T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK DOKTORA PROGRAMI

BAZI GAMMA MODÜLLER ÜZERİNE

Mehmet Soner PEHLİVAN

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

AYDIN-2022

KABUL VE ONAY

T.C. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Doktora Programı öğrencisi Mehmet Soner PEHLİVAN tarafından hazırlanan "BAZI GAMMA MODÜLLER ÜZERİNE" başlıklı tez, aşağıdaki jüri tarafından Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 22/04/2022

Üye (T.D.)	:	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	ADÜ
Üye	:	Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Ü.
Üye	:	Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ
Üye	:	Doç Dr. Çağrı DEMİR	Ege Ü.
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN	ADÜ

ONAY:

Bu tez Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri tarafından uygun görülmüş ve Fen Bilimleri Enstitüsünün .... tarih ve .... sayılı oturumunda alınan .... numaralı Yönetim Kurulu kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gönül AYDIN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Uzun bir sürecin sonunda doktora tezimi nihayet tamamlamış bulunmaktayım. Bu sürece katkı sağlayanlar arasında ilk olarak, daima yanımda varlığını hissettiğim, bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum. Buna ek olarak, mesai arkadaşım, dostum, kardeşim Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN'a da tez yazım sürecindeki çok değerli katkıları ve düze çıkarıcı destekleri için sonsuz teşekkürler. Son olarak, daima yanımda olan, eşim, hayat arkadaşım Fatma PEHLİVAN'a hayatıma kattığı her güzellik için, zor zamanlarımda bana olan desteği için minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$(\Gamma, M)_B$	:	Barnes anlamında gamma halka
$(\Gamma, M)_{wN}$	:	Zayıf Nobusawa anlamında gamma halka
$(\Gamma, M)_N$	:	Nobusawa anlamında gamma halka
$\mathfrak{M}_{m\times n}(D)$	:	D üzerinde $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$r(A)$	:	A idealinin radikali
$\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(N,W)$	:	N den W ya bütün $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının kümesi
$\|A\|$	:	A kümesinin kardinal sayısı
$\mathscr{N}_0$	:	Doğal sayılar kümesinin kardinal sayısı
$\mathrm{End}N$	:	N modülünün endomorfizmalarının kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi
$\mathrm{hom}(A,B)$	:	A dan B ye bütün morfizmlerin kümesi
$\prod\limits_{i\in I} A_i$	:	$\{A_i \mid i \in I\}$ gamma modüllerinin (veya gruplarının) direkt çarpımı
$\sum\limits_{i\in I} A_i$	:	$\{A_i \mid i \in I\}$ gamma modüllerinin (veya gruplarının) direkt toplamı
$[\gamma, a]$	:	M nin sağ çarpım endomorfizması
$A \oplus B$	:	A ile B gamma modüllerin (veya gruplarının) direkt toplamı
$[a, \gamma]$	:	M nin sol çarpım endomorfizması
$I < M$	:	M nin I ideali
(S)	:	S kümesi tarafından üretilen ideal (veya altmodül)
1_A	:	A kümesi üzeride birim dönüşüm
$\mathrm{Ker}\varphi$	:	φ homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{Im}\varphi$	:	φ fonksiyonunun görüntüsü
$A - B$	:	A kümesinin B kümesinden farkı
$\dim_{M\Gamma} F$	:	F serbest $M\Gamma$-modülünün boyutu
$A \simeq B$	:	A cebirsel yapısı ile B cebirsel yapısı izomorf
0_A	:	A toplamsal değişmeli grubunun birim elemanı
$\mathrm{Dom}h$	:	h fonksiyonunun tanım kümesi
$f\|_A$	:	f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanması

ÖZET

BAZI GAMMA MODÜLLER ÜZERİNE

Pehlivan M. S., Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Doktora Tezi, Aydın, 2022.

Bu tezin amacı, gamma modüllerinin cebirsel yapısını incelemek ve serbest, projektif ve injektif gamma modüllerin temel teoremlerini elde etmektir. Bunun için gamma modüllerde doğrusal bağımsızlık tanımı yeniden yapılmış ve buna bağlı olarak gamma modül yapısında yeni özellikler ispatlanmıştır.

Bu çalışma genel olarak beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde gamma modüller ile ilgili litaratürde yer alan bazı çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan gamma halkalar ve gamma modüllerin temelini oluşturan tanım ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, güçlü birimli gamma halkası üzerinde güçlü birimsel gamma modül tanımı verilmiştir. Gamma modüller incelenmiş, izomorfizma teoremleri verilmiş, gamma modül dizileri ile ilgili bazı teoremler kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde, bir gamma modülün bir altkümesinin doğrusal bağımsız olması ve üreteç olması tanımlanarak, taban kavramı ortaya konulmuştur. Bu kavramlardan yararlanarak serbest gamma modüllerin karakterizasyonu verilmiş ve serbest gamma modüller ile ilgili bazı temel teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca güçlü birime sahip bölümlü gamma halkaları üzerinde tanımlanan vektör uzaylarının tabanları ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Beşinci bölümde ise projektif ve injektif gamma modüller tanımlanarak bu tip modüller için karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Gamma modül, Gamma serbest modül, Gamma projektif modül, Gamma injektif modül.

ABSTRACT

ON SOME GAMMA MODULES

Pehlivan M. S., Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Mathematics, Doctorate Thesis, Aydın, 2022.

The aim of this thesis is to investigate the algebraic structure of gamma modules and to obtain the fundamental theorems of free gamma modules, projective gamma modules and injective gamma modules. For this purpose, the definition of linear independence in gamma modules has been redefined and accordingly, new features have been proved in the gamma module structure.

This study consists of five chapters. In the first chapter, some information about gamma modules in the literature is given.

In the second chapter, definitions and properties that form the basis of gamma rings and gamma modules used in this study are given.

In the third chapter, the definition of strong unitary gamma module on gamma ring with strong unity is given. Gamma modules are examined, isomorphism theorems are given, and some basic theorems about gamma module sequences are proved.

In the fourth chapter, by defining a subset of a gamma module to be linearly independent and to be a generator, the concept of basis is introduced. Using these concepts, the characterization of free gamma modules is given and some theorems about free gamma modules are proved. Also, some theorems about the basis of vector spaces defined on division gamma rings with strong unity are given.

In the fifth chapter, projective and injective gamma modules are defined and characterizations of these modules are given.

Keywords: Gamma module, Gamma free module, Gamma projective module, Gamma injective module.

1. GİRİŞ

Gamma halkasının tanımı ilk olarak 1964 yılında Nobusawa tarafından verilmiştir (Nobusawa, 1964). Bundan iki yıl sonra Barnes, Nobusawa'nın verdiği tanımı zayıflatarak yeni bir tanım vermiştir (Barnes, 1966). Kyuno'nun gamma halkalarla ilgili bilgileri topladığı 1991 yılında basılan gamma halkaları kitabında iki yeni tanım verilerek, gamma halkasının tanımı Nobusawa anlamında gamma halkası, Barnes anlamında gamma halkası, zayıf gamma halkası ve kuvvetli gamma halkası olarak düzenlenmiştir (S. Kyuno, 1991).

Gamma halkaları üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Nobusawa sağ ve sol idealleri azalan zincir koşulunu sağlayan basit $(\Gamma, M)_N$ gamma halkası için D bir bölümlü halka, $\mathfrak{M}_{n\times m}(D)$ ve $\mathfrak{M}_{m\times n}(D)$ sırasıyla D üzerinde $n\times m$ ve $m\times n$ tipinden toplamsal matris grupları olmak üzere $M = \mathfrak{M}_{n\times m}(D)$, $\Gamma = \mathfrak{M}_{m\times n}(D)$ olacak şekilde m ve n pozitif tamsayılarının var olduğunu göstermiştir (Nobusawa, 1964). Barnes 1966 yılında yaptığı çalışmada asal ideal, homomorfizma ve m-sistem tanımlarını vermiş ve A bir ideal olmak üzere A idealinin minimal asallarının kesişimi olan $r(A)$ radikalinin bir ideal olduğunu ispatlamıştır (Barnes, 1966).

Luh 1969 yılında sol idealleri üzerinde minimallik koşulunu sağlayan gamma halkaları için asal gamma halka, primitif gamma halka ve basit gamma halka olmanın denk olduğunu kanıtlamıştır (Luh, 1969).

Gamma modüllerin tanımı ilk kez 1977 yılında Kyuno tarafından verilmiştir (S. Kyuno, 1977). Bu çalışmasında Kyuno, indirgenemez (irreducible) gamma modülü tanımlayarak M gamma halkasının Jacobson radikallerini, bütün indirgenemez gamma modüllerini sıfırlayan M gamma halkasının elemanlarının kümesi olarak betimlemiştir.

Daha sonra gamma modül tanımı Ameri ve Sadeghi tarafından, Kyuno'nun verdiği gamma modül tanımına dağılma ile ilgili bir koşul daha eklenmiş ve $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının birimi $1\gamma_0$ alınarak birimsel modül tanımı verilmiştir (Ameri ve Sadeghi, 2010). Bu makale incelendiğinde Önerme 3.12 nin yanlış olduğuna dair bir örnek bulunmuş, gamma modülün endomorfizmalarının toplamsal grubunun verilen dış işlem ile modül olma koşullarından birinin sağlanmadığı, benzer şekilde N, W iki $M\Gamma$-modül olmak üzere $\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(N,W)$ toplamsal değişmeli grubunun da verilen dış işlemle modül olma koşullarından birini sağlamadığı gözlenmiştir. (Proposition 5.6 ve Example 5.11, Example 5,12)

2006 yılında Uddin ve Paul, Kyuno'nun verdiği gamma modül tanımını kullanarak bir gamma modülün bir altkümesinin doğrusal bağımsızlığını ve serbest gamma modül tanımını vermişlerdir (Uddin ve Paul, 2006). Bu makalede $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası N bir $M\Gamma$-modül, $X \subseteq N$ ve $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere birbirinden farklı her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $m_1, \ldots, m_n \in M$ için $\sum m_i \gamma x_i = 0$ iken $m_i = 0$ ise X kümesi γ-doğrusal bağımsız, her $\gamma \in \Gamma$ için X kümesi γ-doğrusal bağımsız ise X kümesi Γ-doğrusal bağımsız olarak tanımlanmıştır. Ayrıca N birimsel $M\Gamma$-modülünün her p elemanı **her** $\gamma \in \Gamma$ için $p = \sum s_i \gamma x_i$ yazılacak şekilde $s_i \in M$ ve $x_i \in X$ elemanları varsa X kümesi $M\Gamma$-modülünü üretir ve N gamma modülünün her bir n elemanı X kümesinin elemanlarının doğrusal bileşimi olarak tek şekilde yazılıyorsa X kümesi N gamma modülünün tabanıdır tanımları verilmiş ve buna bağlı olarak bir tabanı olan $M\Gamma$-modül, serbest gamma modül olarak isimlendirilmiştir. Fakat böyle bir serbest gamma modülün varlığı kanıtlanmamıştır.

2018 yılında bu konuda çalışan Abbas ve arkadaşları serbest gamma modülünü yeniden ele almışlardır (Abbas vd., 2018a). Bu makalelerinde gamma modül tanımı Ameri ve arkadaşlarının 2010 yılında yayınladıkları makaleden alınmış ve γ-doğrusal bağımsızlıktan ve Γ-doğrusal bağımsızlıktan daha güçlü olan bir doğrusal bağımsızlık tanımını yapmışlardır. Ayrıca N bir $M\Gamma$-modül $X = \{x_j \mid x_j \in \Lambda\}$ kümesi N modülünün bir altkümesi olmak üzere, eğer her farklı $x_1, \ldots, x_n \in X$, $m_1, \ldots, m_n \in M$ ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ için $\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i x_i = 0$ iken $m_1 = \cdots = m_n = 0$ sağlanıyorsa X kümesi doğrusal bağımsız olarak tanımlamışlardır. Ancak bu tanım uygulandığında bir X kümesinin hem doğrusal bağımsız, hem de doğrusal bağımlı olduğu gösterilmiştir (Örnek 2.41).

İnjektif ve projektif gamma modüllerin çalışıldığı makalelerde (Abbas, Al-Saadi, vd., 2016), (Abbas vd., 2018b) yukarıda bahsedilen makalelerin referans olarak alındığı gözlenmiştir. Bu çalışmada verilen serbest, projektif ve injektif modüllerin tanımları yukarıda bahsedilen makalelerdeki tanımlardan farklı olarak verilmiştir.

Yukarıda açıklanan sebeplerden dolayı gamma modüllerin, serbest gamma modüllerin, injektif ve projektif gamma modüllerin yeniden ele alınması gerektiği düşünülmüştür.

Bu çalışmada gamma modül tanımı 2010 yılında yayınlanan Ameri ve arkadaşlarının makalesinden (Ameri ve Sadeghi, 2010), güçlü birim tanımı 1991 yılında yayınlanan Kyuno'nın kitabından alınarak güçlü birimsel gamma modül tanımı verilmiştir (S. Kyuno, 1991).

Bu çalışmada; gamma modül yapısında izomorfizma teoremleri ele alınmış ve gamma modüllerin tam dizileri ile ilgili bazı teoremler kanıtlanmış, gamma modüllerde yeni bir doğrusal bağımsızlık ve taban tanımı yapılmış ve buradan hareketle serbest gamma modüllerin bir karakterizasyonu verilmiştir. Ayrıca güçlü birime sahip bölümlü gamma halkaları üzerinde tanımlanan gamma vektör uzaylarının taban ve boyutları ile ilgili bazı teoremler ele alınmış, projektif ve injektif gamma modüller tanımlanmış ve projektif gamma modül için bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak da, $(\Gamma, M)_B$ güçlü birimli gamma halkası ve A bir güçlü birimsel $M\Gamma$-modül olmak üzere $\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(M, A)$ bir $M\Gamma$-modül olduğu gösterilerek injektif gamma modüller için de bir karakterizasyon verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca literatürde yer almayan ancak bu çalışma içinde kullanılacak bazı temel özellikler de bu bölümde kanıtlanmıştır.

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1. (Karaçay, 2014) A ve B iki küme olmak üzere A kümesinden B kümesine birebir ve örten bir fonksiyon varsa A ve B kümeleri **eşgüçlüdür** denir. Bütün kümelerden oluşan aile $\mathcal{C}$ olmak üzere eşgüçlü olma bağıntısı $\mathcal{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. A kümesinin eşgüçlü olma denklik bağıntısına göre bir denklik sınıfına A kümesinin **kardinal sayısı** denir ve $|A|$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. (Hungerford, 1974, Tanım 0.8.3.) α, β kardinal sayılar, $|A| = \alpha$ ve $|B| = \beta$ olsun. A ve B ayrık kümeleri için $A \cup B$ kümesinin kardinal sayısına α ve β kardinal sayılarının **toplamı** denir. Ayrıca $A \times B$ kümesinin kardinal sayısına da α ve β kardinal sayılarının **çarpımı** denir.

Teorem 2.3. *(Hungerford, 1974, Teorem 0.8.6.) (Schroeder-Bernstein) A ve B iki küme,* $|A| \leq |B|$ *ve* $|B| \leq |A|$ *ise* $|A| = |B|$ *eşitliği sağlanır.*

Teorem 2.4. *(Hungerford, 1974, Teorem 0.8.11.)* $0 \neq \beta \leq \alpha$ *ve* α *sonsuz olma özelliklerini sağlayan* α *ve* β *kardinal sayıları için* $\alpha\beta = \alpha$ *dır. Özel olarak,* $\mathcal{N}_0$ *doğal sayılar kümesinin kardinal sayısı olmak üzere* $\alpha\mathcal{N}_0 = \alpha$ *eşitliği ve* β *sonlu ise* $\mathcal{N}_0\beta = \mathcal{N}_0$ *eşitliği sağlanır.*

Sonuç 2.5. (Hungerford, 1974, Sonuç 0.8.13.) A sonsuz bir küme ve $F(A)$, A kümesinin bütün sonlu altkümelerinden oluşan bir küme ailesi ise $|F(A)| = |A|$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.6. (Hungerford, 1974, Tanım I.7.1.) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{C}$ objeler sınıfına **kategori** denir.

i. $\mathcal{C}$ sınıfından alınan her A, B obje çifti için tanımlanan, $f : A \to B$ ile gösterilen ve **morfizm** olarak isimlendirilen morfizmlerden oluşan $\hom(A,B)$ ayrık kümeler sınıfı vardır.
ii. $\mathcal{C}$ ailesinden alınan her üç A,B,C objesi için aşağıdaki (I) ve (II) koşullarını sağlayan $\hom(B,C) \times \hom(A,B)$ den $\hom(A,C)$ ye giden ve **bileşke** olarak isimlendirilen bir ψ

fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon her $f \in \hom(A,B)$ ve her $g \in \hom(B,C)$ için $\psi(g,f) \mapsto g \circ f \in \hom(A,C)$ olarak tanımlanır.

I. Eğer $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ üç morfizm ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.

II. $\mathcal{C}$ sınıfının her B objesi, her $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ morfizmleri için $1_B \circ f = f$ ve $g \circ 1_B = g$ eşitliklerini sağlayan bir $1_B : B \to B$ morfizmi vardır.

Tanım 2.7. (Hungerford, 1974, Tanım I.7.2) $\mathcal{C}$ bir kategori ve $\{A_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{C}$ kategorisinin objelerininin bir ailesi olsun. Her bir B objesi ve $\{\varphi_i : B \to A_i \mid i \in I\}$ morfizimlerin bir ailesi için $\{\pi_i : P \to A_i \mid i \in I\}$ morfizmlerinin bir ailesi verildiğinde her $i \in I$ için $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ olacak şekilde teklikle belirli $\varphi : B \to P$ morfizmi var ise $\mathcal{C}$ kategorisinin P objesine $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesinin bir **çarpımı** denir.

Tanım 2.8. (Hungerford, 1974, Tanım I.7.4.) $\mathcal{C}$ bir kategori ve $\{A_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{C}$ kategorisinin objelerinin bir ailesi olsun. Her bir B objesi ve $\{\psi_i : A_i \to B \mid i \in I\}$ morfizimlerin bir ailesi için $\{\iota_i : A_i \to S \mid i \in I\}$ morfizmlerinin bir ailesi verildiğinde her $i \in I$ için $\psi \circ i_i = \psi_i$ olacak şekilde teklikle belirli $\psi : S \to B$ morfizmi var ise $\mathcal{C}$ kategorisinin S objesine $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesinin bir **toplamı** denir.

Tanım 2.9. (Hungerford, 1974, Tanım 0.5.1.) $\{A_i \mid i \in I\}$ toplamsal değişmeli grupların bir ailesi olmak üzere $\prod\limits_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \right\}$ kümesine $\{A_i \mid i \in I\}$ **gruplarının çarpımı** denir. Her $i \in I$ için $a_i = f(i)$ olmak üzere $\prod\limits_{i \in I} A_i$ çarpımının elemanları $\{a_i\}$ şeklinde de gösterilebilir.

Teorem 2.10. *(Hungerford, 1974 Teorem I.8.1.) $\{A_i \mid i \in I\}$ toplamsal değişmeli grupların bir ailesi olmak üzere*

i. *$\prod\limits_{i \in I} A_i$ çarpımı her $i \in I$ için $\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\}$ ikili işlemiyle toplamsal bir gruptur.*
ii. *Her $k \in I$ için $\pi_k : \prod\limits_{i \in I} A_i \to A_k$, $\{a_i\} \mapsto a_k$ dönüşümü bir grup epimorfizmasıdır.*

Yukarıda tanımlanan $\prod\limits_{i \in I} A_i$ grubuna $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesinin **direkt çarpımı**, her bir π_k grup epimorfizmasına **doğal izdüşüm dönüşümü** denir.

Teorem 2.11. *(Hungerford, 1974, Teorem I.8.2) $\{G_i \mid i \in I\}$ grupların bir ailesi, H bir grup ve $\{\varphi_i : H \to G_i \mid i \in I\}$ grup homomorfizmalarının bir ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $\pi_i \varphi = \varphi_i$ olacak şekilde teklikle belirli $\varphi : H \to \prod\limits_{i \in I} G_i$ grup homomorfizması vardır. $\prod\limits_{i \in I} G_i$ kümesi izomorfizma farkıyla teklikle belirlidir. Diğer bir deyişle $\prod\limits_{i \in I} G_i$ grup kategorisinde bir çarpımdır.*

Tanım 2.12. (Hungerford, 1974, Tanım I.8.3.) $\{A_i \mid i \in I\}$ toplamsal değişmeli grupların bir ailesi olmak üzere

$$\left\{ f \in \prod_{i \in I} A_i \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ hariç } f(i) = 0_{A_i} \right\}$$

kümesine $\{A_i \mid i \in I\}$ grup ailesinin **direkt toplamı** denir ve $\sum\limits_{i \in I} A_i$ ile gösterilir.

Teorem 2.13. *(Hungerford, 1974, Teorem I.8.4.) $\{A_i \mid i \in I\}$ toplamsal değişmeli grupların bir ailesi olmak üzere*

i. $\sum\limits_{i \in I} A_i$ *direkt toplamı* $\prod\limits_{i \in I} A_i$ *direkt çarpımının bir altgrubudur.*
ii. *Her $k \in I$ için $\iota_k : A_k \to \sum\limits_{i \in I} A_i$ $a \mapsto \{a_i\}$ dönüşümü $i \neq k$ ise $a_i = 0$ ve $i = k$ ise $a_i = a$ tanımı ile bir grup monomorfizmasıdır.*
iii. *Her bir $k \in I$ için $\iota_k(A_k)$ kümesi $\prod\limits_{i \in I} A_i$ direkt çarpımının bir altgrubudur.*

Bu teoremde tanımlanan ι_k grup monomorfizmasına **doğal içerilme dönüşümü** denir.

Teorem 2.14. *(Hungerford, 1974, Teorem I.8.5) $\{A_i \mid i \in I\}$ toplamsal değişmeli grupların bir ailesi, B bir toplamsal değişmeli grup ve $\{\psi_i : A_i \to B \mid i \in I\}$ grup homomorfizmalarının bir ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $\psi \iota_i = \psi_i$ olacak şekilde teklikle belirli $\psi : \sum\limits_{i \in I} A_i \to B$ grup homomorfizması vardır. $\sum\limits_{i} A_i$ kümesi izomorfizma farkıyla teklikle belirlidir. Diğer bir deyişle $\sum\limits_{i \in I} A_i$ toplamsal değişmeli grup kategorisinde bir toplamdır.*

Tanım 2.15. (Hungerford, 1974) D bir toplamsal değişmeli grup olsun. Eğer verilen her $d \in D$ ve $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $d = nx$ olacak şekilde $x \in D$ var ise D toplamsal değişmeli grubuna **bölünebilir (divisible)** denir.

Örneğin toplamsal rasyonel sayılar grubu $\mathbb{Q}$ bölünebilir, ancak toplamsal tamsayılar grubu $\mathbb{Z}$ bölünemezdir. Toplamsal değişmeli grupların direkt toplamının bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir toplananın bölünebilir olmasıdır. Ayrıca, bir bölünebilir grubun homomorfik görüntüsü de bölünebilirdir.

Önerme 2.16. *(Hungerford, 1974, Lemma IV.3.9.) Her toplamsal değişmeli A grubu, bölünebilir bir toplamsal değişmeli grup içine gömülebilir.*

2.2. Gamma Halkaları

Tanım 2.17. (S. Kyuno, 1991) M ve Γ toplamsal değişmeli gruplar olsun. Eğer $M \times \Gamma \times M \to M$, $(a,\gamma,b) \mapsto a\gamma b$ fonksiyonu her $a,b,c \in M$ ve her $\gamma,\beta \in \Gamma$ için

i. $(a+b)\gamma c = a\gamma c + b\gamma c, \quad a(\gamma+\beta)c = a\gamma c + a\beta c, \quad a\gamma(b+c) = a\gamma b + a\gamma c;$

ii. $(a\gamma b)\beta c = a\gamma(b\beta c)$

koşullarını sağlıyorsa M grubuna **Barnes anlamında gamma halkası** denir ve $(\Gamma,M)_B$ ile gösterilir. Ayrıca $(\Gamma,M)_B$ sağlanıyor ve $\Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$, $(\gamma,a,\beta) \mapsto \gamma a\beta$ fonksiyonu ve her $a,b,c \in M$ ve her $\gamma,\beta \in \Gamma$ için

iii. $(a\gamma b)\beta c = a(\gamma b\beta)c$

eşitliği sağlanırsa M **ye zayıf Nobusawa gamma halkası** denir ve $(\Gamma,M)_{wN}$ ile gösterilir. Bununla birlikte

iv. $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere her $x,y \in M$ için $x\gamma y = 0$ iken $\gamma = 0$

koşulunu da sağlayan M zayıf Nobusawa gamma halkasına **Nobusawa anlamında gamma halkası** denir ve $(\Gamma,M)_N$ ile gösterilir.

Bu çalışmada aksinden söz edilmedikçe Barnes anlamında gamma halkası kullanılacaktır.

Tanım 2.18. (S. Kyuno, 1991) $(\Gamma,M)_B$ bir gamma halka, $a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. $[\gamma,a] : M \to M$ fonksiyonu her $m \in M$ için $m[\gamma,a] = m\gamma a$ olarak tanımlanan $[\gamma,a]$, M grubunun bir endomorfizması olur. Bu durumda

i. $R = \left\{ \sum\limits_i [\gamma_i,a_i] : \gamma_i \in \Gamma, a_i \in M \right\}$ kümesi M toplamsal değişmeli grubunun sağ çarpım endomorfizmalar halkasının bir althalkasıdır. Bu althalkaya $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **sağ operatör halkası** denir. R sağ operatör halkasındaki çarpma işlemi $\sum\limits_i [\gamma_i,a_i] \sum\limits_j [\beta_j,b_j] = \sum\limits_{i,j} [\gamma_i, a_i\beta_j b_j]$ şeklinde tanımlıdır.

ii. $L = \left\{ \sum\limits_j [b_j,\beta_j] : b_j \in M, \beta_j \in \Gamma \right\}$ kümesi M toplamsal değişmeli grubunun sol çarpım endomorfizmalar halkasının bir althalkasıdır. Bu althalkaya $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **sol**

operatör halkası denir. L sol operatör halkasındaki çarpma işlemi $\sum\limits_i [a_i,\gamma_i]\sum\limits_j [b_j,\beta_j] = \sum\limits_{i,j} [a_i\gamma_i b_j,\beta_j]$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.19. (S. Kyuno, 1991) $(\Gamma,M)_B$ bir gamma halka ve I kümesi M toplamsal değişmeli grubunun bir altgrubu olsun. Bu durumda her $a \in I$, $\gamma \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $a\gamma m \in I$ ($m\gamma a \in I$) oluyorsa I kümesine $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **sağ (sol) ideali** denir. I kümesi $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının hem sağ hem de sol ideali ise I kümesine $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **ideali** denir ve $I < M$ ile gösterilir. $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir S altkümesi için S kümesini içeren $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının tüm ideallerinin kesişimine S **tarafından üretilen ideal** denir ve (S) ile gösterilir.

Önerme 2.20. *(Barnes, 1966) $(\Gamma,M)_B$ gamma halka ve $a \in M$ elemanı tarafından üretilen ideal*

$$(a) = \{ \sum_{sonlu} na + x\alpha a + a\beta y + u\gamma a\delta v \mid x,y,u,v \in M,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Gamma,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

kümesine eşittir.

Tanım 2.21. (S. Kyuno, 1991) $(\Gamma,M)_B$ bir gamma halka olsun. Her $x \in M$ için

$$x\delta e = e\delta x = x$$

olacak şekilde $\delta \in \Gamma$ ve $e \in M$ varsa (δ,e) çiftine $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **güçlü birimi** denir.

Ayrıca aşağıdaki örnekteki gibi bir $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi birden çok olabilir.

Örnek 2.22. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q} \right\}$, $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{bmatrix} \mid x,y,z,t,u,v \in \mathbb{Q} \right\}$ olmak üzere $(\Gamma,M)_{wN}$ bir gamma halkasıdır. $\delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ için (δ_1,e_1) çifti $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının güçlü birimidir. Çünkü her $\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} \in M$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix}$$

eşitlikleri sağlanır. Aynı zamanda $\delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere (δ_2, e_2) çiftinin de $(\Gamma, M)_{wN}$ gamma halkasının güçlü birimi olduğu görülür. □

Önerme 2.23. *(S. Kyuno, 1991) Eğer (δ, e) çifti $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının bir güçlü birimi ise (e, δ) çifti de $(M, \Gamma)_B$ gamma halkasının güçlü birimidir.*

Önerme 2.24. *Bir (δ, e) çifti bir $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi ise $[e, \delta]$ elemanı L sol operatör halkasının ve $[\delta, e]$ elemanı da R sağ operatör halkasının birimidir.*

İspat. Her $\sum\limits_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i] \in L$ için

$$[e, \delta] \sum_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i] = \sum_{i=1}^{n} [e, \delta][x_i, \gamma_i] = \sum_{i=1}^{n} [e\delta x_i, \gamma_i] = \sum_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i]$$

ve

$$\left(\sum_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i] \right) [e, \delta] = \sum_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i][e, \delta] = \sum_{i=1}^{n} [x_i \gamma_i e, \delta] = \sum_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i e \delta] = \sum_{i=1}^{n} [x_i, \gamma_i]$$

eşitlikleri sağlandığından $[e, \delta]$, L sol operatör halkasının birimidir. Benzer biçimde $[\delta, e]$ elemanının R sağ operatör halkasının birimi olduğu gösterilir. □

Önerme 2.25. *(δ_1, e_1) ve (δ_2, e_2) çiftleri $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimleri ise $[\delta_1, e_1] = [\delta_2, e_2]$ ve $[e_1, \delta_1] = [e_2, \delta_2]$ eşitlikleri sağlanır.*

İspat. (δ_1, e_1) ve (δ_2, e_2) çiftleri $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimleri olsun. Her $x \in M$ için

$$x[\delta_1, e_1] \quad = \quad x\delta_1 e_1 = x = x\delta_2 e_2 = x[\delta_2, e_2]$$

eşitlikleri sağlandığından R sağ operatör halkasının $[\delta_1, e_1]$ ve $[\delta_2, e_2]$ elemanları eşittir. Benzer şekilde L sol operatör halkasında $[e_1, \delta_1] = [e_2, \delta_2]$ olduğu görülür. □

Tanım 2.26. (S. Kyuno, 1991) $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halkası olsun. Eğer her $a, b \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b = b\gamma a$ eşitliği sağlanıyorsa $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası **değişmelidir** denir.

Önerme 2.27. *(Kandamar ve Arslan, 2020) $(\Gamma, M)_N$ değişmeli gamma halkası ise $(M, \Gamma)_B$ değişmeli gamma halkasıdır.*

Tanım 2.28. (S. Kyuno, 1991) Bir $(\Gamma,M)_B$ gamma halkası (δ,e) güçlü birime sahip olsun. Sıfırdan farklı her $a \in M$ için $a\delta b = b\delta a = e$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasına **bölümlü gamma halka** denir. Değişmeli bölümlü gamma halkasına da **gamma cisim** denir.

Önerme 2.29. *(S. Kyuno, 1991) $(\Gamma,M)_B$ bir bölümlü gamma halkası ise L sol operatör halkası (veya R sağ operatör halkası) bir bölümlü halkadır.*

Tanım 2.30. (S. Kyuno, 1991) $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının M den farklı bir I ideali için $I \subseteq J \subseteq M$ koşulunu sağlayan her J ideali, I idealine veya M ye eşit oluyorsa I idealine $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **maksimal ideali** denir.

Teorem 2.31. *$(\Gamma,M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halkası olsun. Bu durumda $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının M den farklı her ideali bir maksimal ideal tarafından kapsanır. Böylece $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının en az bir maksimal ideali vardır.*

İspat. $I \neq M$ kümesi $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir ideali olsun. $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının I idealini kapsayan bir maksimal idealinin var olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{S} = \{A \mid A < M,\ I \subseteq A \neq M\}$$

küme ailesi göz önüne alınsın. $I \in \mathcal{S}$ olduğundan $\mathcal{S} \neq \emptyset$ dir. Aynı zamanda bu küme ailesi, kümelerdeki kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır. $\mathcal{S}$ küme ailesi içerisinde bir $\mathcal{C} = \{C_j \mid j \in J\}$ zincirini ele alalım. Öncelikle $U = \bigcup_{j\in J} C_j$ kümesinin $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir ideali olduğunu gösterelim. Her $x,y \in U$ için $x \in C_i$, $y \in C_j$ olacak şekilde $i,j \in J$ vardır. $\mathcal{C}$ bir zincir olduğundan $C_i \subset C_j$ veya $C_j \subset C_i$ dir. $C_i \subset C_j$ olduğu kabul edilirse $x,y \in C_j$ sağlanır. C_j bir ideal olduğundan $x - y \in C_j \subset U$ olur. Ayrıca her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $m\gamma x \in C_j \subset U$ olduğundan U bir idealdir. Her $j \in J$ için $I \subseteq C_j$ olduğundan $I \subseteq U$ sağlanır. Şimdi $U \neq M$ olduğunu gösterelim. (δ,e), $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi olmak üzere $U = M$ olduğunu kabul edelim. Buradan $e \in U$ dur ve $e \in C_i$ olacak şekilde bir $i \in J$ vardır. Bu ise $C_i = M$ olmasını gerektirir ve çelişki elde edilir. Böylece $U \neq M$ olduğu elde edilir. O halde $U \in \mathcal{S}$ dir. U kümesi $\mathcal{S}$ küme ailesi içerisinden seçilen $\mathcal{C}$ zincirinin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemma gereği $\mathcal{S}$ küme ailesinin en az bir maksimal elemanı vardır. Bu elemana N deyelim. N idealinin maksimal ideal olduğunu gösterelim. $N \subset K \subsetneqq M$ olacak şekilde $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir K ideali var olsun. $K \neq M$ ve $I \subseteq N \subset K$ olduğundan $K \in \mathcal{S}$ dir. N, $\mathcal{S}$ küme ailesinin maksimal elemanı olduğundan $K = N$ eşitliği sağlanır. Bu ise

$\mathcal{S}$ küme ailesinin maksimal elemanı olan N idealinin aynı zamanda $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının da maksimal ideali olduğunu gösterir. Böylece (0_M) kümesi $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir ideali olduğundan $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının en az bir maksimal ideali vardır. $\square$

Teorem 2.32. *$(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip, değişmeli gamma halkası olsun. Bu durumda I, $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir maksimal ideali ise $(\Gamma, M/I)_B$ gamma cisimdir.*

İspat. $M/I = \{m + I \mid m \in M\}$ kümesinin $a, b \in M$ için $(a+I) + (b+I) = (a+b) + I$ ikili işlemiyle toplamsal grup olduğu açıktır. $(\Gamma, M/I)_B$ nın gamma halkası olduğunu gösterebilmek için önce $M/I \times \Gamma \times M/I \to M/I$, $(m+I, \gamma, n+I) \mapsto m\gamma n + I$ üçlü işleminin iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. m, m', n, $n' \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ elemanları için $m - m'$, $n - n' \in I$ olsun. Bu durumda I ideal olduğundan

$$m\gamma n - m'\gamma n' \;=\; m\gamma n - m'\gamma n + m'\gamma n - m'\gamma n' = (m - m')\gamma n + m'\gamma(n - n') \in I$$

sağlanır ve böylece bu üçlü işlemin iyi tanımlı olduğu görülür. Diğer taraftan her $m, m', n, n' \in M$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için

i. $((m+I) + (m'+I))\gamma(n+I) = (m+I)\gamma(n+I) + (m'+I)\gamma(n+I)$
ii. $(m+I)(\gamma+\beta)(n+I) = (m+I)\gamma(n+I) + (m+I)\beta(n+I)$
iii. $(m+I)\gamma((n+I) + (n'+I)) = (m+I)\gamma(n+I) + (m+I)\gamma(n'+I)$
iv. $((m+I)\gamma(n+I))\beta(n'+I) = (m+I)\gamma((n+I)\beta(n'+I))$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir. O halde $(\Gamma, M/I)_B$ bir gamma halkadır.

$(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi (δ, e) ise $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkasının güçlü birimi $(\delta, e+I)$ olur. Ayrıca her $m+I, m'+I \in M/I$ ve $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının değişmeli olduğu kullanılırsa

$$(m+I)\gamma(m'+I) = m\gamma m' + I = m'\gamma m + I = (m'+I)\gamma(m+I)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkasının değişmeli olduğu görülür.

Son olarak $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkasının bölümlü gamma halkası olduğunu gösterelim. $I \neq m + I \in M/I$ yani $m \notin I$ olsun. Bu durumda $I \subset I + (m)$ sağlanır. Buradan I, $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının maksimal ideali ve $I \neq I + (m)$ olduğundan $I + (m) = M$ olmak zorundadır. Bu durumda $a + \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i m = e$ olacak şekilde $a \in I$ ve $\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i m \in (m)$ elemanları vardır. Burada $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası güçlü birimli ve değişmeli olduğundan m elemanı ile üretilen idealin elemanlarının $\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i m$ formunda olduğu kullanılmıştır. Böylece $e - \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i m \in I$ olur ve

$$\begin{aligned} e+I &= \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i m + I = \sum_{i=1}^{n}(m_i\gamma_i m + I) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(m_i\gamma_i e\delta m + I) = \sum_{i=1}^{n}(m_i\gamma_i e + I)\delta(m+I) \\ &= (\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i e + I)\delta(m+I) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde $(\Gamma, M/I)_B$ gamma cisimdir. □

2.3. Gamma Modüller

Gamma modüllerin tanımı ilk kez 1977 yılında Kyuno tarafından verilmiştir (S. Kyuno, 1977). Bu çalışmasında Kyuno, indirgenemez (irreducible) gamma modülü tanımlayarak M gamma halkasının Jacobson radikalini bütün indirgenemez gamma modüllerini sıfırlayan M gamma halkasının elemanlarının kümesi olarak tanımlamıştır. Daha sonra Kyuno'nun tanımlamış olduğu gamma modül tanımına Ameri ve Sadeghi bir koşul daha ekleyerek (iii.koşul) aşağıda olduğu şekilde tanımlamışlardır (Ameri ve Sadeghi, 2010).

Tanım 2.33. (Ameri ve Sadeghi, 2010) $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka ve $(N,+)$ bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere $M \times \Gamma \times N \to N$, $(m,\alpha,n) \mapsto m\alpha n$ ile tanımlanan dış işlemi her $m, m_1, m_2 \in M$, $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$ ve $n, n_1, n_2 \in N$ için

i. $m\alpha(n_1+n_2) = m\alpha n_1 + m\alpha n_2$

ii. $(m_1+m_2)\alpha n = m_1\alpha n + m_2\alpha n$

iii. $m(\alpha_1+\alpha_2)n = m\alpha_1 n + m\alpha_2 n$

iv. $(m_1\alpha m_2)\beta n = m_1\alpha(m_2\beta n)$

koşullarını sağlıyor ise N **ye sol $M\Gamma$-modül** denir.

Tanım 2.34. (S. Kyuno, 1977) $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, N ve Q iki sol $M\Gamma$-modül olsun. $\varphi : N \to Q$ dönüşümü her $x, y \in N$, $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

i. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

ii. $\varphi(m\gamma x) = m\gamma\varphi(x)$

koşullarını sağlanıyorsa φ fonksiyonuna bir $M\Gamma$**-modül homomorfizması** denir. Bununla beraber, eğer φ $M\Gamma$-modül homomorfizması birebir ve örten ise φ fonksiyonuna

$M\Gamma$**-modül izomorfizması** denir. Eğer $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası bir bölümlü gamma halkası ise φ $M\Gamma$-modül homomorfizmasına $M\Gamma$**-doğrusal dönüşüm** denir. $M\Gamma$-modül homomorfizmasının çekirdeği

$$\text{Ker}\varphi = \{x \in N \mid \varphi(x) = 0\}$$

ve görüntü kümesi

$$\text{Im}\varphi = \{y \in Q \mid y = \varphi(x),\, x \in N\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $M\Gamma$-modül homomorfizması aynı zamanda toplamsal grup homomorfizması olduğundan grup teorisinde olduğu gibi bir $\varphi : N \to Q$ $M\Gamma$-modül homomorfizması için aşağıdakilerin sağlandığı kolayca görülür.

i. φ fonksiyonunun $M\Gamma$-modül monomorfizması olması için gerek ve yeter koşul $\text{Ker}\varphi = 0$ olmasıdır,

ii. φ fonksiyonunun $M\Gamma$-modül izomorfizması olması için gerek ve yeter koşul $\phi\varphi = I_N$ ve $\varphi\phi = I_Q$ olacak şekilde bir $\phi : Q \to N$ $M\Gamma$-modül homomorfizması var olmasıdır.

Gamma modül tanımına ek olarak Ameri ve Sadeghi birimsel gamma modül tanımını şu şekilde vermiştir: Gamma halkasının birimi $1\gamma_0$ olmak üzere her $n \in N$ için $1\gamma_0 n = n$ koşulu sağlanıyorsa bu gamma modüle *birimsel gamma modül* denir.

Ancak bu makale incelendiğinde bazı temel yanlışlıklar yapıldığı gözlenmiştir. Bunlardan bazıları aşağıda ele alınmıştır:

Önerme 2.35. *(Ameri ve Sadeghi, 2010, Önerme 3.12)* $(\Gamma, M)_B$ *gamma halka* N *bir sol* $M\Gamma$*-modül* $Sub(N) = \{X \mid X \subseteq N\}$ *olsun. O zaman* $Sub(N)$ *bir sol* $M\Gamma$*-modüldür.*

Bu önermenin ispatında $\text{Sub}(N)$ üzerinde tanımlanan toplama her $A, B \in \text{Sub}(N)$ için $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ olarak alınmış ve $\text{Sub}(N)$ nin toplamsal değişmeli grup olduğu görülmüştür. Ancak $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için $m\gamma X = \{m\gamma x \mid x \in X\}$ olmak üzere

$$M \times \Gamma \times \text{Sub}(N) \to \text{Sub}(N) \qquad (m, \gamma, X) \mapsto m\gamma X$$

ile tanımlanan dış işlemle $\text{Sub}(N)$ kümesi $M\Gamma$-modül değildir. Çünkü $\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül, $(\text{Sub}(\mathbb{Z}_4), \oplus)$ toplamsal değişmeli grubu $X = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ $\gamma = 1$ alındığında

$(3+2)\circ 1\circ X = \{\bar{0},\bar{2}\}$, $(3\circ 1\circ X)\oplus(2\circ 1\circ X) = \{\bar{0},\bar{2}\}\oplus\{\bar{0}\} = \{\bar{2}\}$ olduğundan gamma modül olmanın ii. koşulu sağlanmamaktadır.

Önerme 2.36. *(Ameri ve Sadeghi, 2010 , Önerme 5.6) N birimsel sol $M\Gamma$-modül ve $End(N) = \{f : N \to N \mid f\ M\Gamma\text{-modül homomorfizması}\}$ olsun. Bu durumda N bir sol $End(N)\Gamma$-modüldür.*

Öncelikle yukarıdaki önermenin anlamlı olması için $(\Gamma, \mathrm{End}(N))_B$ yapısının gamma halkası olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Ancak

$$\mathrm{End}(N)\times\Gamma\times\mathrm{End}(N)\to\mathrm{End}(N)$$

üçlü işlemi tanımlanmamış ve $\mathrm{End}(N)$ toplamsal grubunun Γ-halkası olduğu gösterilmemiştir. Ayrıca bu önermenin ispatında 1 birim dönüşüm olmak üzere dış işlem

$$\mathrm{End}(N)\times\Gamma\times N\to N, \quad (f,\gamma,n)\mapsto f(1\gamma n) = 1\gamma f(n)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlı diş işlemde $1\gamma f(n)\in N$ sağlanmadığı gözlenmiştir.

Örnek 2.37. (Ameri ve Sadeghi, 2010 , Örnek 5.11) $(\Gamma, M)_B$ gamma halka olmak üzere N_1 ve N_2 $M\Gamma$-modüller ise $\mathrm{Hom}(N_1,N_2) = \{f \mid f : N_1 \to N_2\ M\Gamma\text{-modül homomorfizması}\}$ toplamsal değişmeli gurubunun $M\Gamma$-modül olduğu idda edilmiş, ancak $M\times\Gamma\times\mathrm{Hom}(N_1,N_2)\to\mathrm{Hom}(N_1,N_2)$ dış işlemi tanımlanmamıştır.

Örnek 2.38. (Ameri ve Sadeghi, 2010 , Örnek 5.12) N bir sol $M\Gamma$-modül ve sağ $M'\Gamma$-modül olsun. Eğer N' $M\Gamma$-modül ise $\mathrm{Hom}(N,N') = \{f \mid f : N \to N'\ M\Gamma\text{-modül homomorfizması}\}$ toplamsal değişmeli gurubunun sol $M'\Gamma$-modül olduğu ispatlanırken dış işlemi $M'\times\Gamma\times\mathrm{Hom}(N,N')\to\mathrm{Hom}(N,N')$, $(m'\gamma f)(n) = f(n\gamma m')$ şeklinde tanımlanmıştır. Ancak bu dış işlem modül olmanın iv. koşulu olan

$$(m'\gamma m'')\beta f = m'\gamma(m''\beta f)$$

eşitliğinin sağlanmadığı görülmüştür.

2006 yılında Uddin ve Paul, bir gamma modülün bir alt kümesinin doğrusal bağımsızlık tanımını ve serbest gamma modül tanımını aşağıdaki şekilde vermişlerdir. Ancak böyle bir serbest gamma modülün varlığını göstermemişlerdir.

Tanım 2.39. (Uddin ve Paul, 2006) $(\Gamma,M)_B$ gamma halka olmak üzere N bir sol $M\Gamma$-modül ve $X \subset N$ olsun. Bu durumda

i. Herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ ve X kümesinin birbirinden farklı $x_1,\ldots,x_n$ elemanları için $m_1\gamma x_1 + \cdots + m_n\gamma x_n = 0$ iken $m_1 = \cdots = m_n = 0$ sağlanıyorsa X kümesine *γ-doğrusal bağımsız* denir.
ii. Eğer X kümesi **her** $\gamma \in \Gamma$ için γ-doğrusal bağımsız ise X kümesine *Γ-doğrusal bağımsız* denir.
iii. $\{x_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq N$ olsun. Eğer $m_j \in M$, $i_j \in \Lambda$ ve **her** $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere $p \in N$ için

$$p = m_1\gamma x_{i_1} + \cdots + m_n\gamma x_{i_n}$$

olacak şekilde tek türlü yazılabiliyorsa $\{x_i \mid i \in \Lambda\}$ kümesine *N nin üreteçlerinin kümesi* denir.
iv. Eğer her $p \in N$ elemanı bu şekilde tek türlü yazılabiliyorsa $\{x_i \mid i \in \Lambda\}$ kümesi N için bir *tabandır* denir. Eğer N birimsel sol $M\Gamma$-modülün bir tabanı varsa N ye *serbest* sol $M\Gamma$-modül denir.

X kümesinin Γ-doğrusal bağımsız olması tanımı göz önüne alınırsa, N $M\Gamma$-modülünün boş kümeden farklı hiç bir altkümesinin Γ-doğrusal bağımsız olamayacağı görülür. Çünkü $\emptyset \neq X \subseteq N$ olmak üzere Γ kümesinden alınan 0_Γ, sıfırdan farklı her $m_i \in M$ ve $x_i \in X$ için her zaman $m_1 0_\Gamma x_1 + \cdots + m_n 0_\Gamma x_n = 0$ olur. Böylece X kümesinin Γ-doğrusal bağımsız olmadığı görülür.

2018 yılında serbest gamma modüllerde çalışma yapan Abbas ve arkadaşları doğrusal bağımsızlık tanımını yeniden ele almışlardır. Bu makalede gamma modül tanımı Ameri ve Sadeghi'nin 2010 yılında yayınladıkları makaleden alınmıştır. Abbas ve arkadaşları bu makalede, Uddin ve Paul'un tanımladığı doğrusal bağımsızlık tanımından daha güçlü olan bir doğrusal bağımsızlık tanımı yapıldığını söylemektedirler. Ancak bu makalede verilen doğrusal bağımsızlık tanımı aşağıda verilen gamma modülden alınan bir altkümenin hem doğrusal bağımlı hem de doğrusal bağımsız olduğu gösterilmiştir.

Tanım 2.40. (Abbas vd., 2018a) $(\Gamma,M)_B$ gamma halka olmak üzere N bir sol $M\Gamma$-modül ve $B = \left\{b_j \mid j \in \Lambda\right\}$ için $B \subset N$ olsun. Eğer birbirinden farklı **her** $b_1,\ldots b_n \in B$, $m_1,\ldots,m_n \in M$ ve $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Gamma$ elemanları için $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\alpha_i b_i = 0$ iken $m_1 = \cdots = m_n = 0$ sağlanıyorsa $B = \left\{b_j \mid j \in \Lambda\right\}$ kümesine *$M\Gamma$-doğrusal bağımsız küme* denir.

Örnek 2.41. $M = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Q}\right\}$, $\Gamma = \left\{\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid c,d \in \mathbb{Q}\right\}$ için $(\Gamma,M)_{wN}$ bir gamma halkası verildiğinde

$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{Q} \right\}$ kümesi için N bir sol $M\Gamma$-modüldür.

$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ altkümesi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabildiğinden doğrusal bağımlıdır. Aynı zamanda

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği var iken $a = b = c = d = 0$ olduğundan X kümesi doğrusal bağımsız olmaktadır.

Abbas ve arkadaşları 2018 yılında projektif gamma modül çalışmış ve tanımı serbest gamma modüller üzerinden vermişlerdir (Abbas vd., 2018b). Ancak burada geçen projektif gamma modül tanımında yukarıda bahsedilen hatalı serbest gamma modül tanımı kullanılmıştır.

Tanım 2.42. (Abbas vd., 2018b) P bir $M\Gamma$-modül olsun. Eğer $P \oplus P'$ serbest $M\Gamma$-modül olacak şekilde P' $M\Gamma$-modül var ise P ye $M\Gamma$-*projektif* denir.

Abbas ve arkadaşları 2016 yılında injektif gamma modülleri çalışmıştır (Abbas, Al-Saadi, vd., 2016). Burada injektif gamma modül tanımı bizim çalışmamızda yaptığımızdan farklı şekilde verilmiştir. Ancak Abbas ve arkadaşlarının bu makalesindeki teorem ve ispatlarda Ameri ve Sadeghi'nin 2010 yılında yayınlanan "Gamma Modules" makalesinde hatalı olduğu gösterilen önerme ve örnekler referans olarak verilmiştir.

Söz konusu bu makalelerde incelenen doğrusal bağımsızlık tanımı, serbest gamma modül tanımı ile doğrudan ilişkili olduğu için bu tezde doğrusal bağımsızlık yeniden tanımlanmıştır. Bundan faydalanarak serbest gamma modüller yeniden ele alınmış, projektif ve injektif gamma modüllerin karakterizasyonu yapılmıştır.

3. GAMMA MODÜLLER

Gamma modülün tanımı ilk olarak 1977 yılında Kyuno tarafından verilmiştir (S. Kyuno, 1977). Kyuno bu makalesinde, altmodül ve modül homomorfizması tanımlarını da vermiştir. Bu tezde gamma modül tanımı Ameri ve Sadeghi'nin çalışmalarından, güçlü birim tanımı Kyuno'nun makalesinden alınmıştır. Ayrıca güçlü birimsel gamma modül tanımı verilmiş, gamma modüllerde izomorfizma teoremleri ve tam diziler ile ilgili bazı teoremler kanıtlanmıştır. Gamma modüllerde bir kümenin doğrusal bağımsız olması tanımı ve bir kümenin bir gamma modülü üretmesi tanımları verilerek bir gamma modülün tabanı tanımlanmıştır. Buna bağlı olarak free gamma modüller, injektif ve projektif gamma modüller üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca gamma vektör uzaylarının taban ve boyutları ile ilgili bazı teoremlar ispatlanmıştır.

3.1. Temel Kavramlar

İlk olarak Kyuno tarafından verilen gamma modül tanımı incelendiğinde her $m \in M$, $n \in N$ için $m0_{\Gamma}n = 0_N$ eşitliğinin sağlanması gerektiği düşünülerek gamma modül tanımı Tanım 2.33 de verildiği şekliyle alınmıştır.

Tanım 3.1. $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası (δ, e) güçlü birime sahip ve N bir sol $M\Gamma$-modül olmak üzere her $n \in N$ için $e\delta n = n$ koşulu sağlanıyor ise N ye **güçlü birimsel sol $M\Gamma$-modül** denir.

Benzer şekilde (güçlü birimsel) sağ $M\Gamma$-modül, $N \times \Gamma \times M \to N$, $(n, \alpha, m) \mapsto n\alpha m$ dış işlemi ile yukarıdaki koşullara parelel şekilde tanımlanır. Eğer $(\Gamma, M)_B$ değişmeli gamma halkası ise her N sol $M\Gamma$-modül $m \in M$, $\alpha \in \Gamma$ ve $n \in N$ için $n\alpha m = m\alpha n$ şeklinde tanımlı dış işlem ile, bir sağ $M\Gamma$-modül olur. Bu durumda $(\Gamma, M)_B$ değişmeli gamma halkası iken N sol $M\Gamma$-modülü bir $M\Gamma$**-**modül olarak alınabilir.

Bu çalışmada aksinden söz edilmedikçe "sol $M\Gamma$-modül" ifadesi yerine "$M\Gamma$-modül" ifadesi kullanılacaktır.

Objeleri $M\Gamma$-modüller , morfizmleri $M\Gamma$-modül homomorfizmaları olan $\mathcal{C}$ sınıfını ele alalım. N, Q, W üç $M\Gamma$-modül olmak üzere

$$\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(Q,W) \times \mathrm{Hom}_{M\Gamma}(N,Q) \to \mathrm{Hom}_{M\Gamma}(N,W) \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$

fonksiyonlardaki bileşke ile

I. Her $f : N \to Q$, $g : Q \to W$ ve $h : W \to T$ $M\Gamma$-modül homomorfizmaları için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.

II. Her N $M\Gamma$-modül ve her $f : W \to N$ ve $g : N \to Q$ $M\Gamma$-modül homomorfizmaları için $1_N \circ f = f$, $g \circ 1_N = g$ eşitliklerini sağlayan $1_N : N \to N$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır.

Böylece $M\Gamma$-modüllerin bir kategori oluşturduğu görülür.

Önerme 3.2. *$(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka ve N bir $M\Gamma$-modül olmak üzere her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$, $n \in N$ için $0_M \alpha n = 0_N$, $m 0_\Gamma n = 0_N$ ve $m \alpha 0_N = 0_N$ eşitlikleri sağlanır.*

İspat. Her $\gamma \in \Gamma$ ve $n \in N$ için $0_M \alpha n = (0_M + 0_M)\alpha n = 0_M \alpha n + 0_M \alpha n$ eşitliği sağlanır. Burada eşitliğin her iki yanına $0_M \alpha n$ elemanının toplamsal tersi eklenirse $0_M = 0_M \alpha n$ elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilir. □

Önerme 3.3. *$(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının L sol operatör halkası bir sol $M\Gamma$-modüldür.*

İspat. Öncelikle $M \times \Gamma \times L \to L$, $m\gamma \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] = \sum_{i=1}^{n} [m\gamma m_i, \gamma_i]$ şeklinde tanımlanan üçlü işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $m = m'$, $\gamma = \gamma'$ ve $\sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] = \sum_{i=1}^{t} [k_i, \beta_i]$ verildiğinde her $x \in M$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [m\gamma m_i, \gamma_i] x &= \sum_{i=1}^{n} m\gamma m_i \gamma_i x = m\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i x \\
&= m'\gamma' \sum_{i=1}^{t} k_i \beta_i x = \sum_{i=1}^{t} m'\gamma' k_i \beta_i x \\
&= \sum_{i=1}^{t} [m'\gamma' k_i, \beta_i] x
\end{aligned}$$

olduğundan yukarıda tanımlanan işlem iyi tanımlı bir Γ-dış işlemdir. Aynı zamanda her $m, a, b \in M$, $\gamma, \beta \in \Gamma$ ve $\sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i]$, $\sum_{j=1}^{t} [u_j, \beta_j] \in L$ olmak üzere

i. $m\gamma \left(\sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] + \sum_{j=1}^{t} [u_j, \beta_j] \right) = m\gamma \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] + m\gamma \sum_{j=1}^{t} [u_j, \beta_j]$

ii. $(a+b)\gamma \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] = a\gamma \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] + b\gamma \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i]$

iii. $m(\gamma+\beta) \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] = m\gamma \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] + m\beta \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i]$

iv. $(a\gamma b)\beta \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i] = a\gamma (b\beta \sum_{i=1}^{n} [m_i, \gamma_i])$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. □

Önerme 3.4. *$(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka ve N bir güçlü birimsel $M\Gamma$-modül olsun. Bu durumda $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $m\gamma M = (0_M)$ ise $m\gamma N = (0_N)$ dır.*

İspat. (δ, e), $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi olmak üzere $m\gamma M = (0_M)$ ise $m\gamma e = 0_M$ dir. Her $x \in N$ için

$$m\gamma x = m\gamma(e\delta x) = (m\gamma e)\delta x = 0_M \delta x = 0_N$$

eşitlikleri sağlandığından istenen elde edilir. □

Tanım 3.5. (S. Kyuno, 1977) $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka ve Q bir N sol $M\Gamma$-modülünün boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $m \in M$, $q, q_1, q_2 \in Q$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

i. $q_1 - q_2 \in Q$
ii. $m\gamma q \in Q$

koşulları sağlanıyorsa Q ya N $M\Gamma$-modülün bir **sol $M\Gamma$-altmodülü** denir. Eğer N, $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası üzerinde bir vektör uzayı ise Q $M\Gamma$-altmodülüne **$M\Gamma$-altuzay** denir.

Tanım 3.6. N_1 ve N_2 bir N $M\Gamma$-modülünün iki altmodü olmak üzere $N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1,\ n_2 \in N_2\}$ kümesine bu iki $M\Gamma$-altmodülün **toplamı** denir.

Önerme 3.7. *Eğer $\varphi : N \to Q$ bir $M\Gamma$-modül homomorfizması ise Kerφ ve Imφ sırasıyla , N ve Q $M\Gamma$-modüllerinin birer $M\Gamma$-altmodülleridir. Ayrıca N_1 ve N_2 bir N $M\Gamma$-modülünün $M\Gamma$-altmodülleri ise $N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2$ kümeleri de N $M\Gamma$-modülünün birer $M\Gamma$-altmodülleridir.*

İspat. N ve Q toplamsal grup olmasından dolayı Kerφ, Imφ, $N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2$ kümelerin $M\Gamma$-altmodül olmanın (i) koşulunu sağladıkları açıktır. İlk olarak Kerφ kümesinin N $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülü olduğunu gösterelim. Her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $n \in$ Kerφ için

$$\varphi(m\gamma n) \quad = \quad m\gamma\varphi(n) = m\gamma 0_Q = 0_Q$$

olduğundan $m\gamma n \in$ Kerφ olduğu görülür. Şimdi ise Imφ kümesinin Q $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülü olduğunu gösterelim. Her $q \in$Imφ ise $q = \varphi(n)$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Buradan her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$m\gamma q \quad = \quad m\gamma\varphi(n) = \varphi(m\gamma n) \in \mathrm{Im}\varphi$$

olduğu görülür. Şimdi N_1+N_2 altgrubunun $M\Gamma$-altmodül olduğunu gösterelim.

$n\in N_1+N_2$ için $n=n_1+n_2$ şeklinde $n_1\in N_1$ ve $n_2\in N_2$ elemanları var olduğunu iki altkümenin toplamından biliyoruz. Her $m\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$m\gamma n \;=\; m\gamma(n_1+n_2)=m\gamma n_1+m\gamma n_2\in N_1+N_2$$

eşitlikleri sağlanır. Son olarak $N_1\cap N_2$ altgrubunun $M\Gamma$-altmodül olduğunu gösterelim. Her $m\in M$, $\gamma\in\Gamma$ ve $n\in N_1\cap N_2$ için $m\gamma n\in N_1$ ve $m\gamma n\in N_2$ olur. Böylece $m\gamma n\in N_1\cap N_2$ olduğundan $N_1\cap N_2$, N $M\Gamma$-modülünün altmodülüdür. □

Tanım 3.8. N bir $M\Gamma$-modül ve $X\subseteq N$ olsun. X kümesini kapsayan N modülünün tüm $M\Gamma$-altmodüllerinin kesişimine X **tarafından üretilen** $M\Gamma$**-altmodül** denir ve (X) ile gösterilir. Burada X sonlu ise X tarafından üretilen $M\Gamma$-altmodüle **sonlu üreteçli** $M\Gamma$**-altmodül** denir. $X=\emptyset$ ise X tarafından üretilen $M\Gamma$-altmodül $\{0_N\}$ $M\Gamma$-altmodül olarak kabul edilir. $X=\{a\}$ ise X tarafından üretilen $M\Gamma$-altmodülüne **devirli** $M\Gamma$**-altmodül** denir. $\{N_i\mid i\in I\}$, N modülünün $M\Gamma$-altmodüllerinin bir ailesi ise $X=\bigcup\limits_{i\in I}N_i$ kümesi tarafından üretilen $M\Gamma$-altmodüle N_i altmodüllerinin **toplamı** denir. Eğer I sonlu ise bu toplam $N_1+N_2+\cdots+N_n$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.9. *$(\Gamma,M)_B$ bir gamma halka, N bir $M\Gamma$-modül ve $X\subseteq N$ olsun. $n\in N$ için $M\Gamma n=\{\sum\limits_{i=1}^{t}m_i\gamma_i n\mid t\in\mathbb{Z}^+,\, m_i\in M,\, \gamma_i\in\Gamma\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,*

i. $M\Gamma n$, N $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülüdür.

ii. n tarafından üretilen $M\Gamma$-altmodül $(n)=\{kn+\sum\limits_{i=1}^{t}m_i\gamma_i n\mid k,t\in\mathbb{Z}^+,\, m_i\in M,\, \gamma_i\in\Gamma\}$ dir. Eğer $(\Gamma,M)_B$ gamma halkası güçlü birimli ve N güçlü birimsel $M\Gamma$-modül ise $(n)=M\Gamma n$ dir.

iii. X tarafından üretilen $M\Gamma$-altmodülü için

$$(X)=\{\sum_{i=1}^{s}k_ix_i+\sum_{j=1}^{t}m_j\gamma_jx'_j\mid s,t\in\mathbb{Z}^+,\, x_i,x'_j\in X,\, m_j\in M,\, \gamma_j\in\Gamma,\, k_i\in\mathbb{Z}\}$$

eşitliği sağlanır. Eğer $(\Gamma,M)_B$ gamma halkası güçlü birimli ve N güçlü birimsel $M\Gamma$-modül ise

$$(X)=M\Gamma X=\{\sum_{i=1}^{s}m_i\gamma_ix_i\mid s\in\mathbb{Z}^+,\, x_i\in X,\, m_i\in M,\, \gamma_i\in\Gamma\}$$

olur.

İspat.

i. N $M\Gamma$-modül olduğundan her $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ için $\sum_i m_i\gamma_i n \in N$ dir. Böylece $M\Gamma n \subseteq N$ olduğu görülür. Bununla birlikte $\sum_i m_i\gamma_i n - \sum_j m'_j\gamma'_j n \in M\Gamma n$ ve her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için $m\gamma\sum_i m_i\gamma_i n = \sum_i (m\gamma m_i)\gamma_i n \in M\Gamma n$ olduğundan $M\Gamma n$, N nin bir $M\Gamma$-altmodülüdür.

ii. $K = \{kn + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \mid k,t \in \mathbb{Z},\ m_i \in M,\ \gamma_i \in \Gamma\}$ kümesinin n elemanını kapsayan bir $M\Gamma$-altmodülü olduğunu gösterelim. $n = n + \sum_{i=1}^{t} 0_M\gamma_i n$ olduğundan $n \in K$ sağlanır. Ayrıca N $M\Gamma$-modül ve $n \in N$ olduğundan her $n \in N$, $m_i \in M$ ve $\gamma_i \in \Gamma$ $(i = 1,2,\ldots,t)$ için $kn + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \in N$ sağlanır ve böylece $K \subseteq N$ olduğu görülür. O halde K, n elemanını içeren N $M\Gamma$-modülünün bir altkümesidir. Şimdi N tarafından kapsanan K kümesinin bir $M\Gamma$-altmodül olduğunu gösterelim. Her $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$, $m_i,m'_j \in M$, $\gamma_i,\gamma'_j \in \Gamma$ $(i = 1,2,\ldots,t,\ j = 1,2,\ldots,s)$ için

$$(k_1 n + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n) - (k_2 n + \sum_{i=1}^{s} m'_i\gamma'_i n) = (k_1 - k_2)n + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n - \sum_{i=1}^{s} m'_i\gamma'_i n \in K$$

ve her $a \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için

$$a\gamma(k_1 n + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n) = k_1 a\gamma n + \sum_{i=1}^{t} (a\gamma m_i)\gamma_i n \in K$$

olduğundan K, N $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülüdür. Böylece (n) $M\Gamma$-altmodülünün tanımından $(n) \subseteq K$ elde edilir. Şimdi $K \subseteq (n)$ olduğunu gösterelim. Her $kn + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \in K$ için (n) N $M\Gamma$-modülünün $M\Gamma$-altmodülü olduğundan $kn \in N$, $i = 1,2,\ldots,t$ için $m_i\gamma_i n \in N$ ve $kn + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \in (n)$ olur. Buradan $K \subseteq (n)$ olduğu görülür.

Şimdi N güçlü birimsel $M\Gamma$-modül iken $(n) = M\Gamma n$ olduğunu gösterelim. $M\Gamma n \subseteq (n)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi (δ,e) ve N güçlü birimsel $M\Gamma$-modül ise $n = e\delta n$ eşitliği sağlanır. Her $kn + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \in (n)$ için

$$kn + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \quad = \quad k(e\delta n) + \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i n \in M\Gamma n$$

sağlandığından $(n) \subseteq M\Gamma n$ olduğu görülür.

iii. $S = \{\sum_{i=1}^{s} k_i x_i + \sum_{j=1}^{t} m_j\gamma_j x'_j \mid s,t \in \mathbb{Z}^+,\ x_i,x'_j \in X,\ m_j \in M,\ \gamma_j \in \Gamma,\ k_i \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin X kümesini kapsayan N $M\Gamma$-modülünün altmodulü olduğunu gösterelim. Bir $x \in X$ için $x = x + \sum_{j=1}^{t} 0_M\gamma_j x \in S$ olduğundan $X \subseteq S$ sağlanır. Ayrıca $S \subseteq N$ olduğu açıktır. Her $\sum_{i=1}^{s} k_i x_i + \sum_{j=1}^{t} m_j\gamma_j y_j$, $\sum_{i=1}^{s'} k'_i x'_i + \sum_{j=1}^{t'} m'_j\gamma'_j y'_j \in S$ için

$$k_1x_1 + \cdots + k_sx_s - k'_1x'_1 - \cdots - k'_sx'_s + m_1\gamma_1y_1 + \cdots + m_t\gamma_ty_t - m'_1\gamma'_1y'_1 - \cdots - m'_{t'}\gamma'_{t'}y'_{t'} \in S$$

olduğundan S, N nin bir toplamsal altgrubudur. Her $a \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $\sum_{i=1}^{s} k_i n_i + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j n'_j \in S$ için

$$a\gamma(\sum_{i=1}^{s} k_i n_i + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j n'_j) = \sum_{i=1}^{s} a\gamma k_i n_i + \sum_{j=1}^{t} (a\gamma m_j)\gamma_j n'_j \in S$$

eşitlikleri sağlandığından S, N $M\Gamma$-modülünün bir altmodülüdür. Şimdi de $S \subseteq (X)$ olduğunu gösterelim. Her $\sum_{i=1}^{s} k_i x_i + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j x'_j \in S$ için, $x_i \in X \subseteq (X)$ ve (X), N $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülü olduğundan $\sum_{i=1}^{s} k_i x_i + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j x'_j \in (X)$ sağlanır. Böylece $S = (X)$ olduğu görülür.
Ayrıca $M\Gamma X = \{\sum_{i=1}^{s} m_i \gamma_i x_i \mid s \in \mathbb{Z}^+, x_i \in X, m_i \in M, \gamma_i \in \Gamma\}$ kümesi için $M\Gamma X \subseteq (X)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi (δ, e) ve N güçlü birimsel $M\Gamma$-modül ise her bir $x_i \in X$ için $x_i = e\delta x_i$ şeklindedir. Bu durumda $\sum_{i=1}^{s} k_i x_i + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j x'_j \in (X)$ için

$$\sum_{i=1}^{s} k_i x_i + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j x'_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} k_i (e\delta x_i) + \sum_{j=1}^{t} m_j \gamma_j x'_j \in M\Gamma X$$

olduğundan $(X) \subseteq M\Gamma X$ gerçeklenir. □

3.2. Gamma Modüllerde İzomorfizma Teoremleri

Teorem 3.10. *$(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, N bir $M\Gamma$-modül ve Q, N modülünün bir altmodülü olsun. Bu durumda $M \times \Gamma \times N/Q \to N/Q$ her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $n \in N$ için $m\gamma(n+Q) = m\gamma n + Q$ biçiminde tanımlı dış işlemi ile N/Q bir $M\Gamma$-modüldür. Ayrıca $\pi : N \to N/Q$, $n \mapsto n+Q$ ile tanımlı dönüşüm bir $M\Gamma$-modül epimorfizmasıdır ve çekirdeği Q dur.*

İspat. Öncelikle N/Q kümesinin bir $M\Gamma$-modül olduğunu göstermek için $m\gamma(n+Q) = m\gamma n + Q$ isleminin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Herhangi $m, m' \in M$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $n, n' \in N$ elemanları için $m = m'$, $\gamma = \gamma'$ ve $n - n' \in Q$ olsun. Buradan $m'\gamma' n = m\gamma n$ ve

$$\begin{aligned} m\gamma n - m'\gamma' n' &= m\gamma n - m'\gamma' n + m'\gamma' n - m'\gamma' n' \\ &= m\gamma n - m\gamma n + m'\gamma'(n - n') \\ &= m'\gamma'(n - n') \in Q \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $m\gamma n + Q = m'\gamma' n' + Q$ olduğundan bu üçlü işlemin iyi tanımlı olduğu görülür. Aynı zamanda her m, m_1, $m_2 \in M$, α, $\beta \in \Gamma$ ve $n+Q$, n_1+Q, $n_2+Q \in N/Q$ için *i.* $m\alpha((n_1+Q)+(n_2+Q)) = m\alpha(n_1+Q)+m\alpha(n_2+Q)$

ii. $(m_1+m_2)\alpha(n+Q) = m_1\alpha(n+Q)+m_2\alpha(n+Q)$

iii. $m(\alpha+\beta)(n+Q) = m\alpha(n+Q)+m\beta(n+Q)$

iv. $(m_1\alpha m_2)\beta(n+Q) = m_1\alpha(m_2\beta(n+Q))$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. O halde N/Q kümesi bir $M\Gamma$-modüldür.

Şimdi ise $\pi : N \to N/Q$, $n \mapsto n+Q$ ile tanımlanan dönüşümün $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Bu dönüşümün iyi tanımlı ve toplamsal grup epimorfizması olduğu açıktır. Her $n \in N$, $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\pi(m\gamma n) \quad = \quad m\gamma n+Q = m\gamma(n+Q) = m\gamma\pi(n)$$

olduğundan π bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır.

Son olarak $Ker\pi = Q$ olduğunu gösterelim. $n \in Ker\pi$ ise $\pi(n) = n+Q = Q$ yani $n \in Q$ olur. Böylece $Ker\pi \subseteq Q$ sağlanır. Diğer taraftan $q \in Q$ için $q+Q = Q$ olduğundan $\pi(q) = Q$, yani $q \in Ker\ \pi$ dir. Böylece $Ker\pi = Q$ olduğu görülür. □

Tanım 3.11. Yukarıdaki teoremde tanımlanan π dönüşümüne **doğal $M\Gamma$-modül epimorfizması** veya **$M\Gamma$-modül projeksiyonu** denir.

Teorem 3.12. $(\Gamma,M)_B$ *bir gamma halka, $\varphi : N \to W$ bir $M\Gamma$-modül homomorfizması ve Q, $Ker\varphi$ tarafından kapsanan bir $M\Gamma$-altmodül olsun. Bu durumda her $n \in N$ için $\bar{\varphi}(n+Q) = \varphi(n)$ ile tanımlı teklikle belirli bir $\bar{\varphi} : N/Q \to W$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır ve bununla birlikte $Im\bar{\varphi} = Im\varphi$ ve $Ker\bar{\varphi} = Ker\varphi/Q$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\bar{\varphi}$ dönüşümünün bir $M\Gamma$-modül izomorfizması olması için gerek ve yeter koşul φ $M\Gamma$-modül epimorfizması ve $Q = Ker\varphi$ olmasıdır.*

İspat.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ N/Q \arrow[ur, "\exists\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Öncelikle $\bar{\varphi}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $n_1+Q, n_2+Q \in N/Q$ için

$$\begin{aligned} n_1+Q = n_2+Q &\Rightarrow n_1-n_2 \in Q \subseteq \mathrm{Ker}\varphi \\ &\Rightarrow \varphi(n_1-n_2) = \varphi(n_1)-\varphi(n_2) = 0_W \\ &\Rightarrow \varphi(n_1) = \varphi(n_2) \\ &\Rightarrow \bar{\varphi}(n_1+Q) = \bar{\varphi}(n_2+Q) \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{\varphi}$ iyi tanımlıdır. Şimdi $\bar{\varphi}$ dönüşümünün bir $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $n_1+Q, n_2+Q \in N/Q$ için

$$\bar{\varphi}((n_1+Q)+(n_2+Q)) = \bar{\varphi}(n_1+Q)+\bar{\varphi}(n_2+Q)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. Aynı zamanda her $n+Q \in N/Q$, $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\bar{\varphi}(m\gamma(n+Q)) = \bar{\varphi}(m\gamma n+Q) = \varphi(m\gamma n) = m\gamma\varphi(n) = m\gamma\bar{\varphi}(n+Q)$$

eşitlikleri sağlandığından $\bar{\varphi}$ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Burada her $n \in N$ için $\bar{\varphi}\pi(n) = \bar{\varphi}(n+Q) = \varphi(n)$ olduğundan $\bar{\varphi}\pi = \varphi$ eşitliği sağlanır. Şimdi N/Q modülünden W modülüne tanımlanan ve $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$ olacak şekilde $M\Gamma$-modül homomorfizmasının tek türlü yazılabileceğini gösterelim: $\psi : N/Q \to W$ dönüşümü $\psi\pi = \varphi$ olacak şekilde bir $M\Gamma$-modül homomorfizması olsun. Her $n+Q \in N/Q$ için

$$\psi(n+Q) = \psi(\pi(n)) = (\psi\pi)(n) = \varphi(n) = \bar{\varphi}(n+Q)$$

olduğundan $\psi = \bar{\varphi}$ sağlanır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Im}\bar{\varphi} &\Leftrightarrow w = \bar{\varphi}(n+Q),\ \exists n \in N \\ &\Leftrightarrow w = \varphi(n) \in \mathrm{Im}\varphi \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\mathrm{Im}\bar{\varphi} = \mathrm{Im}\varphi$ olur. Şimdi $\mathrm{Ker}\bar{\varphi} = \mathrm{Ker}\varphi/Q$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} n+Q \in \mathrm{Ker}\bar{\varphi} &\Leftrightarrow 0_W = \bar{\varphi}(n+Q) = \varphi(n) \\ &\Leftrightarrow n \in \mathrm{Ker}\varphi \\ &\Leftrightarrow n+Q \in \mathrm{Ker}\varphi/Q \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\mathrm{Ker}\bar{\varphi} = \mathrm{Ker}\varphi/Q$ olduğu görülür.

Son olarak $\bar{\varphi}$ dönüşümünün izomorfizma olması için gerek ve yeter koşulun φ dönüşümünün bir epimorfizma ve $\text{Ker}\varphi = Q$ olduğunu gösterelim. $\bar{\varphi}$ bir $M\Gamma$-modül izomorfizması olsun. $\bar{\varphi}$ örten olduğundan $\text{Im}\varphi = \text{Im}\bar{\varphi} = W$ sağlanır. Böylece φ örten olur. Şimdi $\text{Ker}\varphi = Q$ olduğunu gösterelim. Hipotezden $Q \subseteq \text{Ker}\varphi$ dir. Diğer taraftan $\bar{\varphi}$ izomorfizma olduğundan $\text{Ker}\bar{\varphi} = \{Q\}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} a \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow & 0_W = \varphi(a) = \bar{\varphi}(a+Q) \\ \Rightarrow & a+Q \in \text{Ker}\bar{\varphi} = \{Q\} \\ \Rightarrow & a+Q = Q \Rightarrow a \in Q \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\text{Ker}\varphi \subseteq Q$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\text{Ker}\varphi = Q$ eşitliği sağlanır. Aksine φ bir $M\Gamma$-modül epimorfizması ve $\text{Ker}\varphi = Q$ olsun. Bu durumda $\text{Im}\varphi = \text{Im}\bar{\varphi}$ olduğundan $\bar{\varphi}$ dönüşümünün bir $M\Gamma$-modül epimorfizması olduğu açıktır. Şimdi $\bar{\varphi}$ dönüşümünün birebir olduğunu yani $\text{Ker}\bar{\varphi} = \{Q\}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} a+Q \in \text{Ker}\bar{\varphi} \Rightarrow & 0_W = \bar{\varphi}(a+Q) = \varphi(a) \\ \Rightarrow & a \in \text{Ker}\varphi = Q \\ \Rightarrow & a+Q = Q \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\text{Ker}\bar{\varphi} = \{Q\}$ olur. □

Sonuç 3.13. $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka ve $\varphi : N \to W$ bir $M\Gamma$-modül epimorfizması ise $N/\text{Ker}\varphi \simeq$W olur.

İspat. Terem 3.12 de $Q = \text{Ker}\varphi$ alınırsa ispatın gerçeklendiği görülür.

Teorem 3.14. *$(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, N' ve Q' sırasıyla N ve Q $M\Gamma$-modülünün altmodülleri ve $\varphi : N \to Q$ $M\Gamma$-modül homomorfizması olsun. Bu durumda $\varphi(N') \subseteq Q'$ ise $\bar{\varphi} : N/N' \to Q/Q'$, $n + N' \mapsto \varphi(n) + Q'$ şeklinde tanımlanan bir tek $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Bununla birlikte $\bar{\varphi}$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $Im\varphi + Q' = Q$ ve $\varphi^{-1}(Q') \subseteq N'$ olmasıdır. Özel olarak φ, $\varphi(N') = Q'$ ve $Ker\varphi \subseteq N'$ koşullarını sağlayan bir $M\Gamma$-modül epimorfizması ise $\bar{\varphi}$ bir izomorfizmadır.*

İspat. $\varphi : N \to Q$ $M\Gamma$-modül homomorfizması ve $\varphi(N') \subseteq Q'$ olsun.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \arrow[d, "\pi'"] \\ N/N' \arrow[r, "\exists\bar{\varphi}"'] & Q/Q' \end{tikzcd}$$

Önce $\bar{\varphi}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Her $a+N', b+N' \in N/N'$ için

$$\begin{aligned}a+N'=b+N' &\Rightarrow a-b\in N'\\ &\Rightarrow \varphi(a-b)=\varphi(a)-\varphi(b)\in\varphi(N')\subseteq Q'\\ &\Rightarrow \varphi(a)+Q'=\varphi(b)+Q'\\ &\Rightarrow \bar{\varphi}(a+N')=\bar{\varphi}(b+N')\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\bar{\varphi}$ dönüşümü iyi tanımlıdır.

Diğer taraftan her $a+N', b+N' \in N/N'$, $m\in M$, $\gamma\in\Gamma$ için φ dönüşümünün $M\Gamma$-modül homomorfizması ve Q' nün altmodül olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(a+N'+b+N') &= \bar{\varphi}(a+b+N')=\varphi(a+b)+Q'\\ &= \varphi(a)+Q'+\varphi(b)+Q'=\bar{\varphi}(a+N')+\bar{\varphi}(b+N')\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(m\gamma(a+N')) &= \bar{\varphi}(m\gamma a+N')=\varphi(m\gamma a)+Q'\\ &= m\gamma\varphi(a)+Q'=m\gamma(\varphi(a)+Q')\\ &= m\gamma\bar{\varphi}(a+N')\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde $\bar{\varphi}$ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır.

Şimdi $\bar{\varphi}$ fonksiyonunun bir $M\Gamma$-modül izomorfizması olması için gerek ve yeter koşulun $\mathrm{Im}\varphi+Q'=Q$ ve $\varphi^{-1}(Q')\subseteq N'$ olduğunu gösterelim. $\bar{\varphi}$ bir $M\Gamma$-modül izomorfizması olsun. $\mathrm{Im}\varphi+Q'\subseteq Q$ olduğunu biliyoruz. Her $q\in Q$ için $q+Q'\in Q/Q'$ ve $\bar{\varphi}$ örten olduğundan $\bar{\varphi}(a+N')=q+Q'$ olacak şekilde en az bir $a+N'\in N/N'$ vardır.

$$\begin{aligned}q\in Q &\Rightarrow q+Q'\in Q/Q'\\ &\Rightarrow q+Q'=\bar{\varphi}(a+N')=\varphi(a)+Q'\\ &\Rightarrow q\in\mathrm{Im}\varphi+Q'\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $Q\subseteq\mathrm{Im}\varphi+Q'$ olur. Şimdi $\varphi^{-1}(Q')\subseteq N'$ olduğunu gösterelim. $\bar{\varphi}$ birebir olduğundan $\mathrm{Ker}\bar{\varphi}=\{N'\}$ olur.

$$\begin{aligned}a\in\varphi^{-1}(Q') &\Rightarrow \varphi(a)\in Q'\Rightarrow \varphi(a)+Q'=0_Q+Q'\\ &\Rightarrow \bar{\varphi}(a+N')=0_{Q/Q'}\\ &\Rightarrow a+N'\in\mathrm{Ker}\bar{\varphi}=\{N'\}\\ &\Rightarrow a\in N'\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\varphi^{-1}(Q') \subseteq N'$ olur.

Şimdi $\mathrm{Im}\varphi + Q' = Q$ ve $\varphi^{-1}(Q') \subseteq N'$ iken $\bar{\varphi}$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının bir izomorfizma olduğunu gösterelim. Her $q+Q \in Q/Q'$ için

$$\begin{aligned}
q \in Q = \mathrm{Im}\varphi + Q' \quad &\Leftrightarrow \quad q = x + q' \quad \exists x \in \mathrm{Im}\varphi \text{ ve } \exists q' \in Q' \\
&\Leftrightarrow \quad q - x \in Q' \quad \exists x \in \mathrm{Im}\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad q - \varphi(a) \in Q' \quad \exists \varphi(a) \in \mathrm{Im}\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad q + Q' = \varphi(a) + Q' \quad \exists \varphi(a) \in \mathrm{Im}\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad q + Q' = \bar{\varphi}(a + N') \quad \exists a + N \in N/N' \\
&\Leftrightarrow \quad q + Q' \in \mathrm{Im}\bar{\varphi}
\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. O halde $\bar{\varphi}$ örtendir. Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının birebir olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
n + N' \in \mathrm{Ker}\bar{\varphi} &\Rightarrow \bar{\varphi}(n + N') = Q' \\
&\Rightarrow \varphi(n) + Q' = Q' \\
&\Rightarrow \varphi(n) \in Q' \\
&\Rightarrow n \in \varphi^{-1}(Q') \subseteq N' \\
&\Rightarrow n + N' = 0_{N/N'}
\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\mathrm{Ker}\bar{\varphi} = \{N'\}$ olur. Böylece $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının birebir olduğu görülür.

Son olarak $\varphi(N') = Q'$, $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq N'$ ve φ örten ise $\bar{\varphi}$ dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterelim. φ örten olduğundan $\bar{\varphi}$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının örten olduğu açıktır. Şimdi $\bar{\varphi}$ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
n + N' \in \mathrm{Ker}\bar{\varphi} &\Rightarrow \bar{\varphi}(n + N') = \varphi(n) + Q' = Q' \\
&\Rightarrow \varphi(n) \in Q' = \varphi(N') \\
&\Rightarrow \varphi(n) = \varphi(n'),\ \exists n' \in N' \\
&\Rightarrow \varphi(n - n') = 0_N,\ \exists n' \in N' \\
&\Rightarrow n - n' \in \mathrm{Ker}\varphi \subseteq N',\ \exists n' \in N' \\
&\Rightarrow n \in N' \ \Rightarrow \ n + N' = N'
\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $\mathrm{Ker}\bar{\varphi} = \{N'\}$ olur. Yani $\bar{\varphi}$ birebirdir. $\square$

Teorem 3.15. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka, Q ve W bir N $M\Gamma$-modülünün altmodülleri olsun. Bu durumda, $Q/(Q\cap W) \simeq (Q+W)/W$ olur.*

İspat.

$$\varphi : Q \to (Q+W)/W$$
$$q \mapsto q+W$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $q \in Q$ için $\varphi(q) = q+W = (q+0)+W \in (Q+W)/W$ olduğundan φ kapalıdır. φ dönüşümünün iyi tanımlı olduğu ve toplamsal dönüşüm olduğu açıktır. Diğer yandan her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $q \in Q$ için

$$\varphi(m\gamma q) = m\gamma q + W = m\gamma(q+W) = m\gamma\varphi(q)$$

olduğundan φ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Her $(q+w)+W \in (Q+W)/W$ için $(q+w)+W = q+W = \varphi(q)$ olacak şekilde $q \in Q$ olduğundan φ örtendir. Son olarak φ $M\Gamma$-modül epimorfizmasının çekirdeğini bulalım.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi &= \{q \in Q \mid \varphi(q) = W\} \\ &= \{q \in Q \mid q+W = W\} \\ &= \{q \in Q \mid q \in W\} = Q \cap W. \end{aligned}$$

O halde Teorem 3.12 den $Q/(Q\cap W) \simeq (Q+W)/W$ sağlanır. □

Teorem 3.16. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka, Q ve W bir N $M\Gamma$-modülünün altmodülleri olsun. Bu durumda, $W \subseteq Q$ ise Q/W, N/W $M\Gamma$-modülünün bir altmodülüdür ve $(N/W)/(Q/W) \simeq N/Q$ ifadesi sağlanır.*

İspat. Burada Q/W kümesi N/W toplamsal değişmeli grubunun bir altgrubudur. Öncelikle Q/W modülünün N/W $M\Gamma$-modülünün bir altmodülü olduğunu gösterelim. Her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $q+W \in Q/W$ için $m\gamma(q+W) = m\gamma q + W \in Q/W$ olduğundan Q/W, N/W $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülü olur. Her $n \in N$ için

$$\varphi : N/W \to N/Q$$
$$n+W \mapsto n+Q$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $n_1 + W, n_2 + W \in N/W$ için

$$\begin{aligned} n_1 + W = n_2 + W &\Rightarrow n_1 - n_2 \in W \subseteq Q \\ &\Rightarrow n_1 - n_2 \in Q \\ &\Rightarrow n_1 + Q = n_2 + Q \end{aligned}$$

olduğundan φ iyi tanımlıdır. Ayrıca φ dönüşümünün toplamsal olduğu açıktır. Her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $n + W \in N/W$ için

$$\varphi(m\gamma(n+W)) = \varphi(m\gamma n + W) = m\gamma n + Q = m\gamma(n+Q) = m\gamma\varphi(n+W)$$

eşitliğinden φ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Her $n + Q \in N/Q$ için $\varphi(n+W) = n+Q$ olacak şekilde $n + W \in N/W$ elemanı var olduğundan φ örtendir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi &= \{n + W \in N/W \mid \varphi(n+W) = Q\} \\ &= \{n + W \mid n + Q = Q\} \\ &= \{n + W \mid n \in Q\} = Q/W. \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.12 gereği $(N/W)/(Q/W) \simeq N/Q$ olduğu görülür. □

Teorem 3.17. *$(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, N bir $M\Gamma$-modül ve Q, N modülünün bir altmodülü olsun. Bu durumda N nin Q yu kapsayan tüm altmodülleri ile N/Q nun tüm $M\Gamma$-altmodülleri arasında $K \mapsto K/Q$ ile verilen, birebir karşılık gelen bir eşleme vardır. Böylece N/Q modülünün her $M\Gamma$-altmodülü, K, Q $M\Gamma$-altmodülünü kapsayan bir altmodül olmak üzere K/Q biçimindedir.*

İspat. $S(N)$, Q $M\Gamma$-altmodülünü kapsayan N $M\Gamma$-modülünün tüm $M\Gamma$-altmodüllerinin kümesi ve $S(N/Q)$ ise N/Q $M\Gamma$-modülünün tüm $M\Gamma$-altmodüllerinin kümesi olsun.

$$\begin{aligned} \psi : S(N) &\to S(N/Q) \\ K &\mapsto \pi(K) = K/Q \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün kapalı ve iyi tanımlı olduğu açıktır. Öncelikle bu fonksiyonun birebir olduğunu gösterelim. K, T$\in S(N)$ için $\psi(K) = \psi(T)$ olsun. Buradan $K/Q = T/Q$ sağlanır ve

$$k \in K \Leftrightarrow k + Q \in K/Q = T/Q \Leftrightarrow k \in T$$

olduğundan $K = T$ olur ve böylece ψ birebir fonksiyondur. Şimdi de ψ fonksiyonunun örten olduğunu gösterelim. $\pi : N \to N/Q$, $n \mapsto n+Q$ $M\Gamma$-modül homomorfizması örten olduğundan her $A \in S(N/Q)$ için $\pi(\pi^{-1}(A)) = A$ eşitliği sağlanır. Şimdi $\pi^{-1}(A) \in S(N)$ olduğunu gösterelim. Burada $\pi^{-1}(A) \subseteq N$ ve N $M\Gamma$-altmodül olduğundan sadece $Q \subseteq \pi^{-1}(A)$ olduğunu göstereceğiz. Her $q \in Q$ için $\pi(q) = q+Q = Q = 0_{N/Q} \in A$ olduğundan $q \in \pi^{-1}(A)$ dır. Böylece $Q \subseteq \pi^{-1}(A)$ olur ve bu ise $\pi^{-1}(A) \in S(N)$ olmasını gerektirir. Aynı zamanda her $A \in S(N/Q)$ için $\psi(\pi^{-1}(A)) = \pi(\pi^{-1}(A)) = A$ eşitlikleri sağlandığından ψ örtendir. □

Teorem 3.18. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka ve* $\{N_i \mid i \in I\}$ $M\Gamma$*-modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda* N_i *toplamsal değişmeli gruplarının direkt çarpımı* $\prod_{i\in I} N_i$ *ve direkt toplamı* $\sum_{i\in I} N_i$ *olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.*

i. $\prod_{i\in I} N_i$ toplamsal değişmeli grubu bir $M\Gamma$-modüldür.
ii. $\sum_{i\in I} N_i$ direkt toplamı $\prod_{i\in I} N_i$ direkt çarpımın bir $M\Gamma$-altmodülüdür.
iii. Her $k \in I$ için $\pi_k : \prod_{i\in I} N_i \to N_k$ doğal izdüşümü bir $M\Gamma$-modül epimorfizmasıdır.
iv. Her $k \in I$ için $\iota_k : N_k \to \sum_{i\in I} N_i$ doğal içermesi bir $M\Gamma$-modül monomorfizmasıdır.

İspat.

i. Teorem 2.10 den $\prod_{i\in I} N_i$ direkt çarpımı toplamsal bir gruptur. Ayrıca $M \times \Gamma \times \prod_{i\in I} N_i \to \prod_{i\in I} N_i$, $m\gamma\{a_i\} = \{m\gamma a_i\}$ dış işlemi tanımlansın. Buna göre her $m, m_1, m_2 \in M$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ve $\{a_i\}, \{b_i\} \in \prod_{i\in I} N_i$ için

a. $m\gamma(\{a_i\} + \{b_i\}) = m\gamma\{a_i\} + m\gamma\{b_i\}$

b. $(m_1+m_2)\gamma\{a_i\} = m_1\gamma\{a_i\} + m_2\gamma\{a_i\}$

c. $m(\gamma_1+\gamma_2)\{a_i\} = m\gamma_1\{a_i\} + m\gamma_2\{a_i\}$

d. $(m_1\gamma_1 m_2)\gamma_2\{a_i\} = m_1\gamma_1(m_2\gamma_2\{a_i\})$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Böylece $\prod_{i\in I} N_i$ direkt çarpımı bir $M\Gamma$-modüldür.

ii. Teorem 2.13 den $\sum_{i\in I} N_i$ direkt toplamı $\prod_{i\in I} N_i$ direkt çarpımın bir altgrubudur. Aynı zamanda $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $\{a_i\} \in \sum_{i\in I} N_i$ olsun. Buradan $\sum_{i\in I} N_i$ direkt toplam tanımı gereği sonlu sayıda $i \in I$ hariç $a_i = 0$ dır. O yüzden $m\gamma a_i = 0$ olur. Böylece sonlu sayıda $i \in I$ hariç $m\gamma\{a_i\} = \{m\gamma a_i\} = 0$ olduğundan $m\gamma\{a_i\} \in \sum_{i\in I} N_i$ sağlanır. O halde $\sum_{i\in I} N_i$ direkt toplamı $\prod_{i\in I} N_i$ direkt çarpımın bir $M\Gamma$-altmodülüdür.

iii. Teorem 2.10 den her $k \in I$ için $\pi_k : \prod_{i\in I} N_i \to N_k$, $\{a_i\} \mapsto a_k$ dönüşümü bir grup epimorfizmasıdır. Aynı zamanda her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\pi_k(m\gamma\{a_i\}) = \pi_k(\{m\gamma a_i\}) = m\gamma a_k = m\gamma\pi_k(\{a_i\})$$

olduğundan her $k \in I$ için π_k dönüşümü bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır.

iv. Teorem 2.13 den her $k \in I$ için $\iota_k : N_k \to \sum\limits_{i \in I} N_i$ $a \mapsto \{a_i\}$ dönüşümü $i \neq k$ ise $a_i = 0$ ve $i = k$ ise $a_i = a$ tanımı ile bir grup monomorfizmasıdır. Aynı zamanda her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$, $i \neq k$ için $\iota_k(m\gamma a) = \{0\} = m\gamma\iota_k(a)$ ve $i = k$ için $\iota_k(m\gamma a) = \{m\gamma a\} = m\gamma\{a\} = m\gamma\iota_k(a)$ olduğundan her $k \in I$ için ι_k dönüşümü bir $M\Gamma$-modül homomorfizması olur. □

Tanım 3.19. $\prod\limits_{i \in I} N_i$ $M\Gamma$-modülüne $\{N_i \mid i \in I\}$ modül ailesinin **direkt çarpımı**, $\sum\limits_{i \in I} N_i$ $M\Gamma$-modülüne $\{N_i \mid i \in I\}$ modül ailesinin **direkt toplamı** denir. Ayrıca π_k $M\Gamma$-epimorfizmasına **doğal izdüşüm** ve ι_k $M\Gamma$-monomorfizmasına da **doğal içerilme** dönüşümleri denir.

Tanım 3.20. $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, N bir $M\Gamma$-modül ve $\{N_i \mid i \in I\}$ ailesi N $M\Gamma$-modülünün altmodüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda eğer

i. N $M\Gamma$-modülü, $\{N_i \mid i \in I\}$ ailesinin toplamı şeklinde yazılır ve

ii. N_k^*, $\{N_i \mid i \neq k\}$ ailesinin toplamı olmak üzere her $k \in I$ için $N_k \cap N_k^* = (0_N)$

koşulları sağlanırsa N $M\Gamma$-modülüne $\{N_i \mid i \in I\}$ altmodül ailesinin **iç direkt toplamı** denir. Ayrıca bu durumda her bir $i \in I$ için N_i $M\Gamma$-altmodülüne de **direkt toplanan** denir.

3.3. Gamma Modül Dizileri

Tanım 3.21. $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının $N \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} W$ dizisi için $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$ eşitliği sağlanırsa bu diziye Q da **tamdır** denir.

Önerme 3.22. *$(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, N, Q, W üç $M\Gamma$-modül olsun.*

i. $0 \to Q \xrightarrow{\varphi} W$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul φ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının birebir olmasıdır.

ii. $Q \xrightarrow{\psi} W \to 0$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul ψ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının örten olmasıdır.

iii. $N \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} W$ dizisi tam ise $\psi\varphi = 0$ dır.

İspat.

i. $0 \xrightarrow{0} Q \xrightarrow{\varphi} W$ tam dizi olsun. Bu durumda $\mathrm{Im}0 = \{0\} = \mathrm{Ker}\varphi$ eşitlikleri sağlandığından φ birebirdir. Tersine, φ birebir $M\Gamma$-modül homomorfizması olsun. Bu durumda $\mathrm{Im}0 = \mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$ eşitlikleri sağlandığından $0 \xrightarrow{0} Q \xrightarrow{\varphi} W$ $M\Gamma$-modül dizisi tamdır.

ii. $Q \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{f} 0$ tam dizi olsun. Bu durumda $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Ker}f = W$ olduğundan ψ örtendir. Tersine, ψ örten $M\Gamma$-modül homomorfizması ise $\mathrm{Im}\psi = W = \mathrm{Ker}f$ olduğundan $Q \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{f} 0$ tam dizidir.

iii. $N \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} W$ tam dizi ve her $n \in N$ için $\varphi(n) \in \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$ olduğunda $\psi(\varphi(n)) = 0$ olur. Böylece $\psi\varphi = 0$ sağlanır. □

Tanım 3.23. $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka, $N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} N_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} N_{n-1} \xrightarrow{f_n} N_n$ $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının sonlu dizisi olmak üzere $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $\mathrm{Im}f_i = \mathrm{Ker}f_{i+1}$ koşulu sağlanıyorsa bu diziye **tam dizi** denir. Eğer $0 \to N_1 \xrightarrow{f_1} N_2 \xrightarrow{f_2} N_3 \to 0$ $M\Gamma$-modül homomorfizma dizisi tam ise bu diziye **kısa tam dizi** denir.

Önerme 3.24. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka, N, Q, W, N', Q' ve W' $M\Gamma$-modül olmak üzere*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\varphi'"'] & Q' \arrow[r, "\psi'"'] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. Her iki satır da tam dizi olacak şekilde bu diyagramı değişmeli yapan $M\Gamma$-modül homomorfizmaları var olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. f, h $M\Gamma$-modül monomorfizmaları ise g bir $M\Gamma$-modül monomorfizmasıdır.

ii. f, h $M\Gamma$-modül epimorfizmaları ise g bir $M\Gamma$-modül epimorfizmasıdır.

iii. f, h $M\Gamma$-modül izomorfizması ise g bir $M\Gamma$-modül izomorfizmasıdır.

İspat.

i. f ve h $M\Gamma$-modül monomorfizmaları olsun. g $M\Gamma$-modül homomofizmasının birebir olduğunu göstermek için $Kerg = \{0_Q\}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $q \in Kerg$ olsun. Bu durumda $g(q) = 0_{Q'}$ olur. Burada diyagramın değişmeliliğinden dolayı $\psi' g = h\psi$ eşitliği kullanılırsa

$$h\psi(q) = \psi' g(q) = \psi'(0_{Q'}) = 0_{W'}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu ise $\psi(q) \in Kerh$ olmasını gerektirir. Burada h birebir olduğundan $\psi(q) = 0_W$ dır. Böylece

$$q \in Ker\psi = Im\varphi$$

olduğundan $q=\varphi(n)$ *olacak şekilde* $n\in N$ *vardır.* $g(q)=0_{Q'}$ *ve yine diyagramın değişmeliliğinden* $\varphi' f=g\varphi$ *eşitliği kullanılırsa*

$$0_{Q'}=g(q)=g(\varphi(n))=\varphi' f(n)$$

bulunur. Burada φ' *ve* f $M\Gamma$-modül monomorfizmaları olduğundan $\varphi' f$ de $M\Gamma$-modül monomorfizmadır. Böylece $\varphi' f(n)=0_{Q'}$ *olması* $n=0_N$ *olmasını gerektirir. Bu durumda*

$$q=\varphi(n)=\varphi(0_N)=0_Q$$

olur. Böylece $Kerg=\{0\}$ *olur. Buradan* g *fonsiyonunun bir* $M\Gamma$*-modül monomorfizması olduğu görülür.*

ii. f,h $M\Gamma$*-modül epimorfizmaları olsun. Keyfi bir* $q'\in Q'$ *için* $g(q_0)=q'$ *olacak şekilde bir* $q_0\in Q$ *elemanının varlığını göstereceğiz.* $q'\in Q'$ *ise* $\psi'(q')=w'\in W'$ *olur.* h *örten olduğundan*

$$h(w)=w'=\psi'(q')$$

olacak şekilde $w\in W$ *vardır.* ψ *örten olduğundan* $\psi(q)=w$ *olacak şekilde* $q\in Q$ *vardır. O halde*

$$\psi'(q')=h(w)=h(\psi(q))$$

olacak şekilde bir $q\in Q$ *vardır. Diğer taraftan diyagramın değişmeliliğinden dolayı* $h\psi=\psi' g$ *dir ve buradan*

$$\psi'(q')=(h\psi)(q)=(\psi' g)(q)$$

eşitlikleri sağlanır. ψ' $M\Gamma$*-modül homomorfizması olduğundan*

$$0=\psi'(q')-\psi'(g(q))=\psi'(q'-g(q))$$

elde edilir. Buradan

$$q'-g(q)\in Ker\psi'=Im\varphi'$$

olur. O halde $q'-g(q)$=$\varphi'(n')$ *olacak şekilde bir* $n'\in N'$ *elemanı vardır. Ayrıca* f *örten olduğundan* $n'=f(n)$ *olacak şekilde bir* $n\in N$ *vardır. Böylece*

$$q'-g(q)=\varphi'(n')=\varphi'(f(n))=(\varphi' f)(n)$$

elde edilir. Burada diyagramın değişmeliliğini, yani $\varphi' f = g\varphi$ eşitliğini kullanırsak

$$q' - g(q) = (\varphi' f)(n) = (g\varphi)(n)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $q' = g(\varphi(n)) + g(q) = g(\varphi(n)+q)$ olacak şekilde $q_0 = \varphi(n)+q \in Q$ elemanı vardır. O halde g fonksiyonu bir $M\Gamma$-modül epimorfizmasıdır.

iii. Teoremin i. ve ii. kısımlarından istenen elde edilir. □

Tanım 3.25. $(\Gamma, M)_B$ gamma halka, N, Q, W, N', Q' ve W' $M\Gamma$-modül olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\varphi} & Q & \xrightarrow{\psi} & W & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow[\varphi']{} & Q' & \xrightarrow[\psi']{} & W' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramı verilsin. Her iki satır da kısa tam dizi iken bu diyagramı değişmeli yapan f, g, h $M\Gamma$-modül homomorfizmaları varsa bu **iki dizi izomorftur** denir.

Teorem 3.26. *$(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka ve $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının $0 \to A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \to 0$ bir kısa tam dizisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

i. $gh = 1_{A_2}$ olacak şekilde $h : A_2 \to B$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır.
ii. $kf = 1_{A_1}$ olacak şekilde $k : B \to A_1$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır.
iii. Verilen dizi, $0 \to A_1 \xrightarrow{\iota_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0$ kısa tam dizisine izomorftur, özel olarak $B \cong A_1 \oplus A_2$ sağlanır.

İspat.

$(i \Rightarrow iii)$ $0 \to A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \to 0$ kısa tam dizisi verildiğinde $gh = 1_{A_2}$ olacak şekilde $h : A_2 \to B$ $M\Gamma$-modül homomorfizması var olsun.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\iota_1} & A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{\pi_2} & A_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 1_{A_1} & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_{A_2} & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow[f]{} & B & \xrightarrow[g]{} & A_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan φ $M\Gamma$-modül izomorfizmasını tanımlayarak yukarıda verilen iki dizinin izomorf olduğunu göstereceğiz. Bu dönüşümü $\varphi : A_1 \oplus A_2 \to B$, $\varphi(a_1, a_2) = f(a_1) + h(a_2)$ ile tanımlayalım. Bu dönüşümün bir fonksiyon olduğu ve toplamaya göre homomorfizma özelliğini sağladığı açıktır. Şimdi bu fonksiyonun $M\Gamma$-homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $(a_1,a_2) \in A_1 \oplus A_2$ için

$$\begin{aligned}\varphi(m\gamma(a_1,a_2)) =&\varphi(m\gamma a_1, m\gamma a_2) = f(m\gamma a_1) + h(m\gamma a_2)\\ =&m\gamma f(a_1) + m\gamma h(a_2) = m\gamma(f(a_1) + h(a_2))\\ =&m\gamma\varphi(a_1,a_2)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından φ $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Şimdi de yukarıda verilen diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim. Hipotezdeki $gh = 1_{A_2}$ ve Önerme 3.22 iii. den $gf = 0_{A_1}$ olduğu kullanılırsa her $(a_1,a_2) \in A_1 \oplus A_2$ için

$$\varphi\iota_1(a_1) = \varphi(a_1, 0_{A_2}) = f(a_1) + h(0_{A_2}) = f(a_1) = f(1_{A_1}(a_1)) = f1_{A_1}(a_1)$$

$$g\varphi(a_1,a_2) = g(f(a_1) + h(a_2)) = gf(a_1) + gh(a_2) = 1_{A_2}(a_2) = 1_{A_2}\pi_2(a_1,a_2)$$

eşitlikleri ile yukarıdaki diyagramın değişmeli olduğu görülür. Böylece 1_{A_1} ve 1_{A_2} izomorfizma olduğundan Önerme 3.24 gereği φ bir izomorfizmadır.

$(ii \Rightarrow iii)$ $0 \to A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \to 0$ kısa tam dizisi verildiğinde $kf = 1_{A_1}$ olacak şekilde $k : B \to A_1$ $M\Gamma$-modül homomorfizması var olsun.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{A_1}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "1_{A_2}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\iota_1"'] & A_1 \oplus A_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & A_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan ψ $M\Gamma$-modül izomorfizmasını tanımlayarak yukarıda verilen iki dizinin izomorf olduğunu göstereceğiz. Bu dönüşümü $\psi : B \to A_1 \oplus A_2$, $\psi(b) = (k(b), g(b))$ ile tanımlayalım. Bu dönüşümün bir fonksiyon olduğu ve toplamsal dönüşüm olduğu açıktır. Şimdi bu fonksiyonun $M\Gamma$-homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $b \in B$ için

$$\begin{aligned}\psi(m\gamma b) =&(k(m\gamma b), g(m\gamma b)) = (m\gamma k(b), m\gamma g(b))\\ =&m\gamma(k(b), g(b)) = m\gamma\psi(b)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından ψ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Şimdi de yukarıda verilen diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim. Hipotezdeki $kf = 1_{A_1}$ ve Önerme 3.22 (iii) den $gf = 0_{A_1}$ olduğu kullanılırsa her $b \in B$ ve $a_1 \in A_1$ için

$$\pi_2\psi(b) = \pi_2(k(b), g(b)) = g(b) = 1_{A_2}(g(b)) = 1_{A_2}g(b)$$

$$\psi f(a_1)=\psi(f(a_1))=(kf(a_1),gf(a_1))=(1_{A_1}(a_1),0(a_1))=(a_1,0_{A_2})=\iota_1(a_1)=\iota_1 1_{A_1}(a_1)$$

eşitlikleri ile yukarıdaki diyagramın değişmeli olduğu görülür. Böylece 1_{A_1} ve 1_{A_2} izomorfizma olduğundan Önerme 3.24 gereği ψ bir izomorfizmadır.

$(iii \Rightarrow i, ii)$ Satırları tam dizi olan aşağıdaki diziler birbirlerine izomorf olsun.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, shift right, "\iota_1"'] \arrow[d, "1_{A_1}"'] & A_1 \oplus A_2 \arrow[l, shift right, "\pi_1"'] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] \arrow[d, "\phi"] & A_2 \arrow[l, shift right, "\iota_2"'] \arrow[r] \arrow[d, "1_{A_2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & A_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Böylece yukarıdaki diyagramı değişmeli yapan bir ϕ $M\Gamma$-modül izomorfizması vardır.

$$h: A_2 \to B,\ h(a_2)=\phi\iota_2(a_2)=\phi(0_{A_1},a_2)$$

ile tanımlanan h dönüşümünün bir fonksiyon olduğu açıktır. Şimdi bu fonksiyonun $M\Gamma$-homomorfizma olduğunu gösterelim. Her a_2, $a_3 \in A_2$; $\gamma \in \Gamma$ ve $m \in M$ için

$$h(a_2+a_3)=\phi(0_{A_1},a_2+a_3)=\phi(0_{A_1},a_2)+\phi(0_{A_1},a_3)=h(a_2)+h(a_3)$$

ve

$$h(m\gamma a_2)=\phi(0_{A_1},m\gamma a_2)=m\gamma\phi(0_{A_1},a_2)=m\gamma h(a_2)$$

eşitlikleri sağlandığından h bir $M\Gamma$-homomorfizmasıdır. Diğer taraftan yukarıdaki diyagramın değişmeliliği yani $g\phi=1_{A_2}\pi_2$ eşitliğinden yararlanarak her $a_2 \in A_2$ için

$$gh(a_2)=g(\phi\iota_2(a_2))=(g\phi)\iota_2(a_2)=(1_{A_2}\pi_2)\iota_2(a_2)=1_{A_2}(\pi_2\iota_2)(a_2)=1_{A_2}(a_2)$$

elde edilir. Böylece $gh=1_{A_2}$ sağlanır. Benzer şekilde

$$k: B \to A_1,\ k(b)=\pi_1\phi^{-1}(b)$$

ile tanımlanan k dönüşümü bir $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğu ve $kf=1_{A_1}$ eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür. □

Eğer bir kısa tam dizi Teorem 3.26 ün koşullarından birini sağlıyorsa bu diziye **parçalanır dizi** denir.

Teorem 3.27. *$(\Gamma,M)_B$ bir gamma halka, $\{A_i \mid i \in I\}$ bir $M\Gamma$-modül ailesi, C bir $M\Gamma$-modül ve $\{\varphi_i : C \to A_i \mid i \in I\}$ $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının bir ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $\pi_i\varphi=\varphi_i$ olacak şekilde $\varphi : C \to \prod\limits_i A_i$ teklikle belirli $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır.*

İspat. Teorem 2.11 dan istenen özelliğe sahip $\varphi(c) = \{\varphi_i(c)\}_{i\in I}$ ile tanımlı, teklikle belirli $\varphi : C \to \prod_i A_i$ toplamsal grup homomorfizması vardır. Bu homomorfizmanın $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Her bir φ_i $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğundan her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $c \in C$ için

$$\varphi(m\gamma c) = \{\varphi_i(m\gamma c)\}_{i\in I} = \{m\gamma\varphi_i(c)\}_{i\in I} = m\gamma\{\varphi_i(m\gamma c)\}_{i\in I} = m\gamma\varphi(c)$$

eşitlikleri sağlandığından φ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. □

Teorem 3.28. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka,* $\{A_i \mid i \in I\}$ *bir* $M\Gamma$*-modül ailesi, D bir* $M\Gamma$*-modül ve* $\{\psi_i : A_i \to D \mid i \in I\}$ $M\Gamma$*-modül homomorfizmalarının bir ailesi olsun. Bu durumda her* $i \in I$ *için* $\psi\iota_i = \psi_i$ *olacak şekilde* $\psi : \sum_i A_i \to D$ *teklikle belirli* $M\Gamma$*-modül homomorfizması vardır. Bu özellik ile* $\sum_i A_i$ *izomorfizma farkıyla teklikle belirlidir.*

İspat. Teorem 2.14 dan istenen özelliğe sahip $\psi(\{a_i\}) = \sum_i \psi_i(a_i)$ ile tanımlı, teklikle belirli $\psi : \sum_i A_i \to D$ toplamsal grup homomorfizması vardır. Bu homomorfizmanın $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Her bir ψ_i $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğundan her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $\{a_i\} \in \sum_i A_i$ için

$$\psi(m\gamma\{a_i\}) = \psi(\{m\gamma a_i\}) = \sum_i \psi_i(m\gamma a_i) = \sum_i m\gamma\psi_i(a_i) = m\gamma\sum_i \psi(a_i) = m\gamma\psi(\{a_i\})$$

eşitlikleri sağlandığından ψ bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. □

4. SERBEST GAMMA MODÜLLER

Çalışmamızın bu bölümünde bir gamma modülün bir altkümesinin doğrusal bağımsız olması ve üreteç olması tanımlanarak, taban kavramı ortaya konulmuştur. Bu bölümde serbest gamma modüllerin bir karakterizasyonu verilmiş ve serbest gamma modüllerle ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca güçlü birime sahip bölümlü gamma halkaları üzerinde tanımlanan vektör uzaylarının tabanları ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

4.1. Tanım Ve Temel Özellikler

Tanım 4.1. N bir $M\Gamma$-modül, $S \subseteq N$ ve $X \subseteq N$ olsun.

i. Birbirinden farklı her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $m_1\alpha_1x_1 + m_2\alpha_2x_2 + \cdots + m_n\alpha_nx_n = 0_N$ olacak şekilde $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ var iken her bir i için $m_i\alpha_iM = (0_M)$ sağlanırsa X kümesine **doğrusal bağımsız** denir.

ii. Eğer N $M\Gamma$-modülünün her elemanı $m_1\alpha_1s_1 + m_2\alpha_2s_2 + \cdots + m_n\alpha_ns_n$ doğrusal bileşim biçiminde yazılacak şekilde $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $s_i \in S$ elemanları varsa N, S tarafından **üretilir** denir ve $N = (S)$ ile gösterilir. S altkümesinin elemanlarına N $M\Gamma$-modülün **üreteçleri** denir.

iii. N $M\Gamma$-modülünü üreten doğrusal bağımsız bir $X \subseteq N$ altkümesine, N $M\Gamma$-modülünün bir **tabanı** denir.

Örnek 4.2. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$, $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{Q} \right\}$ için $(\Gamma, M)_{wN}$ bir gamma halkasıdır.

$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Q} \right\}$ toplamsal değişmeli grubu için N bir $M\Gamma$-modüldür. Şimdi

i. $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin N $M\Gamma$-modülünün doğrusal bağımsız bir altkümesi olduğunu gösterelim. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $m_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_i \\ 0 & b_i & 0 \end{bmatrix} \in M$ ve $\alpha_i = \begin{bmatrix} c_i & 0 \\ 0 & d_i \\ c_i & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma$ elemanları için

$$m_1\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + m_2\alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + m_3\alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + m_4\alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_N$$

eşitliği var olsun. Çarpma işlemleri yapılıp 0_N ye eşitlendiğinde $i = 1, 2, 3, 4$ için $a_ic_i = b_id_i = 0$ elde edilir. X kümesinin doğrusal bağımsızlığını göstermek için $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$m_i\alpha_i M = (0_M)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $m = \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \in M$ için $i = 1,2,3,4$ olmak üzere

$$m_i\alpha_i m = \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_i \\ 0 & b_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i & 0 \\ 0 & d_i \\ c_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_ic_ix & 0 & 2a_ic_ix \\ 0 & b_id_iy & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde $i = 1,2,3,4$ için $m_i\alpha_i M = (0_\mathrm{M})$ olur.

ii. N $M\Gamma$-modülünün X kümesi tarafindan üretildiğini gösterelim. Her $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \in N$ için

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & f \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & g \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & h \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & e \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden N $M\Gamma$-modülü X kümesi tarafından üretilir.

Böylece X kümesi N $M\Gamma$-modülünün bir tabanıdır. □

N bir $M\Gamma$-modül, X kümesi N gamma modülün doğrusal bağımsız bir altkümesi ve $u \in N$ olsun. Eğer $u = m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n = m'_1\gamma'_1 x_1 + \cdots + m'_n\gamma'_n x_n$ iken her $m \in M$ için $m_i\gamma_i m = m'_i\gamma'_i m$ eşitliği sağlanırsa $u \in N$ elemanı X kümesinin elemanlarının doğrusal bileşimi olarak **tek türlü yazılır** denir.

Önerme 4.3. *$(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka ve N güçlü birimsel $M\Gamma$-modül olsun. Bu durumda $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere $m\gamma M = (0_M)$ ise $m\gamma N = (0_N)$ olur.*

İspat. $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi (δ, e) olsun. $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $m\gamma M = (0_M)$ ise $m\gamma e = 0_M$ olur. Buradan her $n \in N$ için

$$0_N = (m\gamma e)\delta n = m\gamma(e\delta n) = m\gamma n$$

eşitlikleri sağlandığından $m\gamma N = (0_N)$ olur. □

Teorem 4.4. *$(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka, F güçlü birimsel $M\Gamma$-modül ve L, $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının sol operatör halkası olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

i. F bir tabana sahiptir.

ii. F, her biri $M\Gamma$-modül olarak L ye izomorf olan devirli $M\Gamma$-modül ailesinin iç direkt toplamıdır.

iii. F, L $M\Gamma$-modüllerin bir direkt toplamına, $M\Gamma$-modül olarak izomorftur.

iv. Herhangi bir N güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü ve $f : X \to N$ fonksiyonu verildiğinde $\bar{f}i = f$ eşitliğini sağlayan teklikle belirli bir $\bar{f} : F \to N$ $M\Gamma$-modül homomorfizması var olacak şekilde, boş kümeden farklı bir X kümesi ve $i : X \to F$ fonksiyonu vardır.

İspat. Yukarıdaki koşulların denkliğini gösterirken şu şekilde yol izlenecektir: Önce i, ii, iii şıklarının birbirine denk olduğu, yani $i \Rightarrow ii$, $iii \Rightarrow i$, $ii \Rightarrow iii$ gerektirmeleri kanıtlanacak sonra da $i \Rightarrow iv$ ve $iv \Rightarrow iii$ olduğu ispatlanacaktır.

$(i \Rightarrow ii)$ X, F $M\Gamma$-modülünün bir tabanı ve $x \in X$ olsun. L, $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının sol operatör halkası olmak üzere Önerme 3.3 ve Teorem 3.9 (i) den L ve $M\Gamma x$ birer $M\Gamma$-modüldür. $f : L \to M\Gamma x$, $\sum\limits_i [m_i, \gamma_i] \mapsto \sum\limits_i m_i\gamma_i x$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün iyi tanımlı olduğu açıktır. Şimdi f dönüşümünün $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $\sum\limits_{i=1}^{t} [m_i, \gamma_i]$, $\sum\limits_{j=1}^{s} [n_j, \beta_j] \in L$ için L nin $M\Gamma$-modül olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]+\sum_{j=1}^{s}[n_j,\beta_j]\right) &= f\left([m_1,\gamma_1]+\cdots+[m_t,\gamma_t]+[n_1,\beta_1]+\cdots+[n_s,\beta_s]\right) \\ &= m_1\gamma_1 x+\cdots+m_t\gamma_t x+n_1\beta_1 x+\cdots+n_s\beta_s x \\ &= \sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i x+\sum_{j=1}^{s} n_j\beta_j x \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]\right)+f\left(\sum_{j=1}^{s}[n_j,\beta_j]\right) \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Bununla birlikte her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} f\left(m\gamma\sum_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{t} m\gamma[m_i,\gamma_i]\right) = f\left(\sum_{i=1}^{t}[m\gamma m_i,\gamma_i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t} m\gamma m_i\gamma_i x = m\gamma\sum_{i=1}^{t} m_i\gamma_i x \\ &= m\gamma f\left(\sum_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri de sağlandığından f bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Ayrıca her $\sum\limits_{i=1}^{t} m_i\gamma_i x \in M\Gamma x$ elemanı için $f(\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]) = \sum\limits_{i=1}^{t} m_i\gamma_i x$ eşitliğini sağlayan $\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i] \in L$ elemanı var olduğundan f $M\Gamma$-modül epimorfizmasıdır. Diğer taraftan her $\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i] \in \mathrm{Ker} f$ için

$f(\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]) = \sum\limits_{i=1}^{t} m_i\gamma_i x = 0_F$ dır. Buradan $\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i]x = 0_M$ elde edilir. $\{x\} \subseteq X$ doğrusal bağımsız olduğundan $\left(\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i\gamma_i]\right) M = (0_M)$ olur. Bu ise $\sum\limits_{i=1}^{t}[m_i,\gamma_i] = 0$ olmasını gerektirir. O halde $\mathrm{Ker} f = (0)$ olur. Böylece f fonksiyonunun bir $M\Gamma$-modül izomorfizması olduğu görülür. Bu durumda F $M\Gamma$-modülünün tabanında yer alan her x elemanı için $L \simeq M\Gamma x$ olur. Şimdi $F \simeq \sum\limits_{x\in X} M\Gamma x$ olduğunu gösterelim. X, F $M\Gamma$-modülünü ürettiğinden her $u \in F$ için $u = m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n$ olacak şekilde $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $x_i \in X$ elemanları vardır. Buradan F $M\Gamma$-modülü $\{M\Gamma x \mid x \in X\}$ ailesinin toplamı şeklinde yazılır. Bununla birlikte $x \neq x^*$ için $\left(\sum\limits_{x\in X} M\Gamma x\right) \bigcap M\Gamma x^* = \{0_F\}$ olduğunu gösterelim. $v \in \left(\sum\limits_{x\in X} M\Gamma x\right) \bigcap M\Gamma x^*$ olsun. Buradan $v = \sum\limits_{x\in X}\left(\sum\limits_{i} m_i\gamma_i x\right) = \sum\limits_{i} k_i\beta_i x^*$ olacak şekilde $m_i, k_i \in M$, $\gamma_i, \beta_i \in \Gamma$ elemanları vardır. Bu durumda $\sum\limits_{i} m_i\gamma_i x_1 + \cdots + \sum\limits_{i} m_i\gamma_i x_n - \sum\limits_{i} k_i\beta_i x^* = 0_F$ elde edilir. $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi (δ, e) olmak üzere bu eşitlik

$$\left(\sum_{i} m_i\gamma_i e\right)\delta x_1 + \cdots + \left(\sum_{i} m_i\gamma_i e\right)\delta x_n - \left(\sum_{i} k_i\beta_i e\right)\delta x^* = 0_F$$

şeklinde yazılabilir. X doğrusal bağımsız küme olduğundan her bir i için $\left(\sum\limits_{i} m_i\gamma_i e\right)\delta M = \left(\sum\limits_{i} k_i\beta_i e\right)\delta M = (0_F)$ eşitlikleri sağlanır. Buradan $\sum\limits_{i} k_i\beta_i M = (0_F)$ dir. Önerme 4.3 den $\sum\limits_{i} k_i\beta_i F = (0_F)$ sağlanır. $x^* \in F$ olduğundan $v = \sum\limits_{i} k_i\beta_i x^* = 0_F$ elde edilir. Böylece $\left(\sum\limits_{x\in X} M\Gamma x\right) \bigcap M\Gamma x^* = \{0_F\}$ dir. O halde Tanım 3.20 den $F \simeq \sum\limits_{x\in X} M\Gamma x$ sağlanır.

$(iii \Rightarrow i)$ (δ, e) çifti $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi ve F, bir X kümesi tarafından indekslenen $\sum\limits_{x\in X} L$ direkt toplama $M\Gamma$-modül olarak izomorf olsun. $\sum\limits_{x\in X} L$ direkt toplamının bir θ_{x_i} elemanı, x_i. bileşeni $[e, \delta]$ ve diğer bileşenleri $0_L = [0_M, \delta]$ olsun. Şimdi $\{\theta_{x_i} \mid x_i \in X\}$ kümesinin $\sum\limits_{x\in X} L$ $M\Gamma$-modülünün bir tabanı olduğunu gösterelim. $m_1\beta_1\theta_{x_1} + \cdots + m_k\beta_k\theta_{x_k} = 0_{\sum\limits_{x\in X} L}$ ise her bir i için $m_i\beta_i[e, \delta] = [m_i\beta_i e, \delta] = [0_M, \delta]$ olduğundan $m_i\beta_i e = 0_M$ olur. Buradan her $m \in M$ için

$$m_i\beta_i m = m_i\beta_i e\delta m = (m_i\beta_i e)\delta m = 0_M$$

eşitliği sağlanır. Böylece $\sum\limits_{\text{sonlu}} m_i\beta_i\theta_{x_i} = 0_{\sum\limits_{x\in X} L}$ iken $m_i\beta_i M = (0_M)$ olacağından $\{\theta_{x_i} \mid x_i \in X\}$ kümesi $\sum\limits_{x\in X} L$ $M\Gamma$-modülünün doğrusal bağımsız altkümesidir. Aynı zamanda her

$\{\sum_j [m_j,\gamma_j]\} \in \sum_{x\in X} L$ için

$$\left\{\sum_j [m_j,\gamma_j]\right\}_i = \sum_i \left(\sum_j [m_j,\gamma_j]\right)\theta_{x_i}$$

şeklinde yazıldığından $\{\theta_{x_i} \mid x_i \in X\}$ kümesi $\sum_{x\in X} L$ yi üretir. Böylece $\{\theta_{x_i} \mid x_i \in X\}$ kümesi $\sum_{x\in X} L$ $M\Gamma$-modülü için bir tabandır. Burada $F \simeq \sum_{x\in X} L$ olduğundan F $M\Gamma$-modülünün de bir tabanı vardır.

$(ii \Rightarrow iii)$ F, her biri $M\Gamma$-modül olarak L ye izomorf olan devirli $M\Gamma$-modül ailesinin iç direkt toplamı yani F, $\{M\Gamma x \mid x \in X\}$ ailesinin iç direkt toplamı olsun. Böylece her $x \in X$ için $F \simeq \sum_{x\in X} M\Gamma x$ ve $M\Gamma x \simeq L$ olur. Bu durumda $F \simeq \sum_{x\in X} L$ sağlanır. Böylece F, L $M\Gamma$-modüllerin bir direkt toplamına izomorf olur.

$(i \Rightarrow iv)$ X, F $M\Gamma$-modülünün bir tabanı, $i : X \to F$ içerme dönüşümü olsun. Bununla birlikte $f : X \to N$ dönüşümü verilsin. X kümesi F $M\Gamma$-modülünün bir tabanı olduğundan her $u \in F$ elemanı $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$, $a_i \in X$ olmak üzere $u = \sum_i m_i\gamma_i a_i$ şeklinde yazılır. $\bar{f} : F \to N$, $\bar{f}(u) = \bar{f}(\sum_i m_i\gamma_i a_i) = \sum_i m_i\gamma_i f(a_i)$ olarak tanımlansın. Öncelikle bu dönüşümün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $u = \sum_i m_i\gamma_i a_i = \sum_i n_i\beta_i a_i = v$ olsun. Bu durumda $\sum_i (m_i\gamma_i e - n_i\beta_i e)\delta a_i = 0_N$ olur ve X kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her i için $(m_i\gamma_i e - n_i\beta_i e)\delta M = (0_M)$ sağlanır. Buradan her $m \in M$ için $m_i\gamma_i e = n_i\beta_i e$ elde edilir. Bu $m_i\gamma_i e\delta f(a_i) = n_i\beta_i e\delta f(a_i)$ eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. Böylece $\bar{f}(u) = \sum_i m_i\gamma_i f(a_i) = \sum_i n_i\beta_i f(a_i) = \bar{f}(v)$ olur. Şimdi bu dönüşümün bir $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim.

$$\bar{f}(u+v) = \bar{f}(\sum_i m_i\gamma_i a_i + \sum_j n_j\beta_j a_j) = \sum_i m_i\gamma_i f(a_i) + \sum_j n_j\beta_j f(a_j) = \bar{f}(u) + \bar{f}(v)$$

eşitlikleri sağlanır. Aynı zamanda her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\bar{f}(m\gamma u) = \bar{f}(\sum_i m\gamma m_i\gamma_i a_i) = \sum_i m\gamma m_i\gamma_i f(a_i) = m\gamma \sum_i m_i\gamma_i f(a_i) = m\gamma\bar{f}(u)$$

olduğundan bu fonksiyon bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Ayrıca her $a \in X$ için $(\bar{f}i)(a) = \bar{f}(i(a)) = \bar{f}(a)$ olduğundan $\bar{f}i = f$ eşitliği sağlanır. Son olarak bu $M\Gamma$-modül homomorfizmasının teklikle belirli olduğunu gösterelim. $g : F \to N$ ve $gi = f$ olacak şekilde bir $M\Gamma$-modül homomorfizması var olsun. Her $a \in X$ için $g(a) = g(i(a)) = f(a)$ olduğundan her $u \in F$ için

$$g(u) = g(\sum_i m_i\gamma_i a_i) = \sum_i m_i\gamma_i g(a_i) = \sum_i m_i\gamma_i f(a_i) = \bar{f}(u)$$

eşitlikleri sağlandığından $\bar{f}$ $M\Gamma$-modül homomorfizması teklikle belirlidir.

$(iv \Rightarrow iii)$ Teoremde verilen (iv) koşulu sağlansın. $\sum M$, X kümesi tarafından indekslenmiş $M\Gamma$-modüllerin direkt toplamı olmak üzere $Y = \{\theta_{a_i} \mid a_i \in X\}$ kümesi $\sum M$ $M\Gamma$-modülünün bir tabanıdır. Bu nedenle (iv) den $j : Y \to \sum M$ fonksiyonu ve F güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan teklikle belirli bir $\bar{f} : \sum M \to F$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & F \\ \sum M \arrow[ur, "\exists \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramda verilen $\bar{f}$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının $M\Gamma$-modül izomorfizması olduğunu gösterirsek ispat biter. $|X| = |Y|$ olduğundan $g : Y \to X$ birebir ve örten bir fonksiyon vardır. Teoremin (iv) koşulu sağlandığından

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "i"] \\ \sum M \arrow[r, "\bar{f}"'] & F \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir, yani $ig = \bar{f}j$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ F \arrow[r, "\varphi"'] & \sum M \end{tikzcd}$$

diyagramında $jg^{-1} = \varphi i$ eşitliği sağlanır. O halde bu iki diyagramı birleştirdiğimizde

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "j"] \\ \sum M \arrow[r, "\bar{f}"'] & F \arrow[r, "\varphi"'] & \sum M \end{tikzcd}$$

diyagramından $(\varphi \circ \bar{f}) \circ j = j \circ (g^{-1} \circ g) = j \circ 1_Y = j$ eşitlikleri sağlanır. Aynı zamanda $1_{\sum M} j = j$ ve $\bar{f}$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının teklikle belirli olmasından $\varphi \circ \bar{f} = 1_{\sum M}$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $\bar{f} \circ \varphi = 1_F$ olduğu görülebilir. Böylece $\bar{f}$ birebir ve örten $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. □

Sonuç 4.5. $(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip gamma halka olsun. Bu durumda her N güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü bir F serbest $M\Gamma$-modülün homomorfik görüntüsüdür. Eğer N sonlu üreteçli ise F sonlu üreteçli seçilebilir.

İspat. X, N $M\Gamma$-modülünün bir üreteç kümesi ve F, X kümesi üzerinde bir serbest $M\Gamma$-modül olsun. Bu durumda Teorem 4.4 *iv.* den $i : X \to N$ içerme dönüşümü ve F $M\Gamma$-modülü için $\bar{f} : F \to N$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır ve $X \subseteq \mathrm{Im}\bar{f}$ sağlanır. X, N $M\Gamma$-modülünü ürettiğinden her $n \in N$ için $n = \sum\limits_i m_i\gamma_i x_i$ olacak şekilde $m_i \in M$ ve $\gamma_i \in \Gamma$ vardır. Burada $\bar{f}$ $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğundan $n = \sum\limits_i m_i\gamma_i x_i = \sum\limits_i m_i\gamma_i \bar{f}(x_i) = \bar{f}(\sum\limits_i m_i\gamma_i x_i)$ sağlanır. Böylece $\mathrm{Im}\bar{f} = N$ olur. $\square$

4.2. Gamma Vektör Uzayları

Tanım 4.6. $(\Gamma, M)_B$ bir bölümlü gamma halkası ve (δ, e) bu gamma halkanın güçlü birimi olsun. $(N, +)$ bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere $M \times \Gamma \times N \to N$, $(m, \alpha, n) \mapsto m\alpha n$ ile tanımlanan Γ-dış işlemi her $n, n_1, n_2 \in N$; $m, m_1, m_2 \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

i. $m\alpha(n_1 + n_2) = m\alpha n_1 + m\alpha n_2$

ii. $(m_1 + m_2)\alpha n = m_1\alpha n + m_2\alpha n$

iii. $m(\alpha + \beta)n = m\alpha n + m\beta n$

iv. $(m_1\alpha m_2)\beta n = m_1\alpha(m_2\beta n)$

v. $e\delta n = n$

koşullarını sağlıyor ise N **ye $M\Gamma$-vektör uzayı** denir.

Örnek 4.7. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}$ toplamsal grupları için $(\Gamma, M)_N$ gamma halkası $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ güçlü birimine sahip bir gamma cisimdir. $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q} \right\}$ toplamsal değişmeli grubu için N bir $M\Gamma$-modüldür. Aynı zamanda her $n \in N$ için $e\delta n = n$ olduğundan N bir $M\Gamma$-vektör uzayıdır.

Önerme 4.8. *Bir $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası üzerinde tanımlı V $M\Gamma$-vektör uzayının maksimal doğrusal bağımsız bir X altkümesi, V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanıdır.*

İspat. V $M\Gamma$-vektör uzayının maksimal doğrusal bağımsız bir altkümesi X olmak üzere $W = (X)$ olsun. X doğrusal bağımsız olduğundan X kümesi, W $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanıdır. $W = V$ ise ispat biter. $W \neq V$ olması durumunda $a \notin W$ olacak şekilde bir $a \in V$ vardır. $X \cup \{a\}$ kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim. Yani $m, m_i \in M$, $\gamma, \gamma_i \in \Gamma$, $x_i \in X$ olmak üzere $m\gamma a + m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n = 0_V$ iken $m\gamma M = (0_M)$ ve her bir i için $m_i\gamma_i M = (0_M)$

olduğunu gösterelim. $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi (δ, e) olsun. Önerme 2.24 den $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının L sol operatör halkasının güçlü birimi $[e, \delta]$ dır. Önerme 2.29 den $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halka olduğundan L sol operatör halkası da bölümlü halkadır. $m\gamma M \neq (0_M)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $[m, \gamma] \neq 0_L$ dir. L bölümlü halka olduğundan L halkasının $0_L \neq [m, \gamma]$ elemanı tersinirdir ve $l[m, \gamma] = [e, \delta]$ olacak şekilde bir $l \in L$ vardır. Burada $m\gamma a + m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n = 0_V$ ise $[m, \gamma]e\delta a + [m_1, \gamma_1]e\delta x_1 + \cdots + [m_n, \gamma_n]e\delta x_n = 0_V$ olur. Eşitliğin her iki tarafını soldan $l \in L$ ile çarptığımızda $l[m, \gamma]e\delta a + l[m_1, \gamma_1]e\delta x_1 + \cdots + l[m_n, \gamma_n]e\delta x_n = 0_V$ sağlanır. $(l[m, \gamma])e\delta a = [e, \delta]e\delta a = e\delta a = a$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
a &= -\, l[m_1, \gamma_1]e\delta x_1 - \cdots - l[m_n, \gamma_n]e\delta x_n \\
&= -\, l(m_1)\gamma_1 x_1 - \cdots - l(m_n)\gamma_n x_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $a \in V$ elemanı X kümesinin bir doğrusal bileşimi olduğundan $a \in W$ olur ve bu durum çelişki yaratır. Böylece $[m, \gamma] = 0_L$ sağlanır. O halde $m\gamma M = (0_M)$ dır. Bununla birlikte X kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $m_i\gamma_i M = (0_M)$ sağlanır. Böylece $X \cup \{a\}$ doğrusal bağımsız bir kümedir ve bu ise X kümesinin maksimal doğrusal bağımsızlığı ile çelişir. O halde $W = V$ dir ve X kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanıdır. □

Teorem 4.9. *$(\Gamma, M)_B$ bir bölümlü gamma halkası olmak üzere V $M\Gamma$-vektör uzayının her doğrusal bağımsız altkümesi, V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı tarafından kapsanır. Böylece V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı vardır.*

İspat. X kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayının herhangi bir doğrusal bağımsız altkümesi ve $\mathcal{S}$, V $M\Gamma$-vektör uzayının X kümesini kapsayan tüm doğrusal bağımsız altkümelerinin bir ailesi olsun. Burada $X \in \mathcal{S}$ olup $\mathcal{S} \neq \emptyset$ dır. Kümelerde bilinen altküme bağıntısıyla $\mathcal{S}$ kısmi sıralıdır. $\{C_i \mid i \in I\}$ küme ailesi $\mathcal{S}$ ailesinin bir zinciri ve $C = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$ olsun. C kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim. $m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n = 0_v$ olacak şekilde $m_j \in M$, $\gamma_j \in \Gamma$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$ olsun. $\{C_i \mid i \in I\}$ zincir olduğundan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. $C_i \in \mathcal{S}$ olduğundan C_i kümesi doğrusal bağımsızdır. O halde her bir j için $m_j\gamma_j M = (0_M)$ eşitlikleri sağlanır. Böylece C kümesi doğrusal bağımsızdır. Ayrıca $X \subseteq C$ olduğundan C kümesi $\mathcal{S}$ küme ailesinin bir elemanıdır. C, $\{C_i \mid i \in I\}$ zincirinin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemma gereği $\mathcal{S}$ ailesinin bir maksimal B elemanı vardır ve bu V $M\Gamma$-vektör uzayının maksimal doğrusal bağımsız bir altkümesidir. O halde Önerme 4.8 den B kümesi X doğrusal bağımsız kümesini kapsayan V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanıdır.

Sonuç olarak $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası olmak üzere V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı vardır. $\square$

Teorem 4.10. *$(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası olsun. V $M\Gamma$-vektör uzayı kendisinin bir X altkümesi ile üretilsin. Bu durumda X kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanını kapsar.*

İspat. $V = (X)$ olsun. $\mathcal{S} = \{B \subseteq X \mid B$ kümesi doğrusal bağımsız $\}$ küme ailesi, kümelerde bilinen altküme bağıntısı ile kısmi sıralıdır. $\mathcal{S}$ küme ailesinin her zincirinin bir üst sınırı vardır. Zorn Lemmadan X tarafından kapsanan V $M\Gamma$-vektör uzayının maksimal doğrusal bağımsız bir Y altkümesi vardır. X kümesinin her elemanı Y kümesinin elemanlarının bir doğrusal kombinasyonu şeklindedir. Çünkü Y kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayını üretmiyorsa Y kümesinde olmayan fakat X kümesinde olan bir a elemanı için $Y \cup \{a\} \in \mathcal{S}$ olduğu görülür ve bu Y kümesinin $\mathcal{S}$ de maksimal eleman oluşu ile çelişir. Böylece $V = (Y) = (X)$ elde edilir. Buradan V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanının X tarafından kapsandığı görülür. $\square$

Teorem 4.11. *$(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka ve F, sonsuz bir X tabanı olan serbest $M\Gamma$-modül olsun. Bu durumda F $M\Gamma$-modülünün her tabanı X ile aynı kardinal sayısına sahiptir.*

İspat. F sonsuz elemanlı bir X tabanına sahip olsun. Y kümesi, F $M\Gamma$-modülünün diğer bir tabanı ise öncelikle Y kümesinin sonsuz olduğunu gösterelim. Y kümesinin sonlu olduğunu kabul edelim. X kümesi F $M\Gamma$-modülünü ürettiğinden Y nin elemanları X kümesinin elemanlarının sonlu sayıda doğrusal bileşimi şeklinde yazılır. Bu ise X kümesinin F $M\Gamma$-modülünü üreten $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sonlu altkümesinin var olmasını gerektirir. X sonsuz bir küme olduğundan en az bir $x \in X - \{x_1, \ldots, x_n\}$ elemanı vardır. Bu x elemanı $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesinin doğrusal bileşimi şeklinde yazılabileceğinden $x = m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n$ olacak şekilde $m_i \in M$ ve $\gamma_i \in \Gamma$ elemanlar vardır. Bu ise X kümesinin doğrusal bağımsızlığı ile çelişir. Bu nedenle Y kümesi sonsuzdur.

$K(Y)$, Y kümesinin tüm sonlu altkümelerinin ailesi olsun. Her $x \in X$ için x elemanı Y kümesinin sonlu elemanlarının doğrusal bileşimi şeklinde yazılacağından $x = m_1\gamma_1 y_1 + \cdots + m_n\gamma_n y_n$ eşitliğini sağlayacak ve her i için $m_i\gamma_i M \neq (0_M)$ olacak şekilde $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $y_i \in Y$ elemanları vardır. Şimdi $f : X \to K(Y), x \mapsto \{y_1, \ldots, y_n\}$ dönüşümünü tanımlayalım. Y taban olduğundan y_i ler teklikle belirlidir ve f iyi tanımlı bir fonksiyondur. Burada $\operatorname{Im} f$ kümesinin sonsuz olduğu gösterilecektir. Eğer $\operatorname{Im} f$ sonlu olsaydı bu durumda $\bigcup\limits_{S \in \operatorname{Im} f} S$, Y

kümesinin sonlu altkümesi olurdu ve X kümesinin her elemanı bu sonlu $\bigcup_{S\in \mathrm{Im}f} S$ kümesinin elemanlarının doğrusal bileşimi formunda yazılırdı. Burada X kümesinin F $M\Gamma$-modülünü ürettiği göz önüne alınırsa $\bigcup_{S\in \mathrm{Im}f} S$ sonlu kümesinin F $M\Gamma$-modülünü ürettiği görülür. Oysa F $M\Gamma$-modülü sonlu bir küme tarafından üretilmez. Bu çelişkinin nedeni $\mathrm{Im}f$ kümesinin sonlu olduğu kabulüdür. O halde $\mathrm{Im}f$ sonlu küme değildir.

Şimdi her $T \in \mathrm{Im}f \subseteq K(Y)$ için $f^{-1}(T)$ kümesinin X in sonlu bir altkümesi olduğunu gösterelim. Eğer $x \in f^{-1}(T)$ ise x elemanı (T) altmodülü tarafından kapsanır. Yani, $f^{-1}(T) \subseteq (T)$ dir. T sonlu ve her bir $y \in T$ elemanı, X kümesinin sonlu sayıda elemanlarının doğrusal bileşimi şeklinde olduğundan $(T) \subseteq (S)$ olacak şekilde X kümesinin sonlu bir S altkümesi vardır. Böylece $x \in f^{-1}(T)$ ise $x \in (S)$ ve x, S kümesinin elemanlarının doğrusal bileşimidir. Burada $x \in X$ ve $S \subseteq X$ olduğundan $x \in S$ olmak zorundadır. Aksi taktirde $x \notin S$ ise $S \cup \{x\}$ doğrusal bağımlıdır ve bu X kümesinin doğrusal bağımsızlığı ile çelişir. Böylece $f^{-1}(T) \subseteq S$ olur ve bu nedenle $f^{-1}(T)$ kümesi sonludur.

Her bir $T \in \mathrm{Im}f$ için $f^{-1}(T)$ kümesinin elemanları $x_1, \ldots, x_n$ şeklinde sıralayalım ve $g_T : f^{-1}(T) \to \mathrm{Im}f \times \mathbb{N}, x_k \mapsto (T,k)$ birebir fonksiyonunu tanımlayalım. $T, L \in \mathrm{Im}f$ için $T \neq L$ ise $f^{-1}(L) \cap f^{-1}(T) = \emptyset$ dir. Aksi taktirde bir $x \in f^{-1}(L) \cap f^{-1}(T)$ ise $f(x) = L = T$ olur. Böylece $\{f^{-1}(T) \mid T \in \mathrm{Im}f\}$ kümesi X kümesinin bir ayrışımıdır. Burada $x \in f^{-1}(T)$ olmak üzere $X \to \mathrm{Im}f \times \mathbb{N}$, $x \mapsto g_T(x)$ fonksiyonu birebirdir ve böylece $|X| \leq |\mathrm{Im}f \times \mathbb{N}|$sağlanır. Bu nedenle Tanım 2.1, Teorem 2.4 ve Sonuç 2.5 den

$$|X| \leq |\mathrm{Im}f \times \mathbb{N}| = |\mathrm{Im}f|\mathscr{N}_0 = |\mathrm{Im}f| \leq |K(Y)| = |Y|$$

sağlanır. İspatın başında X ve Y tabanlarını yer değiştirirsek $|Y| \leq |X|$ bulunur ve böylece Teorem 2.3 den $|Y| = |X|$ eşitliği elde edilir. $\square$

Teorem 4.12. *Bir $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası üzerinde V $M\Gamma$-vektör uzayının herhangi iki tabanının kardinal sayıları aynıdır.*

İspat. X ve Y, V $M\Gamma$-vektör uzayının herhangi iki tabanı olsun. Eğer X ve Y tabanlarının her ikisi de sonsuz ise Teorem 4.11 den $|X| = |Y|$ dir. X ve Y sonlu olsun. Bu durumda X ve Y tabanlarını $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ şeklinde yazabiliriz. X taban olduğundan $y_m = m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n$ olacak şekilde $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ elemanları vardır. Burada $y_m \neq 0$ olduğundan bütün i ler için $m_i\gamma_i M = (0_M)$ olamaz. Çünkü her i için $m_i\gamma_i M = (0_M)$ olursa Önerme 3.4 den her i için $m_i\gamma_i x_i = 0_V$ olacağından $y_m = 0$ bulunur. Ayrıca Önerme 2.29 dan

$(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası ise L sol operatör halkasının da bölümlü halka olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki $y_m = m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_n\gamma_n x_n$ yazılımında ilk $m_k\gamma_k M \neq (0_M)$ sağlayan terim $m_k \in M$ ve $\gamma_k \in \Gamma$ ise $l_k = [m_k, \gamma_k] \in L$ ve $[m_k, \gamma_k] \neq 0_L$ olur. L halkası içinde l_k elemanının tersi l_k^{-1} ise (δ, e) $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi olmak üzere

$$l_k^{-1} e\delta y_m = l_k^{-1} e\delta m_k\gamma_k x_k + \cdots + l_k^{-1} e\delta m_n\gamma_n x_n$$

eşitliğinden

$$x_k = l_k^{-1} e\delta y_m - l_k^{-1} e\delta m_{k+1}\gamma_{k+1}x_{k+1} - \cdots - l_k^{-1} e\delta m_n\gamma_n x_n$$

elde edilir. Bu nedenle $X' = \{y_m, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayını üretir.

Benzer algoritma ile X' taban olduğundan y_{m-1} elemanı X' kümesinin elemanlarının bir doğrusal bileşimi şeklinde yazılabilir. O halde

$$y_{m-1} = s_m\beta_m y_m + m_1\gamma_1 x_1 + \cdots + m_{k-1}\gamma_{k-1}x_{k-1} + m_{k+1}\gamma_{k+1}x_{k+1} + \cdots + m_n\gamma_n x_n$$

eşitliğini sağlayan $\exists s_m, m_i \in M$, $\exists \beta_m, \gamma_i \in \Gamma$ elemanları vardır. Bu yazılımda $\exists i \in \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ için $m_i\gamma_i M \neq (0_M)$ dir. Aksi taktirde $y_{m-1} - s_m\beta_m y_m = 0$ olurdu ve bu ise Y kümesinin doğrusal bağımsızlığı ile çelişirdi. Yukarıdaki yazılımda ilk $m_j\gamma_j M \neq (0_M)$ sağlayan terimler $m_j \in M$ ve $\gamma_j \in \Gamma$ ise $l_j = [m_j, \gamma_j] \neq 0_L$ dir . L halkası içinde l_j elemanının tersi l_j^{-1} ise

$$l_j^{-1} e\delta y_{m-1} = l_j^{-1} e\delta s_m\beta_m y_m + l_j^{-1} e\delta m_j\gamma_j x_j + \cdots + l_j^{-1} e\delta m_n\gamma_n x_n$$

eşitliğinden x_j terimi

$$x_j = l_j^{-1} e\delta y_{m-1} - l_j^{-1} e\delta s_m\beta_m y_m - l_j^{-1} m_{j+1}\gamma_{j+1}x_{j+1} - \cdots - l_j^{-1} m_n\gamma_n x_n$$

şeklinde yazılır. Buradan x_j terimi y_{m-1}, y_m ve x_i $(i \neq j,k)$ terimlerinin bir doğrusal bileşimidir. Sonuç olarak, $\{y_{m-1}, y_m\} \cup \{x_i \mid i \neq j,k\}$ kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayını üretir. Bu şekilde devam edilirse, y_{m-2} terimi y_{m-1}, y_m ve x_i $(i \neq j,k)$ terimlerinin bir doğrusal bileşimidir ve $\{y_{m-2}, y_{m-1}, y_m\} \cup \{x_i \mid i \neq j,k,t\}$ kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayını üretir. Yukarıda bir y ekleme ve bir x çıkarma işlemi tekrarlanabilir. Böylece k. adımın sonunda $y_m, y_{m-1}, \ldots, y_{m-k+1}$ ve x_i terimlerinin $n-k$ tanesinden oluşan kümeyi elde ederiz ve bu küme V $M\Gamma$-vektör uzayını üretir. Eğer $n < m$ olduğunu kabul edersek n. adımın sonunda $\{y_m, \ldots, y_{m-n+1}\}$ kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayını üretir. $m-n+1 \geq 2$ olduğundan y_1 terimi

$y_m, \ldots, y_{m-n+1}$ terimlerinin doğrusal bileşimi olur. Bu ise Y kümesinin doğrusal bağımsızlığı ile çelişir. Bu nedenle, $m \leq n$ olmak zorundadır. Benzer şekilde X ve Y tabanlarının rolleri değiştirilirse $n \leq m$ olduğu görülür ve böylece $m = n$ sağlanır. □

Tanım 4.13. $(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka ve her F serbest $M\Gamma$-modülünün her tabanının kardinal sayısı aynı olsun. Bu durumda güçlü birime sahip $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasına **sabit boyut özelliğine sahip** gamma halka ve F serbest $M\Gamma$-modülünün herhangi bir tabanının kardinal sayısına F serbest $M\Gamma$-modülün **boyutu** (veya **rankı**) denir ve $\dim_{M\Gamma} F$ ile gösterilir.

Önerme 4.14. *Sabit boyut özelliğine sahip bir $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası üzerinde E ve F serbest $M\Gamma$-modüller olsun. Bu durumda $E \simeq F$ olması için gerek ve yeter koşul E ve F $M\Gamma$- modüllerinin boyutlarının aynı olmasıdır.*

İspat. $E \simeq F$ olsun. Bu durumda $f : E \to F$ birebir ve örten $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. X ve Y sırasıyla E ve F serbest $M\Gamma$-modüllerinin birer tabanı olsun. Bu durumda $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ kümesinin F serbest $M\Gamma$-modülünün bir tabanı olduğunu gösterelim. $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ olmak üzere $\sum\limits_i m_i\gamma_i f(x_i) = 0_F$ ise f $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğundan $f(\sum\limits_i m_i\gamma_i x_i) = 0_F$ dır. f birebir olduğundan $\sum\limits_i m_i\gamma_i x_i = 0_E$ ve X kümesi, E $M\Gamma$-modülünde doğrusal bağımsız olduğundan her bir i için $m_i\gamma_i M = (0_M)$ olur. Böylece $f(X)$ kümesi F $M\Gamma$-modülünde doğrusal bağımsızdır. Diğer taraftan Y, F $M\Gamma$-modülünün tabanı olduğundan her $u \in F$ için $u = \sum\limits_i^n m_i\gamma_i y_i$ olacak şekilde $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ elemanları vardır. Ayrıca f örten olduğundan her i için $y_i = f(a_i)$ olacak şekilde $a_i \in E$ elemanı vardır ve X kümesi , E $M\Gamma$-modülünün bir tabanı olduğundan her $a_i = \sum\limits_j b_j\beta_j x_j$ olacak şekilde $b_j \in M$ ve $\beta_j \in \Gamma$ elemanları vardır. Burada f dönüşümünün $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
u =& m_1\gamma_1 y_1 + \cdots + m_n\gamma_n y_n \\
=& m_1\gamma_1 f(a_1) + \cdots + m_n\gamma_n f(a_n), \ \exists a_i \in E \\
=& m_1\gamma_1 f\left(\sum_{\text{sonlu}} b_{1j}\beta_{1j}x_j\right) + \cdots + m_n\gamma_n f\left(\sum_{\text{sonlu}} b_{nj}\beta_{nj}x_j\right) \\
=& m_1\gamma_1 \sum_{\text{sonlu}} b_{1j}\beta_{1j} f(x_j) + \cdots + m_n\gamma_n \sum_j b_{nj}\beta_{nj} f(x_j)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır. O halde F $M\Gamma$- modülünün her elemanının, $f(X)$ kümesinin sonlu sayıda elemanının doğrusal bileşimi şeklinde yazıldığı görülür. Böylece $f(X)$, F $M\Gamma$-modülünün bir tabanı olur. f bir izomorfizma ve $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası sabit boyut özelliğine sahip olduğundan $|X| = |f(X)| = |Y|$ eşitlikleri sağlanır.

Tersine, E ile F serbest $M\Gamma$-modülleri aynı boyutlu yani tabanlarının kardinal sayıları aynı ($|X|=|Y|$) olsun. Bu durumda $f : X \to Y$ birebir örten dönüşümü vardır. Her $a \in E$ için $a = \sum_i m_i\gamma_i x_i$ ($m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$, $x_i \in X$) şeklinde tek türlü yazılır ve bu nedenle $g : E \to F$, $a = \sum_i m_i\gamma_i x_i \mapsto \sum_i m_i\gamma_i f(x_i)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm iyi tanımlıdır. Ayrıca her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} g(m\gamma a) &= g\left(m\gamma\sum_i m_i\gamma_i x_i\right) = g\left(\sum_i m\gamma m_i\gamma_i x_i\right) \\ &= \sum_i m\gamma m_i\gamma_i f(x_i) = m\gamma\sum_i m_i\gamma_i f(x_i) \\ &= m\gamma g\left(\sum_i m_i\gamma_i x_i\right) = m\gamma g(a) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından g fonksiyonu bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Bu fonksiyonun birebir olduğunu gösterelim. $a \in \mathrm{Ker}g$ olsun. f birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan her bir $x_i \in X$ için $f(x_i) = y_i$ olacak şekilde teklikle belirli $y_i \in Y$ elemanı vardır. Böylece

$$0_F = g(a) = g\left(\sum_i m_i\gamma_i x_i\right) = \sum_i m_i\gamma_i f(x_i) = \sum_i m_i\gamma_i y_i$$

eşitlikleri sağlanır. Burada Y kümesinin doğrusal bağımsızlığından her i için $m_i\gamma_i M = (0_M)$ olur. Böylece Önerme 3.4 den $a = \sum_i m_i\gamma_i x_i = 0_E$ sağlanır. Şimdi g fonksiyonunun örtenliğini gösterelim. Her $u \in F$ için $u = \sum_i m_i\gamma_i y_i$ olacak şekilde $m_i \in M$ ve $\gamma_i \in \Gamma$ elemanları vardır ve f dönüşümü örten olduğundan $f(x_i) = y_i$ olacak şekilde $x_i \in X$ elemanları vardır. Buradan $v = \sum_i m_i\gamma_i x_i \in E$ için

$$g(v) = \sum_i m_i\gamma_i f(x_i) = \sum_i m_i\gamma_i y_i = u$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece g dönüşümü bir $M\Gamma$-modül izomorfizmasıdır ve $E \simeq F$ olur. □

Teorem 4.15. *$(\Gamma,M)_B$ güçlü birime sahip gamma halka, I, $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının kendisinden farklı bir ideali ve F, X tabanına sahip bir serbest $M\Gamma$-modül olsun. Bu durumda $I\Gamma F = \{\sum_i a_i\gamma_i u_i \mid a_i \in I,\ \gamma_i \in \Gamma,\ u_i \in F\}$ olmak üzere $F/I\Gamma F$ bir $(M/I)\Gamma$-modüldür. Ayrıca $\pi : F \to F/I\Gamma F$ doğal $M\Gamma$-modül epimorfizması olmak üzere $F/I\Gamma F$, $\pi(X)$ tabanına sahip bir serbest $(M/I)\Gamma$-modüldür ve $|\pi(X)| = |X|$ sağlanır.*

İspat. Öncelikle $I\Gamma F$ kümesinin F $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülü olduğunu gösterelim. Her $a_i, a'_j \in I$, $\gamma_i, \gamma'_j \in \Gamma$ ve $u_i, u'_j \in F$ için $\sum_i a_i\gamma_i u_i - \sum_j a'_j\gamma'_j u'_j \in I\Gamma F$ olur. Ayrıca her $m \in M$,

$\gamma \in \Gamma$ ve $\sum_i a_i\gamma_i u_i \in I\Gamma F$ için $m\gamma\sum_i a_i\gamma_i u_i = \sum_i (m\gamma a_i)\gamma_i u_i \in I\Gamma F$ sağlanır ve böylece $I\Gamma F$, F $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülüdür.

Şimdi ise $F/I\Gamma F$ grubunun $(m+I)\gamma(u+I\Gamma F) = m\gamma u + I\Gamma F$ Γ-dış işlemiyle bir $(M/I)\Gamma$-modülü olduğunu göstermek için bu üçlü işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Her $m, m' \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $u, u' \in F$ elemanları için $m - m' \in I$ ve $u - u' \in I\Gamma F$ olsun. Bu durumda I ideal ve $I\Gamma F$ altmodül olduğundan

$$m\gamma u - m'\gamma u' = m\gamma u - m'\gamma u + m'\gamma u - m'\gamma u' = (m-m')\gamma u + m'\gamma(u-u') \in I\Gamma F$$

olur ve tanımlanan Γ-dış işlemi iyi tanımlıdır. Ayrıca her $u+I\Gamma F,\ v+I\Gamma F \in F/I\Gamma F$, $m+I,\ s+I \in M/I$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için

i. $(m+I)\gamma(u+I\Gamma F + v + I\Gamma F) = (m+I)\gamma(u+I\Gamma F) + (m+I)\gamma(v+I\Gamma F)$
ii. $(m+I+s+I)\gamma(u+I\Gamma F) = (m+I)\gamma(u+I\Gamma F) + (s+I)\gamma(u+I\Gamma F)$
iii. $(m+I)(\gamma+\beta)(u+I\Gamma F) = (m+I)\gamma(u+I\Gamma F) + (m+I)\beta(u+I\Gamma F)$
iv. $(m+I)\gamma((s+I)\beta(u+I\Gamma F)) = ((m+I)\gamma(s+I))\beta(u+I\Gamma F)$
v. $(e+I)\delta(u+I\Gamma F) = u+I\Gamma F$

koşullarının sağlandığı kolayca görülür. Böylece $F/I\Gamma F$ değişmeli grubunun bir $(M/I)\Gamma$-modül olduğu görülür.

Şimdi X kümesi, F $M\Gamma$-modülün bir tabanı ise $\pi(X)$ kümesinin $F/I\Gamma M$ $(M/I)\Gamma$-modülünün bir tabanı olduğunu gösterelim. Her $u + I\Gamma F \in F/I\Gamma F$ için $u \in F$ olduğundan $u = \sum_i m_i\gamma_i x_i$ olacak şekilde $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $x_i \in X$ elemanları vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} u + I\Gamma F &= \sum_i m_i\gamma_i x_i + I\Gamma F = \sum_i (m_i\gamma_i x_i + I\Gamma F) \\ &= \sum_i (m_i + I)\gamma_i(x_i + I\Gamma F) = \sum_i (m_i + I)\gamma_i\pi(x_i) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve böylece $\pi(X)$ kümesi $F/I\Gamma F$ $(M/I)\Gamma$-modülünü üretir. Bunun yanı sıra, $\pi(X)$ kümesinin doğrusal bağımsızlığını incelemek için

$$0_{F/I\Gamma F} = I\Gamma F = \sum_j (m_j + I)\gamma_j\pi(x_j) = \sum_j (m_j\gamma_j x_j + I\Gamma F) = \sum_j m_j\gamma_j x_j + I\Gamma F$$

alalım. Bu durumda $\sum_j m_j\gamma_j x_j \in I\Gamma F$ olur. Böylece $\sum_j m_j\gamma_j x_j = \sum_k n_k\beta_k u_k$ olacak şekilde $n_k \in I$, $\beta_k \in \Gamma$, $u_k \in F$ elemanları vardır. Her bir u_k elemanı X kümesinin elemanlarının bir doğrusal bileşimi ve I, $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir ideali olduğundan $\sum_k n_k\beta_k u_k$, katsayıları

I idealinde olan X kümesinin elemanlarının bir doğrusal bileşimleri şeklindedir. Sonuç olarak, $a_t \in I$, $\alpha_t \in \Gamma$, $y_t \in X$ olmak üzere

$$\sum_j m_j \gamma_j x_j = \sum_k n_k \beta_k u_k = \sum_t a_t \alpha_t y_t$$

şeklinde yazılır. Bazı x_i taban elemanları ile y_j taban elemanlarının aynı olduğu göz önüne alınır ve x_i, y_j taban elemanlarının eşit olmadığı durumda $0\gamma_i x_i$, $0\beta_j y_j$ elemanları eklenir ve tekrar indislenirse $0 = \sum_k (m_k \gamma_k z_k - a_k \alpha_k z_k)$ olacak şekilde $z_k \in X$ elemanları vardır. Burada (δ, e), $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi olmak üzere X kümesinin doğrusal bağımsız olduğu kullanılırsa her k için $(m_k \gamma_k e - a_k \alpha_k e)\delta M = (0_M)$ olduğu görülür. Her bir k için $a_k \in I$ olduğu göz önüne alınırsa her $m \in M$ için $m_k \gamma_k e \delta m - a_k \alpha_k e \delta m = 0_M$ ve $m_k \gamma_k m = a_k \alpha_k m \in I$ sağlanır. Böylece her bir k için $(m_k + I)\gamma_k (M/I) = (0_{M/I})$ olur. Buradan $\pi(X)$, M/I Γ-halkası üzerinde doğrusal bağımsızdır. O halde $F/I\Gamma F$, $\pi(X)$ tabanına sahip bir serbest $(M/I)\Gamma$-modüldür.

Son olarak, $\pi : X \to \pi(X)$, $x \mapsto \pi(x) = x + I\Gamma F$ örten dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. $x, x' \in X$ için $\pi(x) = \pi(x')$ olsun. (δ, e), $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının güçlü birimi ise $(\delta, e + I)$ elemanı da $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkasının güçlü birimidir. Buradan $(e+I)\delta\pi(x) = (e+I)\delta\pi(x')$ olur. Böylece $e\delta x + I\Gamma F = e\delta x' + I\Gamma F$ yani $e\delta(x - x') \in I\Gamma F$ sağlanır. Eğer $x - x' \neq 0$ ise $e\delta(x - x') = \sum_j a_j \gamma_j x_j$ olacak şekilde $a_j \in I$, $\gamma_j \in \Gamma$, $x_j \in X$ elemanları vardır. Bir önceki paragraftaki yöntem uygulandığında X kümesinin doğrusal bağımsızlığı da kullanılarak $e\delta M = a_j \gamma_j M$ elde edilir. I ideal olduğundan $a_j \gamma_j M \subseteq I$ sağlanır ve buradan her $m \in M$ için $e\delta m = m \in I$ olduğundan $I = M$ olur ki bu hipotezle çelişir. Bu nedenle $x = x'$ olmak zorundadır. Böylece $\pi : X \to \pi(X)$ dönüşümü birebir olup $|X| = |\pi(X)|$ elde edilir. □

Sonuç 4.16. $(\Gamma, M)_B$ ve $(\Gamma, M')_B$ güçlü birime sahip gamma halkaları ve $f : (\Gamma, M)_B \to (\Gamma, M')$ sıfırdan farklı bir gamma halka epimorfizması olsun. Eğer $(\Gamma, M')_B$ sabit boyut özelliğine sahip ise $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası da sabit boyut özelliğine sahiptir.

İspat. $f : (\Gamma, M)_B \to (\Gamma, M')_B$ sıfırdan farklı bir gamma halka epimorfizması ve çekirdeği I olsun. f örten olduğundan $(\Gamma, M/I)_B \simeq (\Gamma, M')_B$ sağlanır. X ve Y kümeleri F serbest $M\Gamma$-modülünün tabanları ve $\pi : F \to F/I\Gamma F$ doğal gamma modül epimorfizması olsun. Teorem 4.15 gereği $F/I\Gamma F$, $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkası üzerinde serbest $(M/I)\Gamma$-modüldür. Bununla birlikte $\pi(X)$, $\pi(Y)$ bu gamma modülün tabanlarıdır ve $|\pi(X)| = |X|$, $|\pi(Y)| =$

$|Y|$ sağlanır. Ayrıca $M/I \simeq M'$ ve $(\Gamma, M')_B$ gamma halkası sabit boyut özelliğine sahip olduğundan $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkası da sabit boyut özelliğine sahiptir ve buradan $|\pi(X)| = |\pi(Y)|$ sağlanır. Böylece $|X| = |Y|$ olduğu görülür. O halde $(\Gamma, M)_B$ sabit boyut özelliğine sahiptir. $\square$

Sonuç 4.17. $(\Gamma, M)_B$, homomorfik görüntüsü bir bölümlü halka olan güçlü birimli gamma halka olsun. Bu durumda $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası sabit boyut özelliğine sahiptir. Özellikle, $(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip değişmeli bir gamma halkası ise $(\Gamma, M)_B$ sabit boyut özelliğine sahiptir.

İspat. $(\Gamma, M)_B$ ile $(\Gamma, M')_B$ güçlü birime sahip birer gamma halka ve $f : M \to M'$ gamma halka epimorfizması olmak üzere $M' = f(M)$ bir bölümlü gamma halkası olsun. Teorem 4.12 gereği $(\Gamma, M')_B$ gamma halkası sabit boyut özelliğine sahiptir. Böylece f gamma halka epimorfizması olduğundan Sonuç 4.16 gereği $(\Gamma, M)_B$ sabit boyut özelliğine sahiptir.

Özellikle, $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası bir güçlü birime sahip ise Teorem 2.31 gereği $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir I maksimal ideali vardır. Aynı zamanda Teorem 2.32 den $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası değişmeli olduğundan $(\Gamma, M/I)_B$ gamma halkası bir gamma cisimdir. Böylece Teorem 4.12 den $(\Gamma, M/I)_B$ gamma cismi sabit boyut özelliğine sahiptir. Buradan $\pi : M \to M/I$ dönüşümünün doğal gamma epimorfizma olduğu göz önüne alınırsa bu teoremin ilk kısmından $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası sabit boyut özelliğine sahiptir. $\square$

Teorem 4.18. *Bir $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası olmak üzere V bir vektör uzayı ve W bu $M\Gamma$-vektör uzayının $M\Gamma$-altuzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.*

i. $\dim_{M\Gamma} W \leq \dim_{M\Gamma} V$

ii. Eğer $\dim_{M\Gamma} W = \dim_{M\Gamma} V$ ve $\dim_{M\Gamma} V$ sonlu ise $W = V$ dir.

iii. $\dim_{M\Gamma} V = \dim_{M\Gamma} W + \dim_{M\Gamma}(V/W)$

İspat. W, V $M\Gamma$-vektör uzayının bir altuzayı ve W altuzayının bir tabanı Y olsun.

i. Teorem 4.9 dan V $M\Gamma$-vektör uzayının Y kümesini kapsayan bir X tabanı vardır. Bu nedenle $\dim_{M\Gamma} W = |Y| \leq |X| = \dim_{M\Gamma} V$ olur.

ii. X, W altuzayının Y tabanını kapsayan V $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olmak üzere $\dim_{M\Gamma} W = \dim_{M\Gamma} V$ olduğundan $|Y| = |X|$ olur. Diğer taraftan $|X|$ sonlu ise $Y \subseteq X$ olduğundan $Y = X$ olmak zorundadır. Bu ise $W = V$ olmasını gerektirir.

iii. Y, W $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olmak üzere X, V $M\Gamma$-vektör uzayının $Y \subseteq X$ bağıntısını sağlayan bir tabanı olsun. Öncelikle

$$U = \{x + W \mid x \in X - Y\}$$

kümesinin V/W $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olduğunu gösterelim. Eğer $v \in V$ ise

$$v = \sum_i m_i \gamma_i y_i + \sum_j n_j \beta_j x_j$$

eşitliğini sağlayan $m_i, n_j \in M$, $\gamma_i, \beta_j \in \Gamma$, $y_i \in Y$, $x_j \in X - Y$ elemanları vardır. Böylece her $v + W \in V/W$ için

$$\begin{aligned} v + W &= \sum_i m_i \gamma_i y_i + \sum_j n_j \beta_j x_j + W = \sum_j n_j \beta_j x_j + W \\ &= \sum_j (n_j \beta_j x_j + W) = \sum_j n_j \beta_j (x_j + W) \end{aligned}$$

olduğundan U kümesi V/W $M\Gamma$-vektör uzayını üretir. Bununla birlikte, sonlu tane i için $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$, $x_i \in X - Y$ olmak üzere

$$\sum_i m_i \gamma_i (x_i + W) = 0_{V/W} = W$$

ise $\sum\limits_i m_i \gamma_i x_i \in W$ olur. Buradan

$$\sum_i m_i \gamma_i x_i = \sum_j n_i \beta_j y_j$$

olacak şekilde $n_j \in M$, $\beta_j \in \Gamma$, $y_j \in Y$ elemanları vardır. $X = Y \cup (X - Y)$ kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her i, j için $m_i \gamma_i M = n_j \beta_j M = (0_M)$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle U doğrusal bağımsız ve $|U| = |X - Y|$ sağlanır. Böylece kardinal sayısı tanımından

$$\dim_{M\Gamma} V = |X| = |Y| + |X - Y| = |Y| + |U| = \dim_{M\Gamma} W + \dim_{M\Gamma}(V/W)$$

olduğu görülür. □

Teorem 4.19. $(\Gamma, M)_B$ *bir bölümlü gamma halkası,* V *ile* V' *birer* $M\Gamma$*-vektör uzayı ve* $f : V \to V'$ *bir* $M\Gamma$*-doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda* V $M\Gamma$*-vektör uzayının* $Kerf$ *altuzayının tabanını içeren bir* X *tabanı vardır. Ayrıca* $f(X - Kerf)$ *kümesi* Imf *altuzayının bir tabanı olur ve* $\dim_{M\Gamma} V = \dim_{M\Gamma}(Kerf) + \dim_{M\Gamma}(Imf)$ *eşitliği sağlanır.*

İspat. V ile V' $(\Gamma, M)_B$ bölümlü gamma halkası üzerinde birer vektör uzayı, $f : V \to V'$ bir $M\Gamma$-doğrusal dönüşüm ve $W = \mathrm{Ker} f$ olsun. Teorenm 4.9 dan W $M\Gamma$-altvektör uzayının bir

Y tabanı vardır ve bu Y tabanı V $M\Gamma$-vektör uzayının bir X tabanına genişletilebilir. O halde $Y \subseteq X \cap \mathrm{Ker}f$ olur. Y kümesi $W = \mathrm{Ker}f$ $M\Gamma$-vektör uzayını ürettiğinden $X \cap \mathrm{Ker}f$ kümesini de üretir. Aynı zamanda $X \cap \mathrm{Ker}f \subseteq X$ ve X doğrusal bağımsız olduğundan $X \cap \mathrm{Ker}f$ de doğrusal bağımsızdır. O halde $X \cap \mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Ker}f$ $M\Gamma$-altvektör uzayının bir tabanıdır.

Şimdi $f(X - \mathrm{Ker}f) = \{f(x) \mid x \in X,\, f(x) \neq 0\}$ kümesinin $\mathrm{Im}f$ $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olduğunu göstermek için önce bu kümenin doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim. $m_i \in M$, $\gamma_i \in \Gamma$, $x_i \in X$, $f(x_i) \neq 0$ için $\sum\limits_i m_i\gamma_i f(x_i) = 0$ olsun. f bir doğrusal dönüşüm olduğundan

$$0 = \sum_i m_i\gamma_i f(x_i) = f(\sum_i m_i\gamma_i x_i)$$

bulunur ve buradan $\sum\limits_i m_i\gamma_i x_i \in \mathrm{Ker}f$ olur. $\mathrm{Ker}f \cap X$ kümesi $\mathrm{Ker}f$ $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olduğundan $\sum\limits_i m_i\gamma_i x_i = \sum\limits_j n_j\beta_j y_j$ olacak şekilde $n_j \in M$, $\beta_j \in \Gamma$, $y_j \in \mathrm{Ker}f \cap X$ elemanları vardır. Burada $y_j \in \mathrm{Ker}f \cap X$, $x_i \in X - \mathrm{Ker}f$ ve X kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her i,j için $m_i\gamma_i M = n_j\beta_j M = (0)$ olur. Şimdi bu kümenin $\mathrm{Im}f$ $M\Gamma$-vektör uzayını ürettiğini gösterelim. $u \in \mathrm{Im}f$ için $u = f(v)$ olacak şekilde $v \in V$ elemanı vardır ve X taban olduğundan $v = \sum\limits_i m_i\gamma_i x_i + \sum\limits_j n_j\beta_j y_j$ olacak şekilde $m_i, n_j \in M$, $\gamma_i, \beta_j \in \Gamma$, $x_i \in X - \mathrm{Ker}f$ ve $y_j \in \mathrm{Ker}f \cap X$ elemanları vardır. Burada f doğrusal dönüşüm ve her j için $f(y_j) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} u =& f(v) = f(\sum_i m_i\gamma_i x_i + \sum_j n_j\beta_j y_j) \\ =& \sum_i m_i\gamma_i f(x_i) + \sum_j n_j\beta_j f(y_j) = \sum_i m_i\gamma_i f(x_i) \end{aligned}$$

sağlanır ve buradan $\mathrm{Im}f$, $\{f(x) \mid x \in X,\, f(x) \neq 0\}$ kümesi tarafından üretilir.

Diğer taraftan, Sonuç 3.13 den $V/W \simeq \mathrm{Im}f$ dir. Böylece $\dim_{M\Gamma}(V/W) = \dim_{M\Gamma}(\mathrm{Im}f)$ olup Teorem 4.18 den $\dim_{M\Gamma} V = \dim_{M\Gamma}(W) + \dim_{M\Gamma}(\mathrm{Im}f)$ sağlanır. □

Teorem 4.20. $(\Gamma, M)_B$ *bir bölümlü gamma halkası olsun.* V *ve* W *bir* T $M\Gamma$*-vektör uzayının sonlu boyutlu* $M\Gamma$*-altvektör uzayları ise*

$$\dim_{M\Gamma}(V + W) = \dim_{M\Gamma} V + \dim_{M\Gamma} W - \dim_{M\Gamma}(V \cap W)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. V ve W bir T $M\Gamma$-vektör uzayının sonlu boyutlu $M\Gamma$-altvektör uzayları olsun. $V \cap W$ altuzayı V ve W altuzayları tarafından kapsanan sonlu boyutlu bir $M\Gamma$-altvektör uzayıdır. X,

$V \cap W$ $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olmak üzere Teorem 4.9 den V ve W $M\Gamma$-altuzaylarının X kümesini kapsayan tabanları vardır. Bu tabanlara sırasıyla Y ve Z diyelim. Yani $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere $Y = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ kümesi V $M\Gamma$-vektör uzayının tabanı ve $Z = \{x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_s\}$ kümesi W $M\Gamma$-altuzayının tabanı olsun. Şimdi

$$S = X \cup (Y - X) \cup (Z - X) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_s\}$$

kümesinin $V + W$ $M\Gamma$-altvektör uzayının bir tabanı olduğunu kanıtlayalım. Önce bu kümenin doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim. $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq s$ için $x_i \in X$, $y_i \in Y - X$, $z_i \in Z - X, m_i, a_j, b_k \in M$, $\gamma_i, \alpha_j, \beta_k \in \Gamma$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j + \sum_{k=1}^{s} b_k \beta_k z_k = 0_T \tag{4.2.1}$$

olsun. Z, W altuzayının bir tabanı olduğundan

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j = -\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i x_i - \sum_{k=1}^{s} b_k \beta_k z_k \in W$$

elde edilir. Ayrıca $\sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j \in V$ olduğundan $\sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j \in W \cap V$ olur. X kümesi $W \cap V$ altuzayının bir tabanı olduğundan $\sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j = \sum_{r=1}^{t} c_r \eta_r x_r$ olacak şekilde $c_r \in M$ ve $\eta_r \in \Gamma$ elemanları vardır. Buradan $\sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j - \sum_{r=1}^{t} c_r \eta_r x_r = 0_T$ sağlanır ve Y kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her r için $c_r \eta_r M = (0_M)$, her j için $a_j \alpha_j M = (0_M)$ olur. Böylece Önerme 4.3 den her j için $a_j \alpha_j N = (0_N)$ olup $\sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j y_j = 0_N$ eşitliği sağlanır. Bu durumda (4.2.1) denkleminden $\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i x_i + \sum_{k=1}^{s} b_k \beta_k z_k = 0_T$ olur. Z kümesi doğrusal bağımsız olduğundan son eşitlikten her i ve k için $m_i \gamma_i M = b_k \beta_k M = (0_M)$ eşitlikleri sağlanır. O halde S kümesi doğrusal bağımsızdır.

Şimdi S kümesinin $V + W$ $M\Gamma$-vektör uzayını ürettiğini gösterelim. $u \in V + W$ ise $u = v + w$ olacak şekilde $v \in V$ ve $w \in W$ elemanları vardır. Y ile Z kümeleri sırasıyla V ve W altuzaylarının tabanları olduklarından $v = \sum_i m_i \gamma_i x_i + \sum_j m'_j \gamma'_j y_j$ ve $w = \sum_k m''_k \gamma''_k x_k + \sum_t m'''_t \gamma'''_t z_t$ olacak şekilde $m_i, m'_j, m''_k, m'''_t \in M$, $\gamma_i, \gamma'_j, \gamma''_k, \gamma'''_t \in \Gamma$, $x_i, x_k \in X$, $y_j \in Y - X$ ve $z_t \in Z - X$ elemanları vardır. Buradan her $u \in V + W$ elemanı $u = v + w = \sum_s m_s \gamma_s x_s + \sum_j m'_j \gamma'_j y_j + \sum_t m'''_t \gamma'''_t z_t$ şeklinde yazıldığından S kümesi $V + W$ $M\Gamma$-vektör uzayını üretir. O halde S kümesi

$V+W$ $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanıdır. Böylece

$$\begin{aligned}\dim_{M\Gamma}(V+W) &= |X|+|Y-X|+|Z-X| \\ &= \dim_{M\Gamma}(V\cap W)+(\dim_{M\Gamma}V-\dim_{M\Gamma}(V\cap W)) \\ &\quad +(\dim_{M\Gamma}W-\dim_{M\Gamma}(V\cap W)) \\ &= \dim_{M\Gamma}V+\dim_{M\Gamma}W-\dim_{M\Gamma}(W\cap V)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. $\square$

Aşağıdaki teoremi vermeden önce, $(\Gamma,M)_B$ bölümlü gamma halkası bir $(\Gamma,N)_B$ bölümlü gamma halkası tarafından kapsanıyorsa $(\Gamma,N)_B$ gamma halkasının $M\times\Gamma\times N\to N$, $(m,\gamma,n)\mapsto m\gamma n$ üçlü işlemiyle bir $M\Gamma$-vektör uzayı olduğunu not edelim.

Teorem 4.21. *$(\Gamma,M)_B$, $(\Gamma,N)_B$, $(\Gamma,S)_B$ gamma cisimler ve $M\subseteq N\subseteq S$ olsun. Bu durumda $\dim_{M\Gamma}S=(\dim_{M\Gamma}N)(\dim_{N\Gamma}S)$ sağlanır.*

İspat. X kümesi S $N\Gamma$-vektör uzayının, Y kümesi de N $M\Gamma$-vektör uzayının birer tabanı ve (δ,e), $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi olsun. Bu durumda $Z=\{y\delta x \mid y\in Y, x\in X\}$ kümesinin S $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanı olduğunu gösterelim.

Öncelikle Z kümesinin S $M\Gamma$-vektör uzayını ürettiğini gösterelim. X kümesi S $N\Gamma$-vektör uzayını ürettiğinden her $s\in S$ için $s=\sum\limits_i n_i\gamma_i x_i$ olacak şekilde $n_i\in N$, $\gamma_i\in\Gamma$ ve $x_i\in X$ elemanları vardır. Aynı zamanda N $M\Gamma$-vektör uzayı Y kümesi tarafından üretildiğinden her bir $n_i\in N$ elemanı $n_i=\sum\limits_j m_{ij}\beta_{ij}y_j$ olacak şekilde $m_{ij}\in M$, $\beta_{ij}\in\Gamma$ ve $y_j\in Y$ elemanları vardır. Burada $(\Gamma,M)_B$ değişmeli ve (δ,e) bu gamma halkanın bir güçlü birimi olduğundan

$$\begin{aligned} s &= \sum_i n_i\gamma_i x_i=\sum_i\left(\sum_j m_{ij}\beta_{ij}y_j\right)\gamma_i x_i \\ &= \sum_i\sum_j m_{ij}\beta_{ij}y_j\gamma_i e\delta x_i=\sum_i\sum_j m_{ij}\beta_{ij}e\gamma_i(y_j\delta x_i)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre $Z=\{y\delta x \mid y\in Y, x\in X\}$ kümesi S $M\Gamma$-vektör uzayını üretir.

Şimdi Z kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim. $m_{ij}\in M$, $\gamma_{ij}\in\Gamma$, $y_j\in Y$ ve $x_i\in X$ olmak üzere $\sum\limits_i\sum\limits_j m_{ij}\gamma_{ij}(y_j\delta x_i)=0_S$ ise $m_{ij}\gamma_{ij}M=(0_M)$ olduğunu gösterelim. Burada $\sum\limits_i(\sum\limits_j m_{ij}\gamma_{ij}y_j\delta)x_i=0_S$ ve X kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her $m\in M$ ve her i için $\sum\limits_j m_{ij}\gamma_{ij}y_j\delta m=0_M$ dır. $(\Gamma,N)_B$ gamma halkası değişmeli olduğundan her i için $\sum\limits_j m_{ij}\gamma_{ij}m\delta y_j=0_M$ eşitliği sağlanır. Burada Y kümesi doğrusal bağımsız olduğundan her i

ve j için $m_{ij}\gamma_{ij}m\delta M = (0_M)$ elde edilir. (δ, e), $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi olduğundan $M\delta M = M$ sağlanır ve böylece $m_{ij}\gamma_{ij}M\delta M = m_{ij}\gamma_{ij}M = (0_M)$ eşitliği sağlanır. O halde Z kümesi doğrusal bağımsızdır. Böylece $Z = \{y\delta x \mid y \in Y, x \in X\}$ kümesi S $M\Gamma$-vektör uzayının bir tabanıdır. Sonuç olarak $\dim_{M\Gamma} S = (\dim_{M\Gamma} N)(\dim_{N\Gamma} S)$ eşitliği sağlanır. $\square$

5. PROJEKTİF VE İNJEKTİF GAMMA MODÜLLER

Bu bölümde projektif ve injektif gamma modülleri tanımlanarak bu tip modüller için bir karakterizasyon verilmiştir.

5.1. Projektif Gamma Modüller

Tanım 5.1. $(\Gamma, M)_B$ bir gamma halka ve P bir $M\Gamma$-modül olsun. Alt satırı tam dizi olan her

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$M\Gamma$-modül homomorfizması diyagramı için

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $gh = f$) olacak şekilde $h : P \to A$ $M\Gamma$-modül homomorfizması var ise P $M\Gamma$-modülüne **projektif gamma modül** denir.

Teorem 5.2. $(\Gamma, M)_B$ *gamma halkası* (e, δ) *güçlü birimine sahip olsun. Bu durumda her* F *serbest* $M\Gamma$*-modülü projektiftir.*

İspat. Güçlü birimsel $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının aşağıdaki diyagramı verilsin.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Burada g epimorfizma ve F, X tabanına sahip $(i : X \to F)$ serbest $M\Gamma$-modül olsun. Her bir $x \in X$ için $f(i(x)) \in B$ ve aynı zamanda g bir epimorfizma olduğundan $g(a_x) = f(i(x))$ olacak şekilde $a_x \in A$ elemanı verdır. Öte yandan F serbest $M\Gamma$-modül olduğundan X ten A ya her fonksiyon için

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & F \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yapan F den A ya bir $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Buradan her $x \in X$ için $X \to A$, $x \mapsto a_x$ fonksiyonunu alırsak $h(i(x)) = a_x$ olacak şekilde $h : F \to A$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Burada her $x \in X$ için $gh(i(x)) = g(a_x) = f(i(x))$ olduğundan $gh = f$ sağlanır ve böylece F projektif gamma modüldür. $\square$

Örnek 5.3. $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{Q} \right\}$ toplamsal değişmeli grubu $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Q} \right\}$, $\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid c,d \in \mathbb{Q} \right\}$ olmak üzere N bir projektif $M\Gamma$-modüldür.

Sonuç 5.4. $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası olmak üzere her N $M\Gamma$-modül, bir projektif $M\Gamma$-modülün homomorfik görüntüsüdür.

İspat. Sonuç 4.5 den her N $M\Gamma$-modül bir serbest gamma modülün homomorfik görüntüsüdür. Aynı zamanda Teorem 5.2 den her serbest $M\Gamma$-modül, projektif gamma modül olduğundan istenen elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 5.5. *Bir $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası ve bir P $M\Gamma$-modülü için aşağıdakiler denktir.*

i. P projektif gamma modüldür.
ii. Her $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ kısa tam dizisi parçalanırdır. Böylece $B \simeq A \oplus P$ dir.
iii. $F \simeq K \oplus P$ olacak şekilde bir F serbest $M\Gamma$-modülü ve bir K $M\Gamma$-modülü vardır.

İspat.

$(i \Rightarrow ii)$ Alt satırı tam dizi olan

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"'] & \\ B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. P projektif gamma modül olduğundan $gh = 1_P$ olacak şekilde $h : P \to B$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Böylece $0 \to A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \to 0$ kısa tam dizisi Teorem 3.26 den parçalanır dizidir ve $B \simeq A \oplus P$ sağlanır.
$(ii \Rightarrow iii)$ Sonuç 4.5 den, her $M\Gamma$-modül bir serbest $M\Gamma$- modülün homomorfik görüntüsüdür. Bundan dolayı bir F serbest $M\Gamma$-modülü ile $g : F \to P$ $M\Gamma$-modül epimorfizması vardır. Eğer $K = \mathrm{Ker}g$ ise $0 \to K \xrightarrow{\subseteq} F \xrightarrow{g} P \to 0$ bir tam dizidir. Hipotezden bu tam dizi parçalanır dizidir, yani $F \simeq K \oplus P$ dir.

$(iii \Rightarrow i)$ $F \simeq K \oplus P$ olacak şekilde F serbest $M\Gamma$-modülü ve K $M\Gamma$-modülü var olsun.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$M\Gamma$-modül homomorfizmalarının bir diyagramı, alttaki dizi tam olacak şekilde verilsin. $\pi : K \oplus P \to P$ doğal izdüşüm $M\Gamma$-modül homomorfizması, $\iota : P \to K \oplus P$ doğal içerilme $M\Gamma$-modül homomorfizması ve $\varphi : F \to K \oplus P$ $M\Gamma$-modül izomorfizması olsun. Buna göre

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & \\ & K \oplus P \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & \\ & P \arrow[u, shift right, "\iota"'] \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım. Teorem 5.2 den F projektif gamma modül olduğundan $gh_1 = f\pi\varphi$ olacak şekilde $h_1 : F \to A$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. $h = h_1\varphi^{-1}\iota : P \to A$ olsun. Buradan

$$gh = gh_1\varphi^{-1}\iota = f\pi\varphi\varphi^{-1}\iota = f\pi 1_{K\oplus P}\iota = f\pi\iota = f1_P = f$$

eşitlikleri sağlandığından P projektif gamma modüldür. $\square$

Önerme 5.6. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka ve* $\{P_i \mid i \in I\}$ *bir* $M\Gamma$*-modül ailesi olsun. Bu durumda* $\sum_i P_i$ *direkt toplamının projektif gamma modül olması için gerek ve yeter koşul her bir* P_i $M\Gamma$*-modülünün projektif gamma modül olmasıdır.*

İspat. $\sum_i P_i$ direkt toplamı projektif gamma modül olsun.

$$\begin{tikzcd} & P_j \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

alttaki dizi tam olmak üzere $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının diyagramı verilsin. Her bir j için $\pi_j : \sum_i P_i \to P_j$ doğal izdüşüm ve $\iota_j : P_j \to \sum_i P_i$ doğal içerilme $M\Gamma$-modül homomorfizmalarını göz önüne alalım.

$$
\begin{tikzcd}
 & \sum\limits_i P_i \arrow[d, shift right, "\pi_j"'] & \\
 & P_j \arrow[u, shift right, "\iota_j"'] \arrow[d, "f"'] & \\
A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\sum\limits_i P_i$ projektif gamma modül olduğundan $gh_1 = f\pi_j$ olacak şekilde $h_1 : \sum\limits_i P_i \to A$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. $h = h_1\iota_j : P_j \to A$ alınırsa

$$gh = gh_1\iota_j = f\pi_j\iota = f1_{P_j} = f$$

olduğundan P_j projektif gamma modüldür.

Tersine, her bir P_j projektif gamma modül olsun. $\iota_j : P_j \to \sum\limits_i P_i$ doğal içerilme ve $\pi_j : \sum\limits_i P_i \to P_j$ doğal izdüşüm $M\Gamma$-modül homomorfizmaları için

$$
\begin{tikzcd}
 & P_j \arrow[d, shift right, "\iota_j"'] & \\
 & \sum\limits_i P_i \arrow[u, shift right, "\pi_j"'] \arrow[d, "f"'] & \\
A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$M\Gamma$-modül homomorfizmalarının diyagramında her j için P_j projektif gamma modül olduğundan $gh_j = f\iota_j$ olacak şekilde $h_j : P_j \to A$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Teorem 3.28 den her j için $h : \sum\limits_i P_i \to A$, $h\iota_j = h_j$ olacak şekilde teklikle belirli $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Burada $h = h_j\pi_j$ olduğundan

$$gh = gh_j\pi_j = f\iota_j\pi_j = f1_{\sum\limits_i P_i} = f$$

sağlanır. O halde $\sum\limits_i P_i$ projektif gamma modüldür. □

5.2. İnjektif Gamma Modüller

Tanım 5.7. Bir $(\Gamma, M)_B$ gamma halkası üzerinde J bir $M\Gamma$-modül olsun. Eğer üst satırı tam dizi (yani g bir monomorfizma) olan her

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J & \end{tikzcd}$$

$M\Gamma$-modül homomorfizması diyagramı için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $hg = f$) olacak şekilde bir $h : B \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizması var ise J $M\Gamma$-modülüne **injektif gamma modül** denir.

Önerme 5.8. $(\Gamma, M)_B$ *bir gamma halka ve* $\{J_i \mid i \in I\}$ *bir* $M\Gamma$*-modüller ailesi olsun. Bu durumda* $\prod\limits_i J_i$ *direkt çarpımı injektif gamma modül olması için gerek ve yeter koşul her* $i \in I$ *için* J_i $M\Gamma$*-modüllerinin injektif gamma modül olmasıdır.*

İspat. $\prod\limits_i J_i$ injektif gamma modül olsun. Her bir k için $\pi_k : \prod\limits_i J_i \to J_k$ doğal izdüşüm ve $\iota_k : J_k \to \prod\limits_i J_i$ doğal içerilme $M\Gamma$-modül homomorfizmalarını göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J_k & \end{tikzcd}$$

üst tarafı tam dizi olmak üzere $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının bir diyagramı verilsin.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J_k \arrow[d, shift right, "\iota_k"'] & \\ & \prod\limits_i J_i \arrow[u, shift right, "\pi_k"'] & \end{tikzcd}$$

$\prod\limits_{i} J_i$ injektif gamma modül olduğundan $h_1 g = \iota_k f$ olacak şekilde $h_1 : B \to \prod\limits_{i} J_i$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. $h = \pi_k h_1 : B \to J_k$ desek

$$hg = \pi_k h_1 g = \pi_k \iota_k f = 1_{J_k} f = f$$

eşitlikleri sağlandığından J_k injektif gamma modüldür.

Tersine, her k için J_k injektif $M\Gamma$-modül, $\pi_k : \prod\limits_{i} J_i \to J_k$ doğal izdüşüm ve $\iota_k : J_k \to \prod\limits_{i} J_i$ doğal içerilme $M\Gamma$-modül homomorfizmaları olsun.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\
& \prod\limits_{i} J_i \arrow[d, shift right, "\pi_k"'] & \\
& J_k \arrow[u, shift right, "\iota_k"'] &
\end{tikzcd}$$

J_k $M\Gamma$-modülleri injektif gamma modül olduğundan $h_k g = \pi_k f$ olacak şekilde $h_k : B \to J_k$ $M\Gamma$-modül homomorfizmaları vardır. Teorem 3.27 den her k için $\pi_k h = h_k$ olacak şekilde teklikle belirli bir $h : B \to \prod\limits_{i} J_i$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Buradan

$$hg = \iota_k h_k g = \iota_k \pi_k f = 1_{\prod\limits_{i} J_i} f = f$$

eşitlikleri sağlandığından $\prod\limits_{i} J_i$ injektif gamma modüldür. □

Önerme 5.9. $(\Gamma, M)_B$ *güçlü birime sahip bir gamma halka olsun. J güçlü birimsel* $M\Gamma$*-modülünün injektif gamma modül olması için gerek ve yeter koşul* $(\Gamma, M)_B$ *gamma halkasının her K sol ideali için her* $K \to J$ $M\Gamma$*-modül homomorfizmasının,* $M \to J$ $M\Gamma$*-modül homomorfizmasına genişletebilir olmasıdır.*

İspat. $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının her K sol ideali için $0 \to K \xrightarrow{i} M$ $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının bir tam dizisidir. J injektif $M\Gamma$-modül olduğundan

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& J &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir $h : M \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Bu durumda $K \xrightarrow{f} J$ $M\Gamma$- modül homomorfizması, $M \xrightarrow{h} J$ $M\Gamma$- modül homomorfizmasına genişletilmiş olur.

Tersine, J güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü ve $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının her K ideali için K dan J ye verilen her $M\Gamma$-modül homomorfizması, M den J ye $M\Gamma$-modül homomorfizmasına genişletilebilir olsun. Üst taraftaki dizi tam olmak üzere

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J & \end{tikzcd}$$

$M\Gamma$-modül homomorfizmalarının bir diyagramı olsun. J $M\Gamma$-modülünün injektif gamma modül olduğunu göstermek için $hg = f$ olacak şekilde bir $h : B \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının varlığını göstermeliyiz.

$$\Delta = \{h \mid h : C \to J \; M\Gamma\text{-modül homomorfizması } \mathrm{Im}g \subseteq C \subseteq B \text{ ve } hg = f\}$$

kümesini tanımlayalım. $C = \mathrm{Im}g \subseteq B$ alındığında g monomorfizma olduğundan $g : A \to \mathrm{Im}g$ birebir örtendir ve $fg^{-1} : \mathrm{Im}g \to J$, Δ kümesinin bir elemanıdır. Böylece Δ boş kümeden farklıdır. Dom$h$, h $M\Gamma$-modül homomorfizmasının tanım kümesi olarak tanımlansın. Δ ailesi üzerinde $h_1 \leq h_2$ kısmi sıralama bağıntısını $\mathrm{Dom}h_1 \subseteq \mathrm{Dom}h_2$ ve $h_2 |_{\mathrm{Dom}h_1} = h_1$ olarak tanımlayalım. Δ ailesinin bir $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_i \leq \cdots$ artan zincirini alalım. Her i için $\mathrm{Dom}h_i = C_i$ olarak tanımlarsak tanım kümesi $C = \bigcup C_i$ olan $h' : C \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizması her i için $C_i \subseteq C$ ve $h' |_{C_i} = h_i$ koşullarını sağladığından h' $M\Gamma$-modül homomorfizması $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_i \leq \cdots$ zincirinin bir üst sınırıdır ve $h' \in \Delta$ dır. Bu durumda Δ kısmi sıralı kümesinin her zincirinin bir üst sınırı var olduğundan Zorn Lemma gereği Δ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemana $h : H \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizması dersek, bu homomorfizma $hg = f$ ve $\mathrm{Im}g \subseteq H \subseteq B$ olacak şekilde Δ kümesinin bir maksimal elemanıdır. $H = B$ olduğunu göstererek ispatı tamamlayacağız.

$H \neq B$ ve $b \in B - H$ olarak kabul edelim. Burada $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi (e, δ) olmak üzere $T = \{a \in M \mid a\delta b \in H\}$ kümesini ele alalım. H $M\Gamma$-modül olduğundan T kümesi $(\Gamma, M)_B$ gamma halkasının bir sol idealidir. Diğer taraftan $u : T \to J$, $a \mapsto h(a\delta b)$ dönüşümü iyi tanımlı $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Hipotezden u dönüşümü M gamma halkasına genişletilebileceğinden her $a \in T$ için $k : M \to J$, $k(a) = h(a\delta b)$ olacak şekilde bir k $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. $k(e) = c$ olsun.

$$\bar{h} : H + M\delta b \to J$$

$$d + m\delta b \mapsto h(d) + m\delta c$$

dönüşümü tanımlansın. Şimdi $\bar{h}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $d_1 + m_1\delta b = d_2 + m_2\delta b \in H + M\delta b$ için $d_1 - d_2 = (m_2 - m_1)\delta b \in H \cap M\delta b$ olduğundan $m_2 - m_1 \in T$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} h(d_1) - h(d_2) =& h(d_1 - d_2) = h((m_2 - m_1)\delta b) = k(m_2 - m_1) \\ =& k((m_2 - m_1)\delta e) = (m_2 - m_1)\delta k(e) \\ =& (m_2 - m_1)\delta c = m_2\delta c - m_1\delta c \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır ve böylece

$$\bar{h}(d_1 + m_1\delta b) = h(d_1) + m_1\delta c = h(d_2) + m_2\delta c = \bar{h}(d_2 + m_2\delta b)$$

olduğu görülür. Bununla beraber $\mathrm{Im}g \subseteq H \subseteq H + M\delta b \subset B$ olduğundan $\bar{h} : H + M\delta b \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizması Δ kümesinin bir elemanıdır. Böylece $H \subsetneqq H + M\delta b$ olması h dönüşümünün Δ kümesindeki maksimalliği ile çelişir. Bu nedenle $H = B$ ve J injektif gamma modüldür. $\square$

Önerme 5.10. *Bir D toplamsal değişmeli grubunun bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul D grubunun injektif $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül olmasıdır.*

İspat. $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})_B$ bir gamma halkası ve her D toplamsal değişmeli grubu bir $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modüldür.

$(\Leftarrow)$ D injektif $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül olsun. Toplamsal değişmeli D grubu bölünebilir olduğunu göstermek için her $y \in D$ ve her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $y = nx$ olacak şekilde bir $x \in D$ elemanının var olduğunu gösterelim. $y \in D$ ve $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ olsun. (n) serbest $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül olduğundan $f : (n) \to D, n \mapsto y$ ile tanımlanan teklikle belirli $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizması vardır. D injektif gamma modül olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (n) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{D}$ $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizması vardır. Eğer $x = h(1) \in D$ alınırsa

$$nx = n1h(1) = h(n) = f(n) = y$$

olduğundan D bölünebilirdir.

($\Rightarrow$) D bölünebilir olsun. $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})_B$ gamma halkasının sol idealleri $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere (n) şeklindedir. D bölünebilir olduğundan $f:(n) \to D$ bir $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizması ise $f(n) = nx$ olacak şekilde $x \in D$ vardır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (n) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramında $h:\mathbb{Z} \to D$, $1 \mapsto x$ tanımlarsak $h(n) = nh(1) = nx = f(n)$ sağlanır. Böylece h $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizması, f $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizmasının bir genişlemesi olur. O halde Önerme 5.9 den D injektif gamma modüldür. $\square$

Örnek 5.11. $\mathbb{Q}$ toplamsal grubu injektif $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modüldür.

Önerme 5.12. *$(\Gamma,M)_B$ gamma halkası (δ,e) güçlü birime sahip ve A bir toplamsal değişmeli grup ise*

$$Hom_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A) = \{f : M \to A \mid f\ \mathbb{Z}\mathbb{Z}\text{-modül homomorfizması}\}$$

toplamsal değişmeli grubu her $m,x \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $f \in Hom_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ için $(m\gamma f)(x) = f(x\delta m\gamma e)$ dış işlemiyle bir güçlü birimsel $M\Gamma$-modüldür.

İspat.

$$M \times \Gamma \times \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A) \to \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$$
$$(m,\gamma,f) \mapsto m\gamma f$$
$$m\gamma f : M \to A, \quad (m\gamma f)(x) = f(x\delta m\gamma e)$$

dış işlemini tanımlayalım. Bu dış işlemin kapalı olduğu açıktır. Ayrıca f iyi tanımlı olduğundan bu dış işlem de iyi tanımlıdır. Şimdi bu dış işlem ile Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ toplamsal değişmeli grubunun $M\Gamma$-modül olduğunu gösterelim.

i. Her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$, f_1, $f_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ ve $x \in M$ için

$$\begin{aligned}(m\gamma(f_1+f_2))(x) &= (f_1+f_2)(x\delta m\gamma e) = f_1(x\delta m\gamma e) + f_2(x\delta m\gamma e) \\ &= (m\gamma f_1)(x) + (m\gamma f_2)(x) = (m\gamma f_1 + m\gamma f_2)(x)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $m\gamma(f_1+f_2) = m\gamma f_1 + m\gamma f_2$ olur.

ii. Her $m_1, m_2 \in M$, $\gamma \in \Gamma$, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ ve $x \in M$ için

$$\begin{aligned}((m_1+m_2)\gamma f)(x) =& f(x\delta(m_1+m_2)\gamma e) = f(x\delta m_1\gamma e + x\delta m_2\gamma e)\\ =& f(x\delta m_1\gamma e) + f(x\delta m_2\gamma e) = (m_1\gamma f)(x) + (m_2\gamma f)(x)\\ =& (m_1\gamma f + m_2\gamma f)(x)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $(m_1+m_2)\gamma f = m_1\gamma f + m_2\gamma f$ olur.

iii. Her $m \in M$, $\gamma,\ \beta \in \Gamma$, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ ve $x \in M$ için

$$\begin{aligned}(m(\gamma+\beta)f)(x) =& f(x\delta m(\gamma+\beta)e) = f(x\delta m\gamma e + x\delta m\beta e)\\ =& f(x\delta m\gamma e) + f(x\delta m\beta e) = m\gamma f(x) + m\beta f(x)\\ =& (m\gamma f + m\beta f)(x)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $m(\gamma+\beta)f = m\gamma f + m\beta f$ dir.

iv. Her $m_1, m_2 \in M$, $\gamma,\ \beta \in \Gamma$ ve $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ ve $x \in M$ için

$$\begin{aligned}(m_1\gamma(m_2\beta f))(x) =& (m_2\beta f)(x\delta m_1\gamma e) = f((x\delta m_1\gamma e)\delta m_2\beta e)\\ =& f(x\delta(m_1\gamma e\delta m_2)\beta e) = f(x\delta(m_1\gamma m_2)\beta e)\\ =& ((m_1\gamma m_2)\beta f)(x)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $m_1\gamma(m_2\beta f) = (m_1\gamma m_2)\beta f$ olur.

v. Her $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ için $(e\delta f)(x) = f(x\delta e\delta e) = f(x)$ eşitlikleri sağlandığından $e\delta f = f$ sağlanır.

Böylece $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ toplamsal değişmeli grubunun güçlü birimsel $M\Gamma$-modül olduğu görülür. □

Önerme 5.13. *$(\Gamma,M)_B$ güçlü birimli gamma halkası, A güçlü birimsel $M\Gamma$-modül olmak üzere Hom $_{M\Gamma}(M,A)$ bir $M\Gamma$-modüldür.*

İspat. Her $M\Gamma$-modül homomorfizması bir $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizması olduğundan $\text{Hom}_{M\Gamma}(M,A) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ olur. $\text{Hom}_{M\Gamma}(M,A)$ toplamsal değişmeli grubunun $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ $M\Gamma$-modülünün bir $M\Gamma$-altmodülü olduğunu gösterelim. Bunun için her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $f \in \text{Hom}_{M\Gamma}(M,A)$ için $m\gamma f : M \to A$ grup homomorfizmasının $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ kümesinin $M\Gamma$-modül olması tanımından her $m_1, x \in M$ ve $\gamma_1 \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}(m\gamma f)(m_1\gamma_1 x) =& f((m_1\gamma_1 x)\delta m\gamma e) = f(m_1\gamma_1(x\delta m\gamma e))\\ =& m_1\gamma_1 f(x\delta m\gamma e) = m_1\gamma_1(m\gamma f)(x)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan $m\gamma f \in \text{Hom}_{M\Gamma}(M,A)$ olur. Böylece $\text{Hom}_{M\Gamma}(M,A)$ kümesi de bir $M\Gamma$-modüldür. □

Önerme 5.14. *J bir bölünebilir toplamsal değişmeli grup ve $(\Gamma,M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka olsun. Bu durumda $\text{Hom}_{\mathbb{ZZ}}(M,J)$ $M\Gamma$-modülü injektif gamma modüldür.*

İspat. Önerme 5.9 den $\text{Hom}_{\mathbb{ZZ}}(M,J)$ nin bir injektif $M\Gamma$-modül olduğunu göstermek için $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının her K sol ideali için her $f : K \to \text{Hom}_{\mathbb{ZZ}}(M,J)$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasının $h : M \to \text{Hom}_{\mathbb{ZZ}}(M,J)$ $M\Gamma$-modül homomorfizmasına genişleyebileceğini göstermek yeterlidir. $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir güçlü birimi (δ,e) olsun. K, $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının bir sol ideali ve

$$\begin{aligned} f : K &\to \text{Hom}_{\mathbb{ZZ}}(M,J) \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$$

$M\Gamma$-modül homomorfizması verilsin. $g : K \to J$, $g(a) = f_a(e)$ dönüşümünü tanımlayalım. f iyi tanımlı olduğundan $a_1,a_2 \in K$ için $a_1 = a_2$ ise $f_{a_1} = f_{a_2}$ dir. Bu fonksiyonların $e \in M$ elemanı altındaki grüntüleri $f_{a_1}(e) = f_{a_2}(e)$ eşitliğini sağlar. Buradan $g(a_1) = g(a_2)$ olur ve böylece g dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca f fonksiyonu bir grup homomorfizması olduğundan her $a_1,a_2 \in K$ için

$$g(a_1+a_2) = f_{a_1+a_2}(e) = (f_{a_1}+f_{a_2})(e) = f_{a_1}(e)+f_{a_2}(e) = g(a_1)+g(a_2)$$

eşitlikleri sağlandığından g fonksiyonu bir grup homomorfizması olur.

Ayrıca J bölünebilir grup olduğundan Önerme 5.10 kullanılırsa J $\mathbb{ZZ}$-modülünün injektif olduğu görülür. İnjektif gamma modül tanımı gereği

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{ZZ}$-modül homomorfizmalarının diyagramını değişmeli yapan $\bar{g} : M \to J$ $\mathbb{ZZ}$-modül homomorfizması vardır. Bu diyagram değişmeli olduğundan $\bar{g}\mid_K = g$ eşitliği sağlanır.

$h : M \to \text{Hom}_{\mathbb{ZZ}}(M,J)$, $a \mapsto h_a$ dönüşümünü $m \in M$ olmak üzere $h_a : M \to J$, $h_a(m) = \bar{g}(m\delta a)$ şeklinde tanımlayalım. İlk olarak her $a \in M$ için $h_a : M \to J$ dönüşümünün $\mathbb{ZZ}$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. $\bar{g}$ dönüşümünün grup homomorfizması olduğu kullanılırsa her $m_1, m_2 \in M$ için

$$\begin{aligned} h_a(m_1+m_2) =& \bar{g}((m_1+m_2)\delta a) = \bar{g}(m_1\delta a + m_2\delta a) \\ =& \bar{g}(m_1\delta a) + \bar{g}(m_2\delta a) = h_a(m_1) + h_a(m_2) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\bar{g}$ dönüşümünün $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-modül homomorfizması olduğu kullanılırsa her $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} h_a(n_1n_2m) =& \bar{g}((n_1n_2m)\delta a) = \bar{g}(n_1n_2(m\delta a)) \\ =& n_1n_2\bar{g}(m\delta a) = n_1n_2h_a(m) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece h dönüşümünün kapalı olduğu görülür. Şimdi de h dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $a_1, a_2 \in M$ için $a_1 = a_2$ ise her $m \in M$ için $m\delta a_1 = m\delta a_2$ eşitliği sağlanır. $\bar{g}$ iyi tanımlı olduğundan $\bar{g}(m\delta a_1) = \bar{g}(m\delta a_2)$ olur ve böylece $h_{a_1}(m) = h_{a_2}(m)$ olduğundan h dönüşümü iyi tanımlı olur. Ayrıca her $m \in M$ için

$$\begin{aligned} h_{a_1+a_2}(m) =& \bar{g}(m\delta(a_1+a_2)) = \bar{g}(m\delta a_1 + m\delta a_2) \\ =& \bar{g}(m\delta a_1) + \bar{g}(m\delta a_2) = h_{a_1}(m) + h_{a_2}(m) \\ =& (h_{a_1} + h_{a_2})(m) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $h_{a_1+a_2} = h_{a_1} + h_{a_2}$ elde edilir. Böylece h fonksiyonu grup homomorfizması olur. Şimdi h fonksiyonunun $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu gösterelim. Bunun için her $x, a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $h_{x\gamma a} = x\gamma h_a$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$ kümesinin $M\Gamma$-modül olmasının tanımından ve $h_a \in$ Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$ olduğundan her $m \in M$ için $(x\gamma h_a)(m) = h_a(m\delta x\gamma e)$ eşitliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} (x\gamma h_a)(m) =& h_a(m\delta x\gamma e) = \bar{g}((m\delta x\gamma e)\delta a) \\ =& \bar{g}(m\delta x\gamma(e\delta a)) = \bar{g}(m\delta(x\gamma a)) \\ =& h_{x\gamma a}(m) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $x\gamma h_a = h_{x\gamma a}$ elde edilir. Böylece h fonksiyonu $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır. Son olarak her $a \in K$ için $h_a = f_a$ olduğunu gösterelim. $a \in K$, $m \in M$ ise $m\delta a \in K$ dır ve $\bar{g}\mid_K = g$ olduğundan

$$h_a(m) = \bar{g}(m\delta a) = g(m\delta a) = f_{m\delta a}(e)$$

eşitlikleri sağlanır. f bir $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğundan $f_{m\delta a}(e) = m\delta f_a(e)$ sağlanır. Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$ kümesinin $M\Gamma$-modül olmasının tanımından ve $f_a \in$ Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$

olduğu için $m\delta f_a(e) = f_a(e\delta m\delta e) = f_a(m)$ sağlanır. Bu eşitlikleri birleştirirsek her $m \in M$ için $h_a(m) = f_a(m)$ elde edilir. Böylece h $M\Gamma$-modül homomorfizması, f $M\Gamma$-modül homomorfizmasının bir genişlemesidir. Böylece ispat biter. $\square$

Önerme 5.15. *$(\Gamma, M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka olmak üzere her A güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü bir injektif $M\Gamma$-modüle gömülebilir.*

İspat. Önerme 2.16 gereği A toplamsal değişmeli grubu, bölünebilir toplamsal değişmeli bir grup içine gömülebilir olduğundan toplamsal değişmeli bir J bölünebilir grubu ile $f : A \to J$ bir grup monomorfizması vardır. $\bar{f}$: Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A) \to$ Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$ dönüşümünü her $g \in$ Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ için $\bar{f}(g) = f \circ g$ şeklinde tanımlayalım. f grup monomorfizması olduğundan $\bar{f}$ dönüşümünün de bir grup monomorfizması olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi $\bar{f}$ toplamsal fonksiyonunun $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu kanıtlayalım. Öncelikle her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $f \circ (m\gamma g) = m\gamma(f \circ g)$ olduğunu gösterelim. Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ $M\Gamma$-modül olduğu kullanılırsa $g \in$ Hom $_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ ve her $x \in M$ için

$$(f \circ (m\gamma g))(x) = f((m\gamma g)(x)) = f(g(x\delta m\gamma e)) = (fg)(x\delta m\gamma e) = m\gamma(f \circ g)(x)$$

sağlanır ve buradan $f \circ (m\gamma g) = m\gamma(f \circ g)$ olduğu görülür. Böylece

$$\bar{f}(m\gamma g) = f \circ (m\gamma g) = m\gamma(f \circ g) = m\gamma\bar{f}(g)$$

eşitlikleri sağlandığından $\bar{f}$ fonksiyonu $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır.

Ayrıca, $A \to$ Hom $_{M\Gamma}(M,A)$, $a \mapsto f_a$ dönüşümü her $x \in M$ için $f_a(x) = x\delta a$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün iyi tanımlı ve grup homomorfizması olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi birebir olduğunu gösterelim. $a_1, a_2 \in A$ için $f_{a_1} = f_{a_2}$ olsun. $e \in M$ için $f_{a_1}(e) = f_{a_2}(e)$ sağlanır. Buradan $e\delta a_1 = e\delta a_2$ olur. Böylece $a_1 = a_2$ eşitliği sağlanır ve verilen fonksiyon birebir olur. Şimdi de bu fonksiyonun $M\Gamma$-modül homomorfizması olduğunu, yani her $m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için $f_{m\gamma a} = m\gamma f_a$ olduğunu gösterelim. Hom $_{M\Gamma}(M,A)$ kümesinin $M\Gamma$-modül olma tanımından ve $f_a \in$ Hom $_{M\Gamma}(M,A)$ olduğundan her $x \in M$ için

$$\begin{aligned} m\gamma f_a(x) &= f_a(x\delta m\gamma e) = (x\delta m\gamma e)\delta a \\ &= x\delta m\gamma(e\delta a) = x\delta(m\gamma a) \\ &= f_{m\gamma a}(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $A \to$ Hom $_{M\Gamma}(M,A)$ fonksiyonu bir $M\Gamma$-modül homomorfizmasıdır.

Son olarak, Önerme 5.13 den $\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(M,A)$ $M\Gamma$-modülü $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A)$ $M\Gamma$-modülünün altmodülüdür. Elde ettiğimiz $M\Gamma$-modül homomorfizlarını

$$A \to \mathrm{Hom}_{M\Gamma}(M,A) \stackrel{\subseteq}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,A) \stackrel{\bar{f}}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$$

şeklinde yazalım. Önerme 5.14 gereği $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(M,J)$ $M\Gamma$-modülü injektif gamma modüldür. Böylece A güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü, bir injektif $M\Gamma$-modülün içine gömülebilir olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Önerme 5.16. *$(\Gamma,M)_B$ güçlü birime sahip bir gamma halka olsun. Bu durumda bir güçlü birimsel J $M\Gamma$- modül için aşağıdaki koşullar denktir.*

i. J injektif gamma modüldür.
ii. $M\Gamma$-modüllerin her $0 \to J \stackrel{f}{\to} B \stackrel{g}{\to} C \to 0$ kısa tam dizisi parçalanır dizidir. Böylece $B \simeq J \oplus C$ dir.
iii. J, herhangi bir B $M\Gamma$-modülün bir direkt toplananıdır.

İspat.

$(i \Rightarrow ii)$ Üst satırı tam dizi olan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_J"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. J injektif gamma modül olduğundan $hg = 1_J$ olacak şekilde $h : B \to J$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Böylece $M\Gamma$-modüllerin $0 \to J \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \stackrel{g}{\to} C \to 0$ kısa tam dizisi Teorem 3.26 den parçalanır dizidir ve $B \simeq J \oplus C$ sağlanır.
$(ii \Rightarrow iii)$ İçerme ve izdüşüm $M\Gamma$-modül homomorfizmalarının tanımı gereği

$$0 \to J \stackrel{\subseteq}{\to} B \stackrel{\pi}{\to} B/J \to 0$$

kısa dizisi tamdır. Hipotezden bu kısa tam dizi parçalanır olduğundan $\pi g = 1_{B/J}$ olacak şekilde $g : B/J \to B$ $M\Gamma$-modül homomorfizması vardır. Teorem 3.26 den

$$\varphi : J \oplus B/J \to B, \quad \varphi(x, b+J) = x + g(b+J)$$

$M\Gamma$-modül izomorfizması vardır. Şimdi J ve $g(B/J)$ altmodüllerininin iç direkt toplamının B $M\Gamma$-modülüne eişt olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak $B = J + g(B/J)$ olduğunu kanıtlayalım. φ dönüşümü örten olduğundan her $b \in B$ için $b = \varphi(x, y+J)$ olacak şekilde $(x, y+J) \in J \oplus B/J$ vardır. O halde

$$b = \varphi(x, y+J) = x + g(y+J) \in J + g\,(B/J)$$

olduğundan $B = J + g(B/J)$ eşitliği sağlanır. Bunun dışında ikinci olarak $J \cap g(B/J) = \{0_B\}$ olduğunu ispatlayalım. $x \in J \cap g(B/J)$ ise $x \in J$ ve $x = g(b+J)$ olacak şekilde $b+J \in B/J$ elemanı vardır. Buradan

$$0_{B/J} = J = x + J = \pi(x) = \pi\,(g(b+J)) = (\pi g)(b+J) = 1_{B/J}(b+J) = b+J$$

olduğundan $x = g(b+J) = g(0_{B/J}) = 0_B$ eşitliği sağlanır. O halde $J \cap g(B/J) = \{0_B\}$ olur. Böylece $B = J \oplus g(B/J)$ olduğundan J, B $M\Gamma$-modülün bir direkt toplananıdır.

$(iii \Rightarrow i)$ J, herhangi bir $M\Gamma$-modülün bir direkt toplananı olsun. Önerme 5.15 den J güçlü birimsel $M\Gamma$-modülü bir N injektif $M\Gamma$-modülün bir altmodülüdür. Bununla birlikte hipotezden $N = J \oplus K$ olacak şekilde N $M\Gamma$-modülün bir K altmodülü vardır. Böylece Önerme 5.8 gereği N injektif gamma modül olduğundan J injektif gamma modüldür. $\square$

6. SONUÇ

Bu çalışmada gamma modül yapısı ele alınmış, daha sonraki bölümlerde gerekli olan bazı teoremler kanıtlanmış, gamma modüllerde taban tanımlanmış ve serbest gamma modülün karakterizasyonu yapılmıştır. Ayrıca bölümlü gamma halkalar üzerinde tanımlanan gamma vektör uzayları ele alınarak taban ile ilgili bazı teoremler kanıtlanmıştır. Çalışmanın son bölümünde injektif ve projektif gamma modüllerle ilgili bazı teoremler ispatlanarak bu tip gamma modüllerin karakterizasyonu yapılmıştır.

Daha sonra bu bilgiler kullanılarak N ve S $M\Gamma$-modüller olmak üzere $\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(N,S)$ ve $\mathrm{Hom}_{M\Gamma}(N,N)$ toplamsal gruplarının gamma halkası olup olmayacağı ve gamma modül kategorisinde homolojik yapılar araştırılabilir.

Ayrıca bir gamma modülün radikali ile ilgili araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abbas, M. S., Al-Saadi, S. A., vd. (2016). “Injective Gamma Modules”. In: *Annals of Pure and Applied Mathematics* 12(1), pp. 85–94. ISSN: 2279-087X.

Abbas, M. S. vd. (2018a). “On ΓR-Free Gamma Modules”. In: 13, pp. 99–106. ISSN: 1314-7536. DOI: `10.12988/imf.2018.712106`.

Abbas, M. S. vd. (2018b). “On ΓR-Projective Gamma Modules”. In: 12, pp. 53–60. ISSN: 1314-7595. DOI: `10.12988/ija.2018.824`.

Ameri, R. ve Sadeghi, R. (2010). “Gamma Modules”. In: *Ratio Mathematica* 20.1, pp. 127–147. ISSN: 2282-8214. URL: `http://eiris.it/ojs/index.php/ratiomathematica/article/view/76`.

Barnes, W. E. (1966). “On the Γ-rings of Nobusawa”. In: *Pacific J. Math.* 18.3, pp. 411–422.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. New York. Springer-Verlag.

Kandamar, H. ve Arslan, O. (2020). “On the commutativity conditions for rings and Γ-rings”. In: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 49.5, pp. 1660–1666. ISSN: 1303-5010. DOI: `10.15672/hujms.701857`.

Karaçay, T. (2014). *Soyut Matematik*. Ankara. Seçkin Yayıncılık. ISBN: 978 975 02 2912 1.

Kyuno, S. (1977). “On the semi-simple gamma rings”. In: *Tohoku J. Math.* 29. ISSN: 0040-8735. DOI: `10.2748/tmj/1178240653`.

Kyuno, S. (1991). *Gamma rings*. Hadronic Press Monographs in Mathematics. Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, FL, pp. viii+113. ISBN: 0-911767-49-5.

Luh, J. (1969). “On the theory of simple Γ-rings.” In: *Michhigan Math. J.* 16. ISSN: 0026-2285. DOI: `10.1307/mmj/1029000167`.

Nobusawa, N. (1964). “On a generalization of the ring theory”. English. In: *Osaka Journal of Mathematics* 1, pp. 81–89. ISSN: 0030-6126.

Uddin, M. ve Paul, A. (2006). “Free ΓM-Modules”. In: *Medwell Journals*, pp. 1262–1268.

T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK BEYANI

"Bazı Gamma Modüller Üzerine" başlıklı Doktora tezimdeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Mehmet Soner PEHLİVAN

22/04/2022

ÖZGEÇMİŞ

Soyadı, Adı	**:**	PEHLİVAN, Mehmet Soner
Yabancı Dil	**:**	İngilizce

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet tarihi(Yıl)
Doktora		
Y. Lisans	ADÜ	2008
Lisans	ADÜ	2005

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Ünvan
2005-	Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Böl.	Arş. Gör