan kesirli dereceli PID'yi kullanmak bizlere avantaj sağlamaktadır. Kesirli dereceli PID kontrolörünün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu = \frac{k_d s^{(\lambda+\mu)} + k_p s^\lambda + k_i}{s^\lambda} \quad (2.38)$$

Burada λ ve μ değerleri, $(0, 2)$ aralığında olan kesirli derecelerdir (Hamamci, 2008). Kesirli dereceli PID kontrolörünün kontrol sinyali $u(t)$ 'nin zaman düzleminde gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i D^{-\lambda} e(t) + k_d D^\mu e(t) \quad (2.39)$$

Eğer Denklem 2.38'de $\lambda = 0, \mu = 0$ alınırsa P kontrolör, $\lambda = 1, \mu = 0$ alınırsa PI kontrolör, $\lambda = 0, \mu = 1$ alınırsa PD kontrolör, $\lambda = 1, \mu = 1$ alınırsa PID kontrolör elde edilir. Bunun genel hali Şekil 2.1'de görülebilir:



Şekil 2.1. P-I-D düzlemi

$\lambda \geq 2$ veya $\mu \geq 2$ ise kontrolör, PID yapısına göre farklı bir formda olan daha yüksek dereceli bir yapıya dönüştürülür (Hamamci, 2008). Ayrıca kesirli dereceli PID kontrolörlere göre klasik bir PID yapısı aşağıdaki gibi genişletilebilir (Saptarshi Das et al., 2011):

1. Tam Sayı Dereceli Oransal İntegral Türev kontrolörü:

$$C^I(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.40)$$

2. Kesirli Dereceli Oransal İntegral kontrolörü:

$$C^{II}(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} \quad (2.41)$$

3. Kesirli Dereceli [Oransal İntegral] kontrolörü:

$$C^{III}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right)^\lambda \quad (2.42)$$

4. Kesirli Dereceli [Oransal İntegral Türev] kontrolörü:

$$C^{IV}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right)^\lambda \quad (2.43)$$

Burada PI/PID kontrolör ailesi gösterilmiştir. Denklem 2.40, Denklem 2.41 ve Denklem 2.42'deki transfer fonksiyonları üç ayar parametresine sahip olup Denklem 2.43 ise dört ayar parametresine sahiptir.

2.6. Zaman Gecikmeli Sistemler için Padé Yaklaşımı

Zaman gecikmesine dayalı analiz çok eski ama günümüzde de ilgi görmekte olan bir konudur. Her geçen gün zaman gecikmeli sistemler üzerine yapılan araştırmalar genişleyip daha popüler olmaktadır (Deng et al., 2022; Sharma & Padhy, 2022). Bu konudaki araştırmalar, konferanslarda ve seminerlerde tartışma konusu olup kontrol ve sistem dergilerindeki özel sayılarda ve kitaplarda yayınlanmıştır (Chiasson & Loiseau, 2007). Böyle sistemlerin kararlılık, birim adım yanıtı gibi kontrol kriterlerini incelemek kolay değildir. Bu tür bir zorluğun üstesinden gelmek için en yaygın olarak önerilen çözümlerden biri, zaman gecikmesi operatörünü seçilen yöntemle rasyonelleştirmek ve ortaya çıkan yaklaşık sistemi analiz etmektir (Wei et al., 2016).

Ayrıca son yıllarda bu tür analizlerde kesirli dereceli sistemlerin kullanılması kaçınılmazdır. Zaman gecikmesine dayalı analizde kesirli dereceli operatörü kullanmak işlemleri daha kompleks hale getirmektedir. Şu ana kadar literatürde kesirli dereceli sistemlerin rasyonel yaklaşımlarının elde edildiği birçok titiz çalışma yer almıştır. Padé yaklaşımı ise, zaman gecikmeli sistemler arasında en yaygın kullanılan yaklaşımlardan biridir. Bu tezde zaman gecikmesi terimi yerine kullanacağımız yaklaşımlardan birisi Padé yaklaşımıdır. Bölüm 4'teki örneklerde görüldüğü üzere önerilen algoritma kesirli dereceli sistemler için oldukça yararlı sonuçlar sağlamaktadır.

2.6.1. Padé Yaklaşımının Matematiksel Gösterimi

Zaman gecikmesi teriminin Padé yaklaşımıyla genel gösterimi Denklem 2.44'teki gibidir (Xueyan & Zheng, 2015):

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12} + \dots + (-1)^n \frac{n! \tau^n s^n}{(2n)!}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12} + \dots + \frac{\tau^n s^n}{n! 2^n}} \quad (2.44)$$

Eğer yaklaşım derecesini 1 alırsak ($n=1$);

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} = \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s} \quad (2.45)$$

Eğer yaklaşım derecesini 2 alırsak ($n=2$);

$$e^{-\tau s} = \frac{2 - \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{6}}{2 + \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{6}} = \frac{12 - 6\tau s + \tau^2 s^2}{12 + 6\tau s + \tau^2 s^2} \quad (2.46)$$

elde edilir.

Yaklaşım derecesini ne kadar artırırsak orijinal sisteme o kadar yakın bir sonuç elde edilecektir.

2.7. Dışbükey Kararlılık Bölgesinin Ağırlık Merkezi Yöntemi

Bu bölümün amacı; kararlılık sınır eğrisi yöntemi (Tan, 2005; Tan et al., 2006) kullanılarak zaman gecikmeli sistemler için tüm kararlılığı sağlayan kesirli dereceli PI kontrolörün parametrelerini hesaplamak ve kesirli dereceli PI kontrolör yapısı için Onat tarafından tasarlanan bir yöntemi yeniden ele almaktır (Onat, 2018). Daha önce farklı kontrolör çeşitleriyle ağırlıklı geometrik merkez (AGM) yönteminin kullanıldığı tasarım metodunun yerini bu çalışmada dışbükey (konveks) kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi adlı yeni bir yöntem almıştır. AGM yöntemi de Onat'ın literatüre kazandırdığı bir metod olup konuya dair temel çalışmalar (Onat, 2013, 2014; Onat, Hamamci, et al., 2012;

Ozyetkin et al., 2018)'de yer almaktadır. Tüm bu çalışmalarda AGM metodunun oldukça iyi sonuçlar verdiği ve kompleks metotlara göre basitliği ve dayanıklı (robust) olması gibi sebeplerle üstünlük sağladığı açıkça görülmektedir. Yöntem, tam sayı ve kesirli dereceli kontrol sistem tasarımı alanında literatüre önemli katkılar sağlamıştır. Bu yöntemin herhangi bir karmaşık grafiksel yöntem kullanılmadan kontrolör parametrelerinin hesaplanması ve kapalı döngü sisteminin kararlılığını sağlaması açısından önemli avantajları vardır.

AGM metodunun farklı bir yorumu olan dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi seçilen kontrolörün parametrelerinin oluşturduğu kararlılık sınır eğrisine ve bu parametrelere bağlı olan ağırlık merkezi koordinatlarının elde edilmesine dayanmaktadır (Onat, 2018). Fakat eğer AGM hesaplanmak istenirse kararlılık sınır eğrisini oluşturan tüm frekansa bağlı noktaların kullanılması gereklidir (Onat, 2018). Bu yüzden AGM yöntemi ekstra bir hesaplama yükü ve pratik amaçlar için dezavantaj getirmektedir (Onat, 2018). İki yöntem karşılaştırıldığı takdirde önerilen prosedürün hesaplama yükü AGM yöntemine kıyasla çok düşüktür (Onat, 2018). Bu yöntemin ilk uygulaması (Onat, 2018)'de PI-PD kontrolör tasarımı için kullanılmıştır. Yöntemin bir diğer uygulaması ise (Ozyetkin et al., 2020)'de kesirli dereceli PD kontrolör için ilk kez denenmiştir. Yapılan çalışmalarda görüldüğü üzere önerilen algoritma hem tam sayı hem de kesirli dereceli kontrolörler için oldukça iyi sonuçlar sağlamaktadır. Bu çalışma için dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi (k_p, k_i) düzleminde hesaplanmaktadır. Önerilen tasarım yöntemi aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Öncelikle kesirli dereceli PI kontrolörünün derecesine karar verilir. Yapılan çalışmalar λ değerini 0.5 ile 1.5 arasında tutmanın yararlı olacağını göstermektedir (Ozyetkin, 2018). Duruma göre $\lambda \in [0.1, 1.5]$ alınabilir. Ancak bu araştırmaya açık bir konudur.

Adım 2: Adım 1'de λ değeri belirlendikten sonra kesirli dereceli PI kontrolörünün kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzleminde Bölüm 3'te verilen Denklem 3.30 ve Denklem 3.31 ile elde edilir.

Sonuç 1: Kararlılık sınır eğrisi ve $k_i = 0$ çizgisi, (k_p, k_i) düzlemini kararlı ve kararsız birden fazla bölgeye bölebilir. Bundan dolayı, her bölge içinde test noktaları seçilerek kararlı (k_p, k_i) parametrelerinin bulunup bulunmadığı kontrol edilmelidir.

Adım 3: Dışbükey kararlılık bölgesi, seçilen kararlı kontrolörün parametrelerinin oluşturduğu kararlılık sınır eğrisinin köşe ve tepe noktaları kullanılarak elde edilmektedir

(Onat, 2018). Kesirli dereceli PI kontrolör için dışbükey kararlılık bölgesinin köşe ve tepe noktaları (k_p, k_i) düzleminde sırasıyla $(k_{p1}, k_{i1}), (k_{p2}, k_{i2}), \dots, (k_{pm}, k_{im})$ ve $(k'_{p1}, k'_{i1}), (k'_{p2}, k'_{i2}), \dots, (k'_{pn}, k'_{in})$ olarak ifade edilmektedir. Burada, m ve n sırasıyla köşe ve tepe noktalarının sayısını göstermektedir. Bu değerler Adım 2’de elde edilen kararlılık sınır eğrisinden elde edilir. Böylece dışbükey kararlılık bölgesi belirlenir.

Adım 4: Adım 3’te elde edilen dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi koordinatları olan $(k_{pc}, k_{ic}), (k_p, k_i)$ düzleminde Denklem 2.47 ve Denklem 2.48 kullanılarak hesaplanır.

$$k_{pc} = \frac{\sum_{i=1}^m k_{pi} + \sum_{i=1}^n k'_{pi}}{m+n} \quad (2.47)$$

$$k_{ic} = \frac{\sum_{i=1}^m k_{ii} + \sum_{i=1}^n k'_{ii}}{m+n} \quad (2.48)$$

Burada (k_{pc}, k_{ic}) , ağırlık merkezi denetleyici parametreleri olup aynı zamanda kesirli dereceli PI denetleyici parametreleridir (Onat, 2018). Böylece PI^λ kontrolör parametreleri hesaplanır.

Sonuç 2: Kullanılan metodun hesaplama yükü az olduğundan karmaşık grafiksel metotlara göre oldukça avantajlıdır. Bu yönüyle AGM metoduna göre de kullanım kolaylığı sağlamaktadır. Üstelik kapalı çevrim kararlılığı da garantilemektedir.

Yöntemi daha iyi açıklayabilmek için Bölüm 4’te bu yöntemin örnekleri verilmiştir.

2.8. Rekasius Dönüşümü

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizi, yıllardır birçok alanda incelenen bir konudur. Çevremizde gördüğümüz pek çok sistemde gecikmeler mevcut olup günlük hayatta endüstriyel sistemlerde, kimyasal ve biyolojik süreçlerde, iletişim sistemlerinde, elektrik şebekeleri, kontrol sistemleri gibi alanlarda karşımıza çıkmaktadır (S. Pakzad & Pakzad, 2011). Zaman gecikmesi kavramı, ilk olarak s-dalgası kuantum saçılması konusuyula birlikte Eisenbud ve Wigner tarafından tanıtılmıştır (de Carvalho & Nussenzveig, 2002). Aslında bu sistemler belirsiz bir yapıda olup sistemi kararlı yapabilirler veya tam tersine bozulmaya yol

açabilirler (Loiseau et al., 2009). Bu terim, doğrusal olmayan bir terim olduğundan karakteristik denklemin köklerini bulmayı ve sistemin kararlılık analizini zorlaştırmaktadır (Naveed et al., 2019). Çünkü karakteristik denkleminde $e^{-k\tau s}$, ($k=0,1,2,\dots$) terimi içeren denklemler transandantal (deneyüstü) denklemler olup sonsuz sayıda kök içerirler (Ebenbauer & Allgöwer, 2006). Böyle sistemlerin kararlı olabilmesi için karakteristik denklemin köklerinin kompleks s-düzleminin sol yarısında olması gerekmektedir. Literatüre bakıldığı zaman çoğunlukla denklemlerin elde edilmesinde zaman gecikmesi terimi için Euler açılımının yani $e^{-\tau j\omega} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)$ 'nin kullanıldığı görülmektedir. Buradaki problem, Euler açılımında zaman gecikmesi teriminin bağımsız bir eleman olarak ortaya konulamaması olup bu da kararlılık analizinde zorluk çıkarmaktadır (Hua et al., 2014). Ayrıca, literatürde Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin kesirli dereceli PID kontrolörlere uygulandığı çalışmalar sınırlıdır. Kesirli dereceli zaman gecikmeli sistemlerde kararlılık analizi, tam sayı dereceli sistemlerden daha karmaşıktır. Bu dönüşümleri kesirli dereceli sistemlere uygulamak ciddi bir matematiksel yük getirmektedir. Buradaki amaç, Rekasius ve Thowsen dönüşümleri sayesinde sonsuz sayıda çözümü olan karakteristik denklemlerin sonlu polinom denklemlerine indirgemek ve bu denklemleri sonlu sayıda çözüme ulaştırmaktır (Walton & Marshall, 1987).

Rekasius dönüşümünü kullanmanın avantajları şunlardır (Gu et al., 2005; Gündüz et al., 2019):

1. Karakteristik denklemin derecesini artırmadan veya azaltmadan üstel terim içermeyen basit bir polinoma dönüştürmektedir.
2. Zaman gecikmeli sistemlerde, kararlılık problemini etkili bir biçimde zaman gecikmesiz bir sisteme indirgeyip sadece tek değişkenli bir polinomun köklerinin hesaplanmasını sağlamaktadır.
3. Dönüştürülen polinomun sanal eksen üzerindeki köklerini hesaplamak yerine gerçek eksen üzerindeki köklerinin hesaplanması ile kararlılık analizini gerçekleştirmektedir.
4. Routh-Hurwitz testi ve kök-yer eğrisi gibi klasik kararlılık kriterlerinin uygulanmasına olanak sağlamaktadır.

Rekasius dönüşümü ile ilgili bazı çalışmalar (Fazelinia et al., 2007; Gündüz et al., 2019; Jia et al., 2007; Olgac & Sipahi, 2004; Sönmez & Ayasun, 2019)'da mevcuttur. (Fazelinia et al., 2007)'de "yapı taşı" konseptiyle çoklu zaman gecikmeli sistemlerin dayanıklılık kararlılık analizi yapılmıştır. (Gündüz et al., 2019)'da zaman gecikmeli mikro-şebeke sistemlerin

kazanç ve faz payı tabanlı kararlılık analizi yapılmıştır. (Jia et al., 2007)'de güç sisteminde gecikme payını belirlemek için basit bir yaklaşım önerilmiştir. (Olgac & Sipahi, 2004)'te doğrusal zamanla değişmeyen nötr zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığıyla ilgili bir yöntem sunulmuştur. (Sönmez & Ayasun, 2019)'da ise Rekasius yöntemi kullanılarak zaman gecikmeli jeneratör uyarma kontrol sisteminin maksimum zaman gecikmesinin hesaplanması ile ilgili bir çalışma yapılmıştır. Rekasius yerine koyma metodunun uygulaması integral dereceli sistemlerde üstünlük sağlamıştır (Hua et al., 2014). Burada dikkat edilmesi gereken husus, bu dönüşümler herhangi bir yaklaşım olmayıp $s = \mp j\omega$ için zaman gecikmesi teriminin tam bir ifadesidir (M. A. Pakzad & Pakzad, 2017).

Rekasius dönüşümü, Möbius dönüşümünün belirli bir parçası olarak görülmektedir (Valmorbida et al., 2019). Bu dönüşüm sanal köklerin hesaplanmasını cebirsel hale getiren bilineer bir dönüşüm olup Rekasius tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Rekasius, 1980):

$$e^{-\tau s} = \frac{1-Ts}{1+Ts}, \tau \in R^+, T \in R \quad (2.49)$$

Yukarıdaki dönüşüm $s = j\omega$, $\omega \in R$ için geçerli olup burada T değeri sözde gecikme (pseudo-delay) olarak adlandırılır. Burada Rekasius yerine koyma metodunun $\tau = 2T$ için birinci derece Padé yaklaşımıyla eş değer olduğunu söyleyebiliriz. Fakat bu yöntemin Padé yaklaşımından farkı gecikmenin $\tau = 2T$ yerine Denklem 2.50'deki asimetrik eşleşmeyle belirlenmesi olup bu asimetrik eşleşme gecikme payı hatasını ortadan kaldırır (Cao et al., 2021). Buna göre, τ ile T arasındaki ilişki Denklem 2.50'deki gibi ifade edilir:

$$\tau = \frac{2}{\omega} \left(\tan^{-1}(\omega T) \mp \ell \pi \right), 0 \leq \tan^{-1}(\cdot) < \pi, \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

Denklem 2.50, $s = j\omega$ ile ilişkili olarak belirlenen ω için sabit bir T değeri, sonsuz sayıda τ değeri meydana getirebilir (Olgac & Sipahi, 2002, 2004). Tersine aynı ω için, belirli bir τ değeri yalnızca bir T değerine karşılık gelir (Olgac & Sipahi, 2002). Buna göre bu çalışmadaki transfer fonksiyonlarında sabit bir τ değeri olduğundan T , Denklem 2.50'ye göre aşağıdaki gibi yalnız bırakılabilir:

$$T = \frac{1}{\omega} \tan \left(\frac{\tau \omega}{2} \mp \ell \pi \right), \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

Denklem 2.51, $\tau \omega / 2 \mp \ell \pi \neq \pi / 2$ için geçerli olup τ değerlerinde sanal sıfırların önlenmesi için $T \rightarrow \infty$ veya $e^{-\tau s} = -1$ şartları göz önünde bulundurulmalıdır (Hertz et al.,

1984). Çünkü Denklem 2.49, $e^{-j\omega\tau} \neq -1$ için geçerlidir ve sadece $T \rightarrow \infty$ iken $(1 - j\omega T)/(1 + j\omega T) = -1$ değerine ulaşmaktadır (Münz et al., 2009). Eğer bir sistemin transfer fonksiyonunun zaman gecikmesi teriminde $\tau=1$ olup $\ell=0$ alırsak T değeri Denklem 2.52'deki gibi elde edilir. Buradaki eş değer terimler tanjantın yarım açı formüllerinden elde edilmiştir.

$$T = \frac{1}{\omega} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sin \omega}{\omega(1 + \cos \omega)} = \frac{1 - \cos \omega}{\omega \sin \omega} \quad (2.52)$$

2.9. Thowsen Dönüşümü

Thowsen, Rekasius dönüşümünün kullanılmasının hatalı sonuçlara yol açabileceğini öne sürmüştür. Çünkü Thowsen, τ 'nin $T > 0$ için $e^{-j\omega\tau}$, $(0 \leq \omega < \infty)$ 'yu birim çembere eşlerken Rekasius dönüşümünün ise sadece yarım bir çembere eşlediğini belirtmiştir (Thowsen, 1981a). Hertz, T 'ye bağlı bir kararlılık testi vermiş olup T 'nin sadece pozitif değerlerini incelemiştir (Hertz et al., 1984). Fakat MacDonald, T 'nin tüm gerçek değerlerinin alınmasını önermiş olup ve bunun tüm kararlılık kriterlerini etkilediğini örneklerle açıklamıştır (MacDonald, 1985).

Bu dönüşümün Rekasius dönüşümünden farkı ise iki görüntü noktası kümesinin tüm $s = j\omega$, $\omega > 0$, $T > 0$ ve $\tau > 0$ değerleri için aynı olmamasıdır (MacDonald, 1985; Thowsen, 1981b). Thowsen, Rekasius dönüşümü yerine daha karmaşık bir Routh-Hurwitz analizini göze alarak Denklem 2.53'ü kullanmayı önermiştir (MacDonald, 1985). Dolayısıyla birim çember üzerindeki $e^{-j\omega\tau}$ noktası, bazı $T \in [0, \infty)$ değerleri için aşağıdaki dönüşümle gösterilebilir (Thowsen, 1981a):

$$e^{-\tau s} = \left[\frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right]^2 = \frac{1 - 2Ts + T^2 s^2}{1 + 2Ts + T^2 s^2} \quad (2.53)$$

Ayrıca Thowsen, zaman gecikmesi terimi yerine bu dönüşümü kullanarak doğrusal diferansiyel-fark sistemlerinin asimptotik kararlılığının genellikle sonlu boyutlu sistemlerle ilişkili olduğunu ve kararlılık testleri ile doğrulanabileceğini de kanıtlamıştır (Thowsen, 1981b). Fakat $T \rightarrow \infty$ durumu için basit bir test uygulandığı sürece Denklem 2.49'un kullanımının pek fazla sorun olmayacağı düşünülmektedir (MacDonald, 1985). τ ile T 'nin

arasındaki ilişki kıyaslanacak olursa Denklem 2.50'de $2/\omega$ terimi $4/\omega$ ile değiştirilmelidir.

$$\tau = \frac{4}{\omega} \left(\tan^{-1}(\omega T) \mp \ell \pi \right), \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

Buna göre T , Denklem 2.55'teki gibi yalnız bırakılabilir:

$$T = \frac{1}{\omega} \tan \left(\frac{\tau \omega}{4} \mp \ell \pi \right), \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.55)$$

Eğer bir sistemin transfer fonksiyonunun zaman gecikmesinde $\tau=1$ olup $\ell=0$ alırsak, T değeri Denklem 2.56'daki gibi elde edilebilir. Buradaki eş değer terimler daha önce Rekasius dönüşümünde belirtildiği gibi tanjantın yarım açı formüllerinden elde edilmiştir.

$$T = \frac{1}{\omega} \tan \left(\frac{\omega}{4} \right) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega(1+\cos(\omega/2))} = \frac{1-\cos(\omega/2)}{\omega \sin(\omega/2)} \quad (2.56)$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Rasyonel Yaklaşım

Bölüm 2.3'te kesirli dereceli sistemlerin rasyonel yaklaşımlarının hesaplanması için birkaç yöntem verilmiştir. Bu tez çalışmasında ise s^α , ($0 < \alpha < 1$)'nin realizasyonu için önemli yöntemlerden biri olan sürekli kesir açılımı (SKA) yöntemi uygulanmıştır. Fakat bu süreç oldukça karmaşık matematiksel işlemler gerektirmektedir. Bu yöntem Denklem 3.1'deki gibi ifade edilir (Krishna & Reddy, 2008):

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1-} \frac{\alpha x}{1+} \frac{(1+\alpha)x}{2+} \frac{(1-\alpha)x}{3+} \dots \frac{(n+\alpha)x}{2+} \frac{(n-\alpha)x}{(2n+1)+} \dots \quad (3.1)$$

Yukarıda devam eden sürekli kesir açılımı, sonlu karmaşık s -düzleminde $x = -\infty$ ile $x = -1$ arasında negatif gerçekteksen boyunca yakınsar (Krishna, 2011). Denklem 3.1'de $x = s - 1$ yazıldığında s^α 'nin rasyonel yaklaşımları elde edilebilir. Eğer $1/s^\alpha$ 'nin rasyonel yaklaşımını elde etmek istersek bulunan yaklaşımların tersine çevrilmesi gerekir. Burada terim sayısını uygun bir yerde kesmek gerekir. İlk olarak literatürde α 'ya bağlı birinci dereceden dördüncü dereceye kadar olan tam sayı dereceli yaklaşımlar (Özyetkin & Tan, 2010)'da verilmiştir. Daha sonra (Krishna, 2011)'de birinci dereceden beşinci dereceye kadar olan yaklaşımlar verilmiştir. Bu tezde ise çalışmalar genişletilerek birinci dereceden onuncu dereceye kadar olan tam sayı dereceli yaklaşımlar hesaplanmıştır. (Zawadzki & Włodarczyk, 2017)'de de α 'ya bağlı birinci dereceden onuncu dereceye kadar olan yaklaşımlar verilmiştir. Fakat, (Zawadzki & Włodarczyk, 2017)'deki yaklaşımların katsayılarında ve işaretlerinde aşağıda elde edilen denklemlere göre bazı farklılıklar bulunmaktadır. Yapılan çalışmalar, yaklaşımın derecesi arttıkça orijinal sistemi daha iyi yakalayan sonuçların elde edildiğini göstermektedir. s^α 'nin daha yüksek dereceli yaklaşımları için genel gösterimi Denklem 3.2'deki gibi ifade edilebilir:

$$s^\alpha \cong \frac{\sum_{k=0}^N X_{Nk}(\alpha) s^{N-k}}{\sum_{k=0}^N Y_{Nk}(\alpha) s^{N-k}} \quad (3.2)$$

Burada N yaklaşımın derecesi olup $X_{Nk}(\alpha)$ ve $Y_{Nk}(\alpha)$ sırasıyla yaklaşımın pay ve payda polinomudur. Denklem 3.1 sayesinde α 'ya bağlı olarak elde edilen yaklaşım elemanları Denklem 3.3 - Denklem 3.12'de sırasıyla elde edilmiştir.

Birinci dereceden yaklaşım ($N=1$) için;

$$\begin{aligned} X_{10} &= Y_{11} = \alpha + 1 \\ X_{11} &= Y_{10} = -\alpha + 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

İkinci dereceden yaklaşım ($N=2$) için;

$$\begin{aligned} X_{20} &= Y_{22} = \alpha^2 + 3\alpha + 2 \\ X_{21} &= Y_{21} = -2\alpha^2 + 8 \\ X_{22} &= Y_{20} = \alpha^2 - 3\alpha + 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Üçüncü dereceden yaklaşım ($N=3$) için;

$$\begin{aligned} X_{30} &= Y_{33} = \alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6 \\ X_{31} &= Y_{32} = -3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 27\alpha + 54 \\ X_{32} &= Y_{31} = 3\alpha^3 - 6\alpha^2 - 27\alpha + 54 \\ X_{33} &= Y_{30} = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 11\alpha + 6 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dördüncü dereceden yaklaşım ($N=4$) için;

$$\begin{aligned} X_{40} &= Y_{44} = \alpha^4 + 10\alpha^3 + 35\alpha^2 + 50\alpha + 24 \\ X_{41} &= Y_{43} = -4\alpha^4 - 20\alpha^3 + 40\alpha^2 + 320\alpha + 384 \\ X_{42} &= Y_{42} = 6\alpha^4 - 150\alpha^2 + 864 \\ X_{43} &= Y_{41} = -4\alpha^4 + 20\alpha^3 + 40\alpha^2 - 320\alpha + 384 \\ X_{44} &= Y_{40} = \alpha^4 - 10\alpha^3 + 35\alpha^2 - 50\alpha + 24 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Beşinci dereceden yaklaşım ($N=5$) için;

$$\begin{aligned} X_{50} &= Y_{55} = -\alpha^5 - 15\alpha^4 - 85\alpha^3 - 225\alpha^2 - 274\alpha - 120 \\ X_{51} &= Y_{54} = 5\alpha^5 + 45\alpha^4 + 5\alpha^3 - 1005\alpha^2 - 3250\alpha - 3000 \\ X_{52} &= Y_{53} = -10\alpha^5 - 30\alpha^4 + 410\alpha^3 + 1230\alpha^2 - 4000\alpha - 12000 \\ X_{53} &= Y_{52} = 10\alpha^5 - 30\alpha^4 - 410\alpha^3 + 1230\alpha^2 + 4000\alpha - 12000 \\ X_{54} &= Y_{51} = -5\alpha^5 + 45\alpha^4 - 5\alpha^3 - 1005\alpha^2 + 3250\alpha - 3000 \\ X_{55} &= Y_{50} = \alpha^5 - 15\alpha^4 + 85\alpha^3 - 225\alpha^2 + 274\alpha - 120 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Altıncı dereceden yaklaşım ($N=6$) için;

$$\begin{aligned}
X_{60} = Y_{66} &= \alpha^6 + 21\alpha^5 + 175\alpha^4 + 735\alpha^3 + 1624\alpha^2 + 1764\alpha + 720 \\
X_{61} = Y_{65} &= -6\alpha^6 - 84\alpha^5 - 210\alpha^4 + 2100\alpha^3 + 14616\alpha^2 + 33264\alpha + 25920 \\
X_{62} = Y_{64} &= 15\alpha^6 + 105\alpha^5 - 735\alpha^4 - 6405\alpha^3 + 2520\alpha^2 + 94500\alpha + 162000 \\
X_{63} = Y_{63} &= -20\alpha^6 + 1540\alpha^4 - 37520\alpha^2 + 288000 \\
X_{64} = Y_{62} &= 15\alpha^6 - 105\alpha^5 - 735\alpha^4 + 6405\alpha^3 + 2520\alpha^2 - 94500\alpha + 162000 \\
X_{65} = Y_{61} &= -6\alpha^6 + 84\alpha^5 - 210\alpha^4 - 2100\alpha^3 + 14616\alpha^2 - 33264\alpha + 25920 \\
X_{66} = Y_{60} &= \alpha^6 - 21\alpha^5 + 175\alpha^4 - 735\alpha^3 + 1624\alpha^2 - 1764\alpha + 720
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Yedinci dereceden yaklaşım ($N=7$) için;

$$\begin{aligned}
X_{70} = Y_{77} &= \alpha^7 + 28\alpha^6 + 322\alpha^5 + 1960\alpha^4 + 6769\alpha^3 + 13132\alpha^2 + 13068\alpha + 5040 \\
X_{71} = Y_{76} &= -7\alpha^7 - 140\alpha^6 - 742\alpha^5 + 2800\alpha^4 + 45857\alpha^3 + 193900\alpha^2 + 358092\alpha + 246960 \\
X_{72} = Y_{75} &= 21\alpha^7 + 252\alpha^6 - 798\alpha^5 - 20160\alpha^4 - 46851\alpha^3 + 337428\alpha^2 + 1741068\alpha + 2222640 \\
X_{73} = Y_{74} &= -35\alpha^7 - 140\alpha^6 + 3850\alpha^5 + 15400\alpha^4 - 136115\alpha^3 - 544460\alpha^2 + 1543500\alpha + 6174000 \\
X_{74} = Y_{73} &= 35\alpha^7 - 140\alpha^6 - 3850\alpha^5 + 15400\alpha^4 + 136115\alpha^3 - 544460\alpha^2 - 1543500\alpha + 6174000 \\
X_{75} = Y_{72} &= -21\alpha^7 + 252\alpha^6 + 798\alpha^5 - 20160\alpha^4 + 46851\alpha^3 + 337428\alpha^2 - 1741068\alpha + 2222640 \\
X_{76} = Y_{71} &= 7\alpha^7 - 140\alpha^6 + 742\alpha^5 + 2800\alpha^4 - 45857\alpha^3 + 193900\alpha^2 - 358092\alpha + 246960 \\
X_{77} = Y_{70} &= -\alpha^7 + 28\alpha^6 - 322\alpha^5 + 1960\alpha^4 - 6769\alpha^3 + 13132\alpha^2 - 13068\alpha + 5040
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Sekizinci dereceden yaklaşım ($N=8$) için;

$$\begin{aligned}
X_{80} = Y_{88} &= \alpha^8 + 36\alpha^7 + 546\alpha^6 + 4536\alpha^5 + 22449\alpha^4 + \\
&\quad 67284\alpha^3 + 118124\alpha^2 + 109584\alpha + 40320 \\
X_{81} = Y_{87} &= -8\alpha^8 - 216\alpha^7 - 1848\alpha^6 + 504\alpha^5 + 110208\alpha^4 + \\
&\quad 788256\alpha^3 + 2572928\alpha^2 + 4110336\alpha + 2580480 \\
X_{82} = Y_{86} &= 28\alpha^8 + 504\alpha^7 + 168\alpha^6 - 47376\alpha^5 - 278628\alpha^4 + \\
&\quad 498456\alpha^3 + 9310112\alpha^2 + 30030336\alpha + 31610880 \\
X_{83} = Y_{85} &= -56\alpha^8 - 504\alpha^7 + 7224\alpha^6 + 75096\alpha^5 - 236544\alpha^4 - \\
&\quad 3630816\alpha^3 - 1746304\alpha^2 + 56899584\alpha + 126443520 \\
X_{84} = Y_{84} &= 70\alpha^8 - 12180\alpha^6 + 765030\alpha^4 - 20509720\alpha^2 + 197568000 \\
X_{85} = Y_{83} &= -56\alpha^8 + 504\alpha^7 + 7224\alpha^6 - 75096\alpha^5 - 236544\alpha^4 + \\
&\quad 3630816\alpha^3 - 1746304\alpha^2 - 56899584\alpha + 126443520 \\
X_{86} = Y_{82} &= 28\alpha^8 - 504\alpha^7 + 168\alpha^6 + 47376\alpha^5 - 278628\alpha^4 - \\
&\quad 498456\alpha^3 + 9310112\alpha^2 - 30030336\alpha + 31610880 \\
X_{87} = Y_{81} &= -8\alpha^8 + 216\alpha^7 - 1848\alpha^6 - 504\alpha^5 + 110208\alpha^4 - \\
&\quad 788256\alpha^3 + 2572928\alpha^2 - 4110336\alpha + 2580480 \\
X_{88} = Y_{80} &= \alpha^8 - 36\alpha^7 + 546\alpha^6 - 4536\alpha^5 + 22449\alpha^4 - \\
&\quad 67284\alpha^3 + 118124\alpha^2 - 109584\alpha + 40320
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dokuzuncu dereceden yaklaşım ($N=9$) için;

$$\begin{aligned}
X_{90} = Y_{99} &= \alpha^9 + 45\alpha^8 + 870\alpha^7 + 9450\alpha^6 + 63273\alpha^5 + 269325\alpha^4 + \\
&\quad 723680\alpha^3 + 1172700\alpha^2 + 1026576\alpha + 362880 \\
X_{91} = Y_{98} &= -9\alpha^9 - 315\alpha^8 - 3870\alpha^7 - 10710\alpha^6 + 206703\alpha^5 + 2494485\alpha^4 + \\
&\quad 12807720\alpha^3 + 35256060\alpha^2 + 50493456\alpha + 29393280 \\
X_{92} = Y_{97} &= 36\alpha^9 + 900\alpha^8 + 3600\alpha^7 - 88200\alpha^6 - 993132\alpha^5 - 1377180\alpha^4 + \\
&\quad 31347000\alpha^3 + 206128800\alpha^2 + 513962496\alpha + 470292480 \\
X_{93} = Y_{96} &= -84\alpha^9 - 1260\alpha^8 + 10080\alpha^7 + 234360\alpha^6 + 173628\alpha^5 - 13528620\alpha^4 - \\
&\quad 55051080\alpha^3 + 196187040\alpha^2 + 1578963456\alpha + 2560481280 \\
X_{94} = Y_{95} &= 126\alpha^9 + 630\alpha^8 - 28980\alpha^7 - 144900\alpha^6 + 2428398\alpha^5 + 12141990\alpha^4 - \\
&\quad 87748920\alpha^3 - 438744600\alpha^2 + 1152216576\alpha + 5761082880 \\
X_{95} = Y_{94} &= -126\alpha^9 + 630\alpha^8 + 28980\alpha^7 - 144900\alpha^6 - 2428398\alpha^5 + 12141990\alpha^4 + \\
&\quad 87748920\alpha^3 - 438744600\alpha^2 - 1152216576\alpha + 5761082880 \\
X_{96} = Y_{93} &= 84\alpha^9 - 1260\alpha^8 - 10080\alpha^7 + 234360\alpha^6 - 173628\alpha^5 - 13528620\alpha^4 + \\
&\quad 55051080\alpha^3 + 196187040\alpha^2 - 1578963456\alpha + 2560481280 \\
X_{97} = Y_{92} &= -36\alpha^9 + 900\alpha^8 - 3600\alpha^7 - 88200\alpha^6 + 993132\alpha^5 - 1377180\alpha^4 - \\
&\quad 31347000\alpha^3 + 206128800\alpha^2 - 513962496\alpha + 470292480 \\
X_{98} = Y_{91} &= 9\alpha^9 - 315\alpha^8 + 3870\alpha^7 - 10710\alpha^6 - 206703\alpha^5 + 2494485\alpha^4 - \\
&\quad 12807720\alpha^3 + 35256060\alpha^2 - 50493456\alpha + 29393280 \\
X_{99} = Y_{90} &= -\alpha^9 + 45\alpha^8 - 870\alpha^7 + 9450\alpha^6 - 63273\alpha^5 + 269325\alpha^4 - \\
&\quad 723680\alpha^3 + 1172700\alpha^2 - 1026576\alpha + 362880
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Onuncu dereceden yaklaşım ($N=10$) için;

$$\begin{aligned}
X_{100} = Y_{1010} &= \alpha^{10} + 55\alpha^9 + 1320\alpha^8 + 18150\alpha^7 + 157773\alpha^6 + 902055\alpha^5 + 3416930\alpha^4 + \\
&\quad 8409500\alpha^3 + 12753576\alpha^2 + 10628640\alpha + 3628800 \\
X_{101} = Y_{109} &= -10\alpha^{10} - 440\alpha^9 - 7260\alpha^8 - 42240\alpha^7 + 279510\alpha^6 + 6477240\alpha^5 + 49558960\alpha^4 + \\
&\quad 208039040\alpha^3 + 505375200\alpha^2 + 663696000\alpha + 362880000 \\
X_{102} = Y_{108} &= 45\alpha^{10} + 1485\alpha^9 + 11880\alpha^8 - 127710\alpha^7 - 2713095\alpha^6 - 12401235\alpha^5 + 64115370\alpha^4 + \\
&\quad 942731460\alpha^3 + 4265929800\alpha^2 + 8949204000\alpha + 7348320000 \\
X_{103} = Y_{107} &= -120\alpha^{10} - 2640\alpha^9 + 7920\alpha^8 + 570240\alpha^7 + 2799720\alpha^6 - 33208560\alpha^5 - 335908320\alpha^4 - \\
&\quad 138431040\alpha^3 + 9151084800\alpha^2 + 39688704000\alpha + 52254720000 \\
X_{104} = Y_{106} &= 210\alpha^{10} + 2310\alpha^9 - 55440\alpha^8 - 679140\alpha^7 + 4802490\alpha^6 + 73201590\alpha^5 - 111771660\alpha^4 - \\
&\quad 3425535960\alpha^3 - 4008034800\alpha^2 + 58677696000\alpha + 160030080000 \\
X_{105} = Y_{105} &= -252\alpha^{10} + 83160\alpha^8 - 10652796\alpha^6 + 661177440\alpha^4 - 19854217152\alpha^2 + 230443315200 \\
X_{106} = Y_{104} &= 210\alpha^{10} - 2310\alpha^9 - 55440\alpha^8 + 679140\alpha^7 + 4802490\alpha^6 - 73201590\alpha^5 - 111771660\alpha^4 + \\
&\quad 3425535960\alpha^3 - 4008034800\alpha^2 - 58677696000\alpha + 160030080000 \\
X_{107} = Y_{103} &= -120\alpha^{10} + 2640\alpha^9 + 7920\alpha^8 - 570240\alpha^7 + 2799720\alpha^6 + 33208560\alpha^5 - 335908320\alpha^4 + \\
&\quad 138431040\alpha^3 + 9151084800\alpha^2 - 39688704000\alpha + 52254720000 \\
X_{108} = Y_{102} &= 45\alpha^{10} - 1485\alpha^9 + 11880\alpha^8 + 127710\alpha^7 - 2713095\alpha^6 + 12401235\alpha^5 + 64115370\alpha^4 - \\
&\quad 942731460\alpha^3 + 4265929800\alpha^2 - 8949204000\alpha + 7348320000 \\
X_{109} = Y_{101} &= -10\alpha^{10} + 440\alpha^9 - 7260\alpha^8 + 42240\alpha^7 + 279510\alpha^6 - 6477240\alpha^5 + 49558960\alpha^4 - \\
&\quad 208039040\alpha^3 + 505375200\alpha^2 - 663696000\alpha + 362880000 \\
X_{1010} = Y_{100} &= \alpha^{10} - 55\alpha^9 + 1320\alpha^8 - 18150\alpha^7 + 157773\alpha^6 - 902055\alpha^5 + 3416930\alpha^4 - \\
&\quad 8409500\alpha^3 + 12753576\alpha^2 - 10628640\alpha + 3628800
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Bu denklemlerden elde edilen tam sayı dereceli transfer fonksiyonları Çizelge 3.1 - Çizelge 3.9'da sırasıyla verilmiştir:

Çizelge 3.1. $s^{0.1}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.1}$
1	$\frac{1.22s + 1}{s + 1.22}$
2	$\frac{1.351s^2 + 4.67s + 1}{s^2 + 4.67s + 1.351}$
3	$\frac{1.444s^3 + 11.421s^2 + 10.333s + 1}{s^3 + 10.333s^2 + 11.421s + 1.444}$
4	$\frac{1.518s^4 + 21.529s^3 + 44.596s^2 + 18.222s + 1}{s^4 + 18.222s^3 + 44.596s^2 + 21.529s + 1.518}$
5	$\frac{1.58s^5 + 35.19s^4 + 130.71s^3 + 122.28s^2 + 28.33s + 1}{s^5 + 28.33s^4 + 122.28s^3 + 130.71s^2 + 35.19s + 1.58}$
6	$\frac{1.63s^6 + 52.57s^5 + 306.67s^4 + 514.42s^3 + 272.89s^2 + 40.67s + 1}{s^6 + 40.67s^5 + 272.89s^4 + 514.42s^3 + 306.67s^2 + 52.57s + 1.63}$
7	$\frac{1.68s^7 + 73.8s^6 + 622.11s^5 + 1638.89s^4 + 1558.95s^3 + 531.87s^2 + 55.22s + 1}{s^7 + 55.22s^6 + 531.87s^5 + 1558.95s^4 + 1638.89s^3 + 622.11s^2 + 73.8s + 1.68}$
8	$\frac{1.72s^8 + 99.02s^7 + 1138.78s^6 + 4334.71s^5 + 6475.64s^4 + 3961.56s^3 + 941.68s^2 + 72s + 1}{s^8 + 72s^7 + 941.68s^6 + 3961.56s^5 + 6475.64s^4 + 4334.71s^3 + 1138.78s^2 + 99.02s + 1.72}$
9	$\frac{1.76s^9 + 128.32s^8 + 1930.97s^7 + 10028.61s^6 + 21647.13s^5 + 20798.23s^4 + 8864.82s^3 + 1551.78s^2 + 91s + 1}{s^9 + 91s^8 + 1551.78s^7 + 8864.82s^6 + 20798.23s^5 + 21647.13s^4 + 10028.61s^3 + 1930.97s^2 + 128.32s + 1.76}$
10	$\frac{1.79s^{10} + 161.8s^9 + 3085.89s^8 + 20970.81s^7 + 61761.61s^6 + 85739.65s^5 + 57394.02s^4 + 18015.02s^3 + 2418.68s^2 + 112.22s + 1}{s^{10} + 112.22s^9 + 2418.68s^8 + 18015.02s^7 + 57394.02s^6 + 85739.65s^5 + 61761.61s^4 + 20970.81s^3 + 3085.89s^2 + 161.8s + 1.79}$

Çizelge 3.2. $s^{0.2}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.2}$
1	$\frac{1.5s + 1}{s + 1.5}$
2	$\frac{1.833s^2 + 5.5s + 1}{s^2 + 5.5s + 1.833}$
3	$\frac{2.1s^3 + 14.67s^2 + 12s + 1}{s^3 + 12s^2 + 14.67s + 2.1}$
4	$\frac{2.316s^4 + 29.333s^3 + 56s^2 + 21s + 1}{s^4 + 21s^3 + 56s^2 + 29.333s + 2.316}$
5	$\frac{2.5s^5 + 50.17s^4 + 173.33s^3 + 151.67s^2 + 32.5s + 1}{s^5 + 32.5s^4 + 151.67s^3 + 173.33s^2 + 50.17s + 2.5}$
6	$\frac{2.68s^6 + 77.77s^5 + 424.21s^4 + 671.67s^3 + 335.83s^2 + 46.5s + 1}{s^6 + 46.5s^5 + 335.83s^4 + 671.67s^3 + 424.21s^2 + 77.77s + 2.68}$
7	$\frac{2.83s^7 + 112.63s^6 + 890.84s^5 + 2227.1s^4 + 2015s^3 + 651s^2 + 63s + 1}{s^7 + 63s^6 + 651s^5 + 2015s^4 + 2227.1s^3 + 890.84s^2 + 112.63s + 2.83}$
8	$\frac{2.98s^8 + 155.22s^7 + 1679.28s^6 + 6087.42s^5 + 8696.31s^4 + 5084s^3 + 1148s^2 + 82s + 1}{s^8 + 82s^7 + 1148s^6 + 5084s^5 + 8696.31s^4 + 6087.42s^3 + 1679.28s^2 + 155.22s + 2.98}$
9	$\frac{3.12s^9 + 205.97s^8 + 2921.11s^7 + 14483.86s^6 + 30002.28s^5 + 27694.42s^4 + 11316s^3 + 1886s^2 + 103.5s + 1}{s^9 + 103.5s^8 + 1886s^7 + 11316s^6 + 27694.42s^5 + 30002.28s^4 + 14483.86s^3 + 2921.11s^2 + 205.97s + 3.12}$
10	$\frac{3.24s^{10} + 265.27s^9 + 4774.9s^8 + 31036.85s^7 + 87937.74s^6 + 117701.28s^5 + 75936.31s^4 + 22901.42s^3 + 2932.5s^2 + 127.5s + 1}{s^{10} + 127.5s^9 + 2932.5s^8 + 22901.42s^7 + 75936.31s^6 + 117701.28s^5 + 87937.74s^4 + 31036.85s^3 + 4774.9s^2 + 265.27s + 3.24}$

Çizelge 3.3. $s^{0.3}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.3}$
1	$\frac{1.857s + 1}{s + 1.857}$
2	$\frac{2.5126s^2 + 6.5714s + 1}{s^2 + 6.5714s + 2.5126}$
3	$\frac{3.071s^3 + 19.1344s^2 + 14.1428s + 1}{s^3 + 14.1428s^2 + 19.1344s + 3.071}$
4	$\frac{3.57s^4 + 40.63s^3 + 71.546s^2 + 24.57s + 1}{s^4 + 24.57s^3 + 71.546s^2 + 40.63s + 3.57}$
5	$\frac{4.02s^5 + 72.75s^4 + 234.07s^3 + 191.51s^2 + 37.85s + 1}{s^5 + 37.85s^4 + 191.51s^3 + 234.07s^2 + 72.75s + 4.02}$
6	$\frac{4.44s^6 + 117.02s^5 + 597.82s^4 + 893.72s^3 + 420.88s^2 + 54s + 1}{s^6 + 54s^5 + 420.88s^4 + 893.72s^3 + 597.82s^2 + 117.02s + 4.44}$
7	$\frac{4.84s^7 + 174.84s^6 + 1299.96s^5 + 3085.76s^4 + 2655.19s^3 + 811.58s^2 + 73s + 1}{s^7 + 73s^6 + 811.58s^5 + 2655.19s^4 + 3085.76s^3 + 1299.96s^2 + 174.84s + 4.84}$
8	$\frac{5.22s^8 + 247.54s^7 + 2523.9s^6 + 8718.93s^5 + 11912.5s^4 + 6653.01s^3 + 1425.64s^2 + 94.85s + 1}{s^8 + 94.85s^7 + 1425.64s^6 + 6653.01s^5 + 11912.5s^4 + 8718.93s^3 + 2523.9s^2 + 247.54s + 5.22}$
9	$\frac{5.58s^9 + 336.35s^8 + 4504.27s^7 + 21338.45s^6 + 42428.78s^5 + 37625.52s^4 + 14731.68s^3 + 2335.15s^2 + 119.57s + 1}{s^9 + 119.57s^8 + 2335.15s^7 + 14731.68s^6 + 37625.52s^5 + 42428.78s^4 + 21338.45s^3 + 4504.27s^2 + 336.35s + 5.58}$
10	$\frac{5.92s^{10} + 442.46s^9 + 7531.5s^8 + 46862.69s^7 + 127782.58s^6 + 164911.86s^5 + 102524.57s^4 + 29694s^3 + 3622.31s^2 + 147.14s + 1}{s^{10} + 147.14s^9 + 3622.31s^8 + 29694s^7 + 102524.57s^6 + 164911.86s^5 + 127782.58s^4 + 46862.69s^3 + 7531.5s^2 + 442.46s + 5.92}$

Çizelge 3.4. $s^{0.4}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.4}$
1	$\frac{2.333s + 1}{s + 2.333}$
2	$\frac{3.5s^2 + 8s + 1}{s^2 + 8s + 3.5}$
3	$\frac{4.5769s^3 + 25.5s^2 + 17s + 1}{s^3 + 17s^2 + 25.5s + 4.5769}$
4	$\frac{5.594s^4 + 57.538s^3 + 93.5s^2 + 29.333s + 1}{s^4 + 29.333s^3 + 93.5s^2 + 57.538s + 5.594}$
5	$\frac{6.56s^5 + 107.88s^4 + 323.65s^3 + 247.5s^2 + 45s + 1}{s^5 + 45s^4 + 247.5s^3 + 323.65s^2 + 107.88s + 6.56}$
6	$\frac{7.5s^6 + 180.12s^5 + 863.07s^4 + 1218.46s^3 + 540s^2 + 64s + 1}{s^6 + 64s^5 + 540s^4 + 1218.46s^3 + 863.07s^2 + 180.12s + 7.5}$
7	$\frac{8.41s^7 + 277.68s^6 + 1943.79s^5 + 4383.07s^4 + 3586.15s^3 + 1036s^2 + 86.33s + 1}{s^7 + 86.33s^6 + 1036s^5 + 3586.15s^4 + 4383.07s^3 + 1943.79s^2 + 277.68s + 8.41}$
8	$\frac{9.3s^8 + 403.9s^7 + 3887.59s^6 + 12806.2s^5 + 16735.38s^4 + 8925.53s^3 + 1813s^2 + 112s + 1}{s^8 + 112s^7 + 1813s^6 + 8925.53s^5 + 16735.38s^4 + 12806.2s^3 + 3887.59s^2 + 403.9s + 9.3}$
9	$\frac{10.16s^9 + 562.01s^8 + 7118.84s^7 + 32244.2s^6 + 61557.11s^5 + 52437.53s^4 + 19664.07s^3 + 2961s^2 + 141s + 1}{s^9 + 141s^8 + 2961s^7 + 19664.07s^6 + 52437.53s^5 + 61557.11s^4 + 32244.2s^3 + 7118.84s^2 + 562.01s + 10.16}$
10	$\frac{11.01s^{10} + 755.16s^9 + 12176.97s^8 + 72584.34s^7 + 190533.91s^6 + 237108.86s^5 + 142018.33s^4 + 39480s^3 + 4582.5s^2 + 173.33s + 1}{s^{10} + 173.33s^9 + 4582.5s^8 + 39480s^7 + 142018.33s^6 + 237108.86s^5 + 190533.91s^4 + 72584.34s^3 + 12176.97s^2 + 755.16s + 11.01}$

Çizelge 3.5. $s^{0.5}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.5}$
1	$\frac{3s+1}{s+3}$
2	$\frac{5s^2+10s+1}{s^2+10s+5}$
3	$\frac{7s^3+35s^2+21s+1}{s^3+21s^2+35s+7}$
4	$\frac{9s^4+84s^3+126s^2+36s+1}{s^4+36s^3+126s^2+84s+9}$
5	$\frac{11s^5+165s^4+462s^3+330s^2+55s+1}{s^5+55s^4+330s^3+462s^2+165s+11}$
6	$\frac{13s^6+286s^5+1287s^4+1716s^3+715s^2+78s+1}{s^6+78s^5+715s^4+1716s^3+1287s^2+286s+13}$
7	$\frac{15s^7+455s^6+3003s^5+6435s^4+5005s^3+1365s^2+105s+1}{s^7+105s^6+1365s^5+5005s^4+6435s^3+3003s^2+455s+15}$
8	$\frac{17s^8+680s^7+6188s^6+19448s^5+24310s^4+12376s^3+2380s^2+136s+1}{s^8+136s^7+2380s^6+12376s^5+24310s^4+19448s^3+6188s^2+680s+17}$
9	$\frac{19s^9+969s^8+11628s^7+50388s^6+92378s^5+75582s^4+27132s^3+3876s^2+171s+1}{s^9+171s^8+3876s^7+27132s^6+75582s^5+92378s^4+50388s^3+11628s^2+969s+19}$
10	$\frac{21s^{10}+1330s^9+20349s^8+116280s^7+293930s^6+352716s^5+203490s^4+54264s^3+5985s^2+210s+1}{s^{10}+210s^9+5985s^8+54264s^7+203490s^6+352716s^5+293930s^4+116280s^3+20349s^2+1330s+21}$

Çizelge 3.6. $s^{0.6}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.6}$
1	$\frac{4s+1}{s+4}$
2	$\frac{7.428s^2+13s+1}{s^2+13s+7.428}$
3	$\frac{11.143s^3+50.143s^2+27s+1}{s^3+27s^2+50.143s+11.143}$
4	$\frac{15.076s^4+128.143s^3+177.428s^2+46s+1}{s^4+46s^3+177.428s^2+128.143s+15.076}$
5	$\frac{19.18s^5+263.82s^4+690s^3+460s^2+70s+1}{s^5+70s^4+460s^3+690s^2+263.82s+19.18}$
6	$\frac{23.45s^6+474.88s^5+2009.11s^4+2530s^3+990s^2+99s+1}{s^6+99s^5+990s^4+2530s^3+2009.11s^2+474.88s+23.45}$
7	$\frac{27.84s^7+779.74s^6+4858.41s^5+9896.76s^4+7315s^3+1881s^2+133s+1}{s^7+133s^6+1881s^5+7315s^4+9896.76s^3+4858.41s^2+779.74s+27.84}$
8	$\frac{32.36s^8+1197.46s^7+10316.62s^6+30949.88s^5+37005.29s^4+17974s^3+3268s^2+172s+1}{s^8+172s^7+3268s^6+17974s^5+37005.29s^4+30949.88s^3+10316.62s^2+1197.46s+32.36}$
9	$\frac{36.98s^9+1747.65s^8+19896.35s^7+82533.01s^6+145329.88s^5+114187.76s^4+39216s^3+5307.42s^2+216s+1}{s^9+216s^8+5307.42s^7+39216s^6+114187.76s^5+145329.88s^4+82533.01s^3+19896.35s^2+1747.65s+36.98}$
10	$\frac{41.7s^{10}+2450.41s^9+35625.22s^8+195279.01s^7+475461.96s^6+550177.41s^5+305654.11s^4+78137.14s^3+8177.14s^2+265s+1}{s^{10}+265s^9+8177.14s^8+78137.14s^7+305654.11s^6+550177.41s^5+475461.96s^4+195279.01s^3+35625.22s^2+2450.41s+41.7}$

Çizelge 3.7. $s^{0.7}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.7}$
1	$\frac{5.67s + 1}{s + 5.67}$
2	$\frac{11.77s^2 + 18s + 1}{s^2 + 18s + 11.77}$
3	$\frac{18.933s^3 + 76.846s^2 + 37s + 1}{s^3 + 37s^2 + 76.846s + 18.933}$
4	$\frac{26.965s^4 + 209.38s^3 + 267.54s^2 + 62.67s + 1}{s^4 + 62.67s^3 + 267.54s^2 + 209.38s + 26.9}$
5	$\frac{35.74s^5 + 452.06s^4 + 1105.05s^3 + 686.92s^2 + 95s + 1}{s^5 + 95s^4 + 686.92s^3 + 1105.05s^2 + 452.06s + 35.74}$
6	$\frac{45.18s^6 + 845.25s^5 + 3365.38s^4 + 4002.07s^3 + 1468.84s^2 + 134s + 1}{s^6 + 134s^5 + 1468.84s^4 + 4002.07s^3 + 3365.38s^2 + 845.25s + 45.18}$
7	$\frac{55.22s^7 + 1432.68s^6 + 8436.92s^5 + 16341.8s^4 + 11474.03s^3 + 2777.92s^2 + 179.67s + 1}{s^7 + 179.67s^6 + 2777.92s^5 + 11474.03s^4 + 16341.8s^3 + 8436.92s^2 + 1432.68s + 55.22}$
8	$\frac{65.81s^8 + 2261.11s^7 + 18465.73s^6 + 52901.82s^5 + 60499.43s^4 + 28020.78s^3 + 4809.53s^2 + 232s + 1}{s^8 + 232s^7 + 4809.53s^6 + 28020.78s^5 + 60499.43s^4 + 52901.82s^3 + 18465.73s^2 + 2261.11s + 65.81}$
9	$\frac{76.92s^9 + 3380.04s^8 + 36554.61s^7 + 145230.49s^6 + 245655.83s^5 + 185319.31s^4 + 60851.11s^3 + 7789.84s^2 + 291s + 1}{s^9 + 291s^8 + 7789.84s^7 + 60851.11s^6 + 185319.31s^5 + 245655.83s^4 + 145230.49s^3 + 36554.61s^2 + 3380.04s + 76.92}$
10	$\frac{88.5s^{10} + 4841.57s^9 + 66975.06s^8 + 352373.3s^7 + 826577.79s^6 + 922286.8s^5 + 493262.84s^4 + 120799.06s^3 + 11975.76s^2 + 356.67s + 1}{s^{10} + 356.67s^9 + 11975.76s^8 + 120799.06s^7 + 493262.84s^6 + 922286.8s^5 + 826577.79s^4 + 352373.3s^3 + 66975.06s^2 + 4841.57s + 88.5}$

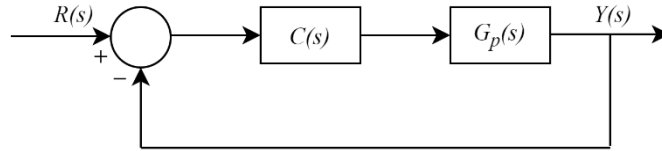
Çizelge 3.8. $s^{0.8}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.8}$
1	$\frac{9s + 1}{s + 9}$
2	$\frac{21s^2 + 28s + 1}{s^2 + 28s + 21}$
3	$\frac{36.27s^3 + 133s^2 + 57s + 1}{s^3 + 57s^2 + 133s + 36.27}$
4	$\frac{54.41s^4 + 386.91s^3 + 456s^2 + 96s + 1}{s^4 + 96s^3 + 456s^2 + 386.91s + 54.41}$
5	$\frac{75.13s^5 + 876.59s^4 + 2003.63s^3 + 1160s^2 + 145s + 1}{s^5 + 145s^4 + 1160s^3 + 2003.63s^2 + 876.59s + 75.13}$
6	$\frac{98.25s^6 + 1703.09s^5 + 6386.59s^4 + 7170.9s^3 + 2465s^2 + 204s + 1}{s^6 + 204s^5 + 2465s^4 + 7170.9s^3 + 6386.59s^2 + 1703.09s + 98.25}$
7	$\frac{123.61s^7 + 2980.4s^6 + 16605.13s^5 + 30588.4s^4 + 20392.27s^3 + 4641s^2 + 273s + 1}{s^7 + 273s^6 + 4641s^5 + 20392.27s^4 + 30588.4s^3 + 16605.13s^2 + 2980.4s + 123.61}$
8	$\frac{151.08s^8 + 4834.58s^7 + 37468s^6 + 102544s^5 + 112157.5s^4 + 49504s^3 + 8008s^2 + 352s + 1}{s^8 + 352s^7 + 8008s^6 + 49504s^5 + 112157.5s^4 + 102544s^3 + 37468s^2 + 4834.58s + 151.08}$
9	$\frac{180.55s^9 + 7402.95s^8 + 76144.64s^7 + 289884s^6 + 471061.5s^5 + 341113.5s^4 + 107016s^3 + 12936s^2 + 441s + 1}{s^9 + 441s^8 + 12936s^7 + 107016s^6 + 341113.5s^5 + 471061.5s^4 + 289884s^3 + 76144.64s^2 + 7402.95s + 180.55}$
10	$\frac{211.96s^{10} + 10833.58s^9 + 142771.2s^8 + 721370.32s^7 + 1630597.5s^6 + 1754298s^5 + 902947.5s^4 + 211680s^3 + 19845s^2 + 540s + 1}{s^{10} + 540s^9 + 19845s^8 + 211680s^7 + 902947.5s^6 + 1754298s^5 + 1630597.5s^4 + 721370.32s^3 + 142771.2s^2 + 10833.58s + 211.96}$

Çizelge 3.9. $s^{0.9}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.9}$
1	$\frac{19s+1}{s+19}$
2	$\frac{50.1s^2+58s+1}{s^2+58s+50.1}$
3	$\frac{93.026s^3+308.45s^2+117s+1}{s^3+117s^2+308.45s+93.026}$
4	$\frac{147.04s^4+959.64s^3+1042.36s^2+196s+1}{s^4+196s^3+1042.36s^2+959.64s+147.04}$
5	$\frac{211.59s^5+2283s^4+4880.9s^3+2628.18s^2+295s+1}{s^5+295s^4+2628.18s^3+4880.9s^2+2283s+211.59}$
6	$\frac{286.27s^6+4610.55s^5+16295.93s^4+17270.9s^3+5551.36s^2+414s+1}{s^6+414s^5+5551.36s^4+17270.9s^3+16295.93s^2+4610.55s+286.27}$
7	$\frac{370.75s^7+8332.15s^6+43959.28s^5+77022.68s^4+48728.63s^3+10406.45s^2+553s+1}{s^7+553s^6+10406.45s^5+48728.63s^4+77022.68s^3+43959.28s^2+8332.15s+370.75}$
8	$\frac{464.74s^8+13893.42s^7+102284.35s^6+267512.92s^5+279796.68s^4+117609.45s^3+17897.09s^2+712s+1}{s^8+712s^7+17897.09s^6+117609.45s^5+279796.68s^4+267512.92s^3+102284.35s^2+13893.42s+464.74}$
9	$\frac{568.02s^9+21794.08s^8+213431.75s^7+778934.7s^6+1216091.93s^5+845080.83s^4+253116s^3+28836s^2+891s+1}{s^9+891s^8+28836s^7+253116s^6+845080.83s^5+1216091.93s^4+778934.7s^3+213431.75s^2+21794.08s+568.02}$
10	$\frac{680.37s^{10}+32586.49s^9+409578.54s^8+1988381.33s^7+4331830.76s^6+4493356.65s^5+2224971.29s^4+498908.57s^3+44145s^2+1090s+1}{s^{10}+1090s^9+44145s^8+498908.57s^7+2224971.29s^6+4493356.65s^5+4331830.76s^4+1988381.33s^3+409578.54s^2+32586.49s+680.37}$

3.2. Birinci Derece Padé Yaklaşımıyla PI^λ Kontrolör Tasarımı



Şekil 3.1. Tek giriş-tek çıkışlı bir kontrol sistemi

Şekil 3.1'deki tek giriş-tek çıkışlı sistemi göz önünde bulunduralım. Burada $G_p(s)$ kontrol edilen sistemin transfer fonksiyonu olup Denklem 3.13'teki gibi gösterilebilir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.45 kullanılmıştır.

$$G_p(s) = G(s)e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} \quad (3.13)$$

$C(s)$, PI^λ kontrolörünün transfer fonksiyonu olup aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} = \frac{k_p s^\lambda + k_i}{s^\lambda} \quad (3.14)$$

Şekil 3.1'deki sistemin kapalı döngü karakteristik denklemi $\Delta(s) = 1 + C(s)G_p(s)$ olup bu sistem için karakteristik denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Delta(s) = s^\lambda D(s) + (k_p s^\lambda + k_i)N(s)e^{-\tau s} = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (3.15)$$

Burada a_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) katsayılarının tümü veya bir kısmı $N(s)$ ve $D(s)$ polinomlarının derecesine bağlı olarak k_p , k_i ve $e^{-\tau s}$ 'in bir fonksiyonudur (Hamamci & Tan, 2006). \mathbf{P} parametre uzayında, kararlı bir polinomun köklerinin sanal eksen üzerinden geçmesi yani kararsız hale gelmesi için üç olasılık vardır (Hamamci, 2008; Hamamci & Koksall, 2010; Hamamci & Tan, 2006):

1. Gerçek Kök Sınırı: Gerçek bir kök, sanal eksen $s = 0$ 'da keser. Böylelikle, gerçek kök sınırı Denklem 3.15'teki $\Delta(s)$ 'te $s = 0$ için elde edilebilir. Dolayısıyla $a_0 = 0$ olur.

2. Sonsuz Kök Sınırı: Gerçek bir kök, sanal eksenin üzerinden $s = \infty$ 'da geçer. Böylelikle, sonsuz kök sınırı Denklem 3.15'te $a_n = 0$ alınarak belirlenebilir.

3. Karmaşık Kök Sınırı: Denklem 3.15'in kökleri, $s = j\omega$ için sanal eksen $j\omega$ kestiğinde kararsız hale gelir. Dolayısıyla bu, Denklem 3.15'in gerçek ve sanal kısımlarının aynı anda sıfır olduğu anlamına gelir. Böylelikle, karmaşık kök sınırı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Denklem 3.13'teki $G(s)$ 'in pay ve payda polinomlarını $N(s)$ ve $D(s)$ olarak ayırıp bu polinomları çift ve tek kısımlarına ayırdıktan sonra $s = j\omega$ yazılırsa;

$$G(j\omega) = \frac{N_e(-\omega^2) + j\omega N_o(-\omega^2)}{D_e(-\omega^2) + j\omega D_o(-\omega^2)} \quad (3.16)$$

$(-\omega^2)$ gösterim kolaylığı sağlaması açısından daha sonraki denklemlerde ayrıca yazılmayacaktır. Denklem 3.17'deki özelliği kullanarak (Yeroglu & Tan, 2009);

$$(j\omega)^\lambda = \omega^\lambda \left(\cos \frac{\pi}{2} \lambda + j \sin \frac{\pi}{2} \lambda \right) \quad (3.17)$$

Denklem 3.15'in kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & 2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + 2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o + 2k_i N_e + \omega^2 \tau k_i N_o \\
& + j[2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + 2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o - \omega \tau k_i N_e + 2\omega k_i N_o]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Eğer $\Delta(j\omega)$ 'nin gerçek ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\Delta(j\omega) = \text{Re}_\Delta + j \text{Im}_\Delta = 0 \tag{3.19}$$

Gerçek ve sanal kısım Denklem 3.20 ve Denklem 3.21'deki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
k_p [2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
- \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o] + k_i [2N_e + \omega^2 \tau N_o] = -2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e \\
- \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
k_p [2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
- \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o] + k_i [-\omega \tau N_e + 2\omega N_o] = -2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e \\
- \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Denklem 3.20 ve Denklem 3.21 aşağıdaki gibi düzenlenirse;

$$k_p A_1(\omega) + k_i A_2(\omega) = A_3(\omega) \tag{3.22}$$

$$k_p B_1(\omega) + k_i B_2(\omega) = B_3(\omega) \tag{3.23}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
A_1(\omega) = & 2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$A_2(\omega) = 2N_e + \omega^2 \tau N_o \quad (3.25)$$

$$A_3(\omega) = -2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e \\ - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o \quad (3.26)$$

$$B_1(\omega) = 2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e \\ + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o \quad (3.27)$$

$$B_2(\omega) = -\omega\tau N_e + 2\omega N_o \quad (3.28)$$

$$B_3(\omega) = -2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e \\ - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o \quad (3.29)$$

Denklem 3.22 ve Denklem 3.23'ten k_p ve k_i aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$k_p = \frac{A_3(\omega)B_2(\omega) - B_3(\omega)A_2(\omega)}{A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega)} \quad (3.30)$$

$$k_i = \frac{A_1(\omega)B_3(\omega) - B_1(\omega)A_3(\omega)}{A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega)} \quad (3.31)$$

Elde edilen denklemler sayesinde kararlılık sınır eğrisi olan $l(k_p, k_i, \omega)$, $(A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega) \neq 0$ olmak koşuluyla) (k_p, k_i) düzleminde çizilebilir. Kararlılık sınır eğrisi ve $k_i = 0$ çizgisi, (k_p, k_i) düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere bölebilir (Tan et al., 2006). Bundan dolayı her bölge içinde test noktaları seçilerek kararlı (k_p, k_i) parametrelerinin olup olmadığı belirlenmelidir (Tan et al., 2006).

Eğer PI kontrolör elde etmek istersek Denklem 3.30 ve Denklem 3.31'de $\lambda = 1$ yazılması yeterlidir. Buna göre elde edilen katsayılar Denklem 3.32 ve Denklem 3.33'te verilmiştir. Ayrıca Bölüm 3.6'da elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ denklemleri için Denklem 3.88 ve Denklem 3.89'da $\lambda = 1, \mu = 0$ yazarsak aynı sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
A_1(\omega) &= \omega^2 \tau N_e - 2\omega^2 N_o \\
A_2(\omega) &= 2N_e + \omega^2 \tau N_o \\
A_3(\omega) &= \omega^2 \tau D_e + 2\omega^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
B_1(\omega) &= 2\omega N_e + \omega^3 \tau N_o \\
B_2(\omega) &= -\omega \tau N_e + 2\omega N_o \\
B_3(\omega) &= -2\omega D_e + \omega^3 \tau D_o
\end{aligned} \tag{3.33}$$

3.3. İkinci Derece Padé Yaklaşımıyla PI^λ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için birinci derece Padé yaklaşımıyla PI^λ kontrolör tasarımının prosedürü tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.14'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.46 kullanılmıştır. Buna göre kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) &= 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
&+ 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \\
&+ 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 k_p N_e \\
&+ 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o \\
&+ \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 k_p N_o + 12k_i N_e - \omega^2 \tau^2 k_i N_e + 6\omega^2 \tau k_i N_o \\
&+ j[12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
&+ 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \\
&+ 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 k_p N_e \\
&+ 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o \\
&+ \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 k_p N_o - 6\omega \tau k_i N_e + 12\omega k_i N_o - \omega^3 \tau^2 k_i N_o]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Eğer $\Delta(j\omega)$ 'nin gerçekte ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\begin{aligned}
& k_p [12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o] + k_i [12N_e - \omega^2 \tau^2 N_e + 6\omega^2 \tau N_o] \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
& - 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_p [12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o] + k_i [-6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3 \tau^2 N_o] \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
& - 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o
\end{aligned}$$

Denklemler yeniden düzenlendiği takdirde Denklem 3.22 ve Denklem 3.23 elde edilir.

Buna göre katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
A_1(\omega) &= 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$A_2(\omega) = 12N_e - \omega^2 \tau^2 N_e + 6\omega^2 \tau N_o \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
A_3(\omega) &= -12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
& - 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1(\omega) &= 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$B_2(\omega) = -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o \quad (3.41)$$

$$B_3(\omega) = -12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\ - 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \quad (3.42)$$

Buna göre k_p ve k_i değerleri Denklem 3.30 ve Denklem 3.31'deki gibi elde edilebilir. Eğer PI kontrolör elde etmek istersek Denklem 3.30 ve Denklem 3.31'de $\lambda = 1$ yazılması yeterlidir. Buna göre elde edilen katsayılar Denklem 3.43 ve Denklem 3.44'te verilmiştir. Ayrıca Bölüm 3.7'de elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ denklemleri için Denklem 3.88 ve Denklem 3.89'da $\lambda = 1, \mu = 0$ yazarsak aynı sonuçlar elde edilir:

$$A_1(\omega) = 6\omega^2\tau N_e - 12\omega^2 N_o + \omega^4\tau^2 N_o \\ A_2(\omega) = 12N_e - \omega^2\tau^2 N_e + 6\omega^2\tau N_o \\ A_3(\omega) = 6\omega^2\tau D_e + 12\omega^2 D_o - \omega^4\tau^2 D_o \quad (3.43)$$

$$B_1(\omega) = 12\omega N_e - \omega^3\tau^2 N_e + 6\omega^3\tau N_o \\ B_2(\omega) = -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o \\ B_3(\omega) = -12\omega D_e + \omega^3\tau^2 D_e + 6\omega^3\tau D_o \quad (3.44)$$

3.4. Birinci Derece Padé Yaklaşımıyla PD^μ Kontrolör Tasarımı

PD^μ kontrolör tasarımı yapmak için birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımıyla PI^λ kontrolör tasarımında uygulanan prosedürler tekrarlanır. Şekil 3.1 için verilen kontrol sistemi için sistemin transfer fonksiyonu Denklem 3.13'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.45 kullanılmıştır. $C(s)$, verilen sistemi kararlı yapan PD^μ kontrolörünün transfer fonksiyonu olup Denklem 3.45'teki gibi ifade edilir:

$$C(s) = k_p + k_d s^\mu \quad (3.45)$$

Karakteristik denklem ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta(s) = 1 + C(s)G_p(s) = D(s) + (k_p + k_d s^\mu)N(s)e^{-\tau s} \quad (3.46)$$

Denklem 3.46'da $s = j\omega$ yazılırsa kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & 2D_e - \omega^2\tau D_o + 2k_p N_e + \omega^2\tau k_p N_o + 2\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)k_d N_e \\
& - \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau k_d N_e + 2\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)k_d N_o - \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau k_d N_o \\
& + j[\omega\tau D_e + 2\omega D_o - \omega\tau k_p N_e + 2\omega k_p N_o + 2\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)k_d N_e \\
& - \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau k_d N_e + 2\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)k_d N_o - \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau k_d N_o]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Eğer $\Delta(j\omega)$ 'nin gerçekte ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\begin{aligned}
k_p[2N_e + \omega^2\tau N_o] + k_d[2\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e \\
+ 2\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o] = -2D_e + \omega^2\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
k_p[-\omega\tau N_e + 2\omega N_o] + k_d[2\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e \\
+ 2\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o] = -\omega\tau D_e - 2\omega D_o
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Denklem 3.48 ve Denklem 3.49 düzenlenirse;

$$k_p C_1(\omega) + k_d C_2(\omega) = C_3(\omega) \tag{3.50}$$

$$k_p D_1(\omega) + k_d D_2(\omega) = D_3(\omega) \tag{3.51}$$

Burada;

$$C_1(\omega) = 2N_e + \omega^2\tau N_o \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
C_2(\omega) = & 2\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e \\
& + 2\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$C_3(\omega) = -2D_e + \omega^2\tau D_o \tag{3.54}$$

$$D_1(\omega) = -\omega\tau N_e + 2\omega N_o \tag{3.55}$$

$$D_2(\omega) = 2\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e$$

$$+ 2\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o$$
(3.56)

$$D_3(\omega) = -\omega\tau D_e - 2\omega D_o$$
(3.57)

Buna göre k_p ve k_d değerleri Denklem 3.58 ve Denklem 3.59'daki gibi elde edilebilir:

$$k_p = \frac{C_3(\omega)D_2(\omega) - D_3(\omega)C_2(\omega)}{C_1(\omega)D_2(\omega) - D_1(\omega)C_2(\omega)}$$
(3.58)

$$k_d = \frac{C_1(\omega)D_3(\omega) - D_1(\omega)C_3(\omega)}{C_1(\omega)D_2(\omega) - D_1(\omega)C_2(\omega)}$$
(3.59)

Eğer PD kontrolör elde etmek istersek Denklem 3.58 ve Denklem 3.59'da $\mu=1$ yazılması yeterlidir. Buna göre elde edilen katsayılar Denklem 3.60 ve Denklem 3.61'de verilmiştir. Ayrıca Bölüm 3.6'da elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ denklemleri için Denklem 3.90 ve Denklem 3.91'de $\lambda=0$, $\mu=1$ yazarsak aynı sonuçlar elde edilir:

$$C_1(\omega) = 2N_e + \omega^2\tau N_o$$

$$C_2(\omega) = \omega^2\tau N_e - 2\omega^2 N_o$$

$$C_3(\omega) = -2D_e + \omega^2\tau D_o$$
(3.60)

$$D_1(\omega) = -\omega\tau N_e + 2\omega N_o$$

$$D_2(\omega) = 2\omega N_e + \omega^3\tau N_o$$

$$D_3(\omega) = -\omega\tau D_e - 2\omega D_o$$
(3.61)

3.5. İkinci Derece Padé Yaklaşımıyla PD^μ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için birinci derece Padé yaklaşımıyla PD^μ kontrolör tasarımının işlemleri tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün ifadeleri sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.45'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.46 kullanılmıştır. Buna göre kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & 12D_e - \omega^2\tau^2D_e - 6\omega^2\tau D_o + 12k_pN_e - \omega^2\tau^2k_pN_e + 6\omega^2\tau k_pN_o + 12\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)k_dN_e \\
& - 6\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau k_dN_e + \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau^2k_dN_e + 12\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)k_dN_o \\
& - 6\omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau k_dN_o + \omega^{(\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)\tau^2k_dN_o \\
& + j[6\omega\tau D_e + 12\omega D_o - \omega^3\tau^2D_o - 6\omega\tau k_pN_e + 12\omega k_pN_o - \omega^3\tau^2k_pN_o + 12\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)k_dN_e \\
& - 6\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau k_dN_e + \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau^2k_dN_e + 12\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)k_dN_o \\
& - 6\omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau k_dN_o + \omega^{(\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)\tau^2k_dN_o]
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Eğer Denklem 3.62'nin gerçek ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\begin{aligned}
k_p[12N_e - \omega^2\tau^2N_e + 6\omega^2\tau N_o] + k_d[12\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - 6\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e \\
+ \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau^2N_e + 12\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - 6\omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o \\
+ \omega^{(\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)\tau^2N_o] = -12D_e + \omega^2\tau^2D_e + 6\omega^2\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
k_p[-6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2N_o] + k_d[12\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - 6\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e \\
+ \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau^2N_e + 12\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - 6\omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o \\
+ \omega^{(\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)\tau^2N_o] = -6\omega\tau D_e - 12\omega D_o + \omega^3\tau^2D_o
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Denklemler yeniden düzenlendiği takdirde Denklem 3.50 ve Denklem 3.51 elde edilir.

Buna göre katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$C_1(\omega) = 12N_e - \omega^2\tau^2N_e + 6\omega^2\tau N_o \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
C_2(\omega) = & 12\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - 6\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau^2N_e \\
& + 12\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - 6\omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)\tau^2N_o
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$C_3(\omega) = -12D_e + \omega^2\tau^2D_e + 6\omega^2\tau D_o \tag{3.67}$$

$$D_1(\omega) = -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2N_o \tag{3.68}$$

$$D_2(\omega) = 12\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e - 6\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau^2 N_e \\ + 12\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o - 6\omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)\tau^2 N_o \quad (3.69)$$

$$D_3(\omega) = -6\omega\tau D_e - 12\omega D_o + \omega^3\tau^2 D_o \quad (3.70)$$

Buna göre k_p ve k_d değerleri Denklem 3.58 ve Denklem 3.59'daki gibi elde edilebilir. Eğer PD kontrolör elde etmek istersek Denklem 3.58 ve Denklem 3.59'da $\mu = 1$ yazılması yeterlidir. Buna göre elde edilen katsayılar Denklem 3.71 ve Denklem 3.72'de verilmiştir. Ayrıca Bölüm 3.7'de elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ denklemleri için Denklem 3.90 ve Denklem 3.91'de $\lambda = 0$, $\mu = 1$ yazarsak aynı sonuçlar elde edilir:

$$C_1(\omega) = 12N_e - \omega^2\tau^2 N_e + 6\omega^2\tau N_o \\ C_2(\omega) = 6\omega^2\tau N_e - 12\omega^2 N_o + \omega^4\tau^2 N_o \\ C_3(\omega) = -12D_e + \omega^2\tau^2 D_e + 6\omega^2\tau D_o \quad (3.71)$$

$$D_1(\omega) = -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o \\ D_2(\omega) = 12\omega N_e - \omega^3\tau^2 N_e + 6\omega^3\tau N_o \\ D_3(\omega) = -6\omega\tau D_e - 12\omega D_o + \omega^3\tau^2 D_o \quad (3.72)$$

3.6. Birinci Derece Padé Yaklaşımıyla $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için birinci ve ikinci derece PI^λ ve PD^μ kontrolörler için uygulanan yöntem tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.73'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.45 kullanılmıştır:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu = \frac{k_d s^{(\lambda+\mu)} + k_p s^\lambda + k_i}{s^\lambda} \quad (3.73)$$

Sistemin karakteristik denklemini aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta(s) = 1 + C(s)G_p(s) = s^\lambda D(s) + (k_d s^{(\lambda+\mu)} + k_p s^\lambda + k_i)N(s)e^{-\tau s} \quad (3.74)$$

Denklem 3.74'te $s = j\omega$ yazılırsa aşağıdaki kapalı döngü karakteristik denklemini elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & 2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + 2\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau k_d N_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau k_d N_o + 2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e \\
& - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o \\
& + 2k_i N_e + \omega^2 \tau k_i N_o + j[2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + 2\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau k_d N_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau k_d N_o + 2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e \\
& - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o - \omega \tau k_i N_e + 2\omega k_i N_o]
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Eğer Denklem 3.75'in gerçekte ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\begin{aligned}
& k_p [2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o] + k_i [2N_e + \omega^2 \tau N_o] + k_d [2\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e + 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o] = -2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
& k_p [2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o] + k_i [-\omega \tau N_e + 2\omega N_o] + k_d [2\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e + 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o] = -2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Denklem 3.76 ve Denklem 3.77 yeniden düzenlendiğinde Denklem 3.78 ve Denklem 3.79 elde edilir:

$$k_p M_1(\omega) + k_i M_2(\omega) + k_d M_3(\omega) = M_4(\omega) \quad (3.78)$$

$$k_p N_1(\omega) + k_i N_2(\omega) + k_d N_3(\omega) = N_4(\omega) \quad (3.79)$$

Burada;

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= 2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e \\ &+ 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$M_2(\omega) = 2N_e + \omega^2 \tau N_o \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} M_3(\omega) &= 2\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e \\ &+ 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} M_4(\omega) &= -2\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e \\ &- 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= 2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e \\ &+ 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$N_2(\omega) = -\omega \tau N_e + 2\omega N_o \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} N_3(\omega) &= 2\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e \\ &+ 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} N_4(\omega) &= -2\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e \\ &- 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o \end{aligned} \quad (3.87)$$

Buna göre kararlılık sınır eğrisi, (k_p, k_i) düzleminde k_d terimi sabit olarak düşünülerek elde edilen k_p ve k_i terimleri Denklem 3.88 ve Denklem 3.89'da verilmiştir. Aynı zamanda kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_d) düzleminde k_i terimi sabit olarak düşünülerek elde edilen k_p

ve k_d terimleri Denklem 3.90 ve Denklem 3.91’de verilmiştir:

$$k_p = \frac{[M_4(\omega)N_2(\omega) - N_4(\omega)M_2(\omega)] + k_d[M_2(\omega)N_3(\omega) - N_2(\omega)M_3(\omega)]}{M_1(\omega)N_2(\omega) - N_1(\omega)M_2(\omega)} \quad (3.88)$$

$$k_i = \frac{[M_1(\omega)N_4(\omega) - N_1(\omega)M_4(\omega)] + k_d[M_3(\omega)N_1(\omega) - N_3(\omega)M_1(\omega)]}{M_1(\omega)N_2(\omega) - N_1(\omega)M_2(\omega)} \quad (3.89)$$

$$k_p = \frac{[M_4(\omega)N_3(\omega) - N_4(\omega)M_3(\omega)] + k_i[M_3(\omega)N_2(\omega) - N_3(\omega)M_2(\omega)]}{M_1(\omega)N_3(\omega) - N_1(\omega)M_3(\omega)} \quad (3.90)$$

$$k_d = \frac{[M_1(\omega)N_4(\omega) - M_4(\omega)N_1(\omega)] + k_i[M_2(\omega)N_1(\omega) - N_2(\omega)M_1(\omega)]}{M_1(\omega)N_3(\omega) - N_1(\omega)M_3(\omega)} \quad (3.91)$$

Eğer PID kontrolör elde edilmek istenirse yukarıdaki denklemlerde $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ yazılır. Buna göre katsayılar Denklem 3.92 ve Denklem 3.93’teki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= \omega^2 \tau N_e - 2\omega^2 N_o \\ M_2(\omega) &= 2N_e + \omega^2 \tau N_o \\ M_3(\omega) &= -2\omega^2 N_e - \omega^4 \tau N_o \\ M_4(\omega) &= \omega^2 \tau D_e + 2\omega^2 D_o \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= 2\omega N_e + \omega^3 \tau N_o \\ N_2(\omega) &= -\omega \tau N_e + 2\omega N_o \\ N_3(\omega) &= \omega^3 \tau N_e - 2\omega^3 N_o \\ N_4(\omega) &= -2\omega D_e + \omega^3 \tau D_o \end{aligned} \quad (3.93)$$

Böylelikle sabit k_d değeri için (k_p, k_i) ve sabit k_i değeri için (k_p, k_d) düzlemindeki kararlılık bölgeleri elde edilebilir. Denklem 3.92 ve Denklem 3.93’teki katsayılar Denklem 3.88 ve Denklem 3.90’da yerine yazıldığında k_p değeri için aynı sonuçlar elde edilir. Yani k_p teriminin k_d ve k_i ’ye bağlı olmadığı görülmektedir. Ancak Denklem 3.88 ile Denklem 3.90’daki k_d ve k_i terimlerinin katsayıları $M_2(\omega)N_3(\omega) - M_3(\omega)N_2(\omega) = 0$ ’a eşit olacağından kararlılık sınır eğrisini (k_i, k_d) düzleminde elde etmek mümkün değildir (Tan, 2005).

Fakat Hermite-Biehler teoreminin genelleştirilmiş hali kullanılarak (k_i, k_d) düzleminde sabit bir k_p değeri için kararlılık sınır eğrisi dışbükey bir çokgen olarak gösterilmiştir (Ho et al., 1997; Tan, 2005). Bunun sonucunda (k_p, k_i) ve (k_p, k_d) düzlemlerinde elde edilen kararlılık bölgelerini kullanarak sabit bir k_p değeri için (k_i, k_d) düzlemindeki kararlılık bölgesini elde etmek mümkündür (Tan, 2005).

3.7. İkinci Derece Padé Yaklaşımıyla $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için Bölüm 3.6'da elde edilen birinci derece Padé yaklaşımıyla $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarımı için uygulanan yöntem tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.73'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.46 kullanılmıştır. Buna göre kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \\
& + 12\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e - 6\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau k_d N_e \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau^2 k_d N_e + 12\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o \\
& - 6\omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau k_d N_o + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)\tau^2 k_d N_o \\
& + 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 k_p N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 k_p N_o + 12k_i N_e - \omega^2 \tau^2 k_i N_e + 6\omega^2 \tau k_i N_o \\
& + j[12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \\
& + 12\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e - 6\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau k_d N_e \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau^2 k_d N_e + 12\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o \\
& - 6\omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau k_d N_o + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)\tau^2 k_d N_o \\
& + 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau k_p N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 k_p N_e \quad (3.94) \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau k_p N_o \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 k_p N_o - 6\omega\tau k_i N_e + 12\omega k_i N_o - \omega^3\tau^2 k_i N_o]
\end{aligned}$$

Eğer Denklem 3.94'ün gerçekte ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\begin{aligned}
& k_p [12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o] \\
& + k_i [12N_e - \omega^2\tau^2 N_e + 6\omega^2\tau N_o] + k_d [12\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e \\
& - 6\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)\tau^2 N_o] = -12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e \\
& - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e - 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \quad (3.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_p [12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o] \\
& + k_i [-6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o] + k_d [12\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e \\
& - 6\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau^2 N_e \\
& + 12\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)\tau^2 N_o] = -12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e \\
& - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e - 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Denklem 3.95 ve Denklem 3.96 düzenlendiğinde Denklem 3.78 ve Denklem 3.79 elde edilir. Buna göre katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$M_1(\omega) = 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\ + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o \quad (3.97)$$

$$M_2(\omega) = 12N_e - \omega^2\tau^2 N_e + 6\omega^2\tau N_o \quad (3.98)$$

$$M_3(\omega) = 12\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e \\ + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau^2 N_e + 12\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\ - 6\omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)\tau^2 N_o \quad (3.99)$$

$$M_4(\omega) = -12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\ - 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \quad (3.100)$$

$$N_1(\omega) = 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e \\ + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o \quad (3.101)$$

$$N_2(\omega) = -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o \quad (3.102)$$

$$N_3(\omega) = 12\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)\tau N_e \\ + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau^2 N_e + 12\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\ - 6\omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)\tau^2 N_o \quad (3.103)$$

$$N_4(\omega) = -12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e \\ - 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \quad (3.104)$$

Bölüm 3.6'daki prosedür bu bölüm için de geçerli olup PID kontrolör tasarımı yapılmak istenirse Denklem 3.88 - Denklem 3.91'deki denklemlerde $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ alınarak kararlılık bölgeleri elde edilebilir. Buna göre katsayılar Denklem 3.105 ve Denklem 3.106'daki gibidir:

$$\begin{aligned}
M_1(\omega) &= 6\omega^2\tau N_e - 12\omega^2 N_o + \omega^4\tau^2 N_o \\
M_2(\omega) &= 12N_e - \omega^2\tau^2 N_e + 6\omega^2\tau N_o \\
M_3(\omega) &= -12\omega^2 N_e + \omega^4\tau^2 N_e - 6\omega^4\tau N_o \\
M_4(\omega) &= 6\omega^2\tau D_e + 12\omega^2 D_o - \omega^4\tau^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
N_1(\omega) &= 12\omega N_e - \omega^3\tau^2 N_e + 6\omega^3\tau N_o \\
N_2(\omega) &= -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o \\
N_3(\omega) &= 6\omega^3\tau N_e - 12\omega^3 N_o + \omega^5\tau^2 N_o \\
N_4(\omega) &= -12\omega D_e + \omega^3\tau^2 D_e + 6\omega^3\tau D_o
\end{aligned} \tag{3.106}$$

3.8. Rekasius Dönüşümüyle PI^λ Kontrolör Tasarımı

Bu bölümde amaç, kesirli dereceli zaman gecikmeli sistemler için kesirli dereceli PI kontrolörünün parametrelerini Rekasius yerine koyma metodunu kullanarak hesaplamaktır. Daha önce Bölüm 3.2 ve Bölüm 3.3'te birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımları sayesinde PI^λ kontrolörünün parametreleri hesaplanmış olup bu bölümde Rekasius yerine koyma metodu ile aynı parametreler hesaplanıp iki yöntem örnekler yoluyla karşılaştırılacaktır.

Şekil 3.1'de verilen birim geri beslemeli sistemi yeniden ele alalım. Burada $G_p(s)$ kontrol edilen kesirli dereceli sistem olup Denklem 3.13'teki gibi ifade edilmektedir. Ayrıca $C(s)$ sistemi kararlı hale getiren kontrolör olup Denklem 3.14'teki gibi ifade edilir. Kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydası karakteristik denklem olup $\Delta(s)$ ile gösterilmektedir. Bu sistem için genel formda $G_p(s)$ ve $C(s)$ yerine konulduğunda karakteristik denklem, Denklem 3.15'teki gibi elde edilir.

Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.49 kullanılmıştır. Denklem 3.13'teki $G(s)$ 'in pay ve payda polinomlarını $N(s)$ ve $D(s)$ olarak ayırıp bu polinomları çift ve tek kısımlarına ayırdıktan sonra $s = j\omega$ yazılırsa bu gösterim Denklem 3.16'daki gibidir. Gösterim basitliği açısından $(-\omega^2)$ diğer denklemlerde belirtilmeyecektir. Denklem 3.17'deki özellik sayesinde kapalı döngü karakteristik denkleminin gerçek ve sanal kısımlarına ayrılmış hali Denklem 3.107'deki gibidir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_p N_e \\
& + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_p N_o + k_i N_e + \omega^2 Tk_i N_o \\
& + j[\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_p N_e \\
& + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_p N_o - \omega Tk_i N_e + \omega k_i N_o]
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Eğer $\Delta(j\omega)$ 'nin gerçık ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek gerçık kısım Denklem 3.108'de, sanal kısım ise Denklem 3.109'da elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
k_p[\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
- \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o] + k_i[N_e + \omega^2 TN_o] = -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
-\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o \\
k_p[\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
- \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o] + k_i[-\omega TN_e + \omega N_o] = -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e \\
-\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Denklem 3.108 ve Denklem 3.109 yeniden düzenlenirse Denklem 3.22 ve Denklem 3.23'ü elde etmiş oluruz. Buna göre katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$A_1(\omega) = \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e \tag{3.110}$$

$$+ \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o$$

$$A_2(\omega) = N_e + \omega^2 TN_o \tag{3.111}$$

$$A_3(\omega) = -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \tag{3.112}$$

$$-\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o$$

$$B_1(\omega) = \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e$$

$$+ \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o$$
(3.113)

$$B_2(\omega) = -\omega TN_e + \omega N_o$$
(3.114)

$$B_3(\omega) = -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e$$

$$- \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o$$
(3.115)

Denklem 3.22 ve 3.23'ten k_p ve k_i , Denklem 3.30 ve Denklem 3.31'deki gibi elde edilebilir. Bölüm 3.2'de belirtildiği gibi Denklem 3.30 ve Denklem 3.31 kullanılarak kararlılık sınır eğrisi ω 'ya bağlı olarak k_p ve k_i düzleminde çizilebilir. Eğer PI kontrolör elde etmek istersek yukarıda elde edilen katsayılarda $\lambda = 1$ yazmak yeterli olacaktır. Aynı şekilde Bölüm 3.12'de elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörünün katsayılarında $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ yazarsak özdeş sonuçlar elde edilebilir:

$$A_1(\omega) = \omega^2 TN_e - \omega^2 N_o$$

$$A_2(\omega) = N_e + \omega^2 TN_o$$

$$A_3(\omega) = \omega^2 TD_e + \omega^2 D_o$$
(3.116)

$$B_1(\omega) = \omega N_e + \omega^3 TN_o$$

$$B_2(\omega) = -\omega TN_e + \omega N_o$$

$$B_3(\omega) = -\omega D_e + \omega^3 TD_o$$
(3.117)

3.9. Thowsen Dönüşümüyle PI^λ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'de verilen kontrol sistemi için Bölüm 3.8'de verilen Rekasius dönüşümüyle PI^λ kontrolör tasarımının yöntemi tekrarlanır. Kontrol edilen kesirli dereceli sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.14'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.53 kullanılmıştır. Buna göre karakteristik denklemde $s = j\omega$ yazıldığı takdirde elde edilen kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o \\
& + \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_pN_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_pN_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_pN_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_pN_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2k_pN_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2k_pN_o + k_iN_e + 2\omega^2Tk_iN_o - \omega^2T^2k_iN_e \\
& + j[\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o \\
& + \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_pN_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_pN_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_pN_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_pN_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2k_pN_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2k_pN_o + \omega k_iN_o - 2\omega Tk_iN_e - \omega^3T^2k_iN_o] \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Karakteristik denklemin gerçek ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse Denklem 3.119 ve Denklem 3.120 elde edilir:

$$\begin{aligned}
& k_p[\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2N_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2N_o] + k_i[N_e + 2\omega^2TN_o - \omega^2T^2N_e] \tag{3.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_p[\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2N_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2N_o] + k_i[\omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3T^2N_o] \tag{3.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o
\end{aligned}$$

Denklemler yeniden düzenlendiği takdirde Denklem 3.22 ve Denklem 3.23 elde edilir.

Buna göre katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$A_1(\omega) = \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2N_o \quad (3.121)$$

$$A_2(\omega) = N_e + 2\omega^2TN_o - \omega^2T^2N_e \quad (3.122)$$

$$A_3(\omega) = -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o \quad (3.123)$$

$$B_1(\omega) = \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2N_o \quad (3.124)$$

$$B_2(\omega) = \omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3T^2N_o \quad (3.125)$$

$$B_3(\omega) = -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o \quad (3.126)$$

k_p ve k_i değerleri Denklem 3.30 ve Denklem 3.31'deki gibi olup eğer PI kontrolör elde etmek istersek bu denklemlerde $\lambda = 1$ yazılması yeterlidir. Buna göre elde edilen katsayılar Denklem 3.127 ve Denklem 3.128'de verilmiştir. Ayrıca Bölüm 3.13'te elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ tasarımı için Denklem 3.88 ve Denklem 3.89'da $\lambda = 1$, $\mu = 0$ yazarsak aynı sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= -\omega^2N_o + 2\omega^2TN_e + \omega^4T^2N_o \\ A_2(\omega) &= N_e + 2\omega^2TN_o - \omega^2T^2N_e \\ A_3(\omega) &= \omega^2D_o + 2\omega^2TD_e - \omega^4T^2D_o \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} B_1(\omega) &= \omega N_e + 2\omega^3TN_o - \omega^3T^2N_e \\ B_2(\omega) &= \omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3T^2N_o \\ B_3(\omega) &= -\omega D_e + 2\omega^3TD_o + \omega^3T^2D_e \end{aligned} \quad (3.128)$$

3.10. Rekasius Dönüşümüyle PD^μ Kontrolör Tasarımı

PD^μ kontrolör tasarımı yapmak için PI^λ kontrolörü için uygulanan prosedür tekrarlanır. Şekil 3.1 için verilen kontrol sistemi için sistemin transfer fonksiyonu Denklem 3.13'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.49 kullanılmıştır. $C(s)$, PD^μ kontrolörünün transfer fonksiyonu olup Denklem 3.45'teki gibi ifade edilir. Sistemin karakteristik denklemi Denklem 3.46'daki gibi ifade edilebilir. Buna göre Denklem 3.46'da $s = j\omega$ yazıldığında Denklem 3.129 elde edilir:

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) = & D_e - \omega^2 TD_o + k_p N_e + \omega^2 T k_p N_o + \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) k_d N_e - \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) T k_d N_e \\ & + \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) k_d N_o - \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right) T k_d N_o \\ & + j[\omega TD_e + \omega D_o - \omega T k_p N_e + \omega k_p N_o + \omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) k_d N_e - \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) T k_d N_e \\ & + \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) k_d N_o - \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right) T k_d N_o] \end{aligned} \quad (3.129)$$

Belirtildiği üzere kapalı döngü karakteristik denklemi gerçek ve sanal kısımlardan oluşmaktadır. Denklem 3.129 düzenlenirse gerçek kısım için Denklem 3.130, sanal kısım içinse Denklem 3.131 elde edilir:

$$\begin{aligned} k_p [N_e + \omega^2 TN_o] + k_d [\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) N_e - \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) TN_e \\ + \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) N_o - \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right) TN_o] = -D_e + \omega^2 TD_o \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} k_p [-\omega TN_e + \omega N_o] + k_d [\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) N_e - \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) TN_e \\ + \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) N_o - \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right) TN_o] = -\omega TD_e - \omega D_o \end{aligned} \quad (3.131)$$

Eğer Denklem 3.130 ve Denklem 3.131 tekrar düzenlenirse Denklem 3.50 ve Denklem 3.51 elde edilir. Burada katsayılar;

$$C_1(\omega) = N_e + \omega^2 TN_o \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} C_2(\omega) = & \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) N_e - \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) TN_e \\ & + \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) N_o - \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right) TN_o \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$C_3(\omega) = -D_e + \omega^2 T D_o \quad (3.134)$$

$$D_1(\omega) = -\omega T N_e + \omega N_o \quad (3.135)$$

$$D_2(\omega) = \omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) N_e - \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) T N_e \\ + \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right) N_o - \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right) T N_o \quad (3.136)$$

$$D_3(\omega) = -\omega T D_e - \omega D_o \quad (3.137)$$

Buna göre Denklem 3.50 ve Denklem 3.51'de k_p ve k_d parametreleri yalnız bırakılırsa Denklem 3.58 ve Denklem 3.59 elde edilir.

Eğer bu sistem için PD kontrolör tasarımı yapılmak istenirse $\mu = 1$ yazılması yeterlidir. Ayrıca Bölüm 3.12'de elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ katsayılarında da $\lambda = 0$, $\mu = 1$ yazıldığı takdirde aynı sonuçlar elde edilebilir. Buna göre katsayılar aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$C_1(\omega) = N_e + \omega^2 T N_o \\ C_2(\omega) = \omega^2 T N_e - \omega^2 N_o \\ C_3(\omega) = -D_e + \omega^2 T D_o \quad (3.138)$$

$$D_1(\omega) = -\omega T N_e + \omega N_o \\ D_2(\omega) = \omega N_e + \omega^3 T N_o \\ D_3(\omega) = -\omega T D_e - \omega D_o \quad (3.139)$$

3.11. Thowsen Dönüşümüyle PD^μ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'deki sistem için Rekasius yöntemiyle PD^μ kontrolör tasarımının işlemleri tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.45'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.53 kullanılmıştır. Buna göre kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & D_e - 2\omega^2TD_o - \omega^2T^2D_e + k_pN_e + 2\omega^2Tk_pN_o - \omega^2T^2k_pN_e + \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)k_dN_e \\
& + \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)k_dN_o - 2\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)Tk_dN_e - 2\omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)Tk_dN_o \\
& + \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)T^2k_dN_e + \omega^{(\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)T^2k_dN_o \\
& + j[\omega D_o + 2\omega TD_e - \omega^3T^2D_o + \omega k_pN_o - 2\omega Tk_pN_e - \omega^3T^2k_pN_o + \omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)k_dN_e \\
& + \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)k_dN_o - 2\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)Tk_dN_e - 2\omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)Tk_dN_o \\
& + \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)T^2k_dN_e + \omega^{(\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)T^2k_dN_o]
\end{aligned} \tag{3.140}$$

$\Delta(j\omega)$ 'nin gerçek ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
& k_p[N_e + 2\omega^2TN_o - \omega^2T^2N_e] + k_d[\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e + \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o \\
& - 2\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)TN_o + \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)T^2N_e \\
& + \omega^{(\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)T^2N_o] = -D_e + 2\omega^2TD_o + \omega^2T^2D_e
\end{aligned} \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned}
& k_p[\omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3T^2N_o] + k_d[\omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e + \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o \\
& - 2\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)TN_o + \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)T^2N_e \\
& + \omega^{(\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)T^2N_o] = -\omega D_o - 2\omega TD_e + \omega^3T^2D_o
\end{aligned} \tag{3.142}$$

Denklem 3.141 ve Denklem 3.142 yeniden düzenlenirse Denklem 3.50 ve Denklem 3.51 elde edilir. Buna göre katsayılar aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$C_1(\omega) = N_e + 2\omega^2TN_o - \omega^2T^2N_e \tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}
C_2(\omega) = & \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e + \omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o \\
& - 2\omega^{(\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)TN_o \\
& + \omega^{(\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)T^2N_o
\end{aligned} \tag{3.144}$$

$$C_3(\omega) = -D_e + 2\omega^2TD_o + \omega^2T^2D_e \tag{3.145}$$

$$D_1(\omega) = \omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3T^2N_o \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned}
D_2(\omega) &= \omega^\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)N_e + \omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)N_o \\
&- 2\omega^{(\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)TN_o \\
&+ \omega^{(\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\mu+3)\right)T^2N_o
\end{aligned} \tag{3.147}$$

$$D_3(\omega) = -\omega D_o - 2\omega TD_e + \omega^3 T^2 D_o \tag{3.148}$$

Buna göre k_p ve k_d , Denklem 3.50 ve Denklem 3.51’de yalnız bırakılırsa Denklem 3.58 ve Denklem 3.59 elde edilir.

Eğer bu sistem için PD kontrolör tasarımı yapılmak istenirse $\mu = 1$ yazılması yeterlidir. Ayrıca Bölüm 3.13’te elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ katsayılarında da $\lambda = 0$, $\mu = 1$ yazıldığı takdirde aynı sonuçlar elde edilebilir. Buna göre katsayılar aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
C_1(\omega) &= N_e + 2\omega^2 TN_o - \omega^2 T^2 N_e \\
C_2(\omega) &= -\omega^2 N_o + 2\omega^2 TN_e + \omega^4 T^2 N_o \\
C_3(\omega) &= -D_e + 2\omega^2 TD_o + \omega^2 T^2 D_e
\end{aligned} \tag{3.149}$$

$$\begin{aligned}
D_1(\omega) &= \omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3 T^2 N_o \\
D_2(\omega) &= \omega N_e + 2\omega^3 TN_o - \omega^3 T^2 N_e \\
D_3(\omega) &= -\omega D_o - 2\omega TD_e + \omega^3 T^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.150}$$

3.12. Rekasius Dönüşümüyle $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1’deki kontrol sistemi için PI^λ ve PD^μ kontrolörler için uygulanan yöntem tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.73’teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.49 kullanılmıştır. Buna göre kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydası olan karakteristik denklem, Denklem 3.74’teki gibidir. Karakteristik denklemde $s = j\omega$ yazılırsa Denklem 3.151 elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) = & \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)Tk_d N_e \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)Tk_d N_o + \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e \\
& - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_p N_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_p N_o + k_i N_e + \omega^2 Tk_i N_o \\
& + j[\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)Tk_d N_e \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)Tk_d N_o + \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e \\
& - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_p N_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_p N_o - \omega Tk_i N_e + \omega k_i N_o]
\end{aligned} \tag{3.151}$$

Eğer $\Delta(j\omega)$ 'nin gerçekte ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek Denklem 3.152 ve Denklem 3.153 elde edilir:

$$\begin{aligned}
k_p [& \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o] + k_i [N_e + \omega^2 TN_o] + k_d [\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)TN_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)TN_o] = -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o
\end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\begin{aligned}
k_p [& \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o] + k_i [-\omega TN_e + \omega N_o] + k_d [\omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)TN_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\
& - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)TN_o] = -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o
\end{aligned} \tag{3.153}$$

Denklem 3.152 ve Denklem 3.153 yeniden düzenlenirse Denklem 3.78 ve Denklem 3.79 elde edilir. Buna göre katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$M_1(\omega) = \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e$$

$$+ \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o$$
(3.154)

$$M_2(\omega) = N_e + \omega^2 TN_o$$
(3.155)

$$M_3(\omega) = \omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)TN_e$$

$$+ \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)TN_o$$
(3.156)

$$M_4(\omega) = -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e$$

$$- \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o$$
(3.157)

$$N_1(\omega) = \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e$$

$$+ \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o$$
(3.158)

$$N_2(\omega) = -\omega TN_e + \omega N_o$$
(3.159)

$$N_3(\omega) = \omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e - \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)TN_e$$

$$+ \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o - \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)TN_o$$
(3.160)

$$N_4(\omega) = -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e$$

$$- \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o$$
(3.161)

Buna göre kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzleminde k_d terimi sabit olarak düşünülerek elde edilen k_p ve k_i terimleri Denklem 3.88 ve Denklem 3.89’da verilmiştir. Aynı zamanda kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_d) düzleminde k_i terimi sabit olarak düşünülerek elde edilen k_p ve k_d terimleri, Denklem 3.90 ve Denklem 3.91’de verilmiştir.

Bu sistem için PID kontrolör tasarlanması istenirse $\lambda = 1, \mu = 1$ yazılmalıdır. Bu durumda katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
M_1(\omega) &= \omega^2 TN_e - \omega^2 N_o \\
M_2(\omega) &= N_e + \omega^2 TN_o \\
M_3(\omega) &= -\omega^2 N_e - \omega^4 TN_o \\
M_4(\omega) &= \omega^2 TD_e + \omega^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.162}$$

$$\begin{aligned}
N_1(\omega) &= \omega N_e + \omega^3 TN_o \\
N_2(\omega) &= -\omega TN_e + \omega N_o \\
N_3(\omega) &= \omega^3 TN_e - \omega^3 N_o \\
N_4(\omega) &= -\omega D_e + \omega^3 TD_o
\end{aligned} \tag{3.163}$$

3.13. Thowsen Dönüşümüyle $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Tasarımı

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle elde edilen PI^λ ve PD^μ kontrolörler ve Bölüm 3.12'deki Rekasius dönüşümüyle $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarımı için uygulanan yöntem tekrarlanır. Kontrol edilen sistemin ve kontrolörün transfer fonksiyonu sırasıyla Denklem 3.13 ve Denklem 3.73'teki gibidir. Zaman gecikmesi teriminin yerine Denklem 2.53 kullanılmıştır. Buna göre kapalı döngü karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta(j\omega) &= \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
&+ 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o \\
&+ \omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_d N_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_d N_o \\
&- 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)Tk_d N_e - 2\omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)Tk_d N_o \\
&+ \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)T^2k_d N_e + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)T^2k_d N_o \\
&+ \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_p N_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_p N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_p N_e \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_pN_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2k_pN_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2k_pN_o + k_iN_e + 2\omega^2Tk_iN_o - \omega^2T^2k_iN_e \\
& + j[\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o + 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e \\
& + 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)k_dN_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)k_dN_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)Tk_dN_e - 2\omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)Tk_dN_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)T^2k_dN_e + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)T^2k_dN_o \\
& + \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)k_pN_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)k_pN_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)Tk_pN_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)Tk_pN_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2k_pN_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2k_pN_o + \omega k_iN_o - 2\omega Tk_iN_e - \omega^3T^2k_iN_o]
\end{aligned} \tag{3.164}$$

Denklem 3.164'teki karakteristik denklemin gerçekte ve sanal kısımları sıfıra eşitlenirse elde edilen denklemler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
& k_p[\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2N_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2N_o] + k_i[N_e + 2\omega^2TN_o - \omega^2T^2N_e] \\
& + k_d[\omega^{(\lambda+\mu)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)TN_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)T^2N_o] \\
& = -\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o
\end{aligned} \tag{3.165}$$

$$\begin{aligned}
& k_p [\omega^\lambda \sin(\frac{\pi}{2} \lambda) N_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) T N_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T N_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T^2 N_e \\
& + \omega^{(\lambda+3)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+3)) T^2 N_o] + k_i [\omega N_o - 2\omega T N_e - \omega^3 T^2 N_o] \\
& + k_d [\omega^{(\lambda+\mu)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu)) N_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+1)) N_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+1)) T N_e - 2\omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+2)) T N_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+2)) T^2 N_e + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+3)) T^2 N_o] \\
& = -\omega^\lambda \sin(\frac{\pi}{2} \lambda) D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) D_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) T D_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T D_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T^2 D_e - \omega^{(\lambda+3)} \sin(\frac{\pi}{2} (\lambda+3)) T^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.166}$$

Yukarıdaki denklemler düzenlendiğinde Denklem 3.78 ve Denklem 3.79 elde edilir. Buna göre hesaplanan katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
M_1(\omega) &= \omega^\lambda \cos(\frac{\pi}{2} \lambda) N_e + \omega^{(\lambda+1)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) T N_e \\
& - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T N_o + \omega^{(\lambda+2)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T^2 N_e + \omega^{(\lambda+3)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+3)) T^2 N_o
\end{aligned} \tag{3.167}$$

$$M_2(\omega) = N_e + 2\omega^2 T N_o - \omega^2 T^2 N_e \tag{3.168}$$

$$\begin{aligned}
M_3(\omega) &= \omega^{(\lambda+\mu)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu)) N_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+1)) N_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+1)) T N_e - 2\omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+2)) T N_o \\
& + \omega^{(\lambda+\mu+2)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+2)) T^2 N_e + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+\mu+3)) T^2 N_o
\end{aligned} \tag{3.169}$$

$$\begin{aligned}
M_4(\omega) &= -\omega^\lambda \cos(\frac{\pi}{2} \lambda) D_e - \omega^{(\lambda+1)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) D_o \\
& - 2\omega^{(\lambda+1)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+1)) T D_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T D_o \\
& - \omega^{(\lambda+2)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+2)) T^2 D_e - \omega^{(\lambda+3)} \cos(\frac{\pi}{2} (\lambda+3)) T^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.170}$$

$$\begin{aligned}
N_1(\omega) &= \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e + \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TN_e \\
&- 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TN_o + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2N_o
\end{aligned} \tag{3.171}$$

$$N_2(\omega) = \omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3 T^2 N_o \tag{3.172}$$

$$\begin{aligned}
N_3(\omega) &= \omega^{(\lambda+\mu)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu)\right)N_e + \omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)N_o \\
&- 2\omega^{(\lambda+\mu+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)\right)TN_e - 2\omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)TN_o \\
&+ \omega^{(\lambda+\mu+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+2)\right)T^2N_e + \omega^{(\lambda+\mu+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+3)\right)T^2N_o
\end{aligned} \tag{3.173}$$

$$\begin{aligned}
N_4(\omega) &= -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - \omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o \\
&- 2\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)TD_e - 2\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)TD_o \\
&- \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)T^2D_e - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)T^2D_o
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Bölüm 3.12'deki prosedür bu bölüm için de geçerli olup PID kontrolör tasarımı yapılmak istenirse Denklem 3.88 - Denklem 3.91'deki denklemlerde $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ alınarak kararlılık bölgeleri elde edilebilir. Buna göre katsayılar Denklem 3.175 ve Denklem 3.176'daki gibidir:

$$\begin{aligned}
M_1(\omega) &= -\omega^2 N_o + 2\omega^2 TN_e + \omega^4 T^2 N_o \\
M_2(\omega) &= N_e + 2\omega^2 TN_o - \omega^2 T^2 N_e \\
M_3(\omega) &= -\omega^2 N_e - 2\omega^4 TN_o + \omega^4 T^2 N_e \\
M_4(\omega) &= \omega^2 D_o + 2\omega^2 TD_e - \omega^4 T^2 D_o
\end{aligned} \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned}
N_1(\omega) &= \omega N_e + 2\omega^3 TN_o - \omega^3 T^2 N_e \\
N_2(\omega) &= \omega N_o - 2\omega TN_e - \omega^3 T^2 N_o \\
N_3(\omega) &= -\omega^3 N_o + 2\omega^3 TN_e + \omega^5 T^2 N_o \\
N_4(\omega) &= -\omega D_e + 2\omega^3 TD_o + \omega^3 T^2 D_e
\end{aligned} \tag{3.176}$$

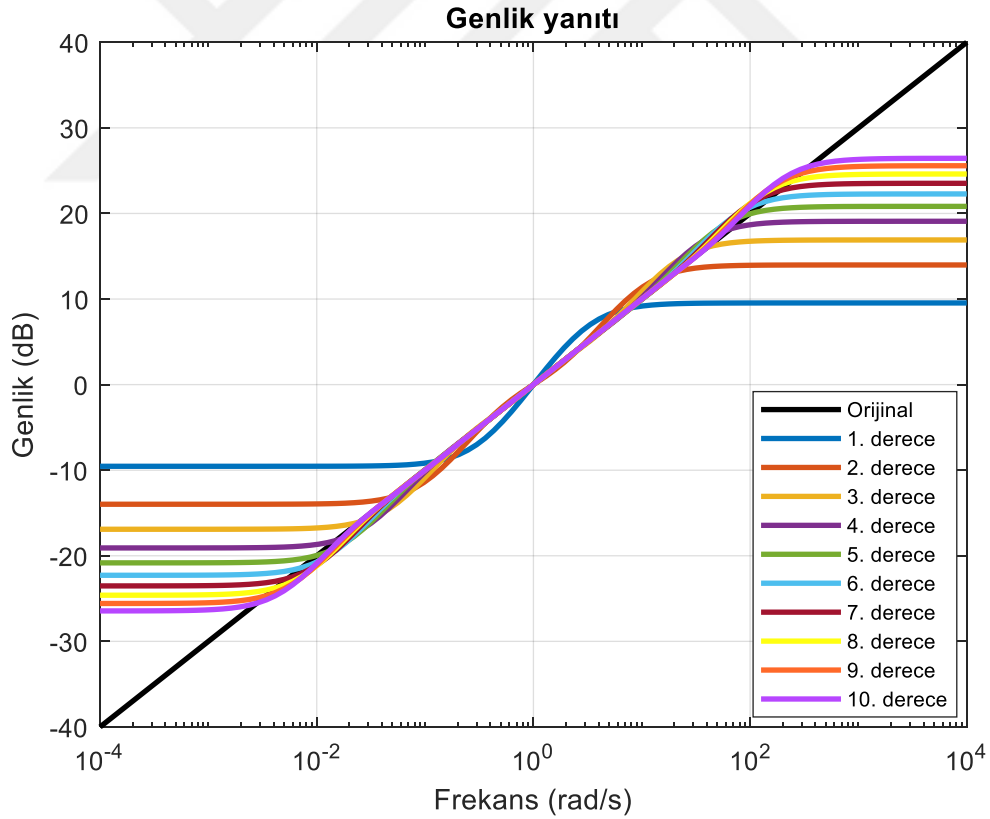
4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Örnek 1

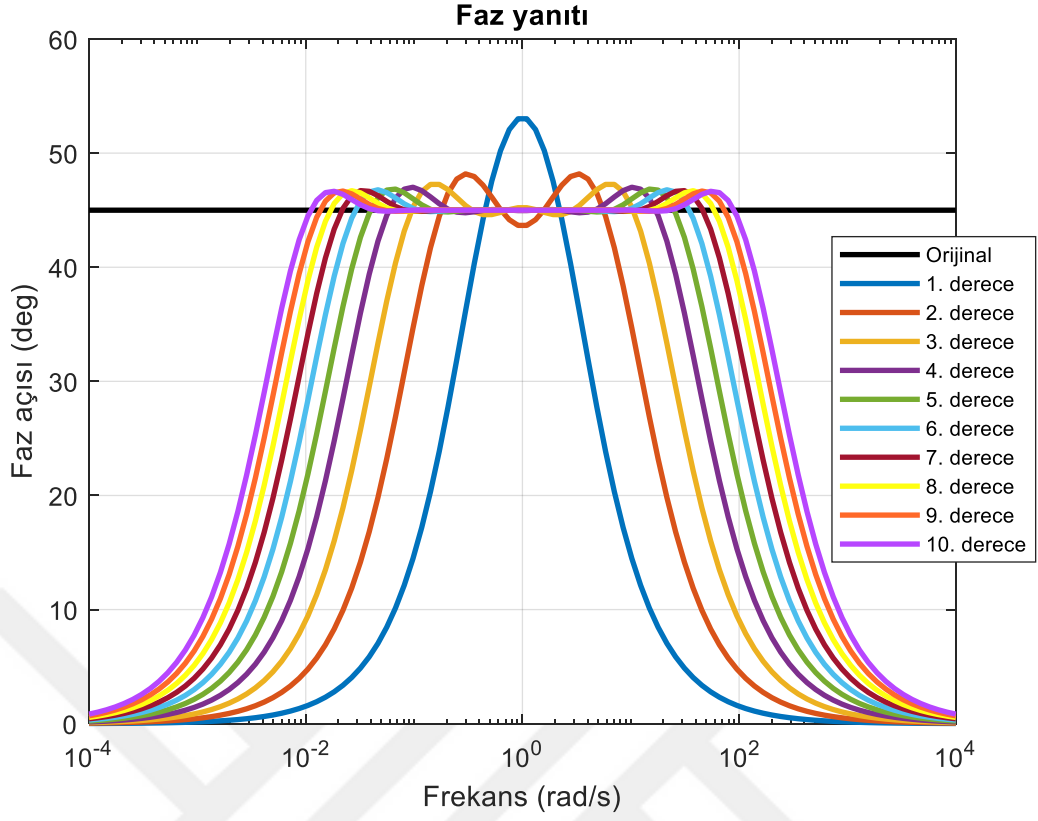
Şekil 3.1’de verilen birim geri beslemeli sistemde kontrol edilen sistem olan $G_p(s)$, Denklem 4.1’deki gibi verilmiş olsun;

$$G_p(s) = s^{0.5} \quad (4.1)$$

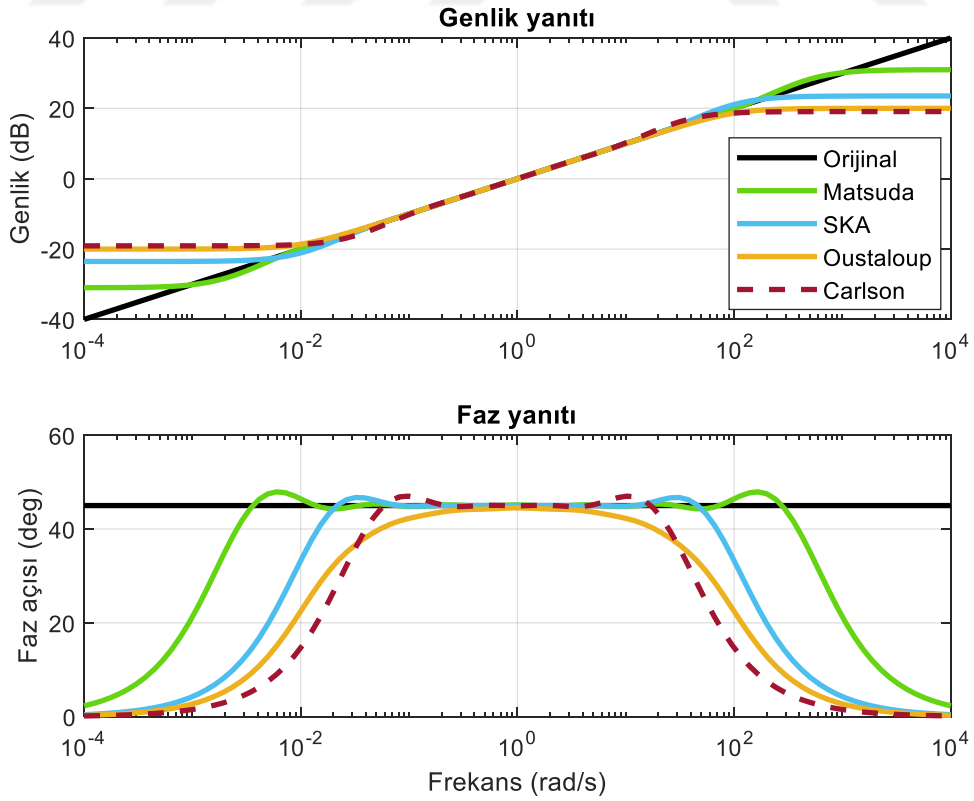
Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de rasyonel yaklaşımların genlik ve faz yanıtları $s^{0.5}$ ’in orijinal hali ile karşılaştırılmıştır. Burada onuncu dereceden rasyonel yaklaşımın diğer rasyonel yaklaşımlara kıyasla orijinal sisteme en yakın cevabı verdiği görülmüştür.



Şekil 4.1. Rasyonel yaklaşımların genlik yanıtlarının orijinal sistem ile karşılaştırılması



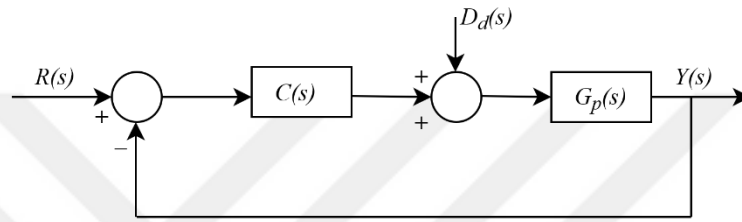
Şekil 4.2. Rasyonel yaklaşımların faz yanıtlarının orijinal sistem ile karşılaştırılması



Şekil 4.3. Çeşitli yöntemlerin genlik ve faz yanıtlarının orijinal sistem ile karşılaştırılması

Şekil 4.3'te SKA, Oustaloup, Matsuda ve Carlson yöntemlerinin $\alpha = 0.5$ için orijinal sistemle karşılaştırılması görülmektedir. Bu şekilde SKA, Oustaloup ve Matsuda yöntemleri için yedinci dereceden yaklaşım kullanılmıştır. Ayrıca Oustaloup ve Matsuda yöntemleri için frekans aralığı $\omega \in [0.01, 100]$ rad/s alınmıştır. Carlson yöntemi içinse iterasyon sayısı ($i = 2$) alınarak Bode diyagramı oluşturulmuştur.

4.2. Örnek 2



Şekil 4.4. Bozulma eklenmiş olan birim geri beslemeli bir kontrol sistemi

Şekil 4.4'te verilen kesirli dereceli transfer fonksiyonuna sahip kontrol sistemini ele alalım. Kontrol edilen sistem Denklem 4.2 ile verilmiş olsun. Burada $D_d(s)$ sisteme verilen bozulmayı temsil etmektedir. Bu örnekte genlik=1 için $T = 50$ sn'de sisteme bozulma sinyali verelim.

$$G_p(s) = \frac{1}{s^{1.5} + 1} e^{-s} = \frac{1}{s(s^{0.5}) + 1} e^{-s} \quad (4.2)$$

Bu örnekte amaç, verilen sistem için kararlılığı sağlayan tüm PI^λ kontrolör parametrelerini hesaplamak ve birim adım yanıtlarını incelemek için dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi noktalarını belirlemektir. Bilindiği gibi kesirli dereceli sistemlerin frekans alanı analizi kolaylıkla elde edilebilirken zaman alanı analizi doğrudan araştırılmaz. Zaman alanı analizini elde etmek oldukça zordur. Böylelikle sistemin birim adım yanıtlarının araştırılmasını kolaylaştırmak için tam sayı dereceli yaklaşımlar kullanılır. Bu amaca paralel olarak Çizelge 3.5'te elde edilen $s^{0.5}$ terimi için altıncı derece yaklaşımı ele alalım. Yaklaşımın derecesi arttığı takdirde orijinal cevaba o kadar yakın bir sonuç elde edilebileceği görülebilir.

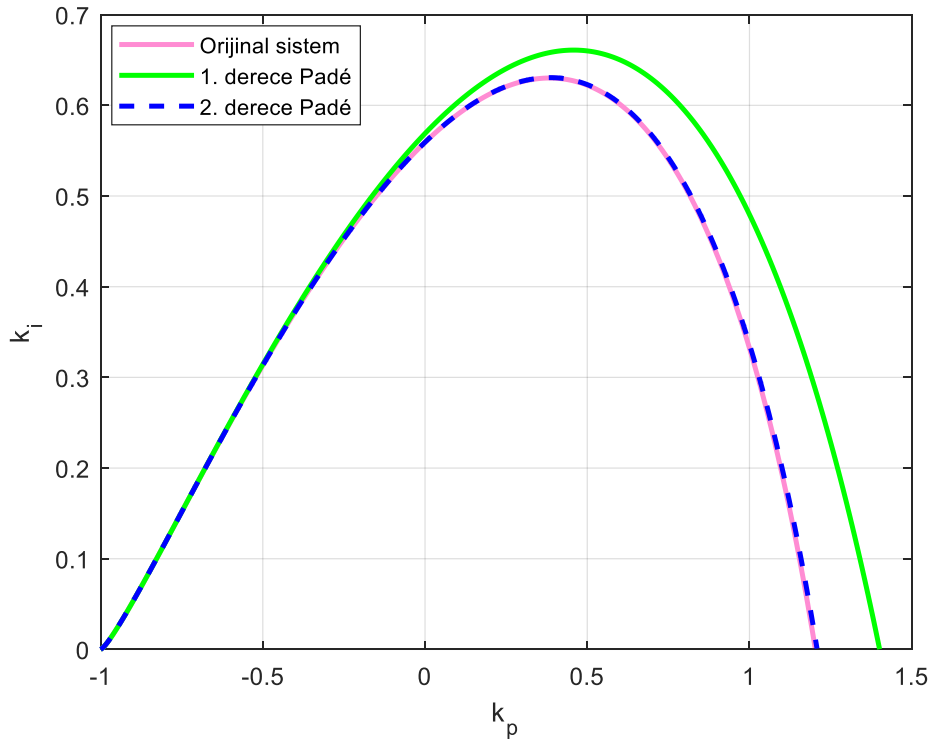
$$s^{0.5} \approx \frac{13s^6 + 286s^5 + 1287s^4 + 1716s^3 + 715s^2 + 78s + 1}{s^6 + 78s^5 + 715s^4 + 1716s^3 + 1287s^2 + 286s + 13} \quad (4.3)$$

Eğer $N(s)$ ve $D(s)$ 'in çift ve tek ayrışmasını göz önünde bulundurursak;

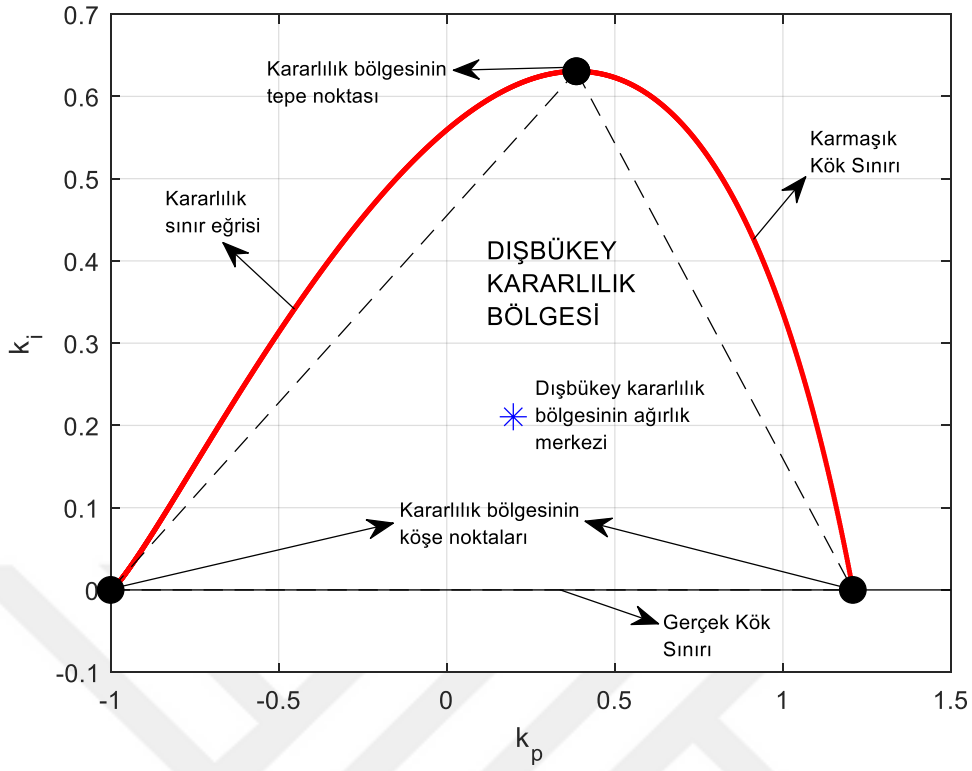
$$\begin{aligned}
 N_e &= -\omega^6 + 715\omega^4 - 1287\omega^2 + 13 \\
 N_o &= 78\omega^4 - 1716\omega^2 + 286 \\
 D_e &= -287\omega^6 + 2431\omega^4 - 1365\omega^2 + 13 \\
 D_o &= -13\omega^6 + 1365\omega^4 - 2431\omega^2 + 287
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$\lambda = 1$ için birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımlarının orijinal sistemle karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri Şekil 4.5'te görülebilir. Özellikle ikinci derece Padé yaklaşımının kararlılık bölgesinin orijinal sistemle neredeyse birebir örtüştüğü görülmektedir.

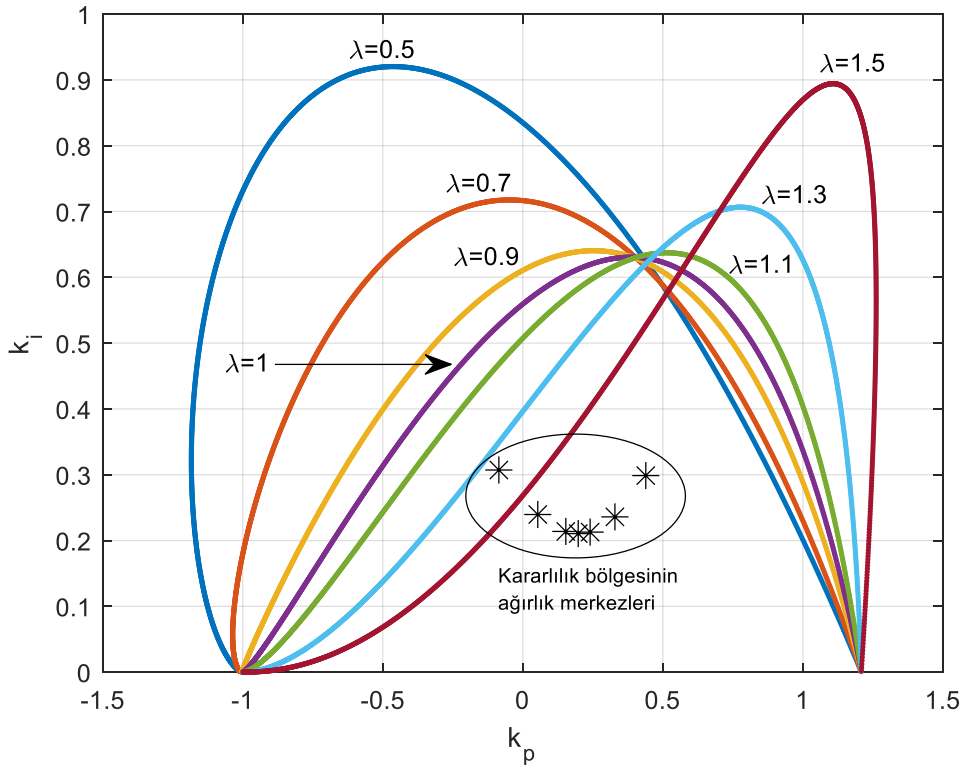
İlk olarak, sistemin kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzleminde çizdirilir. Gerçek kök sınırı PI denetleyici için $k_i = 0$ çizgisidir. Burada kararlılık sınır eğrisi, iki köşe noktasına ve bir tepe noktasına sahiptir. Dışbükey kararlılık bölgesi, kararlılık sınır eğrisinin k_p eksenine sınırladığı bölge olarak tanımlanmamaktadır. Yani dışbükey kararlılık bölgesi bir üçgendir. Bunun dışında dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi, Denklem 2.47 ve Denklem 2.48 kullanılarak $m=2$ ve $n=1$ için hesaplanabilir. Bu örnekte kesirli dereceli PI kontrolörünün ağırlık merkezi $\lambda = 1$ için $k_p = k_{pc} = 0.19789$ ve $k_i = k_{ic} = 0.21051$ şeklinde bulunmuştur.



Şekil 4.5. $\lambda = 1$ için birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımlarının orijinal sistem ile karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri

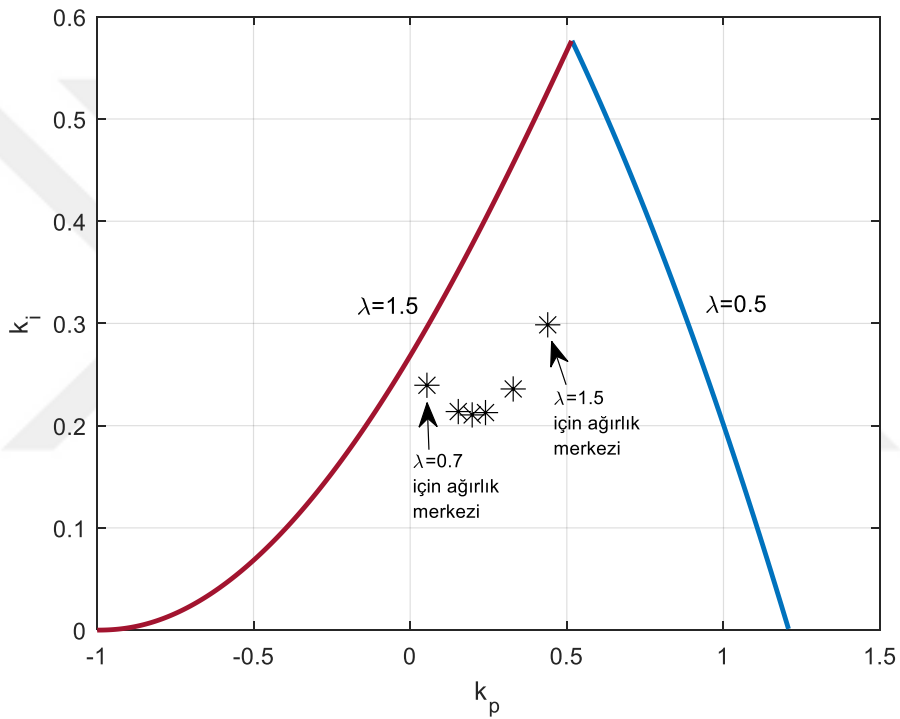


Şekil 4.6. $\lambda = 1$ için kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi



Şekil 4.7. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri

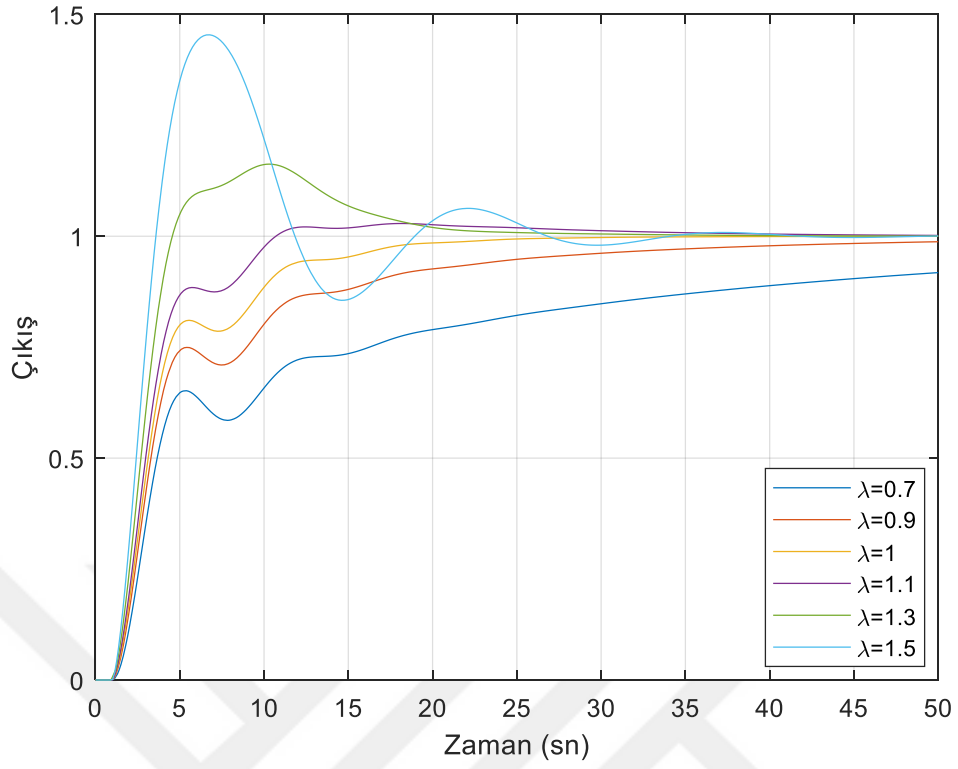
Şekil 4.6'da $\lambda = 1$ için ikinci derece Padé yaklaşımına göre hesaplanan kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve bu bölgenin ağırlık merkezi görülebilir. Burada kararlılık sınır eğrisi, karmaşık kök sınırını göstermekte olup $k_i = 0$ çizgisi ise gerçek kök sınırını belirtmektedir. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri Şekil 4.7'de verilmiştir. Şekil 4.8'de ortak kararlılık bölgesi gösterilmiştir. Çizelge 4.1'de $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için k_p ve k_i değerleri incelenebilir. Şekil 4.9'da ortak kararlılık bölgesinden farklı λ değerleri için birim adım yanıtları görülebilir. Şekil 4.10'da ise farklı λ değerleri için ağırlık merkezlerinin ayar takip noktası ve bozulma yanıtları sunulmuştur.



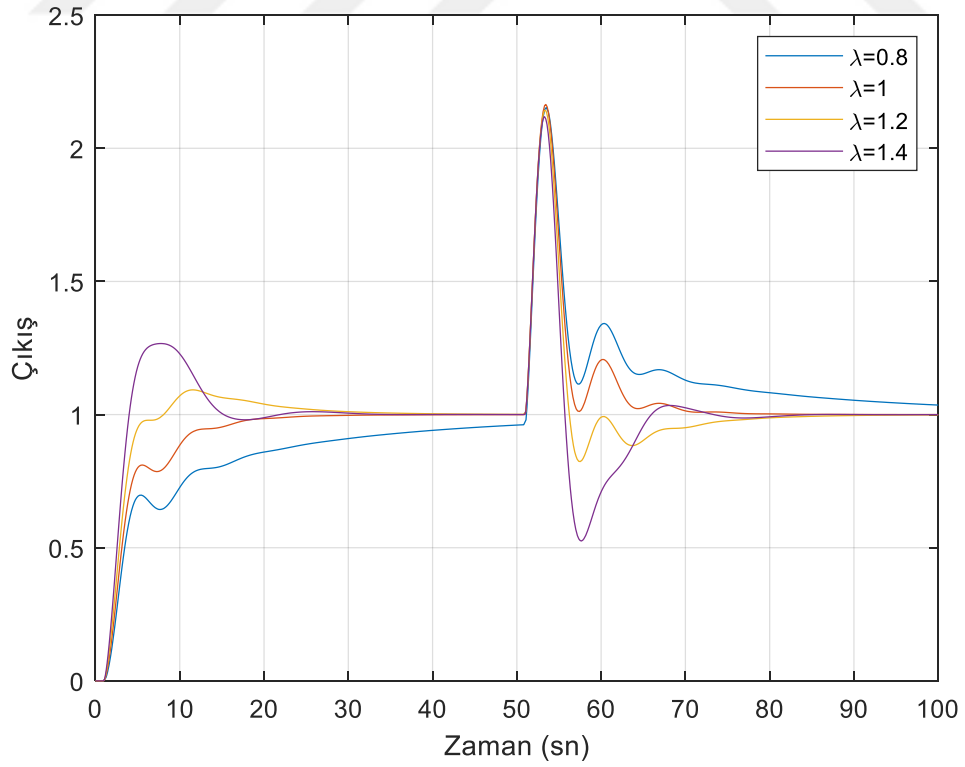
Şekil 4.8. Ortak kararlılık bölgesi

Çizelge 4.1. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için k_p ve k_i değerleri

λ	Orijinal sistem		1. derece Padé yaklaşımı		2. derece Padé yaklaşımı	
	k_p	k_i	k_p	k_i	k_p	k_i
0.5	-0.088017	0.30738	-0.003667	0.31321	-0.085425	0.30714
0.7	0.050932	0.23969	0.13861	0.24669	0.053464	0.23952
0.9	0.15104	0.21392	0.24147	0.22257	0.15352	0.21379
1	0.19544	0.21063	0.28643	0.2204	0.19789	0.21051
1.1	0.23859	0.21288	0.32977	0.22406	0.24061	0.21277
1.3	0.32643	0.236	0.41896	0.25146	0.32881	0.23591
1.5	0.43703	0.29872	0.52907	0.32238	0.43905	0.29865



Şekil 4.9. Ortak kararlılık bölgesinden farklı λ değerleri için birim adım yanıtları



Şekil 4.10. Farklı λ değerleri için ağırlık merkezlerinin ayar takip noktası ve bozulma yanıtları

4.3. Örnek 3

$$G_p(s) = \frac{1}{s^{0.5} + 1} e^{-0.5s} \quad (4.5)$$

Şekil 4.4'teki kontrol sistemi için Denklem 4.5'teki kesirli dereceli transfer fonksiyonunu (Özyetkin et al., 2012) ele alalım. Bu örnekte de genlik=1 için $T = 50$ sn'de sisteme bozulma sinyali verelim.

Eğer $N(s)$ ve $D(s)$ 'in çift ve tek ayrışmasını göz önünde bulundurursak;

$$\begin{aligned} N_e &= -\omega^6 + 715\omega^4 - 1287\omega^2 + 13 \\ N_o &= 78\omega^4 - 1716\omega^2 + 286 \\ D_e &= -14\omega^6 + 2002\omega^4 - 2002\omega^2 + 14 \\ D_o &= 364\omega^4 - 3432\omega^2 + 364 \end{aligned} \quad (4.6)$$

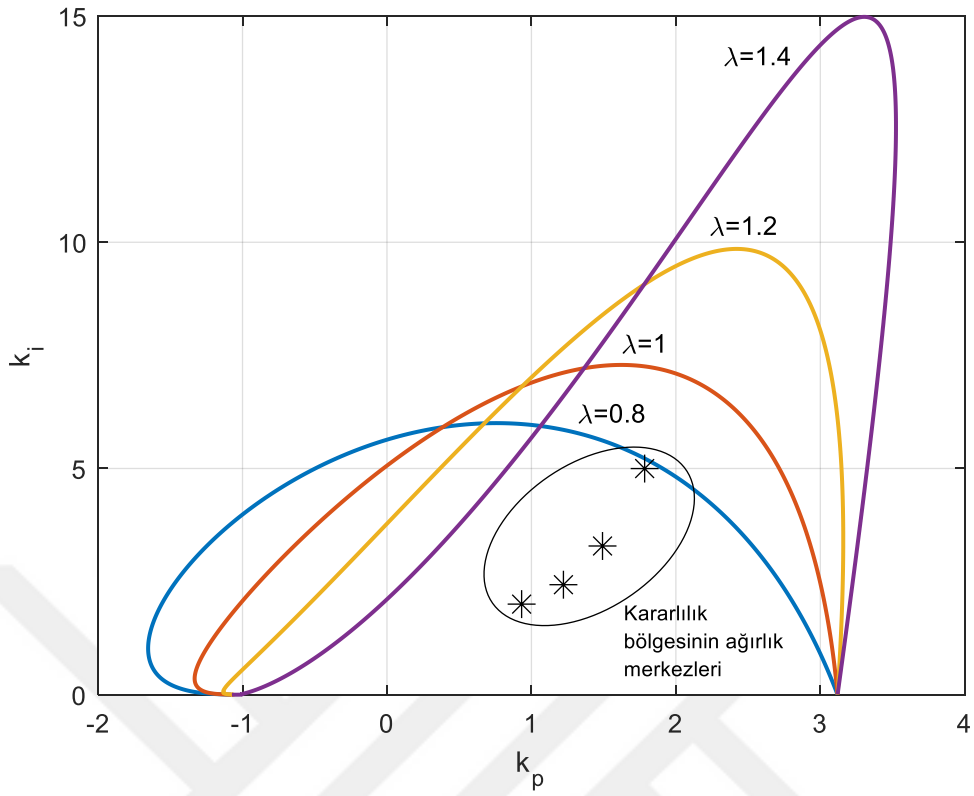
Çizelge 4.2. $\lambda \in [0.8, 1.4]$ için k_p ve k_i değerleri

λ	Orijinal sistem		1. derece Padé yaklaşımı		2. derece Padé yaklaşımı	
	k_p	k_i	k_p	k_i	k_p	k_i
0.8	0.90293	1.9838	1.6037	2.7731	0.93222	2.0021
1	1.1909	2.401	1.9167	3.7225	1.2216	2.4312
1.2	1.4617	3.234	2.1841	5.6186	1.4922	3.2869
1.4	1.7545	4.8969	2.4396	9.6191	1.7838	4.9978

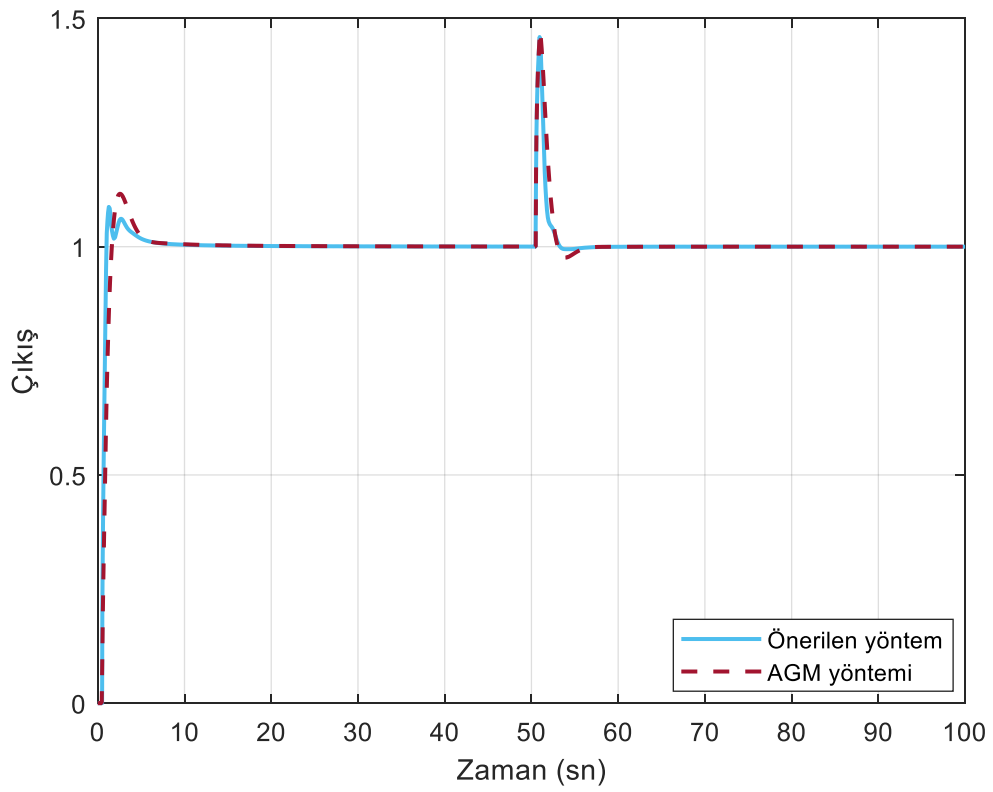
Çizelge 4.2'de $\lambda \in [0.8, 1.4]$ için k_p ve k_i değerleri belirtilmiştir. $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin farklı yöntemlere göre karşılaştırılması Çizelge 4.3'te incelenebilir. Şekil 4.11'de $\lambda \in [0.8, 1.4]$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri gösterilmiştir. Şekil 4.12'de ise $\lambda = 1$ için önerilen yöntemin AGM yöntemi ile karşılaştırılması elde edilmiştir.

Çizelge 4.3. $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin farklı yöntemlere göre karşılaştırılması

	k_p	k_i
Önerilen yöntem	1.2216	2.4312
AGM yöntemi	0.6538	1.9483



Şekil 4.11. $\lambda \in [0.8, 1.4]$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri



Şekil 4.12. $\lambda = 1$ için önerilen yöntemin AGM yöntemi ile karşılaştırılması

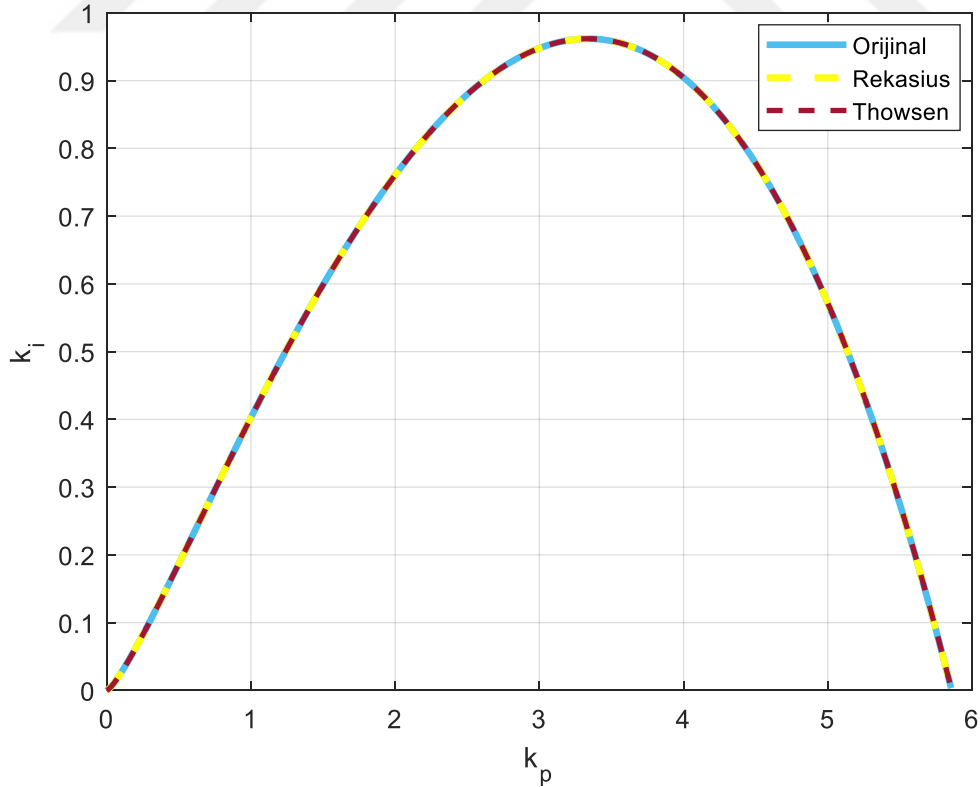
4.4. Örnek 4

Şekil 3.1’de verilen sistemi yeniden ele alalım. Burada $G_p(s)$ kontrol edilen sistem olup Denklem 4.7 ile ifade edilsin;

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^{0.5} + 1)^2} e^{-0.5s} = \frac{1}{s^2 + 2s^{1.5} + s} e^{-0.5s} \quad (4.7)$$

Bu örnekte amaç, verilen birim geri beslemeli sistem için tüm kararlılığı sağlayıcı PI^λ kontrolörlerini hesaplamaktır. Bunun için hesaplama kolaylığı açısından Çizelge 3.5’te elde edilen $s^{0.5}$ terimi için altıncı derece yaklaşımı ele alalım. Buna göre $N(s)$ ve $D(s)$ ’in çift ve tek ayrışması aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} N_e &= -\omega^6 + 715\omega^4 - 1287\omega^2 + 13 \\ N_o &= 78\omega^4 - 1716\omega^2 + 286 \\ D_e &= \omega^8 - 1365\omega^6 + 6435\omega^4 - 455\omega^2 \\ D_o &= -105\omega^6 + 5005\omega^4 - 3003\omega^2 + 15 \end{aligned} \quad (4.8)$$

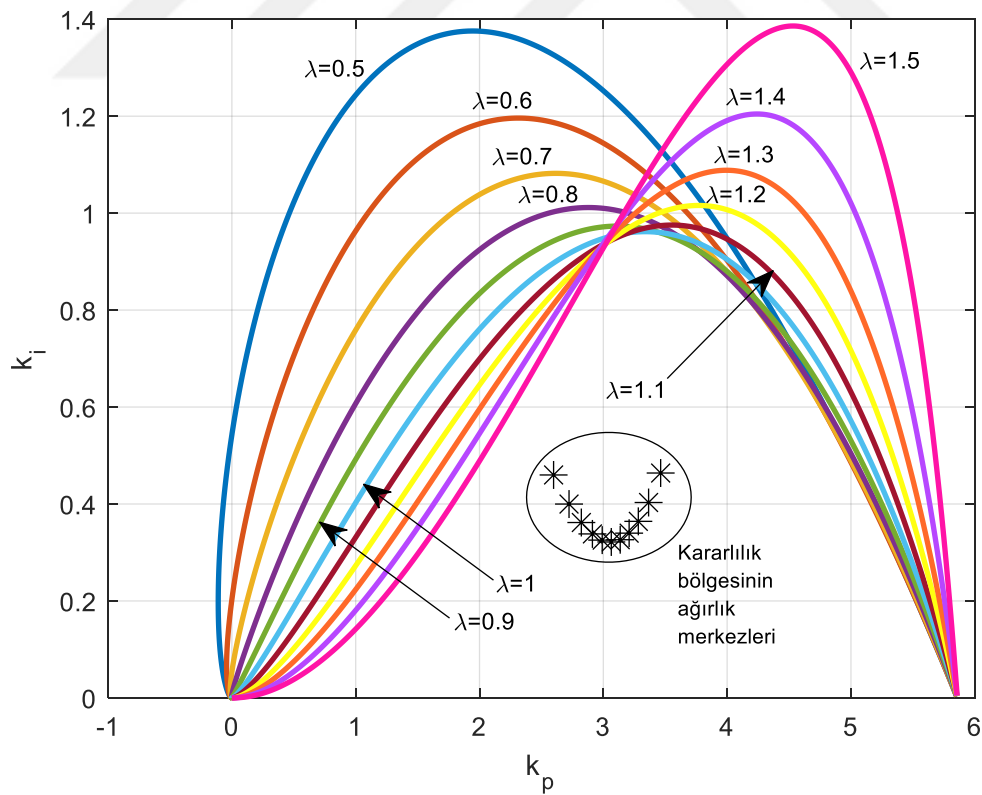


Şekil 4.13. $\lambda = 1$ için Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin orijinal sistemle karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri

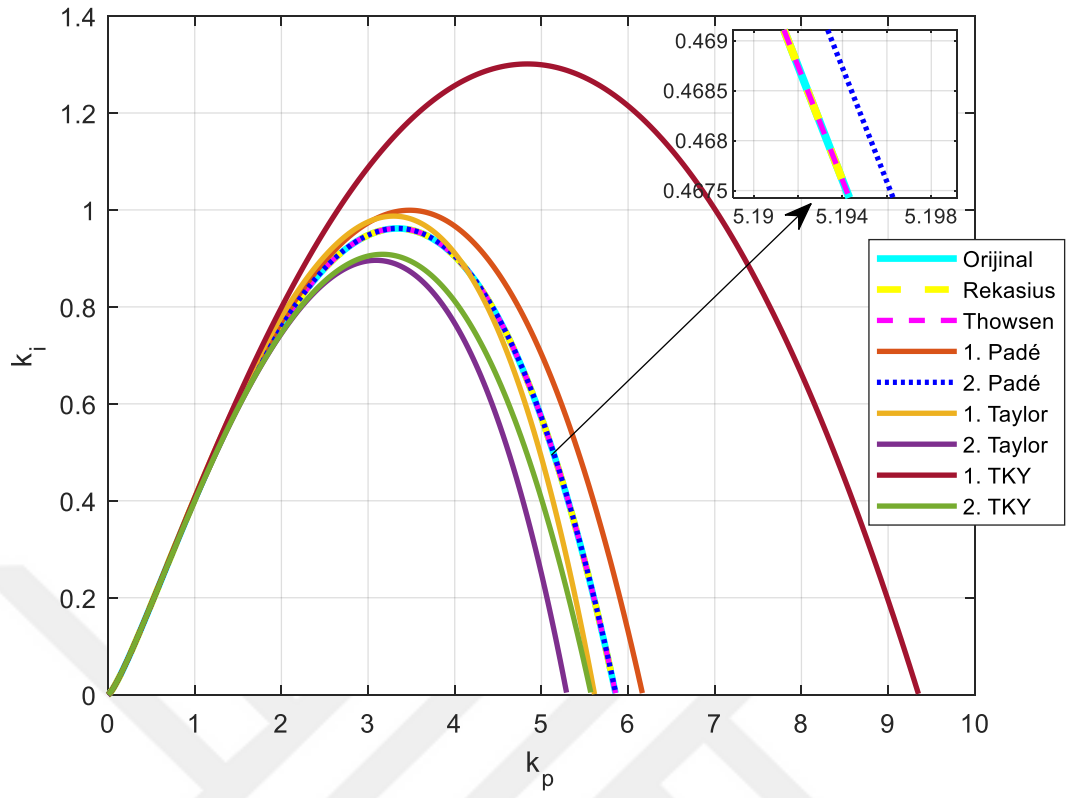
$\lambda = 1$ için Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin orijinal sistemle karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri Şekil 4.13'te görülebilir. Burada Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin orijinal sistemle birebir örtüştüğü görülmektedir. Buna göre bu iki dönüşümün zaman gecikmesi teriminin çok iyi karşılığı olduğu söylenebilir.

Çizelge 4.4. Farklı λ değerleri için (k_p, k_i) değerleri

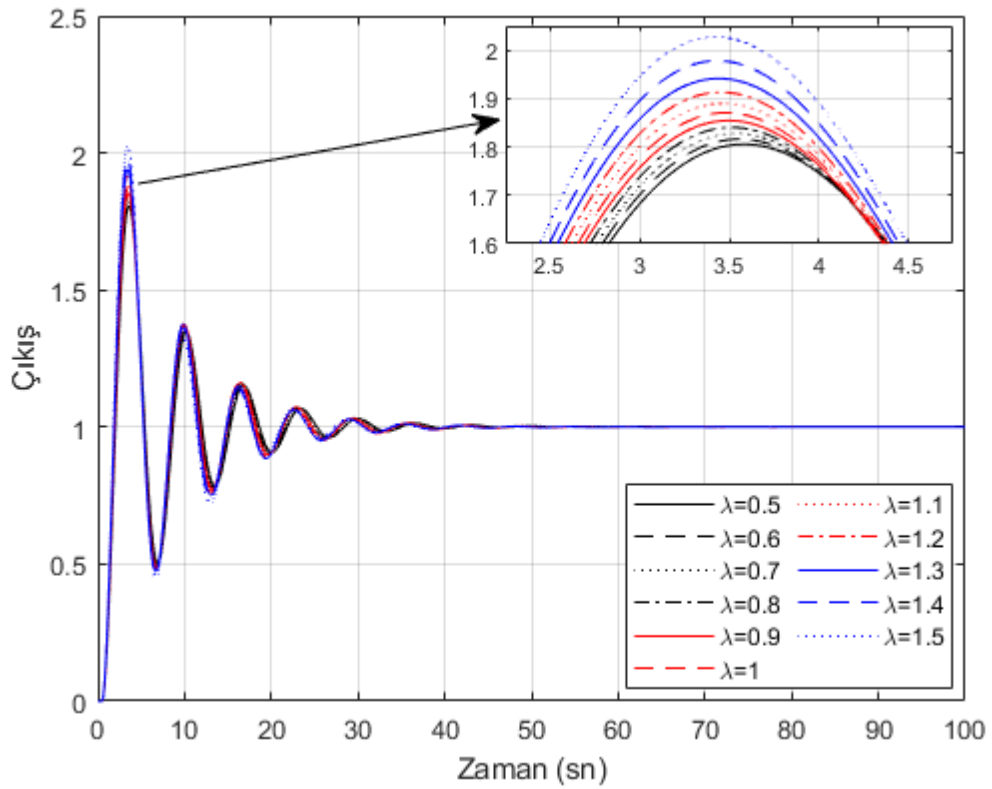
Orijinal sistem, Rekasius ve Thowsen dönüşümleri		
λ	k_p	k_i
0.5	2.5983	0.4599
0.6	2.723	0.39989
0.7	2.8224	0.36181
0.8	2.9119	0.33827
0.9	2.9909	0.32551
1	3.0643	0.32169
1.1	3.1364	0.32629
1.2	3.2084	0.33985
1.3	3.2826	0.3642
1.4	3.3655	0.40309
1.5	3.463	0.46389



Şekil 4.14. Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri



Şekil 4.15. Çeşitli yöntemlerin orijinal sistemle karşılaştırılması



Şekil 4.16. Farklı λ değerleri için ağırlık merkezlerinin birim adım değişimi

Çizelge 4.4'te farklı λ değerleri için (k_p, k_i) değerleri verilmiştir. Buradaki (k_p, k_i) değerleri Bölüm 2.7'de sunulan dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemine göre hesaplanmıştır. Şekil 4.14'te Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri gösterilmiştir. Şekil 4.15'te Rekasius ve Thowsen dönüşümlerine ek olarak birinci ve ikinci derece Padé yaklaşımları, birinci ve ikinci derece Taylor serileri ve ayrıca birinci ve ikinci derece tüm kutup yaklaşımlarının karşılaştırıldığı kararlılık bölgeleri gösterilmiştir. Burada Rekasius dönüşümü, Thowsen dönüşümü ve kısmen ikinci derece Padé yaklaşımının diğer zaman gecikmesi terimlerine göre daha iyi sonuç verdiğini net bir şekilde görebiliriz. Şekil 4.16'da farklı λ değerleri için ağırlık merkezlerinin birim adım değişimi görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.14'te bu noktaların düzlemde işaretlendiği de görülmektedir. Burada dikkat edilecek olan husus orijinal sistem ile Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin kararlılık bölgelerinin örtüşmesinden dolayı, (k_p, k_i) çiftinin değerlerinin de aynı olacak olmasıdır.

4.5. Örnek 5

$$G_p(s) = \frac{1}{1+2s^\alpha} e^{-0.5s} \quad (4.9)$$

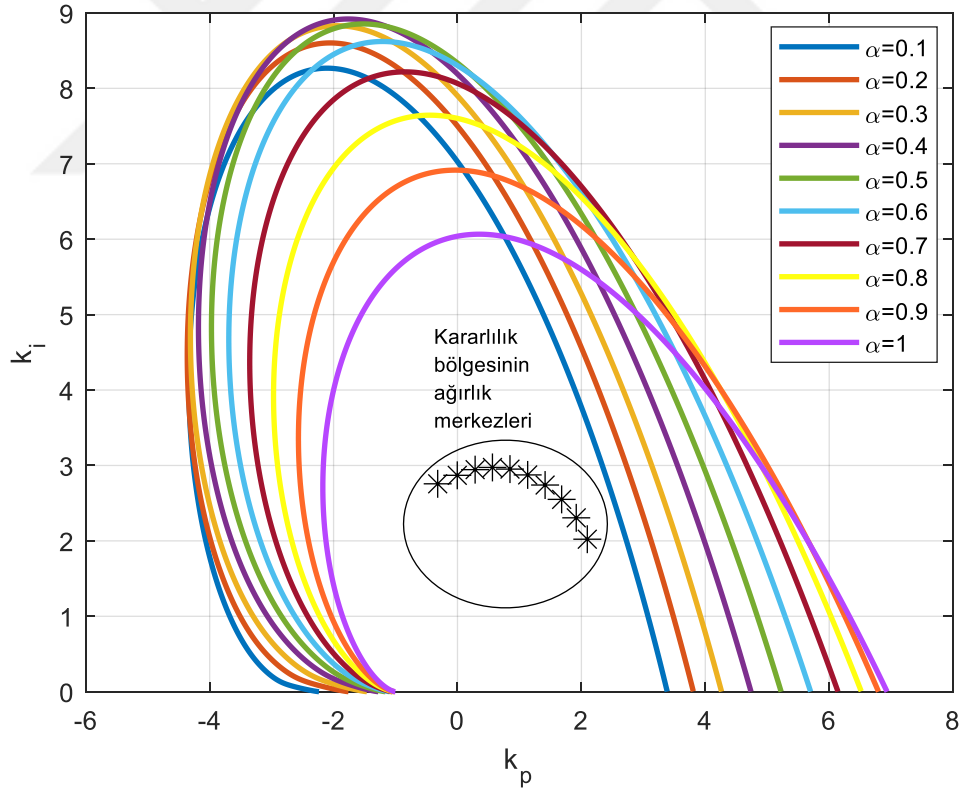
Şekil 3.1'deki sistem için kontrol edilen sistemin Denklem 4.9'daki gibi verildiğini varsayalım (Ruszewski, 2008). Burada α , kesirli dereceli ($0 < \alpha < 1$) veya tam sayı dereceli ($\alpha = 1$) olabilmektedir. s^α , ($\alpha \in [0.1, 0.9]$)'nın hesaplanabilmesi için Çizelge 3.1 - Çizelge 3.9'daki altıncı derece yaklaşımları ele alalım.

Çizelge 4.5. Farklı α değerleri için (k_p, k_i) değerleri ($\lambda = 0.5$)

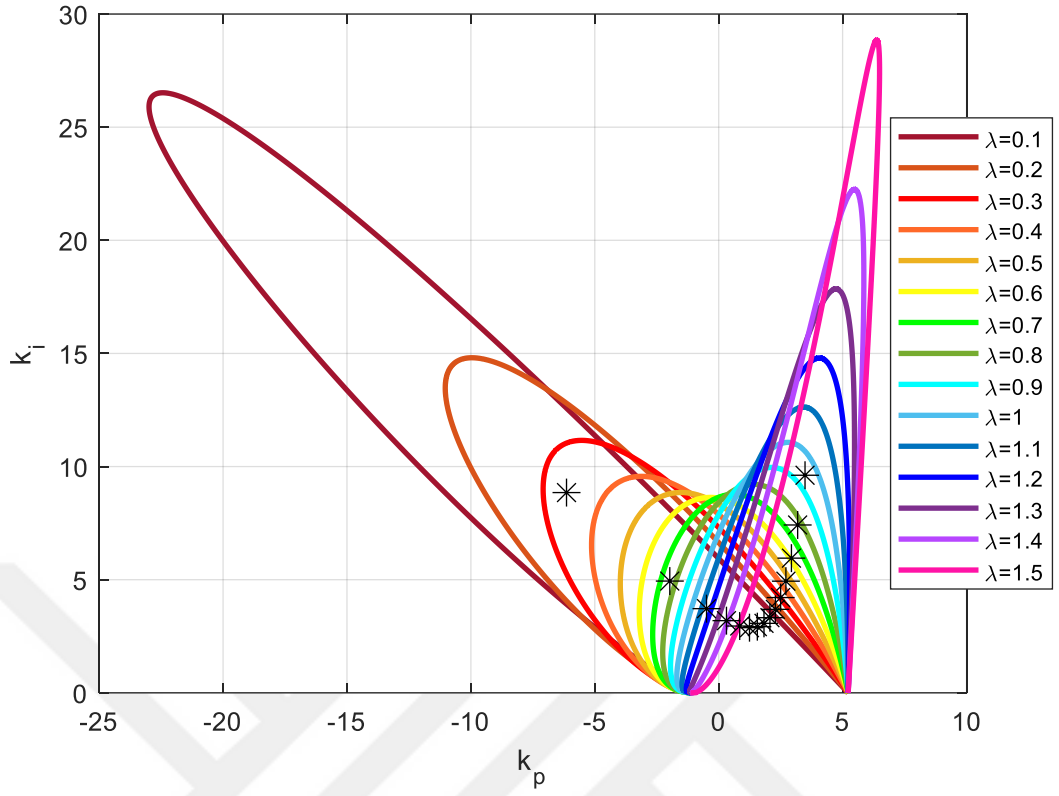
Orijinal sistem, Rekasius ve Thowsen dönüşümleri		
α	k_p	k_i
0.1	-0.31949	2.7566
0.2	-0.0035006	2.8692
0.3	0.28489	2.9443
0.4	0.5644	2.9737
0.5	0.84747	2.9515
0.6	1.1331	2.8745
0.7	1.4143	2.7403
0.8	1.6813	2.5502
0.9	1.9168	2.3055
1	2.0953	2.0221

Çizelge 4.6. Farklı λ değerleri için (k_p, k_i) değerleri ($\alpha = 0.5$)

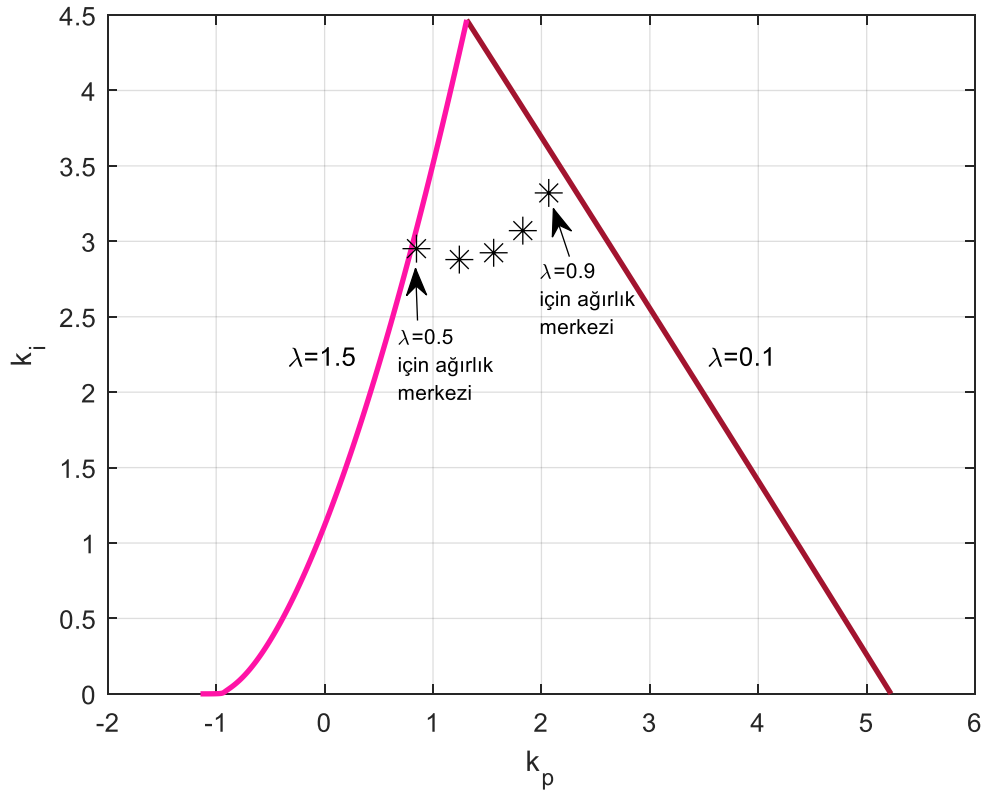
Orijinal sistem, Rekasius ve Thowsen dönüşümleri		
λ	k_p	k_i
0.1	-6.1409	8.8501
0.2	-1.9732	4.9389
0.3	-0.49184	3.7199
0.4	0.31358	3.1895
0.5	0.84747	2.9515
0.6	1.2428	2.8791
0.7	1.5594	2.9242
0.8	1.8282	3.0709
0.9	2.0674	3.3209
1	2.2872	3.6901
1.1	2.4997	4.21
1.2	2.7119	4.9342
1.3	2.936	5.9522
1.4	3.1858	7.4181
1.5	3.4841	9.6161



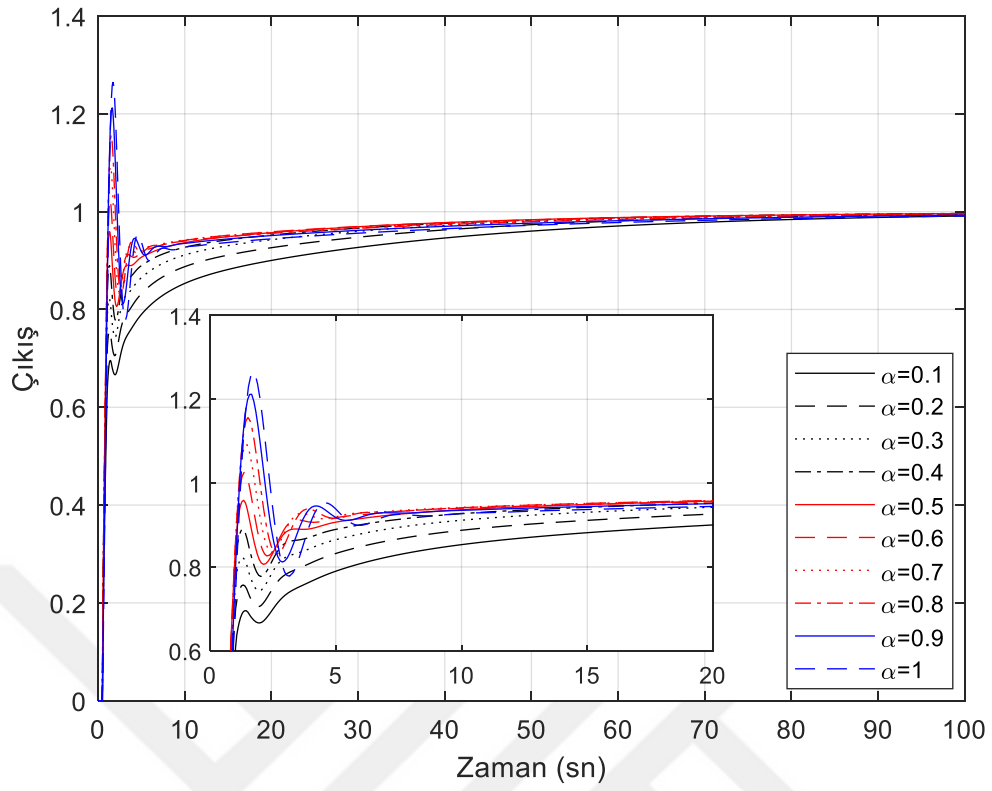
Şekil 4.17. Farklı α değerleri için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri



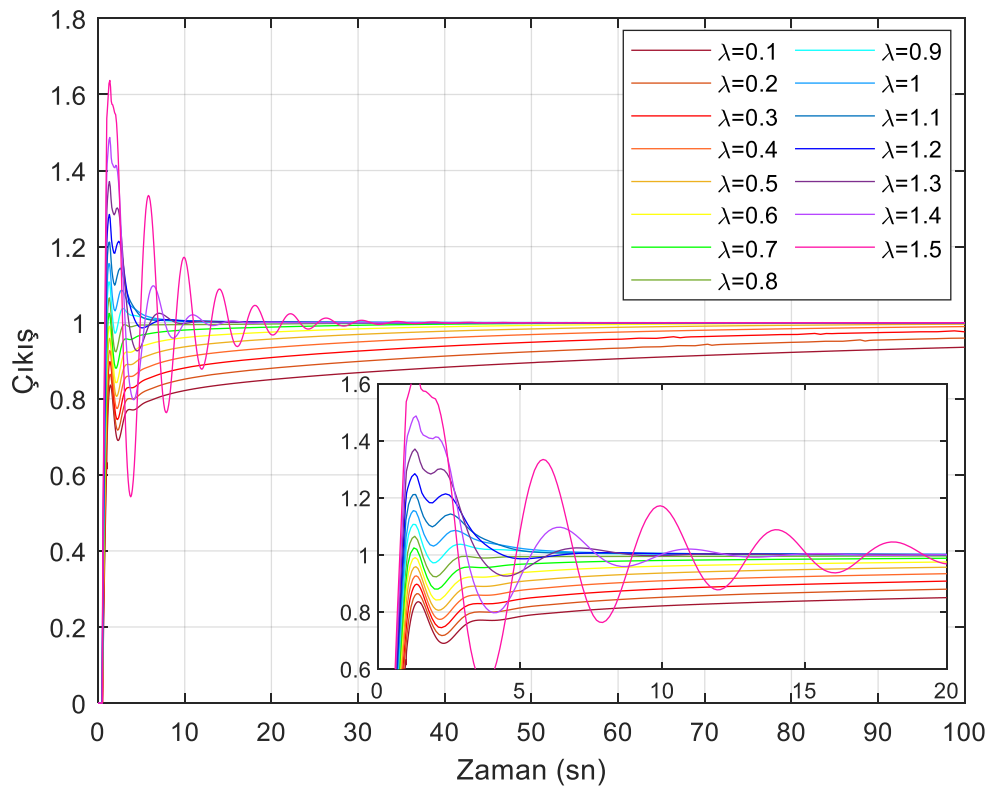
Şekil 4.18. Farklı λ değerleri için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri



Şekil 4.19. Ortak kararlılık bölgesi ve bu bölgedeki ağırlık merkezleri



Şekil 4.20. Farklı α değerleri için birim adım yanıtları ($\lambda = 0.5$)



Şekil 4.21. Farklı λ değerleri için birim adım yanıtları ($\alpha = 0.5$)

Buna göre Çizelge 4.5'te orijinal sistem, Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle farklı α değerleri için (k_p, k_i) değerleri hesaplanmıştır. Bu çizelge için $\lambda = 0.5$ sabit değeri alınmıştır. Çizelge 4.6'da orijinal sistem, Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle farklı λ değerleri için (k_p, k_i) değerleri hesaplanmıştır. Bu çizelge içinse $\alpha = 0.5$ değeri alınmıştır.

Farklı α değerleri için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri Şekil 4.17'de görülebilir. Şekil 4.18'de farklı λ değerleri için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri verilmiştir. Şekil 4.19'da ortak kararlılık bölgesi ve bu bölgedeki ağırlık merkezleri gösterilmiştir. Şekil 4.20'de $\lambda = 0.5$ sabit değeri alınıp farklı α değerleri için birim adım yanıtları gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 4.21'de ise farklı λ değerleri için birim adım yanıtları elde edilmiştir. Bu şekil için $\alpha = 0.5$ sabit değeri alınmıştır.

4.6. Örnek 6

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için Denklem 4.10'daki kesirli dereceli transfer fonksiyonunu (Ozyetkin & Tan, 2017) ele alalım.

$$G_p(s) = \frac{1}{s^{1.9} + s} e^{-s} = \frac{1}{s(s^{0.9} + 1)} e^{-s} \quad (4.10)$$

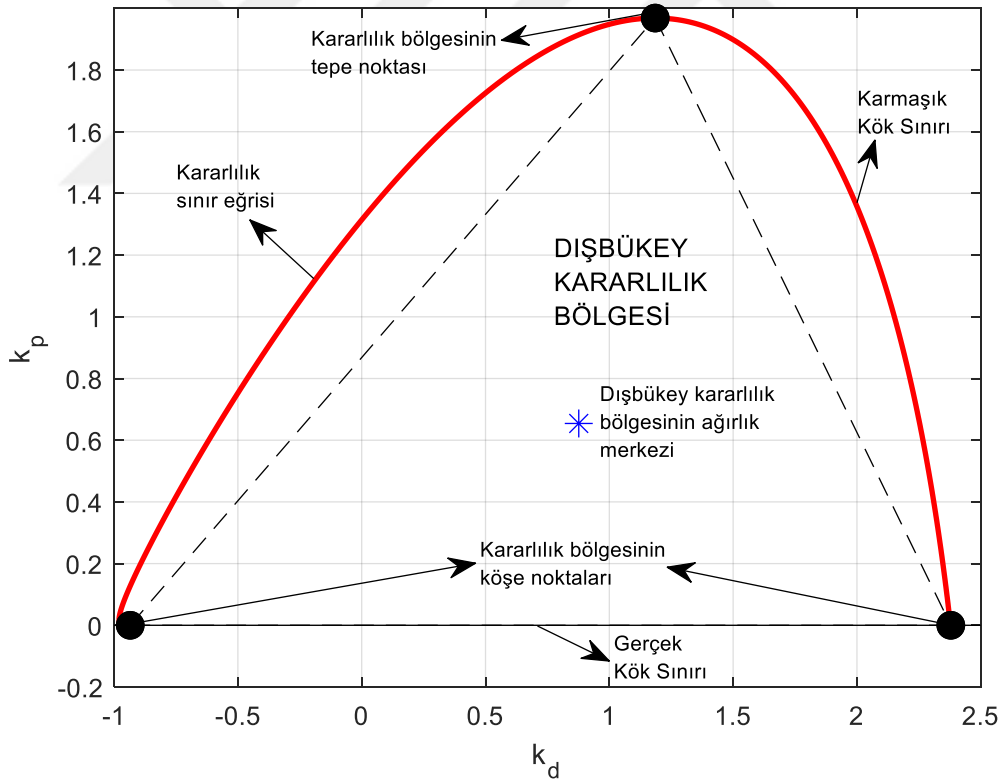
Bu örnekteki amaç Denklem 4.10'daki kontrol sistemi için tüm kararlılığı sağlayıcı PD^μ kontrolörlerini hesaplamaktır. Ayrıca bu amaca paralel olarak dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi ve ağırlıklı geometrik merkez yöntemlerinin noktalarını belirleyip bu yöntemlerin birim adım yanıtlarını kıyaslamaktır. İlk olarak, Çizelge 3.9'da SKA yöntemiyle elde edilen $s^{0.9}$ için 10. dereceden yaklaşımı ele alalım.

$$s^{0.9} \approx \frac{680.37s^{10} + 32586.49s^9 + 409578.54s^8 + 1988381.33s^7 + 4331830.76s^6 + 4493356.65s^5 + 2224971.29s^4 + 498908.57s^3 + 44145s^2 + 1090s + 1}{s^{10} + 1090s^9 + 44145s^8 + 498908.57s^7 + 2224971.29s^6 + 4493356.65s^5 + 4331830.76s^4 + 1988381.33s^3 + 409578.54s^2 + 32586.49s + 680.37} \quad (4.11)$$

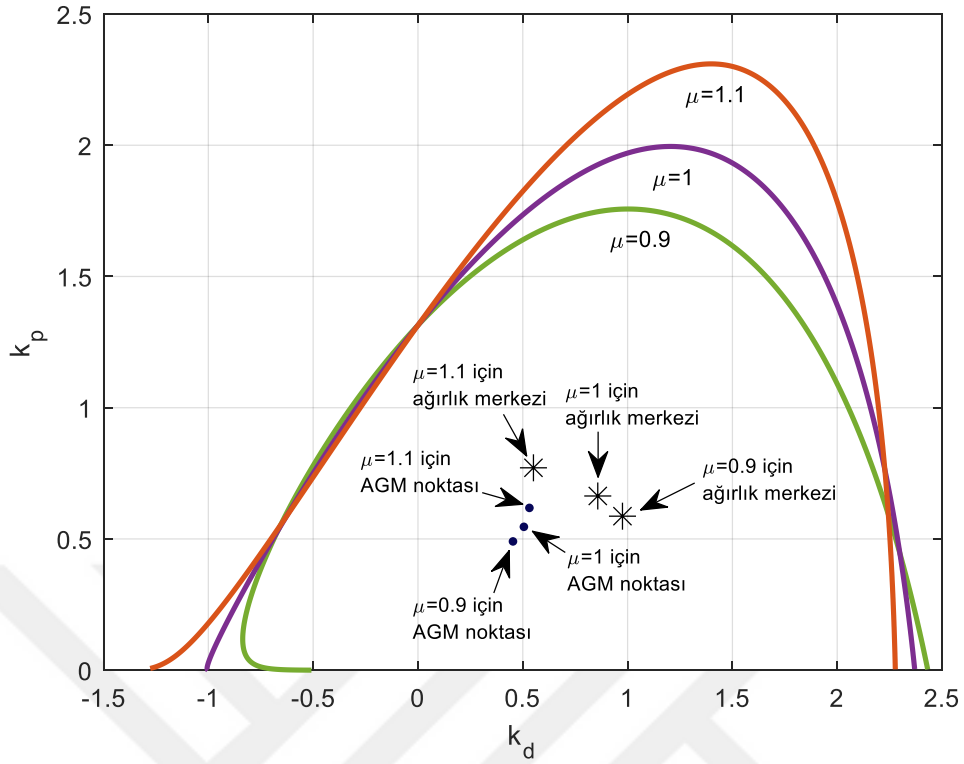
Denklem 4.10'daki $G_p(s)$ 'in pay ve payda polinomlarını $N(s)$ ve $D(s)$ olarak ayırıp bu polinomları çift (N_e, D_e) ve tek (N_o, D_o) kısımlarına ayırıp $s = j\omega$ yazılırsa aşağıdaki gibi bir sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 N_e &= -\omega^{10} + 44145\omega^8 - 2224971.29\omega^6 + 4331830.76\omega^4 - 409578.54\omega^2 + 680.37 \\
 N_o &= 1090\omega^8 - 498908.57\omega^6 + 4493356.65\omega^4 - 1988381.33\omega^2 + 32586.49 \\
 D_e &= -33676.49\omega^{10} + 2487289.9\omega^8 - 8986713.3\omega^6 + 2487289.9\omega^4 - 33676.49\omega^2 \\
 D_o &= -681.37\omega^{10} + 453723.54\omega^8 - 6556802.05\omega^6 + 6556802.05\omega^4 - 453723.54\omega^2 + 681.37
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

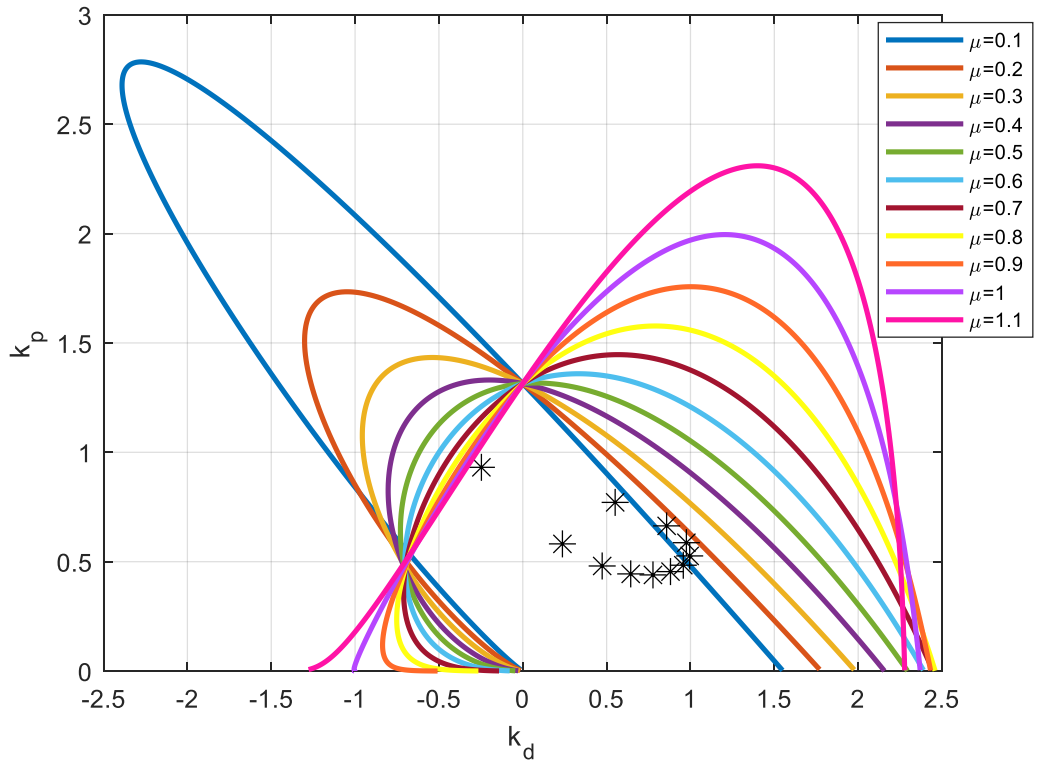
İlk olarak, Şekil 4.22'de $\mu = 0.99$ için kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi görülebilir. Burada PD^μ kontrolör için dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezleri (Ozyetkin et al., 2020)'ye göre hesaplanmıştır. $\mu = 0.9$, $\mu = 1$ ve $\mu = 1.1$ için kararlılık bölgeleri, ağırlık merkezleri ve AGM noktaları Şekil 4.23'teki gibidir.



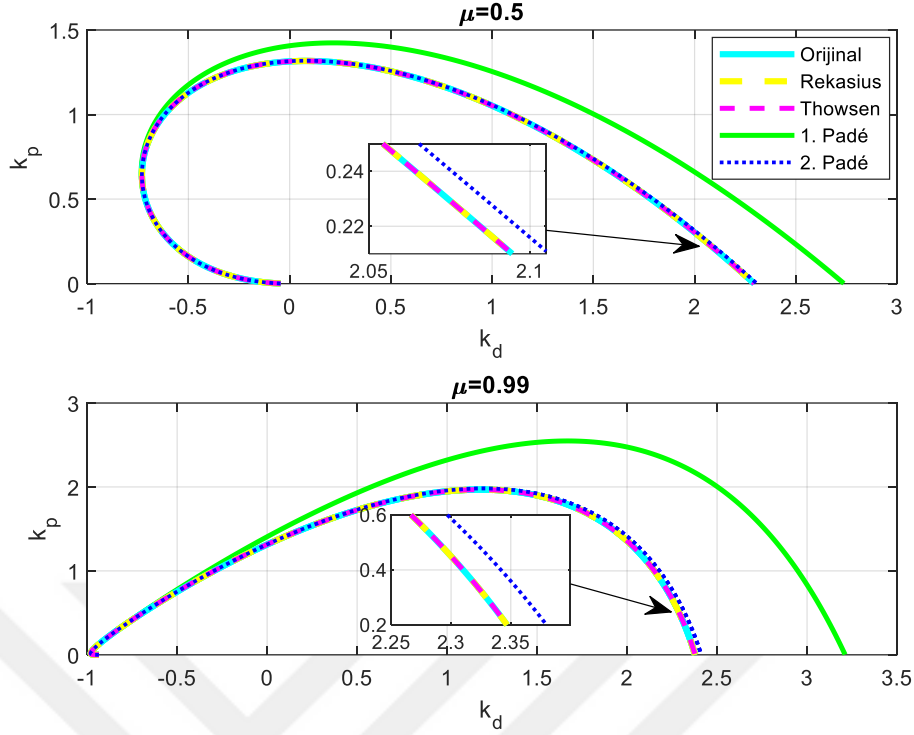
Şekil 4.22. $\mu = 0.99$ için kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve bu bölgenin ağırlık merkezi



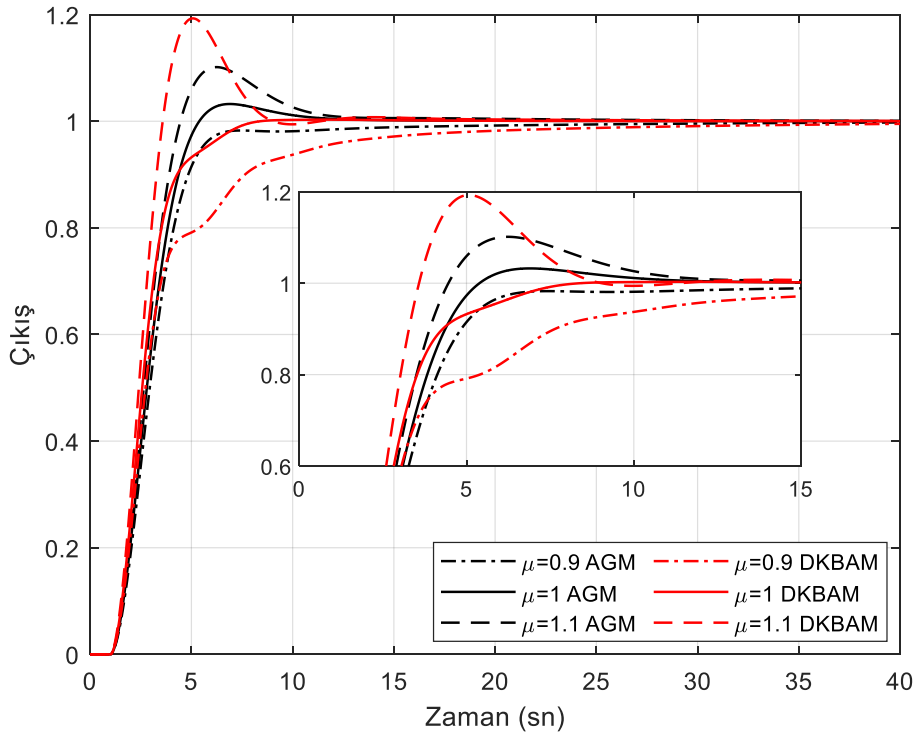
Şekil 4.23. $\mu = 0.9$, $\mu = 1$ ve $\mu = 1.1$ için kararlılık bölgeleri, ağırlık merkezleri ve AGM noktaları



Şekil 4.24. $\mu \in [0.1, 1.1]$ için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri



Şekil 4.25. $\mu = 0.5$ ve $\mu = 0.99$ için orijinal sistemin kararlılık bölgesinin çeşitli yöntemlerle karşılaştırılması



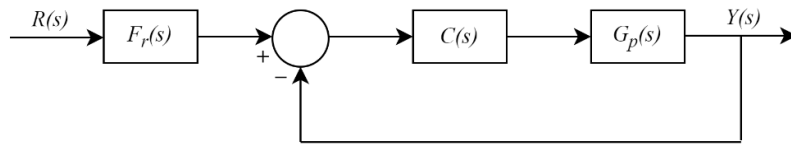
Şekil 4.26. $\mu = 0.9$, $\mu = 1$ ve $\mu = 1.1$ için AGM ve DKBAM metotlarının karşılaştırıldığı birim adım yanıtları

Çizelge 4.7. Farklı μ değerleri için (k_p, k_d) değerleri

μ	k_p	k_d
0.1	0.93138	-0.24673
0.2	0.58136	0.23633
0.3	0.48036	0.47345
0.4	0.44411	0.64363
0.5	0.43947	0.77628
0.6	0.45458	0.88083
0.7	0.48381	0.95719
0.8	0.52635	0.99521
0.9	0.58675	0.97552
1	0.6637	0.85777
1.1	0.77106	0.5509

Şekil 4.24'te $\mu \in [0.1, 1.1]$ için Rekasius ve Thowsen dönüşümleriyle kararlılık bölgeleri gösterilmiştir. $\mu = 0.5$ ve $\mu = 0.99$ için orijinal sistemin kararlılık bölgesinin çeşitli yöntemlerle karşılaştırılması Şekil 4.25'te verilmiştir. Burada PI^λ kontrolöründe olduğu gibi PD^μ kontrolöründe de Rekasius ve Thowsen dönüşümünün orijinal sistemle birebir örtüştüğü gözlemlenmiştir. İkinci dereceden Padé yaklaşımının da kısmen orijinal sisteme yaklaştığı görülmüştür. Şekil 4.26'da $\mu = 0.9$, $\mu = 1$ ve $\mu = 1.1$ için AGM ve DKBAM metotlarının karşılaştırıldığı birim adım yanıtları verilmiştir. Çizelge 4.7'de ise farklı μ değerleri için (k_p, k_d) değerleri görülebilir.

4.7. Örnek 7



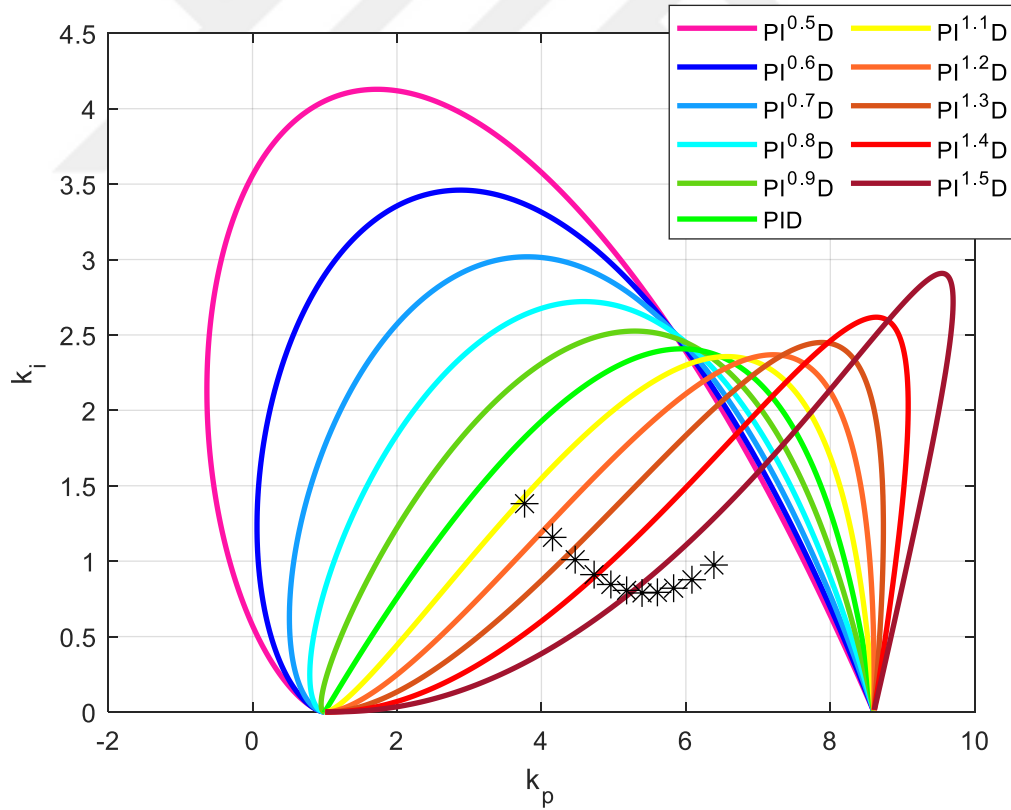
Şekil 4.27. Filtreli tek giriş-tek çıkışlı bir kontrol sistemi

Şekil 4.27'deki kontrol sistemi için Denklem 4.13'teki transfer fonksiyonunu (Seer & Nandong, 2017) ele alalım. Buradaki amaç, bu sistemi kapalı çevrim kararlı yapan $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörün parametre değerlerini elde etmektir.

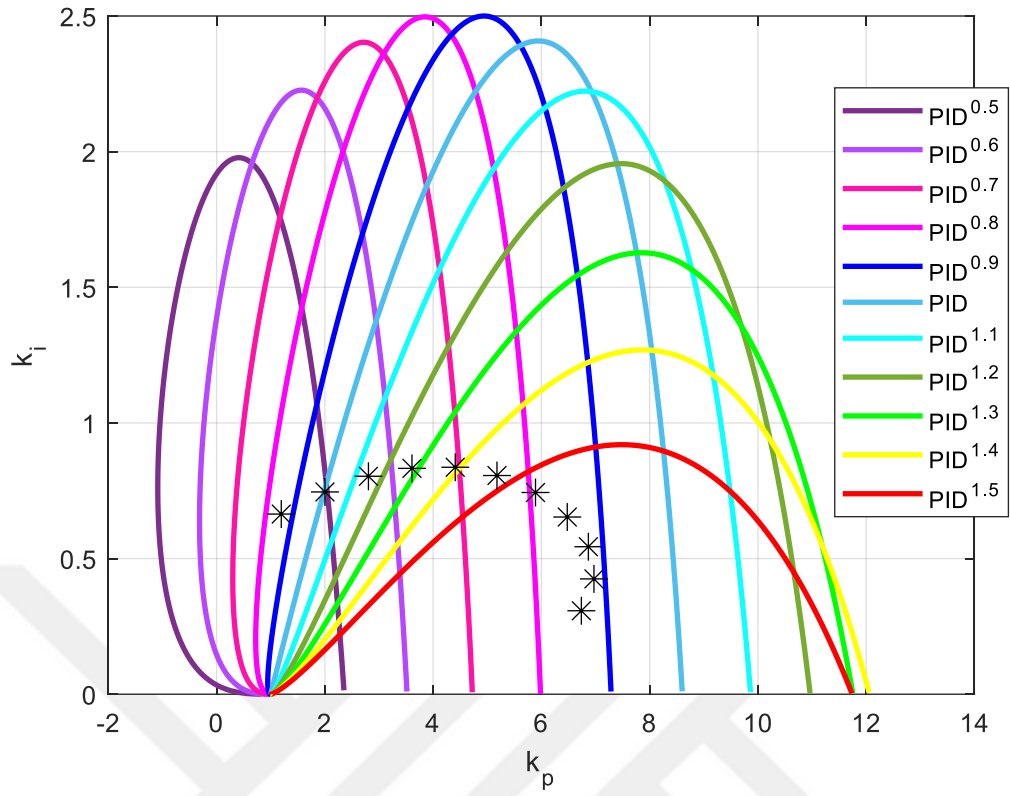
$$G_p(s) = \frac{1}{(5s-1)(2s+1)(0.5s+1)} e^{-0.5s} = \frac{1}{5s^3 + 11.5s^2 + 2.5s - 1} e^{-0.5s} \quad (4.13)$$

(Cho et al., 2014)'e göre filtrenin transfer fonksiyonu $F_r(s) = (4.6656s^2 + 4.32s + 1)/(15.5539s^2 + 9.1627s + 1)$ ve PID kontrolör $C(s) = 4.7408(1 + 1/9.1627s + 1.6975s)$ olarak verilmiştir. Bu örnekteki üçüncü dereceden süreç, birinci dereceden Taylor serisi kullanılarak kararsız kutuplu ikinci dereceden ölü zaman formuna indirgenebilir. Dolayısıyla transfer fonksiyonu $G_{p1}(s) = e^{-s} / (5s - 1)(2s + 1)$ formuna gelir (Seer & Nandong, 2017). Ayrıca (Seer & Nandong, 2017)'ye göre elde edilen filtrenin transfer fonksiyonu $F_r(s) = (3.8452s + 1)/(9.613s + 1)$ ve PID kontrolör ise $C(s) = 4.2433(1 + 1/9.613s + 1.99s)$ şeklindedir.

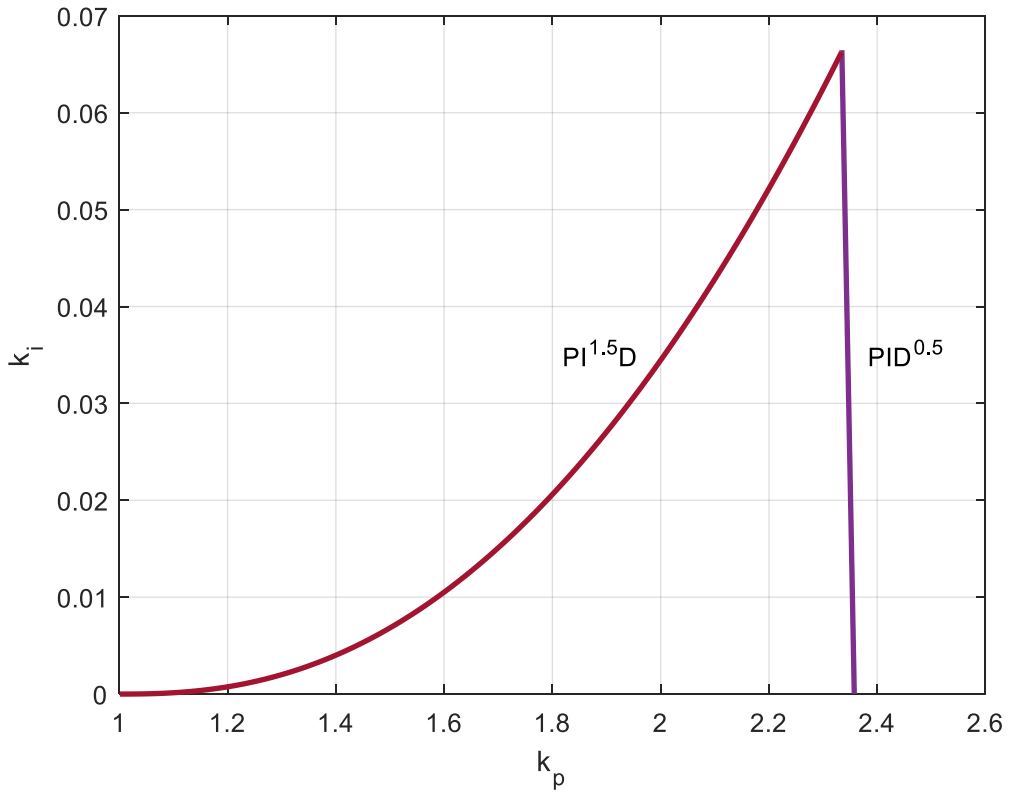
Diğer bir taraftan (Majhi & Atherton, 1999), PI-PD kontrolörünün ön filtreli bir PID kontrolörüyle eş değer olacağını göstermiştir. (Majhi & Atherton, 1999)'da bulunan PI-PD parametreleri dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemiyle $k_f = 3.6699$, $k_d = 8.724$ ve $k_p = 1.6633$, $k_i = 0.92261$ olarak hesaplanmıştır. Buna göre filtrenin transfer fonksiyonu $F_r(s) = (2.9986s + 1.6633)/(15.7276s^2 + 9.6147s + 1.6633)$ olup PID kontrolör $C(s) = 5.3332(1 + 1/5.7805s + 1.6358s)$ olarak elde edilmiştir.



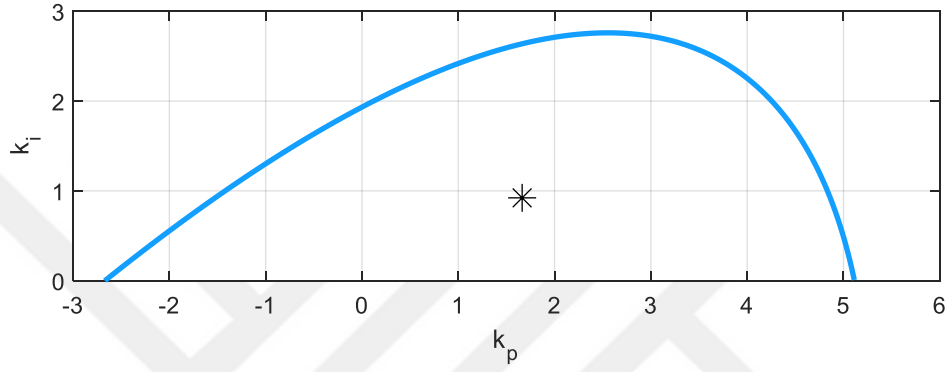
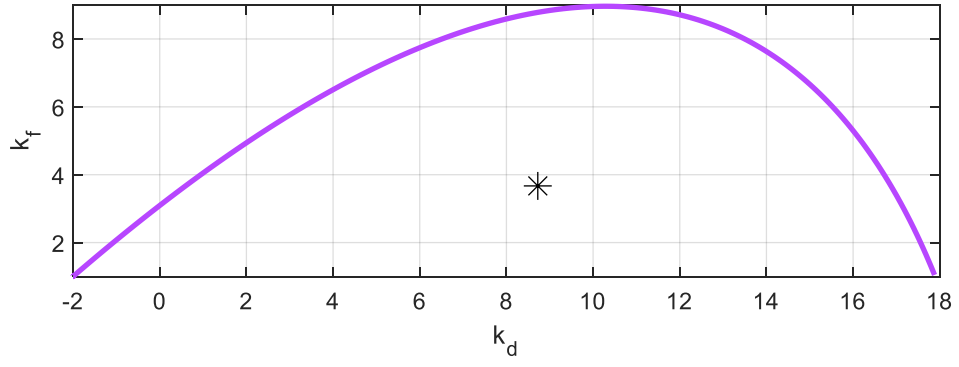
Şekil 4.28. Farklı λ değerlerine göre kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri



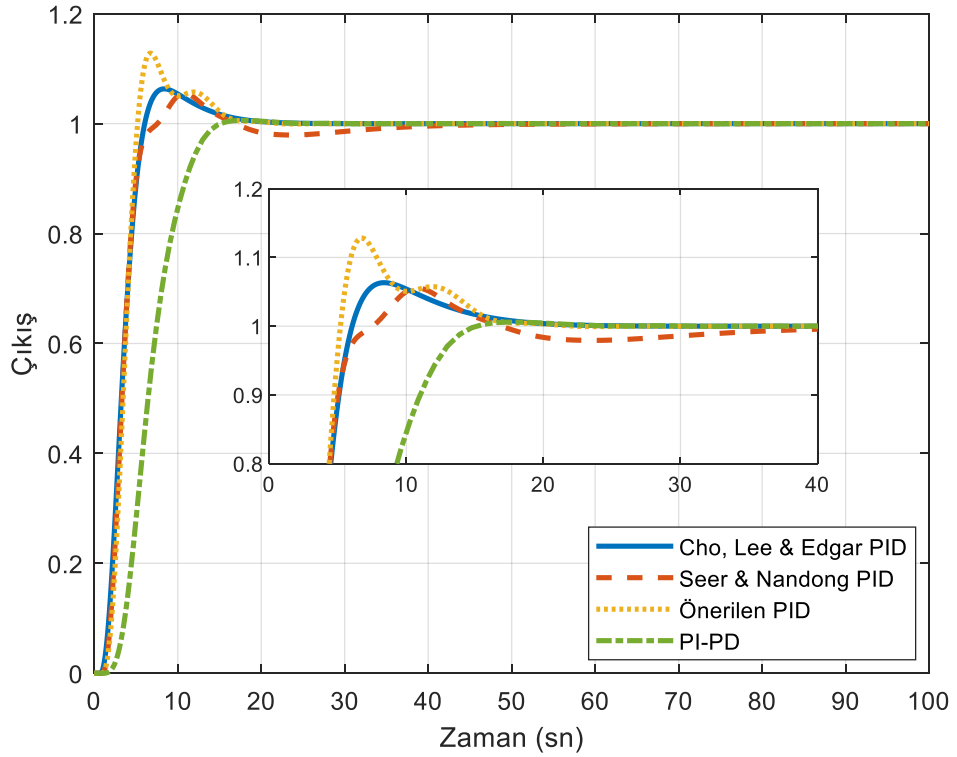
Şekil 4.29. Farklı μ değerlerine göre kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri



Şekil 4.30. Farklı λ ve μ değerleriyle ortak kararlılık bölgesi



Şekil 4.31. PI-PD kontrolörü için kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri



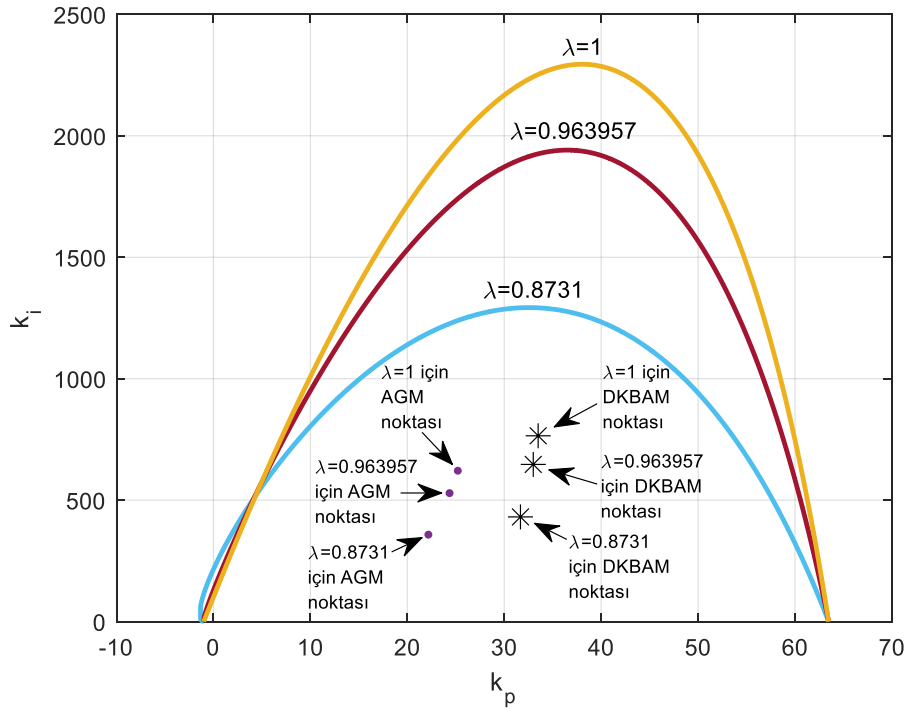
Şekil 4.32. Farklı yöntemlerle birim adım yanıtları

Şekil 4.28’de farklı λ değerlerine göre kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri görülebilir. Şekil 4.29’da farklı μ değerlerine göre kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri incelenebilir. Farklı λ ve μ değerleriyle ortak kararlılık bölgesi Şekil 4.30’da verilmiştir. Şekil 4.31’de PI-PD kontrolörü için kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri görülebilir. Şekil 4.32’de ise farklı yöntemlerle birim adım yanıtları gösterilmiştir.

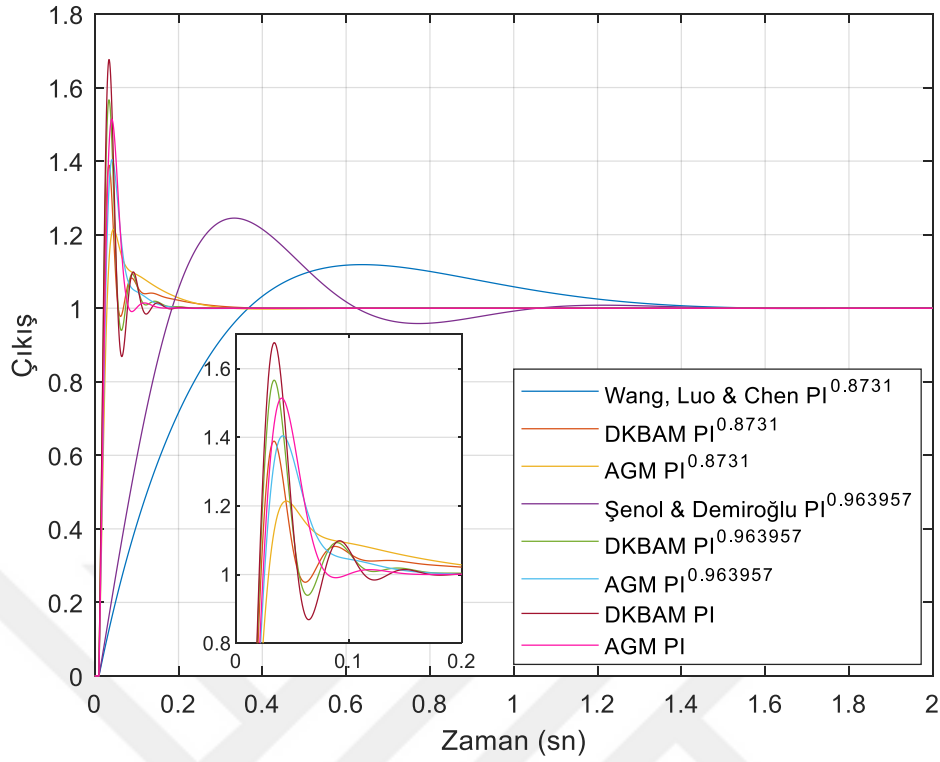
4.8. Örnek 8

$$G_p(s) = \frac{1}{0.4s + 1} e^{-0.01s} \quad (4.14)$$

Şekil 3.1’deki kontrol sistemi için Denklem 4.14’teki transfer fonksiyonunu (Şenol & Demiroğlu, 2019; Wang et al., 2009) ele alalım. Buradaki amaç, Denklem 4.14’teki transfer fonksiyonu için kararlılığı sağlayan PI^λ kontrolörlerini elde etmek olup AGM, DKBAM, (Wang et al., 2009)’daki metot ve (Şenol & Demiroğlu, 2019)’daki metodun birim adım yanıtlarını kıyaslamaktır.



Şekil 4.33. $\lambda = 0.8731$, $\lambda = 0.963957$ ve $\lambda = 1$ için kararlılık bölgeleri, AGM noktaları ve DKBAM noktaları



Şekil 4.34. Farklı λ değerlerine ve farklı metotlara göre birim adım yanıtları

Çizelge 4.8. $\lambda = 0.8731$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması

	k_p	k_i
Önerilen yöntem	31.674	430.91
AGM yöntemi	22.1734	357.8312

Çizelge 4.9. $\lambda = 0.963957$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması

	k_p	k_i
Önerilen yöntem	32.993	647.05
AGM yöntemi	24.3573	528.7643

Çizelge 4.10. $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması

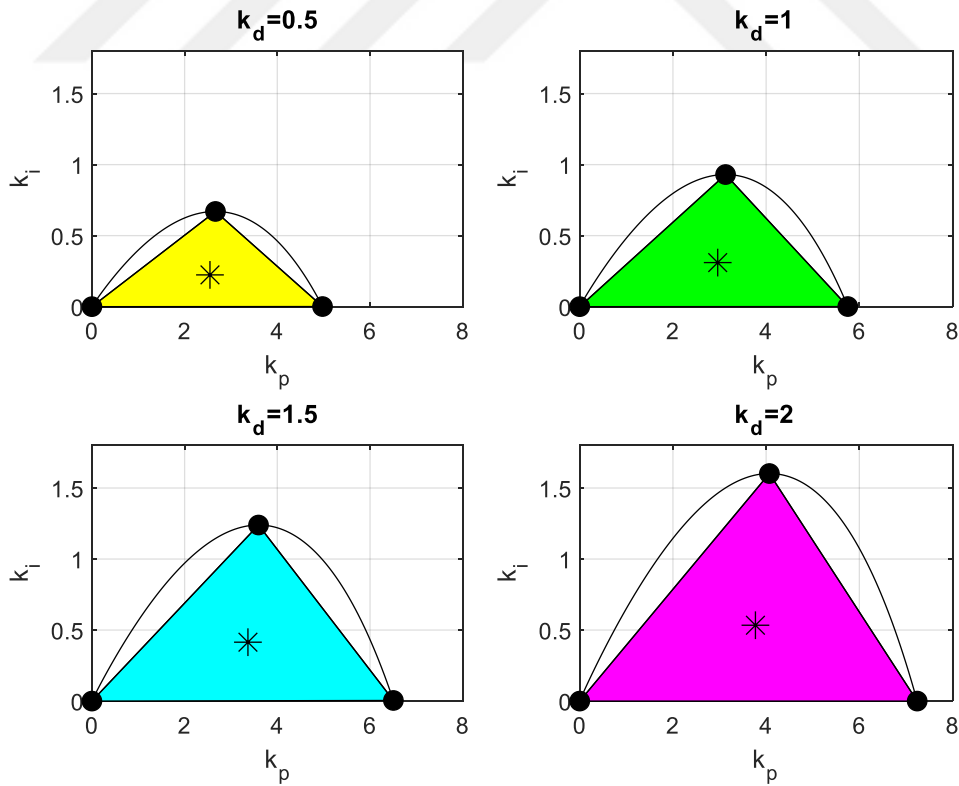
	k_p	k_i
Önerilen yöntem	33.498	764.88
AGM yöntemi	25.2089	621.1119

Şekil 4.33'te $\lambda = 0.8731$, $\lambda = 0.963957$ ve $\lambda = 1$ için kararlılık bölgeleri, AGM noktaları ve DKBAM noktaları görülmektedir. Farklı λ değerlerine ve farklı metotlara göre birim adım yanıtları Şekil 4.34'te gösterilmiştir. Ayrıca Çizelge 4.8, Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'da $\lambda = 0.8731$, $\lambda = 0.963957$ ve $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin önerilen yöntem ve AGM yöntemine göre karşılaştırılması incelenebilir.

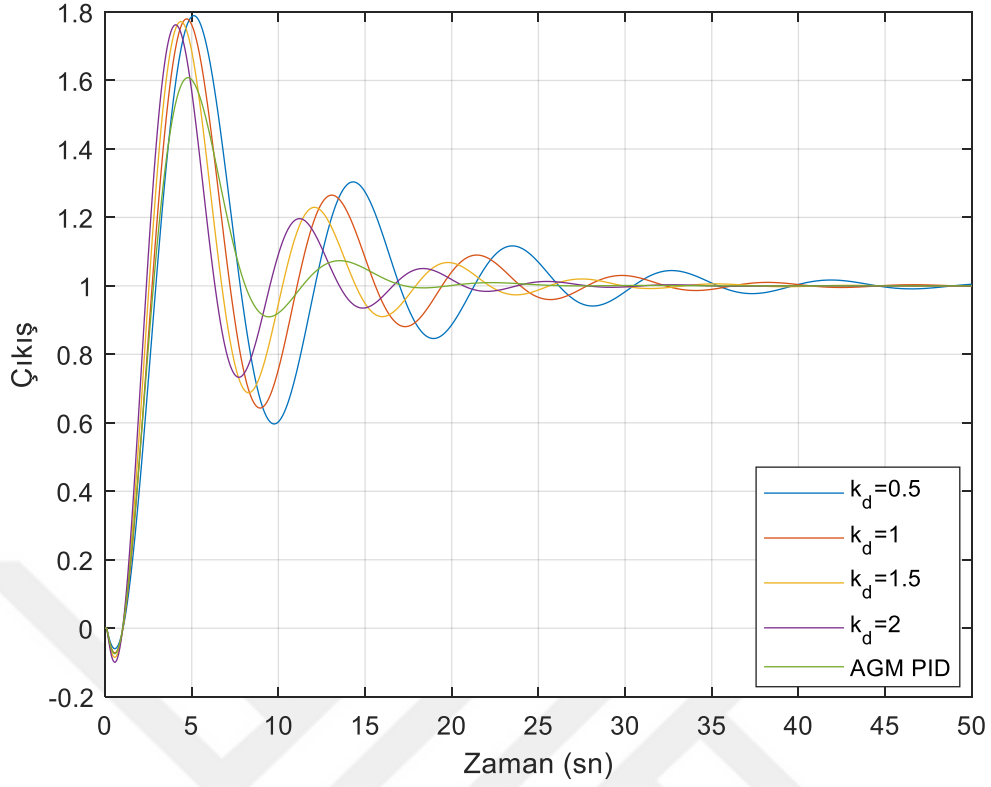
4.9. Örnek 9

$$G_p(s) = \frac{0.4(-0.5s+1)}{s(2s+1)} e^{-0.1s} = \frac{-0.2s+0.4}{2s^2+s} e^{-0.1s} \quad (4.15)$$

Şekil 3.1'deki kontrol sistemi için Denklem 4.15'teki transfer fonksiyonunu (Ozyetkin et al., 2018) ele alalım. Buradaki amaç, Denklem 4.15'teki transfer fonksiyonu için kararlılığı sağlayan $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlerini elde etmek olup farklı k_d değerlerine göre birim adım yanıtlarını AGM metoduyla kıyaslamaktır.



Şekil 4.35. $PI^{0.99}D$ için farklı k_d değerlerine göre kararlılık sınır eğrileri, dışbükey kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri



Şekil 4.36. Farklı k_d değerlerine ve farklı metotlara göre birim adım yanıtları

Çizelge 4.11. Dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemine göre $PI^{0.99}D$ kontrolör parametreleri

k_p	k_i	k_d
2.5469	0.22365	0.5
2.9604	0.31024	1
3.3661	0.41464	1.5
3.7702	0.53402	2

Şekil 4.35'te $PI^{0.99}D$ için farklı k_d değerlerine göre kararlılık sınır eğrileri, dışbükey kararlılık bölgeleri ve bu bölgelerin ağırlık merkezleri verilmiştir. Şekil 4.36'da farklı k_d değerlerine ve farklı metotlara göre birim adım yanıtları gösterilmiştir. Burada PID kontrolörünün parametreleri AGM metoduyla $k_p = 2.8583$, $k_i = 0.4375$ ve $k_d = 2$ olarak elde edilmiştir. Çizelge 4.11'de ise dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemine göre $PI^{0.99}D$ kontrolör parametreleri hesaplanmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde ilk olarak kesirli dereceli operatörlerin tam sayı dereceli yaklaşımları gösterilmiştir. Bu yaklaşım yöntemlerinden en yaygın olanlarından sürekli kesir açılımı (SKA) kullanılarak s^α 'nın α 'ya bağlı tam sayı dereceli yaklaşım eş değerleri elde edilmiştir. Ek olarak s^α , ($\alpha \in [0.1, 0.9]$) için birinci dereceden onuncu dereceye kadar olan rasyonel yaklaşımların olduğu çizelgeler oluşturulmuştur. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda yaklaşımın derecesi ne kadar artarsa orijinal sisteme o kadar yakın cevaplar elde edildiği görülmüştür. Karmaşık hesaplamalara rağmen artan derece, daha doğru çözümlerin varlığını göstermiştir. Ayrıca Oustaloup, Matsuda ve Carlson tarafından önerilen yöntemlerle de iyi sonuçların elde edilebileceği sonucuna varılmıştır. Burada sunulan yaklaşımların kesirli dereceli sistemler, kontrol-sistem tasarımı ve sinyaller ve sistemler alanlarında oldukça faydalı olacağını düşünmekteyiz. Bu bölümle ilgili olarak yaklaşımların derecesi daha da ileri götürülerek gerçek sistemi ne kadar yakalayabildiği araştırılabilir. Ancak yaklaşımın derecesi arttıkça kullanılan denklemlerin karmaşıklığı artmakta ve yoğun bir hesap yükü oluşmaktadır. Elde edilen veriler doğrultusunda araştırma açısından yaklaşımın derecesini çok ileriye götürmek sistem tasarımında elzem bir detay oluşturmamaktadır. Yani dördüncü derece gibi düşük mertebeden yaklaşımlar analiz açısından yeterli olacaktır.

Daha sonra zaman gecikmesi terimi yerine birinci ve ikinci dereceden Padé yaklaşımları kullanılarak kesirli dereceli PI, PD ve PID kontrolörler için kararlılık bölgelerini veren denklemler elde edilmiştir. Padé yaklaşımları ile ilgili olarak yaklaşımın derecesi arttıkça zaman gecikmesi terimi için daha iyi sonuçlar elde edildiği bilinmektedir. Hatta birinci dereceden Padé yaklaşımı bazı durumlarda yetersiz kalabilmektedir. Ancak tezde yapılan incelemeler sonucunda kararlılık bölgesini elde ederken ikinci dereceden Padé yaklaşımının orijinal sistemle neredeyse aynı kararlılık bölgesini verdiği görülmüştür. Bu sebeple ikinci dereceden Padé yaklaşımının kullanılması yeterli olarak görülmektedir. Dolayısıyla yaklaşımın derecesini artırarak matematiksel işlemleri karmaşık hale getirmeye gerek yoktur. Ancak araştırma açısından yüksek mertebeden dereceler için karşılaştırmalar yapılabilir.

Bu bölümde ayrıca Rekasius ve Thowsen dönüşümleri kullanılarak kesirli dereceli PI, PD ve PID için kararlılık bölgelerini veren denklemler elde edilmiştir. Bu dönüşümlerin kararlılık bölgeleri üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Yapılan araştırmalar

sonucunda Rekasius dönüşümünün daha basit bir yapı olmasına rağmen Thowsen dönüşümüyle çok yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu sebeple işlemlerin daha kolay yürütülebilmesi açısından Rekasius dönüşümünün kararlılık analizinde kullanılması daha pratik bir çözüm sağlamaktadır.

Tezde ayrıca kesirli dereceli zaman gecikmeli sistemler için zaman gecikmesi terimi yerine Padé yaklaşımları, Rekasius ve Thowsen dönüşümleri kullanılarak elde edilen dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi olarak adlandırılan pratik bir ayarlama yöntemi sunulmuştur. Yöntem, seçilen kontrolör parametrelerinin oluşturduğu düzlemde çizilen kararlılık bölgesine ve bu bölgedeki tepe noktası ve köşe noktaları sayesinde elde edilen üçgenin ağırlık merkezinin yani kontrolör parametrelerinin hesaplanmasına dayanmaktadır. Bu tasarım metodu kullanılarak kesirli dereceli PI, PD ve PID için örnekler çözülmüş ve bazı karşılaştırmalar yapılmıştır. Kesirli dereceli PID ile ilgili olarak daha detaylı araştırmalar yapılması gerekmektedir. Bu bölüm tek başına bir tez konusu olma niteliği taşımaktadır. Ancak tez içerisinde farklı kontrolör yapıları da incelendiği için ileriye yönelik olarak kesirli dereceli PID kısmı daha detaylı olarak incelenebilir. Buradan elde edilecek sonuçlar oldukça nitelikli olacaktır ve yüksek bir yayın potansiyeli taşımaktadır. Önerilen yöntemin en önemli iki özelliği, karmaşık grafiksel yöntemler kullanmadan kontrolör parametrelerinin hesaplanmasını sağlaması ve kapalı çevrim sistemin kararlılığını garanti etmesidir. Ayrıca bu yöntem, AGM yöntemi kadar birim adım yanıtında ve bozulma yanıtında oldukça güvenilir sonuçlar vermektedir.

İleriye yönelik olarak yukarıda bahsedilen hususlar dışında burada yapılan çalışmalar tam sayı dereceli PI, PD ve PID kontrolörler için kullanılabilir. Buradan elde edilecek sonuçlar oldukça değerli olacaktır. Ayrıca ileri faz-geri faz kontrolörler için de zaman gecikmesi terimi yerine Padé yaklaşımları, Rekasius ve Thowsen dönüşümlerinin etkileri incelenebilir. Hem kesirli dereceli PID kontrolör ailesi, hem de tam sayı dereceli PID kontrolör ailesi için bu yaklaşımları kullanarak elde edilen kararlılık bölgelerinde farklı tasarım tekniklerinin kullanımı araştırılabilir ve yeni tasarım teknikleri geliştirilebilir.

Sonuç olarak bu tezde elde edilen veriler gelişime ve incelemeye açık çok geniş bir araştırma alanı sunmaktadır. Bu sebeple ileriye yönelik olarak yapılacak olan çalışmalara öncü olma niteliği taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- Agarwal, P., Baleanu, D., Chen, Y., Momani, S., & Machado, J. A. T. (2019). *Fractional Calculus* (1st ed.).
- Ahmad, S., Ullah, A., Al-Mdallal, Q. M., Khan, H., Shah, K., & Khan, A. (2020). Fractional order mathematical modeling of COVID-19 transmission. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110256.
- Aseem, K., & Subeekrishna, M. P. (2019). Comparative Study of PID and Fractional Order PID Controllers for Industrial Applications. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT) RTICCT*, 7(01).
- Bingi, K., Ibrahim, R., Karsiti, M. N., Hassam, S. M., & Harindran, V. R. (2019). Frequency Response Based Curve Fitting Approximation of Fractional-Order PID Controllers. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 29(2), 311–326.
- Bode, H. W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*.
- Borase, R. P., Maghade, D. K., Sondkar, S. Y., & Pawar, S. N. (2021). A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control*, 9(2), 818–827.
- Boukhouima, A., Hattaf, K., Lotfi, E. M., Mahrouf, M., Torres, D. F. M., & Yousfi, N. (2020). Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications. *Chaos, Solitons and Fractals*, 140, 110224.
- Bukhari, A. H., Raja, M. A. Z., Sulaiman, M., Islam, S., Shoaib, M., & Kumam, P. (2020). Fractional Neuro-Sequential ARFIMA-LSTM for Financial Market Forecasting. *IEEE Access*, 8, 71326–71338.
- Cao, J., Dong, C., Yu, X., Mu, Y., Xiao, Q., & Jia, H. (2021). Modeling and Rekasius Substitution Stability Analysis of the Multi-terminal MMC-HVDC Cyber-physical System. *2021 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 3388–3394.
- Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., & Petráš, I. (2010). Fractional order systems: Modeling and control applications. *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*.

- Cardoso, L. C., Dos Santos, F. L. P., & Camargo, R. F. (2018). Analysis of fractional-order models for hepatitis B. *Computational and Applied Mathematics*, 37(4), 4570–4586.
- Carlson, G. E., & Halijak, C. A. (1964). Approximation of Fractional Capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a Regular Newton Process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 11(2), 210–213.
- Charef, A., Sun, H. H., Tsao, Y. Y., & Onaral, B. (1992). Fractal System as Represented by Singularity Function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9), 1465–1470.
- Chen, Y., & Moore, K. L. (2002). Discretization Schemes for Fractional-Order Differentiators and Integrators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications*, 49(3), 363–367.
- Chen, Y., Petráš, I., & Xue, D. (2009). Fractional Order Control - A Tutorial. 2009 *American Control Conference*, 1397–1411.
- Chen, Y., Vinagre, B. M., & Podlubny, I. (2004). Continued Fraction Expansion Approaches to Discretizing Fractional Order Derivatives – an Expository Review. *Nonlinear Dynamics*, 38(1), 155–170.
- Chiasson, J., & Loiseau, J. J. (2007). Applications of Time Delay Systems. In *Lecture Notes in Control and Information Sciences*.
- Cho, W., Lee, J., & Edgar, T. F. (2014). Simple analytic proportional-integral-derivative (PID) controller tuning rules for unstable processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 53(13), 5048–5054.
- Colín-Cervantes, J. D., Sánchez-López, C., Ochoa-Montiel, R., Torres-Muñoz, D., Hernández-Mejía, C. M., Sánchez-Gaspariano, L. A., & González-Hernández, H. G. (2021). Rational Approximations of Arbitrary Order: A Survey. *Fractal and Fractional*, 5(4), 1–23.
- Das, Saptarshi, Gupta, A., & Das, S. (2011). Generalized Frequency Domain Robust Tuning of a Family of Fractional Order PI/PID Controllers to Handle Higher Order Process Dynamics. *Advanced Materials Research*, 403–408, 4859–4866.
- Das, Shantanu. (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*.
- Datta, A., Ho, M.-T., & Bhattacharyya, S. P. (2000). *Structure and Synthesis of PID Controller*.

- de Carvalho, C. A. A., & Nussenzveig, H. M. (2002). Time delay. *Physics Reports*, 364, 83–174.
- de Oliveira Valério, D. P. M. (2005). *Fractional Robust System Control*. Universidade Técnica De Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Deng, Y., Léchappé, V., Moulay, E., Chen, Z., Liang, B., Plestan, F., & Han, Q.-L. (2022). Predictor-based control of time-delay systems: a survey. *International Journal of Systems Science*, 1–39.
- Deniz, F. N., Alagoz, B. B., Tan, N., & Atherton, D. P. (2016). An integer order approximation method based on stability boundary locus for fractional order derivative/integrator operators. *ISA Transactions*, 62, 154–163.
- Deniz, F. N., Alagoz, B. B., Tan, N., & Koseoglu, M. (2020). Revisiting four approximation methods for fractional order transfer function implementations: Stability preservation, time and frequency response matching analyses. *Annual Reviews in Control*, 49, 239–257.
- Dorcak, L., Gonzalez, E. A., Terpak, J., Valsa, J., & Pivka, L. (2013). Identification of Fractional-Order Dynamical Systems Based on Nonlinear Function Optimization. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 89, 225–250.
- Ebenbauer, C., & Allgöwer, F. (2006). Stability Analysis for Time-Delay Systems using Rekasius's Substitution and Sum of Squares. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 5376–5381.
- Farman, M., Akgül, A., Ahmad, A., & Imtiaz, S. (2020). Analysis and dynamical behavior of fractional-order cancer model with vaccine strategy. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(7), 4871–4882.
- Fazelinia, H., Sipahi, R., & Olgac, N. (2007). Stability robustness analysis of multiple time-delayed systems using “building block” concept. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5), 799–810.
- Gu, K., Kharitonov, V. L., & Chen, J. (2005). Stability of Time-Delay Systems. *Automatica*, 41(12), 2181–2183.
- Gündüz, H., Ayasun, S., & Sönmez, Ş. (2019). Zaman gecikmeli mikro-şebeke sistemlerin Rekasius yerine koyma yöntemiyle kazanç ve faz payı tabanlı kararlılık analizi. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 34(1), 553–567.

- Hamamci, S. E. (2008). Stabilization using fractional-order PI and PID controllers. *Nonlinear Dynamics*, 51(1), 329–343.
- Hamamci, S. E., & Koksai, M. (2010). Calculation of all stabilizing fractional-order PD controllers for integrating time delay systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5), 1621–1629.
- Hamamci, S. E., & Tan, N. (2006). Design of PI controllers for achieving time and frequency domain specifications simultaneously. *ISA Transactions*, 45(4), 529–543.
- Hamed, E. M., AbdelAty, A. M., Said, L. A., & Radwan, A. G. (2018). Effect of Different Approximation Techniques on Fractional-Order KHN Filter Design. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(12), 5222–5252.
- Hartley, T. T., Lorenzo, C. F., & Qammer, H. K. (1995). Chaos in a Fractional Order Chua's System. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications*, 42(8), 485–490.
- Hertz, D., Jury, E. I., & Zeheb, E. (1984). Simplified analytic stability test for systems with commensurate time delays. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 131(1), 52–56.
- Ho, M.-T., Datta, A., & Bhattacharyya, S. P. (1997). A Linear Programming Characterization of All Stabilizing PID Controllers. *Proceedings of the American Control Conference*, 6, 3922–3928.
- Hua, C.-C., Liu, D., & Guan, X.-P. (2014). Necessary and Sufficient Stability Criteria for a Class of Fractional-Order Delayed Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 61(1), 59–63.
- Jia, H., Cao, X., Yu, X., & Zhang, P. (2007). A simple approach to determine power system delay margin. *2007 IEEE Power Engineering Society General Meeting, PES*, 1–7.
- Jung, S., & Dorf, R. C. (1996). Novel Analytic Technique for PID and PIDA Controller Design. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1), 1146–1151.
- Koseoglu, M., Deniz, F. N., Alagoz, B. B., & Alisoy, H. (2022). An effective analog circuit design of approximate fractional-order derivative models of M-SBL fitting method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 33, 101069.

- Koseoglu, M., Deniz, F. N., Alagoz, B. B., Yuce, A., & Tan, N. (2021). An experimental analog circuit realization of Matsuda's approximate fractional-order integral operators for industrial electronics. *Engineering Research Express*, 3(4), 045041.
- Krishna, B. T. (2011). Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey. *Signal Processing*, 91(3), 386–426.
- Krishna, B. T., & Reddy, K. V. V. S. (2008). Active and Passive Realization of Fractance Device of Order 1/2. *Active and Passive Electronic Components*, 2008.
- Laurent, H. (1884). Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3(3), 240–252.
- Li, Yan, Chen, Y., & Podlubny, I. (2009). Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8), 1965–1969.
- Li, Yun, Ang, K. H., & Chong, G. C. Y. (2006). PID Control System Analysis and Design: Problems, Remedies, and Future Directions. *IEEE Control Systems*, 26(1), 32–41.
- Loiseau, J. J., Michiels, W., Niculescu, S.-I., & Sipahi, R. (2009). *Topics in Time Delay Systems: Analysis, Algorithms and Control*.
- Ma, C., & Hori, Y. (2007). Fractional-Order Control: Theory and Applications in Motion Control. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 1(4), 6–16.
- MacDonald, N. (1985). Comments on a simplified analytical stability test for systems with delay. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 132(5), 237–238.
- Majhi, S., & Atherton, D. P. (1999). Autotuning and controller design for processes with small time delays. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 146(5), 415–425.
- Manabe, S. (2003). Early Development of Fractional Order Control. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, 5.
- Mansouri, R., Bettayeb, M., & Djennoune, S. (2010). Approximation of high order integer systems by fractional order reduced-parameters models. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(1), 53–62.
- Matsuda, K., & Fujii, H. (1993). H^∞ Optimized Wave-Absorbing Control: Analytical and Experimental Results. 16(6), 1146–1153.

- Matušů, R. (2011). Application of fractional order calculus to control theory. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 5(7), 1162–1169.
- Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*.
- Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu, V. (2010). Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications. *Advances in Industrial Control*.
- Münz, U., Ebenbauer, C., Haag, T., & Allgöwer, F. (2009). Stability Analysis of Time-Delay Systems With Incommensurate Delays Using Positive Polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(5), 1019–1024.
- Narang, A. (2012). *Identification and control of fractional and integer order systems*. University of Alberta.
- Naveed, A., Sönmez, Ş., & Ayasun, S. (2019). Identification of Stability Delay Margin for Load Frequency Control System with Electric Vehicles Aggregator using Rekasius Substitution. *2019 IEEE Milan PowerTech*, 1–6.
- Olgac, N., & Sipahi, R. (2002). An Exact Method for the Stability Analysis of Time-Delayed Linear Time-Invariant (LTI) Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5), 793–797.
- Olgac, N., & Sipahi, R. (2004). A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems. *Automatica*, 40, 847–853.
- Onat, C. (2013). A New Concept on PI Design for Time Delay Systems: Weighted Geometrical Center. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 9(4), 1539–1556.
- Onat, C. (2014). WGC based robust and gain scheduling PI controller design for condensing boilers. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014.
- Onat, C. (2018). A new design method for PI–PD control of unstable processes with dead time. *ISA Transactions*, 84, 69–81.
- Onat, C., Hamamci, S. E., & Obuz, S. (2012). A Practical PI Tuning Approach For Time Delay Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(14), 102–107.

- Onat, C., Şahin, M., & Yaman, Y. (2011). Piezoelektrik Yamalara Sahip Akıllı Bir Kirişin Titreşimlerinin Kesir Dereceli Bir Denetçi Yardımıyla Aktif Denetimi. *Mühendis ve Makina*, 52(613), 52–58.
- Onat, C., Şahin, M., & Yaman, Y. (2012). Fractional controller design for suppressing smart beam vibrations. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 84(4), 203–212.
- Oustaloup, A., Melchior, P., Lanusse, P., Cois, O., & Dancla, F. (2000). The CRONE toolbox for Matlab. *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, 190–195.
- Oustaloup, Alain. (2014). *Diversity and Non-integer Differentiation for System Dynamics*.
- Oustaloup, Alain, Levron, F., Mathieu, B., & Nanot, F. M. (2000). Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications*, 47(1), 25–39.
- Ozyetkin, M. M. (2018). A simple tuning method of fractional order PI λ -PD μ controllers for time delay systems. *ISA Transactions*, 74, 77–87.
- Ozyetkin, M. M., Bekiroglu, K., & Srinivasan, S. (2020). A Parameter Tuning Method for Fractional Order PD Controllers. *16th IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2020*.
- Ozyetkin, M. M., Onat, C., & Tan, N. (2018). PID Tuning Method for Integrating Processes Having Time Delay and Inverse Response. *IFAC-PapersOnLine*, 51(4), 274–279.
- Özyetkin, M. M., Onat, C., & Tan, N. (2012). Zaman Gecikmeli Sistemler için PI λ Denetçi Tasarımı. *TOK'12, Niğde Üniversitesi*.
- Ozyetkin, M. M., & Tan, N. (2017). Practical Tuning Algorithm of PD μ Controller for Processes with Time Delay. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 9230–9235.
- Özyetkin, M. M., & Tan, N. (2010). Kesirli Dereceli Sistemlerin Tamsayı Dereceli Yaklaşımı, Integer Order Approximation of Fractional Order Systems. *SİU2010 - IEEE 18. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı*, 949–952.
- Pakzad, M. A., & Pakzad, S. (2017). Stability criteria for a generator excitation system with fractional-order controller and time delay. *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, 5141–5146.

- Pakzad, S., & Pakzad, M. A. (2011). Stability condition for discrete systems with multiple state delays. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 6(11), 417–426.
- Petráš, I. (2000). The fractional - order controllers: Methods for their synthesis and application. *J. Electrical Eng.*, 50.
- Petráš, I., & Chen, Y. (2012). Fractional-Order Circuit Elements with Memory. *Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, 552–558.
- Podlubny, I. (2003). Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers. *Slovak Academy of Sciences, Institute of Experimental Physics*, 44.
- Podlubny, I., Dorcak, L., & Kostial, I. (1997). On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic Systems and $PI\lambda D\mu$ -controllers. *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, 4985–4990.
- Podlubny, I., Petráš, I., Vinagre, B. M., O’Leary, P., & Dorčák, Ľ. (2002). Analogue Realizations of Fractional-Order Controllers. *Nonlinear Dynamics*, 29(1), 281–296.
- Podlubny, Igor. (1999a). Fractional-Order Systems and $PI\lambda D\mu$ -Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 208–214.
- Podlubny, Igor. (1999b). *Fractional Differential Equations*.
- Rajagopal, K., Hasanzadeh, N., Parastesh, F., Hamarash, I. I., Jafari, S., & Hussain, I. (2020). A fractional-order model for the novel coronavirus (COVID-19) outbreak. *Nonlinear Dynamics*, 101(1), 711–718.
- Rekasius, Z. V. (1980). A stability test for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17, 39.
- Ross, B. (1977). The Development of Fractional Calculus 1695-1900. *Historia Mathematica*, 4(1), 75–89.
- Ruszewski, A. (2008). Stability regions of closed loop system with time delay inertial plant of fractional order and fractional order PI controller. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 56(4), 329–332.
- Seer, Q. H., & Nandong, J. (2017). Stabilization and PID tuning algorithms for second-order unstable processes with time-delays. *ISA Transactions*, 67, 233–245.

- Şenol, B., & Demiroğlu, U. (2019). Frequency frame approach on loop shaping of first order plus time delay systems using fractional order PI controller. *ISA Transactions*, 86, 192–200.
- Shah, P., & Agashe, S. (2016). Review of fractional PID controller. *Mechatronics*, 38, 29–41.
- Sharma, S., & Padhy, P. K. (2022). An indirect approach for online identification of continuous time-delay systems. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 35.
- Shrivastava, N., & Varshney, P. (2015). Rational Approximation of Fractional Order Systems Using Carlson Method. *2015 International Conference on Soft Computing Techniques and Implementations (ICSCITI)*, 76–80.
- Sönmez, Ş., & Ayasun, S. (2019). Rekasis Yöntemi Kullanılarak Zaman Gecikmeli Jeneratör Uyarma Kontrol Sisteminin Maksimum Zaman Gecikmesinin Hesaplanması. *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 8(2), 783–795.
- Tacha, O. I., Munoz-Pacheco, J. M., Zambrano-Serrano, E., Stouboulos, I. N., & Pham, V.-T. (2018). Determining the chaotic behavior in a fractional-order finance system with negative parameters. *Nonlinear Dynamics*, 94(2), 1303–1317.
- Tan, N. (2005). Computation of stabilizing PI and PID controllers for processes with time delay. *ISA Transactions*, 44, 213–223.
- Tan, N., Kaya, I., Yeroglu, C., & Atherton, D. P. (2006). Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus. *Energy Conversion and Management*, 47(18), 3045–3058.
- Tang, Y., Li, N., Liu, M., Lu, Y., & Wang, W. (2017). Identification of fractional-order systems with time delays using block pulse functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 91, 382–394.
- Tarasov, V. E. (2020). Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. *Mathematics*, 8, 660.
- Tepljakov, A. (2017). *Fractional-order Modeling and Control of Dynamic Systems*.
- Thowsen, A. (1981a). An Analytic Stability Test for a Class of Time-Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(3), 735–736.

- Thowsen, A. (1981b). The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems. *International Journal of Control*, 33(5), 991–995.
- Tustin, A., Allanson, J. T., Layton, J. M., & Jakeways, R. J. (1958). The design of systems for automatic control of the position of massive objects. *Proceedings of the IEE - Part C: Monographs*, 105(1S), 1–57.
- Valério, D., & da Costa, J. S. (2006). Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules. *Signal Processing*, 86(10), 2771–2784.
- Valmorbida, G., Seuret, A., Boussaada, I., & Sipahi, R. (2019). *Delays and Interconnections: Methodology, Algorithms and Applications*.
- Vinagre, B. M., Podlubny, I., Hernández, A., & Feliu, V. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA)*, 3.
- Walton, K., & Marshall, J. E. (1987). Direct method for TDS stability analysis. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 134(2), 101–107.
- Wang, C., Luo, Y., & Chen, Y. (2009). Fractional Order Proportional Integral (FOPI) and [Proportional Integral] (FO[PI]) Controller Designs for First Order Plus Time Delay (FOPTD) Systems. *2009 Chinese Control and Decision Conference*, 329–334.
- Wei, Y., Hu, Y., Dai, Y., & Wang, Y. (2016). A Generalized Padé Approximation of Time Delay Operator. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(1), 181–187.
- Xue, D., Chen, Y., & Atherton, D. P. (2007). *Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB*.
- Xueyan, L., & Zheng, Y. (2015). Comparison of Time Delay Processing Methods in Control System. *2015 4th International Conference on Computer Science and Network Technology (ICCSNT)*, 01, 1502–1505.
- Yeroglu, C., & Tan, N. (2009). Development of a Toolbox for Frequency Response Analysis of Fractional Order Control Systems. *2009 European Conference on Circuit Theory and Design*, 866–869.
- Yüce, A., Deniz, F. N., & Tan, N. (2017). A New Integer Order Approximation Table for Fractional Order Derivative Operators. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 9736–9741.

Zambrano-Serrano, E., Muñoz-Pacheco, J. M., & Campos-Cantón, E. (2017). Chaos generation in fractional-order switched systems and its digital implementation. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 79, 43–52.

Zawadzki, A., & Włodarczyk, M. (2017). CFE Method - Quality analysis of the approximation of reverse laplace transform of fractional order. *Elektryka*.

Zhuang, M., & Atherton, D. P. (1993). *Automatic tuning of optimum PID controllers*.



EKLER

EK 1. Carlson, Oustaloup ve Matsuda metotları ile s^α için rasyonel yaklaşımlar

Çizelge 1. Carlson metoduyla hesaplanan rasyonel yaklaşımlar

s^α	İterasyon sayısı (i)	Rasyonel Yaklaşım
$s^{0.1}$	1	$\frac{1.222s + 1}{s + 1.222}$
	2	$\frac{1.494s^{12} + 28.57s^{11} + 197.2s^{10} + 744.2s^9 + 1789s^8 + 2944s^7 + 3426s^6 + 2846s^5 + 1669s^4 + 666.1s^3 + 167.7s^2 + 22.54s + 1}{s^{12} + 22.54s^{11} + 167.7s^{10} + 666.1s^9 + 1669s^8 + 2846s^7 + 3426s^6 + 2944s^5 + 1789s^4 + 744.2s^3 + 197.2s^2 + 28.57s + 1.494}$
$s^{0.2}$	1	$\frac{1.5s + 1}{s + 1.5}$
	2	$\frac{2.25s^7 + 29.77s^6 + 107.4s^5 + 185.6s^4 + 175.1s^3 + 88.8s^2 + 20.39s + 1}{s^7 + 20.39s^6 + 88.8s^5 + 175.1s^4 + 185.6s^3 + 107.4s^2 + 29.77s + 2.25}$
$s^{0.3}$	1	$\frac{1.833s^2 + 2.722s + 1}{s^2 + 2.722s + 1.833}$
$s^{0.4}$	1	$\frac{2.25s^2 + 3s + 1}{s^2 + 3s + 2.25}$
$s^{0.5}$	1	$\frac{3s + 1}{s + 3}$
	2	$\frac{9s^4 + 84s^3 + 126s^2 + 36s + 1}{s^4 + 36s^3 + 126s^2 + 84s + 9}$
$s^{0.6}$	1	$\frac{3.666s^2 + 4.222s + 1}{s^2 + 4.222s + 3.666}$
$s^{0.7}$	1	$\frac{4.5s^2 + 4.5s + 1}{s^2 + 4.5s + 4.5}$
$s^{0.8}$	1	$\frac{5.499s^3 + 9.999s^2 + 5.722s + 1}{s^3 + 5.722s^2 + 9.999s + 5.499}$
$s^{0.9}$	1	$\frac{6.75s^3 + 11.25s^2 + 6s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11.25s + 6.75}$

Çizelge 2. Oustaloup metoduyla $s^{0.1}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.1}$
1	$\frac{1.585s + 1}{s + 1.585}$
3	$\frac{1.585s^3 + 30.71s^2 + 26.34s + 1}{s^3 + 26.34s^2 + 30.71s + 1.585}$
5	$\frac{1.585s^5 + 68.37s^4 + 403.3s^3 + 367.9s^2 + 51.87s + 1}{s^5 + 51.87s^4 + 367.9s^3 + 403.3s^2 + 68.37s + 1.585}$
7	$\frac{1.585s^7 + 105s^6 + 1472s^5 + 5231s^4 + 4898s^3 + 1208s^2 + 75.59s + 1}{s^7 + 75.59s^6 + 1208s^5 + 4898s^4 + 5231s^3 + 1472s^2 + 105s + 1.585}$
9	$\frac{1.585s^9 + 140.9s^8 + 3311s^7 + 25523.08s^6 + 68473.78s^5 + 65058.2s^4 + 21891.04s^3 + 2564s^2 + 98.48s + 1}{s^9 + 98.48s^8 + 2564s^7 + 21891.04s^6 + 65058.2s^5 + 68473.78s^4 + 25523.08s^3 + 3311s^2 + 140.9s + 1.585}$

Çizelge 3. Oustaloup metoduyla $s^{0.2}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.2}$
1	$\frac{2.512s + 1}{s + 2.512}$
3	$\frac{2.512s^3 + 41.74s^2 + 30.71s + 1}{s^3 + 30.71s^2 + 41.74s + 2.512}$
5	$\frac{2.512s^5 + 98.83s^4 + 531.7s^3 + 442.3s^2 + 56.87s + 1}{s^5 + 56.87s^4 + 442.3s^3 + 531.7s^2 + 98.83s + 2.512}$
7	$\frac{2.512s^7 + 155.9s^6 + 2045s^5 + 6806s^4 + 5967s^3 + 1378s^2 + 80.73s + 1}{s^7 + 80.73s^6 + 1378s^5 + 5967s^4 + 6806s^3 + 2045s^2 + 155.9s + 2.512}$
9	$\frac{2.512s^9 + 212.2s^8 + 4737s^7 + 34694.97s^6 + 88437.29s^5 + 79834.57s^4 + 25523.08s^3 + 2840s^2 + 103.7s + 1}{s^9 + 103.7s^8 + 2840s^7 + 25523.08s^6 + 79834.57s^5 + 88437.29s^4 + 34694.97s^3 + 4737s^2 + 212.2s + 2.512}$

Çizelge 4. Oustaloup metoduyla $s^{0.3}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.3}$
1	$\frac{3.981s + 1}{s + 3.981}$
3	$\frac{3.981s^3 + 56.75s^2 + 35.8s + 1}{s^3 + 35.8s^2 + 56.75s + 3.981}$
5	$\frac{3.981s^5 + 142.9s^4 + 700.9s^3 + 531.7s^2 + 62.36s + 1}{s^5 + 62.36s^4 + 531.7s^3 + 700.9s^2 + 142.9s + 3.981}$
7	$\frac{3.981s^7 + 231.3s^6 + 2842s^5 + 8855s^4 + 7269s^3 + 1572s^2 + 86.22s + 1}{s^7 + 86.22s^6 + 1572s^5 + 7269s^4 + 8855s^3 + 2842s^2 + 231.3s + 3.981}$
9	$\frac{3.981s^9 + 319.5s^8 + 6778s^7 + 47162.83s^6 + 114221.15s^5 + 97967.01s^4 + 29757.73s^3 + 3146s^2 + 109.1s + 1}{s^9 + 109.1s^8 + 3146s^7 + 29757.73s^6 + 97967.01s^5 + 114221.15s^4 + 47162.83s^3 + 6778s^2 + 319.5s + 3.981}$

Çizelge 5. Oustaloup metoduyla $s^{0.4}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.4}$
1	$\frac{6.31s + 1}{s + 6.31}$
3	$\frac{6.31s^3 + 77.14s^2 + 41.74s + 1}{s^3 + 41.74s^2 + 77.14s + 6.31}$
5	$\frac{6.31s^5 + 206.5s^4 + 924s^3 + 639.3s^2 + 68.37s + 1}{s^5 + 68.37s^4 + 639.3s^3 + 924s^2 + 206.5s + 6.31}$
7	$\frac{6.31s^7 + 343.2s^6 + 3949s^5 + 11520.15s^4 + 8855s^3 + 1793s^2 + 92.08s + 1}{s^7 + 92.08s^6 + 1793s^5 + 8855s^4 + 11520.15s^3 + 3949s^2 + 343.2s + 6.31}$
9	$\frac{6.31s^9 + 481.1s^8 + 9697s^7 + 64111.09s^6 + 147522.29s^5 + 120217.79s^4 + 34694.97s^3 + 3485s^2 + 114.8s + 1}{s^9 + 114.8s^8 + 3485s^7 + 34694.97s^6 + 120217.79s^5 + 147522.29s^4 + 64111.09s^3 + 9697s^2 + 481.1s + 6.31}$

Çizelge 6. Oustaloup metoduyla $s^{0.5}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.5}$
1	$\frac{10s + 1}{s + 10}$
3	$\frac{10s^3 + 104.9s^2 + 48.67s + 1}{s^3 + 48.67s^2 + 104.9s + 10}$
5	$\frac{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10}$
7	$\frac{10s^7 + 509.4s^6 + 5487s^5 + 14988s^4 + 10786.65s^3 + 2045s^2 + 98.34s + 1}{s^7 + 98.34s^6 + 2045s^5 + 10786.65s^4 + 14988s^3 + 5487s^2 + 509.4s + 10}$
9	$\frac{10s^9 + 724.5s^8 + 13873.43s^7 + 87149.82s^6 + 190532.36s^5 + 147522.29s^4 + 40451.36s^3 + 3860s^2 + 120.8s + 1}{s^9 + 120.8s^8 + 3860s^7 + 40451.36s^6 + 147522.29s^5 + 190532.36s^4 + 87149.82s^3 + 13873.43s^2 + 724.5s + 10}$

Çizelge 7. Oustaloup metoduyla $s^{0.6}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.6}$
1	$\frac{15.85s + 1}{s + 15.85}$
3	$\frac{15.85s^3 + 142.5s^2 + 56.75s + 1}{s^3 + 56.75s^2 + 142.5s + 15.85}$
5	$\frac{15.85s^5 + 431.4s^4 + 1606s^3 + 924s^2 + 82.2s + 1}{s^5 + 82.2s^4 + 924s^3 + 1606s^2 + 431.4s + 15.85}$
7	$\frac{15.85s^7 + 755.9s^6 + 7624s^5 + 19499.77s^4 + 13140.17s^3 + 2333s^2 + 105s + 1}{s^7 + 105s^6 + 2333s^5 + 13140.17s^4 + 19499.77s^3 + 7624s^2 + 755.9s + 15.85}$
9	$\frac{15.85s^9 + 1091s^8 + 19849.04s^7 + 118467.67s^6 + 246082.01s^5 + 181028.33s^4 + 47162.83s^3 + 4276s^2 + 127.2s + 1}{s^9 + 127.2s^8 + 4276s^7 + 47162.83s^6 + 181028.33s^5 + 246082.01s^4 + 118467.67s^3 + 19849.04s^2 + 1091s + 15.85}$

Çizelge 8. Oustaloup metoduyla $s^{0.7}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.7}$
1	$\frac{25.12s+1}{s+25.12}$
3	$\frac{25.12s^3+193.8s^2+66.16s+1}{s^3+66.16s^2+193.8s+25.12}$
5	$\frac{25.12s^5+623.6s^4+2117s^3+1111s^2+90.14s+1}{s^5+90.14s^4+1111s^3+2117s^2+623.6s+25.12}$
7	$\frac{25.12s^7+1122s^6+10593.11s^5+25369.69s^4+16007.19s^3+2661s^2+112.2s+1}{s^7+112.2s^6+2661s^5+16007.19s^4+25369.69s^3+10593.11s^2+112.2s+25.12}$
9	$\frac{25.12s^9+1643s^8+28398.49s^7+161039.79s^6+317827.14s^5+222144.43s^4+54987.82s^3+4737s^2+133.9s+1}{s^9+133.9s^8+4737s^7+54987.82s^6+222144.43s^5+317827.14s^4+161039.79s^3+28398.49s^2+1643s+25.12}$

Çizelge 9. Oustaloup metoduyla $s^{0.8}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.8}$
1	$\frac{39.81s+1}{s+39.81}$
3	$\frac{39.81s^3+263.4s^2+77.14s+1}{s^3+77.14s^2+263.4s+39.81}$
5	$\frac{39.81s^5+901.4s^4+2790s^3+1336s^2+98.83s+1}{s^5+98.83s^4+1336s^3+2790s^2+901.4s+39.81}$
7	$\frac{39.81s^7+1665s^6+14719.08s^5+33006.61s^4+19499.77s^3+3035s^2+119.8s+1}{s^7+119.8s^6+3035s^5+19499.77s^4+33006.61s^3+14719.08s^2+1665s+39.81}$
9	$\frac{39.81s^9+2474s^8+40630.37s^7+218910.46s^6+410489.54s^5+272599.04s^4+64111.09s^3+5248s^2+140.9s+1}{s^9+140.9s^8+5248s^7+64111.09s^6+272599.04s^5+410489.54s^4+218910.46s^3+40630.37s^2+2474s+39.81}$

Çizelge 10. Oustaloup metoduyla $s^{0.9}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.9}$
1	$\frac{63.1s+1}{s+63.1}$
3	$\frac{63.1s^3+358s^2+89.94s+1}{s^3+89.94s^2+358s+63.1}$
5	$\frac{63.1s^5+1303s^4+3679s^3+1606s^2+108.4s+1}{s^5+108.4s^4+1606s^3+3679s^2+1303s+63.1}$
7	$\frac{63.1s^7+2470s^6+20452.1s^5+42942.44s^4+23754.39s^3+3462s^2+127.9s+1}{s^7+127.9s^6+3462s^5+23754.39s^4+42942.44s^3+20452.1s^2+2470s+63.1}$
9	$\frac{63.1s^9+3725s^8+58130.8s^7+297577.34s^6+530167.63s^5+334513.16s^4+74748.04s^3+5813s^2+148.3s+1}{s^9+148.3s^8+5813s^7+74748.04s^6+334513.16s^5+530167.63s^4+297577.34s^3+58130.8s^2+3725s+63.1}$

Çizelge 11. Matsuda metoduyla $s^{0.1}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.1}$
1	$\frac{1.6s + 1}{s + 1.6}$
2	$\frac{1.677s^2 + 15.72s + 1}{s^2 + 15.72s + 1.677}$
3	$\frac{1.757s^3 + 49.67s^2 + 41.97s + 1}{s^3 + 41.97s^2 + 49.67s + 1.757}$
4	$\frac{1.828s^4 + 102.7s^3 + 329.8s^2 + 78.91s + 1}{s^4 + 78.91s^3 + 329.8s^2 + 102.7s + 1.828}$
5	$\frac{1.891s^5 + 175.3s^4 + 1329s^3 + 1197s^2 + 126.3s + 1}{s^5 + 126.3s^4 + 1197s^3 + 1329s^2 + 175.3s + 1.891}$
6	$\frac{1.946s^6 + 268.2s^5 + 3780s^4 + 8364s^3 + 3163s^2 + 183.9s + 1}{s^6 + 183.9s^5 + 3163s^4 + 8364s^3 + 3780s^2 + 268.2s + 1.946}$
7	$\frac{1.996s^7 + 382s^6 + 8711s^5 + 37521.81s^4 + 34775.79s^3 + 6894s^2 + 251.9s + 1}{s^7 + 251.9s^6 + 6894s^5 + 34775.79s^4 + 37521.81s^3 + 8711s^2 + 382s + 1.996}$
8	$\frac{2.042s^8 + 517.3s^7 + 17447.54s^6 + 126716.71s^5 + 231659.65s^4 + 110737.06s^3 + 13204.88s^2 + 330.1s + 1}{s^8 + 330.1s^7 + 13204.88s^6 + 110737.06s^5 + 231659.65s^4 + 126716.71s^3 + 17447.54s^2 + 517.3s + 2.042}$
9	$\frac{2.084s^9 + 674.6s^8 + 31621.31s^7 + 351823.6s^6 + 1104259.52s^5 + 1040200.12s^4 + 293201.37s^3 + 23061.55s^2 + 418.6s + 1}{s^9 + 418.6s^8 + 23061.55s^7 + 293201.37s^6 + 1040200.12s^5 + 1104259.52s^4 + 351823.6s^3 + 31621.31s^2 + 674.6s + 2.084}$
10	$\frac{2.123s^{10} + 854.5s^9 + 53180.24s^8 + 846980.24s^7 + 4149085.92s^6 + 6750109.83s^5 + 3722295.95s^4 + 678476.35s^3 + 37579.6s^2 + 517.4s + 1}{s^{10} + 517.4s^9 + 37579.6s^8 + 678476.35s^7 + 3722295.95s^6 + 6750109.83s^5 + 4149085.92s^4 + 846980.24s^3 + 53180.24s^2 + 854.5s + 2.123}$

Çizelge 12. Matsuda metoduyla $s^{0.2}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.2}$
1	$\frac{2.566s + 1}{s + 2.566}$
2	$\frac{2.824s^2 + 20.59s + 1}{s^2 + 20.59s + 2.824}$
3	$\frac{3.101s^3 + 72.7s^2 + 51.88s + 1}{s^3 + 51.88s^2 + 72.7s + 3.101}$
4	$\frac{3.357s^4 + 161s^3 + 453.9s^2 + 95s + 1}{s^4 + 95s^3 + 453.9s^2 + 161s + 3.357}$
5	$\frac{3.591s^5 + 288.9s^4 + 1962s^3 + 1592s^2 + 149.7s + 1}{s^5 + 149.7s^4 + 1592s^3 + 1962s^2 + 288.9s + 3.591}$
6	$\frac{3.806s^6 + 459.7s^5 + 5880s^4 + 11911.37s^3 + 4118s^2 + 216s + 1}{s^6 + 216s^5 + 4118s^4 + 11911.37s^3 + 5880s^2 + 459.7s + 3.806}$
7	$\frac{4.005s^7 + 676.4s^6 + 14121.62s^5 + 56258.76s^4 + 48322.85s^3 + 8843s^2 + 293.9s + 1}{s^7 + 293.9s^6 + 8843s^5 + 48322.85s^4 + 56258.76s^3 + 14121.62s^2 + 676.4s + 4.005}$
8	$\frac{4.191s^8 + 941.9s^7 + 29262.55s^6 + 197990.82s^5 + 338456.83s^4 + 151191.17s^3 + 16757.43s^2 + 383.3s + 1}{s^8 + 383.3s^7 + 16757.43s^6 + 151191.17s^5 + 338456.83s^4 + 197990.82s^3 + 29262.55s^2 + 941.9s + 4.191}$
9	$\frac{4.366s^9 + 1259s^8 + 54591.55s^7 + 568878.5s^6 + 1680161.95s^5 + 1490837.34s^4 + 395054.43s^3 + 29028.94s^2 + 484.2s + 1}{s^9 + 484.2s^8 + 29028.94s^7 + 395054.43s^6 + 1490837.34s^5 + 1680161.95s^4 + 568878.5s^3 + 54591.55s^2 + 1259s + 4.366}$
10	$\frac{4.531s^{10} + 1629s^9 + 94154.39s^8 + 1410214.13s^7 + 6531316.64s^6 + 10065837.3s^5 + 5256515.38s^4 + 904811.34s^3 + 47003.29s^2 + 596.7s + 1}{s^{10} + 596.7s^9 + 47003.29s^8 + 904811.34s^7 + 5256515.38s^6 + 10065837.3s^5 + 6531316.64s^4 + 1410214.13s^3 + 94154.39s^2 + 1629s + 4.531}$

Çizelge 13. Matsuda metoduyla $s^{0.3}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.3}$
1	$\frac{4.136s + 1}{s + 4.136}$
2	$\frac{4.796s^2 + 27.28s + 1}{s^2 + 27.28s + 4.796}$
3	$\frac{5.526s^3 + 108s^2 + 65.01s + 1}{s^3 + 65.01s^2 + 108s + 5.526}$
4	$\frac{6.227s^4 + 256.4s^3 + 635s^2 + 116.1s + 1}{s^4 + 116.1s^3 + 635s^2 + 256.4s + 6.227}$
5	$\frac{6.891s^5 + 483.9s^4 + 2949s^3 + 2154s^2 + 180.3s + 1}{s^5 + 180.3s^4 + 2154s^3 + 2949s^2 + 483.9s + 6.891}$
6	$\frac{7.52s^6 + 801.2s^5 + 9316s^4 + 17276.82s^3 + 5456s^2 + 257.7s + 1}{s^6 + 257.7s^5 + 5456s^4 + 17276.82s^3 + 9316s^2 + 801.2s + 7.52}$
7	$\frac{8.118s^7 + 1218s^6 + 23320.05s^5 + 85966.91s^4 + 68425.02s^3 + 11549.34s^2 + 348.2s + 1}{s^7 + 348.2s^6 + 11549.34s^5 + 68425.02s^4 + 85966.91s^3 + 23320.05s^2 + 1218s + 8.118}$
8	$\frac{8.69s^8 + 1744s^7 + 50005.16s^6 + 315390.37s^5 + 504196.23s^4 + 210415.78s^3 + 21656.74s^2 + 452s + 1}{s^8 + 452s^7 + 21656.74s^6 + 210415.78s^5 + 504196.23s^4 + 315390.37s^3 + 50005.16s^2 + 1744s + 8.69}$
9	$\frac{9.239s^9 + 2389s^8 + 96042.67s^7 + 938017.88s^6 + 2607552.95s^5 + 2179318.94s^4 + 542694.38s^3 + 37217.12s^2 + 569s + 1}{s^9 + 569s^8 + 37217.12s^7 + 542694.38s^6 + 2179318.94s^5 + 2607552.95s^4 + 938017.88s^3 + 96042.67s^2 + 2389s + 9.239}$
10	$\frac{9.768s^{10} + 3160s^9 + 169892.11s^8 + 2394790.99s^7 + 10489573.81s^6 + 15315315.2s^5 + 7572759.99s^4 + 1230416.11s^3 + 59884.38s^2 + 699.1s + 1}{s^{10} + 699.1s^9 + 59884.38s^8 + 1230416.11s^7 + 7572759.99s^6 + 15315315.2s^5 + 10489573.81s^4 + 2394790.99s^3 + 169892.11s^2 + 3160s + 9.768}$

Çizelge 14. Matsuda metoduyla $s^{0.4}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.4}$
1	$\frac{6.724s + 1}{s + 6.724}$
2	$\frac{8.266s^2 + 36.75s + 1}{s^2 + 36.75s + 8.266}$
3	$\frac{10.01s^3 + 163.6s^2 + 83.01s + 1}{s^3 + 83.01s^2 + 163.6s + 10.01}$
4	$\frac{11.74s^4 + 417.1s^3 + 907.9s^2 + 144.6s + 1}{s^4 + 144.6s^3 + 907.9s^2 + 417.1s + 11.74}$
5	$\frac{13.45s^5 + 828.5s^4 + 4535s^3 + 2982s^2 + 221.4s + 1}{s^5 + 221.4s^4 + 2982s^3 + 4535s^2 + 828.5s + 13.45}$
6	$\frac{15.11s^6 + 1428s^5 + 15110.45s^4 + 25661.02s^3 + 7398s^2 + 313.6s + 1}{s^6 + 313.6s^5 + 7398s^4 + 25661.02s^3 + 15110.45s^2 + 1428s + 15.11}$
7	$\frac{16.74s^7 + 2244s^6 + 39443.84s^5 + 134603.64s^4 + 99263.37s^3 + 15439.33s^2 + 421.1s + 1}{s^7 + 421.1s^6 + 15439.33s^5 + 99263.37s^4 + 134603.64s^3 + 39443.84s^2 + 2244s + 16.74}$
8	$\frac{18.33s^8 + 3305s^7 + 87544.87s^6 + 514996.8s^5 + 769985.58s^4 + 300103.8s^3 + 28653.07s^2 + 544s + 1}{s^8 + 544s^7 + 28653.07s^6 + 300103.8s^5 + 769985.58s^4 + 514996.8s^3 + 87544.87s^2 + 3305s + 18.33}$
9	$\frac{19.89s^9 + 4638s^8 + 173137.31s^7 + 1585868.93s^6 + 4150211.84s^5 + 3266848.93s^4 + 764157.9s^3 + 48854.25s^2 + 682.2s + 1}{s^9 + 682.2s^8 + 48854.25s^7 + 764157.9s^6 + 3266848.93s^5 + 4150211.84s^4 + 1585868.93s^3 + 173137.31s^2 + 4638s + 19.89}$
10	$\frac{21.42s^{10} + 6270s^9 + 314156.95s^8 + 4170548.71s^7 + 17281559.04s^6 + 23904994.8s^5 + 11189709.38s^4 + 1715291.95s^3 + 78124.46s^2 + 835.9s + 1}{s^{10} + 835.9s^9 + 78124.46s^8 + 1715291.95s^7 + 11189709.38s^6 + 23904994.8s^5 + 17281559.04s^4 + 4170548.71s^3 + 314156.95s^2 + 6270s + 21.42}$

Çizelge 15. Matsuda metoduyla $s^{0.5}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.5}$
1	$\frac{11.1s + 1}{s + 11.1}$
2	$\frac{14.58s^2 + 50.71s + 1}{s^2 + 50.71s + 14.58}$
3	$\frac{18.58s^3 + 254.8s^2 + 108.8s + 1}{s^3 + 108.8s^2 + 254.8s + 18.58}$
4	$\frac{22.72s^4 + 698.8s^3 + 1337s^2 + 185s + 1}{s^4 + 185s^3 + 1337s^2 + 698.8s + 22.72}$
5	$\frac{26.93s^5 + 1462s^4 + 7194s^3 + 4255s^2 + 279.4s + 1}{s^5 + 279.4s^4 + 4255s^3 + 7194s^2 + 1462s + 26.93}$
6	$\frac{31.16s^6 + 2624s^5 + 25301s^4 + 39347.84s^3 + 1.035e04s^2 + 392.3s + 1}{s^6 + 392.3s^5 + 1.035e04s^4 + 39347.84s^3 + 25301s^2 + 2624s + 31.16}$
7	$\frac{35.42s^7 + 4263s^6 + 68898.9s^5 + 217729.26s^4 + 148730.42s^3 + 21295.44s^2 + 523.5s + 1}{s^7 + 523.5s^6 + 21295.44s^5 + 148730.42s^4 + 217729.26s^3 + 68898.9s^2 + 4263s + 35.42}$
8	$\frac{39.68s^8 + 6458s^7 + 158324.31s^6 + 869111.28s^5 + 1215338.19s^4 + 442210.91s^3 + 39121.61s^2 + 673.1s + 1}{s^8 + 673.1s^7 + 39121.61s^6 + 442210.91s^5 + 1215338.19s^4 + 869111.28s^3 + 158324.31s^2 + 6458s + 39.68}$
9	$\frac{43.96s^9 + 9290s^8 + 322476.79s^7 + 2771769.23s^6 + 6829952.79s^5 + 5062877.49s^4 + 1111892.63s^3 + 66188.87s^2 + 841.3s + 1}{s^9 + 841.3s^8 + 66188.87s^7 + 1111892.63s^6 + 5062877.49s^5 + 6829952.79s^4 + 2771769.23s^3 + 322476.79s^2 + 9290s + 43.96}$
10	$\frac{43.96s^9 + 9290s^8 + 322476.79s^7 + 2771769.23s^6 + 6829952.79s^5 + 5062877.49s^4 + 1111892.63s^3 + 66188.87s^2 + 841.3s + 1}{s^9 + 841.3s^8 + 66188.87s^7 + 1111892.63s^6 + 5062877.49s^5 + 6829952.79s^4 + 2771769.23s^3 + 322476.79s^2 + 9290s + 43.96}$

Çizelge 16. Matsuda metoduyla $s^{0.6}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.6}$
1	$\frac{18.82s + 1}{s + 18.82}$
2	$\frac{26.67s^2 + 72.57s + 1}{s^2 + 72.57s + 26.67}$
3	$\frac{35.85s^3 + 413.7s^2 + 148.2s + 1}{s^3 + 148.2s^2 + 413.7s + 35.85}$
4	$\frac{45.73s^4 + 1222s^3 + 2056s^2 + 246.3s + 1}{s^4 + 246.3s^3 + 2056s^2 + 1222s + 45.73}$
5	$\frac{56.12s^5 + 2696s^4 + 11931.12s^3 + 6343s^2 + 367.1s + 1}{s^5 + 367.1s^4 + 6343s^3 + 11931.12s^2 + 2696s + 56.12}$
6	$\frac{66.91s^6 + 5039s^5 + 44322.42s^4 + 63123.84s^3 + 15125.58s^2 + 510.9s + 1}{s^6 + 510.9s^5 + 15125.58s^4 + 63123.84s^3 + 44322.42s^2 + 5039s + 66.91}$
7	$\frac{78.04s^7 + 8466s^6 + 125970.13s^5 + 368742.25s^4 + 233256s^3 + 30708.78s^2 + 677.6s + 1}{s^7 + 677.6s^6 + 30708.78s^5 + 233256s^4 + 368742.25s^3 + 125970.13s^2 + 8466s + 78.04}$
8	$\frac{89.47s^8 + 13197.71s^7 + 299787.29s^6 + 1536329.63s^5 + 2009323.73s^4 + 682238.39s^3 + 55854.71s^2 + 867.4s + 1}{s^8 + 867.4s^7 + 55854.71s^6 + 682238.39s^5 + 2009323.73s^4 + 1536329.63s^3 + 299787.29s^2 + 13197.71s + 89.47}$
9	$\frac{101.2s^9 + 19460.92s^8 + 628986.59s^7 + 5075880.28s^6 + 11778579.9s^5 + 8221107.12s^4 + 1694250.9s^3 + 93782.18s^2 + 1080s + 1}{s^9 + 1080s^8 + 93782.18s^7 + 1694250.9s^6 + 8221107.12s^5 + 11778579.9s^4 + 5075880.28s^3 + 628986.59s^2 + 19460.92s + 101.2}$
10	$\frac{113.1s^{10} + 27488.66s^9 + 1201345.76s^8 + 14171988.83s^7 + 52595085.17s^6 + 65304760.66s^5 + 27377868.68s^4 + 3729367.19s^3 + 148167.19s^2 + 1316s + 1}{s^{10} + 1316s^9 + 148167.19s^8 + 3729367.19s^7 + 27377868.68s^6 + 65304760.66s^5 + 52595085.17s^4 + 14171988.83s^3 + 1201345.76s^2 + 27488.66s + 113.1}$

Çizelge 17. Matsuda metoduyla $s^{0.7}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.7}$
1	$\frac{33.53s + 1}{s + 33.53}$
2	$\frac{51.85s^2 + 110.3s + 1}{s^2 + 110.3s + 51.85}$
3	$\frac{73.74s^3 + 717.2s^2 + 215s + 1}{s^3 + 215s^2 + 717.2s + 73.74}$
4	$\frac{98.22s^4 + 2287s^3 + 3381s^2 + 349.4s + 1}{s^4 + 349.4s^3 + 3381s^2 + 2287s + 98.22}$
5	$\frac{124.9s^5 + 5321s^4 + 21199.63s^3 + 10123.33s^2 + 514.1s + 1}{s^5 + 514.1s^4 + 10123.33s^3 + 21199.63s^2 + 5321s + 124.9}$
6	$\frac{153.4s^6 + 10368.57s^5 + 83257.39s^4 + 108578.56s^3 + 23680.33s^2 + 709.4s + 1}{s^6 + 709.4s^5 + 23680.33s^4 + 108578.56s^3 + 83257.39s^2 + 10368.57s + 153.4}$
7	$\frac{183.7s^7 + 18020.52s^6 + 247086s^5 + 670119.15s^4 + 392407.97s^3 + 47439.97s^2 + 935.3s + 1}{s^7 + 935.3s^6 + 47439.97s^5 + 392407.97s^4 + 670119.15s^3 + 247086s^2 + 18020.52s + 183.7}$
8	$\frac{215.5s^8 + 28909.49s^7 + 609171.74s^6 + 2915554.31s^5 + 3566264.01s^4 + 1129379.75s^3 + 85445.35s^2 + 1192s + 1}{s^8 + 1192s^7 + 85445.35s^6 + 1129379.75s^5 + 3566264.01s^4 + 2915554.31s^3 + 609171.74s^2 + 28909.49s + 215.5}$
9	$\frac{248.7s^9 + 43704.68s^8 + 1316854.3s^7 + 9982222.2s^6 + 21816241.18s^5 + 14335018.52s^4 + 2770610.1s^3 + 142395.46s^2 + 1479s + 1}{s^9 + 1479s^8 + 142395.46s^7 + 2770610.1s^6 + 14335018.52s^5 + 21816241.18s^4 + 9982222.2s^3 + 1316854.3s^2 + 43704.68s + 248.7}$
10	$\frac{283.3s^{10} + 63109.49s^9 + 2581050.23s^8 + 28726364.14s^7 + 100924573.53s^6 + 118722830.09s^5 + 47085645.52s^4 + 6040545.33s^3 + 223645.78s^2 + 1798s + 1}{s^{10} + 1798s^9 + 223645.78s^8 + 6040545.33s^7 + 47085645.52s^6 + 118722830.09s^5 + 100924573.53s^4 + 28726364.14s^3 + 2581050.23s^2 + 63109.49s + 283.3}$

Çizelge 18. Matsuda metoduyla $s^{0.8}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.8}$
1	$\frac{66.13s + 1}{s + 66.13}$
2	$\frac{113.1s^2 + 187.8s + 1}{s^2 + 187.8s + 113.1}$
3	$\frac{170.7s^3 + 1401s^2 + 350.1s + 1}{s^3 + 350.1s^2 + 1401s + 170.7}$
4	$\frac{237.8s^4 + 4833s^3 + 6277s^2 + 557s + 1}{s^4 + 557s^3 + 6277s^2 + 4833s + 237.8}$
5	$\frac{313.3s^5 + 11878.04s^4 + 42607.52s^3 + 18256.22s^2 + 809.3s + 1}{s^5 + 809.3s^4 + 18256.22s^3 + 42607.52s^2 + 11878.04s + 313.3}$
6	$\frac{396.8s^6 + 24136.74s^5 + 177061.51s^4 + 211410.01s^3 + 41911.14s^2 + 1108s + 1}{s^6 + 1108s^5 + 41911.14s^4 + 211410.01s^3 + 177061.51s^2 + 24136.74s + 396.8}$
7	$\frac{487.6s^7 + 43409s^6 + 548981.76s^5 + 1379694.72s^4 + 747592.66s^3 + 82873.04s^2 + 1452s + 1}{s^7 + 1452s^6 + 82873.04s^5 + 747592.66s^4 + 1379694.72s^3 + 548981.76s^2 + 43409s + 487.6}$
8	$\frac{585.5s^8 + 71681.56s^7 + 1402621.73s^6 + 6271587.81s^5 + 7174023.36s^4 + 2117824.78s^3 + 147837.07s^2 + 1842s + 1}{s^8 + 1842s^7 + 147837.07s^6 + 2117824.78s^5 + 7174023.36s^4 + 6271587.81s^3 + 1402621.73s^2 + 71681.56s + 585.5}$
9	$\frac{690s^9 + 111117.93s^8 + 3124690.5s^7 + 22258933.9s^6 + 45821108.83s^5 + 28338334.34s^4 + 5133390.2s^3 + 244564.24s^2 + 2279s + 1}{s^9 + 2279s^8 + 244564.24s^7 + 5133390.2s^6 + 28338334.34s^5 + 45821108.83s^4 + 22258933.9s^3 + 3124690.5s^2 + 111117.93s + 690}$
10	$\frac{801s^{10} + 164049.52s^9 + 6285909.27s^8 + 66037410.28s^7 + 219677974.2s^6 + 244817670.17s^5 + 91827254.25s^4 + 11086875.04s^3 + 381882.39s^2 + 2761s + 1}{s^{10} + 2761s^9 + 381882.39s^8 + 11086875.04s^7 + 91827254.25s^6 + 244817670.17s^5 + 219677974.2s^4 + 66037410.28s^3 + 6285909.27s^2 + 164049.52s + 801}$

Çizelge 19. Matsuda metoduyla $s^{0.9}$ için rasyonel yaklaşımlar

Yaklaşımın derecesi	$s^{0.9}$
1	$\frac{170.9s + 1}{s + 170.9}$
2	$\frac{328.6s^2 + 424.3s + 1}{s^2 + 424.3s + 328.6}$
3	$\frac{528.2s^3 + 3662s^2 + 758.6s + 1}{s^3 + 758.6s^2 + 3662s + 528.2}$
4	$\frac{770s^4 + 13692.53s^3 + 15611.11s^2 + 1182s + 1}{s^4 + 1182s^3 + 15611.11s^2 + 13692.53s + 770}$
5	$\frac{1053s^5 + 35578.58s^4 + 114941.68s^3 + 44137.17s^2 + 1697s + 1}{s^5 + 1697s^4 + 44137.17s^3 + 114941.68s^2 + 35578.58s + 1053}$
6	$\frac{1374s^6 + 75443.57s^5 + 505919.41s^4 + 552910.63s^3 + 99488.89s^2 + 2304s + 1}{s^6 + 2304s^5 + 99488.89s^4 + 552910.63s^3 + 505919.41s^2 + 75443.57s + 1374}$
7	$\frac{1734s^7 + 140454.53s^6 + 1639708.37s^5 + 3819099.3s^4 + 1913944.37s^3 + 194225.29s^2 + 3003s + 1}{s^7 + 3003s^6 + 194225.29s^5 + 1913944.37s^4 + 3819099.3s^3 + 1639708.37s^2 + 140454.53s + 1734}$
8	$\frac{2132s^8 + 238793.47s^7 + 4343050.69s^6 + 18147315.83s^5 + 19410620.83s^4 + 5338263.51s^3 + 343226.45s^2 + 3795s + 1}{s^8 + 3795s^7 + 343226.45s^6 + 5338263.51s^5 + 19410620.83s^4 + 18147315.83s^3 + 4343050.69s^2 + 238793.47s + 2132}$
9	$\frac{2565s^9 + 379629.75s^8 + 9973204.5s^7 + 66789724.74s^6 + 129510284.06s^5 + 75369983.87s^4 + 12787259.3s^3 + 563698.27s^2 + 4678s + 1}{s^9 + 4678s^8 + 563698.27s^7 + 12787259.3s^6 + 75369983.87s^5 + 129510284.06s^4 + 66789724.74s^3 + 9973204.5s^2 + 379629.75s + 2565}$
10	$\frac{3034s^{10} + 573095.38s^9 + 20595523.01s^8 + 204329479.84s^7 + 643688103.7s^6 + 679551672.4s^5 + 240983802.12s^4 + 27361943.03s^3 + 875174.51s^2 + 5655s + 1}{s^{10} + 5655s^9 + 875174.51s^8 + 27361943.03s^7 + 240983802.12s^6 + 679551672.4s^5 + 643688103.7s^4 + 204329479.84s^3 + 20595523.01s^2 + 573095.38s + 3034}$

EK 2. Zaman gecikmesi teriminin eş değerleri

1. Birinci derece tüm kutup yaklaşımı:

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

2. İkinci derece tüm kutup yaklaşımı:

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2}} = \frac{2}{2 + 2\tau s + \tau^2 s^2}$$

3. Birinci derece Taylor yaklaşımı:

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s$$

4. İkinci derece Taylor yaklaşımı:

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2} = \frac{2 - 2\tau s + \tau^2 s^2}{2}$$

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK BEYANI

“ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN YENİ BİR KESİRLİ DERECELİ PI VE PD KONTROLÖR TASARIM METODU” başlıklı Yüksek Lisans tezindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Dorukhan ASTEKİN

10/05/2022

ÖZ GEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Dorukhan ASTEKİN

Yabancı Dil : İngilizce, Almanca

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet tarihi (Yıl)
Y. Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	Devam ediyor
Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	2019

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Unvan
2018	EKTAM Makine San. ve Tic. A.Ş.	Stajyer Mühendis
2017	Devlet Hava Meydanları İşletmesi / Adnan Menderes Havalimanı Başmüdürlüğü	Stajyer Mühendis