

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
2014-YL-037

GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIMLAR VE GENTILE
İSTATİSTİĞİNE UYAN PARÇACIKLARIN HARMONİK
TUZAK İÇİNDEKİ DAVRANIŞLARI

Sevilay SELVİ

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Sevilay SELVİ tarafından hazırlanan Genelleştirilmiş Dağılımlar ve Gentile İstatistiğine Uyan Parçacıkların Harmonik Tuzak İçindeki Davranışları. başlıklı tez, 11.08.2014 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ	Ege Üniv.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU	Adnan Menderes Üniv.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ	Adnan Menderes Üniv.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla .../.../2014 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

11.08.2014

Sevilay SELVİ

ÖZET**GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIMLAR VE GENTILE İSTATİSTİĞİNE UYAN PARÇACIKLARIN HARMONİK TUZAK İÇİNDEKİ DAVRANIŞLARI**

Sevilay SELVİ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU
2014, 53 sayfa

İki boyuta hapsedilen parçacıklar yarım tamsayı ya da tamsayı spin değerlerinin dışında da spin değerlerine sahip olabilirler. Bu yüzden bu parçacıklar Bose-Einstein ya da Fermi-Dirac dağılımlarının dışında istatistiksel dağılımlara uyabilirler. Ayrıca bozon ve fermiyon dağılımlarından farklı dağılımlar boyuttan bağımsız olarak etkileşen parçacıkların istatistiğini betimlemede kullanılmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada literatürde önerilen Haldane-Wu, g-on ve Gentile istatistik dağılımları tanıtıldı. Ardından, Gentile istatistiğine uyan harmonik tuzaktaki parçacıkların termodinamik nicelikleri incelendi. Bu sonuçlar Haldane-Wu istatistiğine uyan harmonik tuzaktaki parçacıklar için elde edilen termodinamik nicelikler ile karşılaştırıldı [1]. Ek olarak, Gentile dağılımı için girilebilir durum sayısını bulmak için yeni bir yöntem önerildi.

Anahtar Sözcükler

G-on gazı, Oransal Dışarlama İstatistiği, Gentile Dağılımı, Harmonik Tuzaklama

ABSTRACT**Generalized Distributions and Properties of the Particles Obeying Gentile Distribution in Harmonic Trap**

Sevilay SELVİ

M.Sc. Thesis, Department of Physics
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU
2014, 53 pages

Particles that are trapped into two dimensions may have spin other than integer or half integer values. Therefore, these particles may obey statistical distributions other than Bose-Einstein or Fermi-Dirac distributions. In addition, distributions different than bosonic and fermionic distributions are utilized for describing the statistics of interacting particles independent of dimension. For this reason; Haldane-Wu, g-on and Gentile statistics that are proposed as statistical distributions in the literature are introduced in this study. Then, the thermodynamical properties of particles which obey Gentile statistics and are in a harmonic trap is investigated. These results are compared with the thermodynamical quantities of the particles which obey Haldane-Wu statistics and are in a harmonic trap [1]. In appendix, A new way to find the value of occupation number for Gentile statistics is proposed.

Key Words

G-on gas, Fractional Exclusion Statistics, Gentile statistics, Harmonic Trap

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince çalışmamın her aşamasında yardım, destek ve anlayışı için, değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doc. Dr. Haydar UNCU'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam boyunca katkı ve önerileri ile bana destek veren sevgili kardeşim Duygu SELVİ'ye teşekkür ederim. Maddi manevi olarak destek ve sevgilerini eksik etmeyen, hep benimle olan aileme teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Sevilay SELVİ

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
1. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİĞE NEDEN İHTİYAÇ DUYARIZ?	1
1.1. ÖZDEŞLİK VE AYIRT EDİLEMEZLİK KAVRAMLARI	1
1.1.1. GİBBS ÇELİŞKİSİ	2
1.2. SPİN KAVRAMI	4
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİK	11
2.1. HALDENE KESİRLİ İSTATİSTİĞİ	11
2.2. BÖLÜŞÜM FONKSİYONU KULLANILARAK ELDE EDİLEN GENELLEŞTİRMELER	14
2.2.1. G-ON DAĞILIMI	14
2.2.2. GENTILE DAĞILIMI	17
3. HARMONİK TUZAKTAKİ FARKLI PARÇACIKLAR	23
3.1. HARMONİK TUZAK İÇİN DURUM YOĞUNLUĞU	23
3.2. HALDENE İSTATİSTİĞİNE UYAN PARÇACIKLARIN TERMODİNAMİĞİ	24
3.2.1. SONUÇLAR	27
3.3. GENTILE İSTATİSTİĞİNE UYAN PARÇACIKLARIN TERMODİNAMİĞİ	32
3.3.1. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	33
KAYNAKLAR	43
EKLER	47
A. Gentile Dağılımı İçin İstatistiksel Ağırlık	47
1.1. Yöntemin Tanıtılması	47
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER DİZİNİ

C_v	Özısı
$D(\epsilon)$	Durum Yoğunluğu
$f(\epsilon)$	Dağılım fonksiyonu
k_B	Boltzman sabiti
N	Toplam Parçacık sayısı
P	Basınç
S	Entropi
T	Sıcaklık
V	Hacim
Z	Bölüşüm Fonksiyonu
q	Bir enerji durumuna girebilecek maksimum parçacık sayısı
W	İstatistiksel Ağırlık
δ	Dirac delta fonksiyonu
ϵ	Fermi enerjisi
ϵ	Genelleştirilmiş fermi enerjisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Gibbs Çelişkisi	3
Şekil 3.1	$s=2$ ve $3D$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.	28
Şekil 3.2	$s=2$ ve $3D$ 'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.	28
Şekil 3.3	$s=2$ ve $2D$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.	29
Şekil 3.4	$s=2$ ve $2D$ 'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.	29
Şekil 3.5	$s=2$ ve $1D$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.	30
Şekil 3.6	$s=2$ ve $1D$ 'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.	30
Şekil 3.7	$s=1$ ve $1D$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.	31
Şekil 3.8	$s=1$ ve $1D$ 'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.	31
Şekil 3.9	$3D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği-1.	33
Şekil 3.10	$3D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği-2.	34
Şekil 3.11	$3D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına kimyasal potansiyel-sıcaklık grafiği-1.	34
Şekil 3.12	$3D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Kimyasal Potansiyel-Sıcaklık grafiği-2.	35
Şekil 3.13	$3D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği-1.	36
Şekil 3.14	$3D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği-2.	37
Şekil 3.15	$2D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Enerji-Sıcaklık grafiği.	38
Şekil 3.16	$2D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği.	38
Şekil 3.17	$1D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Enerji-Sıcaklık grafiği.	39
Şekil 3.18	$1D$ ve $s=2$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği.	40
Şekil 3.19	$s=1$ ve $1D$ 'de parçacık başına Enerji-Sıcaklık grafiği.	41
Şekil 3.20	$s=1$ ve $1D$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği.	41
Şekil A.1	N farklı bozonun 2 duruma dağılımı	47
Şekil A.2	N farklı bozonun 3 duruma dağılımı	48
Şekil A.3	N farklı bozonun G duruma dağılımı	49
Şekil A.4	N tane Gentile parçacığının 3 duruma dağılımı	50
Şekil A.5	N tane Gentile parçacığının 4 duruma dağılımı	50
Şekil A.6	N tane Gentile parçacığının G duruma dağılımı	51

1. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİĞE NEDEN İHTİYAÇ DUYARIZ?

1.1. ÖZDEŞLİK VE AYIRT EDİLEMEZLİK KAVRAMLARI

Günlük yaşamda karşılaştığımız, kullandığımız sistemler temel parçacıklara göre çok büyük, fizikte makroskobik olarak adlandırılan sistemlerdir. Makroskobik sistemler çok sayıda mikroskobik parçacıktan oluşurlar. Bu makroskobik sistemlerin termodinamik özelliklerini belirlemek için o sistemde bulunan parçacıkların istatistik dağılım fonksiyonları bilinmelidir. Parçacıkların uydukları istatistiksel dağılım fonksiyonlarını belirleyen iki temel nokta vardır. Birincisi, parçacıkların özdeş ve ayırtedilemez olup olmadıkları, ikincisi ise parçacıkların sahip oldukları spin açısal momentumudur.

Kütle, yük, spin v.b., gibi ölçülebilen tüm iç özellikleri bakımından birbirinin aynısı olan parçacıklara özdeş parçacık adı verilir. Ayırtedilebilirlik ve ayırtedilemezlik kavramları ise incelenen sisteme bağlı olarak değişir. Örneğin, aynı maddeden yapılmış aynı renk ve büyüklükte on tane bilardo topunun oluşturduğu bir sistemde her bir topun Hamilton hareket denklemleri yazılabilir ve bir an için tümünün konumları ve hızları ilkesel olarak belirlenebilir. Bu cisimler tüm fiziksel özellikleri açısından özdeş olsalar bile ayırtedilebilir cisimlerdir. Fakat elektron gibi mikro parçacıkların oluşturduğu bir sistemdeki parçacıkların bir anda tek tek tüm konumları ve hızlarının belirlenmesi Heisenberg Belirsizlik İlkesinden dolayı mümkün değildir. Parçacıkların başlangıç koşulları belirlenebilseydi bile, bir süre sonra belli bir konumda bulunan bir parçacığın daha önce başlangıç koşullarını belirlediğimiz parçacıklardan hangisi olduğunu bilemeyiz çünkü mikro parçacıklar makro parçacıkların hareketlerindeki gibi belirli bir yörünge izlemezler. Bu yüzden özdeş mikro parçacıklar birbirinden ayırtedilemezler. Bunun sonucunda mikro parçacıklardan oluşan sistemleri incelerken, sistemin toplam Schrödinger dalga

denklemi yazılır ve toplam sistemin dalga fonksiyonu elde edilmeye çalışılır. Her bir parçacığa ait dalga fonksiyonunu belirlenemediğinden, parçacıkların konumları da tam olarak belirlenemez. Bu da, daha önce belirttiğimiz gibi bu tür parçacıkların birbirlerinden ayırtedilemez olmasına yol açar. Ayırtedilemezlik kavramının bir sonucu Gibbs çelişkisi adı verilen bir süreç ile gösterilebilir:

1.1.1. GIBBS ÇELİŞKİSİ

Genellikle ayırtedilemezlik kavramının kuantum mekaniksel bir kavram olduğu düşünülür. Oysa klasik istatistik fizikte de ayırtedilemezlik kavramına ihtiyaç duyulur. Bu, Gibbs çelişkisi adı verilen tersinir bir süreçle açıklanabilir. Şekil 1.1'deki kapta V_A ve V_B hacimlerinde N_A ve N_B tane sıcaklıkları ve basınçları birbirine eşit A ve B ideal gazları olduğunu varsayalım. Bu durumda ideal gaz molekülleri birbirlerinden ayırtedilebilen bilyardo toplarına benzetilerek girilebilir durum sayısı enerjinin bir fonksiyonu olarak hesaplandığında

$$\Omega(E) = \frac{V^N (2\pi m E)^{\frac{3N}{2}}}{h^{3N} \Gamma(\frac{3N}{2} + 1)}, \quad (1.1.1)$$

elde edilir [2]. Denklem (1.1.1) de verilen girilebilir durum sayısı kullanılarak bu sistemin entropisi için

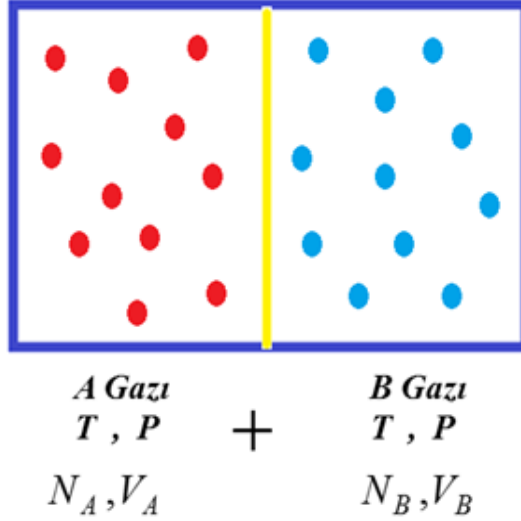
$$S_{Topik}(T, V, N) = N_A k \left[\frac{3}{2} + \ln \left[\frac{V_A}{h} [2\pi m k T]^{\frac{3}{2}} \right] \right] + N_B k \left[\frac{3}{2} + \ln \left[\frac{V_B}{h} (2\pi m k T)^{\frac{3}{2}} \right] \right], \quad (1.1.2)$$

ifadesi elde edilir [2]. Aradaki bölme kalktıktan sonra toplam sistemin entropisi

$$S_{Topson}(T, V, N) = N_A k \left[\frac{3}{2} + \ln \left[\frac{V_A + V_B}{h} (2\pi m k T)^{\frac{3}{2}} \right] \right] + N_B k \left[\frac{3}{2} + \ln \left[\frac{V_B + V_A}{h} (2\pi m k T)^{\frac{3}{2}} \right] \right], \quad (1.1.3)$$

şeklindedir. Kabın her iki bölmesinin hacimleri birbirlerine eşit alınarak, her iki bölme aynı A gazı konulduğu varsayıldığında, ilk durum ve son durum arasındaki entropi farkı

$$V_A = V_B, \quad N_A = N_B \quad \Rightarrow \quad \Delta S = S_{Topson} - S_{Topik}$$



Şekil 1.1. Gibbs Çelişkisi

$$\Delta S = N_A k \ln \left[\frac{V_A + V_B}{V_A} \right] + N_B k \ln \left[\frac{V_B + V_A}{V_B} \right],$$

$$\Delta S = N k \ln 2,$$

şeklinde. Bu sonuç tersinir bir süreçte entropi değişimi olmayacağını belirten termodinamiğin temel yasalarından biri ile çelişmektedir. Kaba yapay olarak konulan bölmeyi kaldırmakla sistemin entropisi artmıştır. Bu beklenmedik sonuca *Gibbs Çelişkisi* adı verilir.

Kabın içinde iki ayrı kesimde farklı moleküller olduğu kabul edilseydi, bölmeyi kaldırmakla moleküller tüm V hacmine yayılacak, sonuç olarak geliş güzel bir dağılım oluşacaktı. Böyle bir süreç tersinmez bir süreçtir. Ancak, yukarıda ki örnekte ideal gazı oluşturan moleküller özdeş oldukları için entropinin artmasını gerektiren fiziksel bir süreç oluşmaz. Çünkü aradaki bölmenin kaldırılması tersinmez değildir bu yüzden entropideki değişim sıfır olmalıdır.

Ayrıtdilemezlik, Gibbs çelişkisini ortadan kaldırır. Ayrıtdilemezlikten dolayı N tane parçacıktan oluşan bir sistemin girilebilir durum sayısını bulmak için (1.1.1)

ifadesi $1/N!$ ile çarpılmalıdır [2]:

$$\Omega(E) = \frac{V^N}{(h^{3N})N!} \frac{(2\pi mE)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)}. \quad (1.1.4)$$

Kapta bulunan parçacıkları birbirlerinden ayırtedilemez kabul edip (1.1.4) ifadesindeki durum sayısını kullanarak aradaki bölme kaldırılmadan önceki entropi

$$\begin{aligned} S_{Topik}(T, V, N) &= N_A k \left[\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{V_A}{hN_A} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right] \right] \\ &+ N_B k \left[\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{V_B}{hN_B} (2\pi mkT)^{3/2} \right] \right], \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

ifadesindeki gibi türetilir [2]. Aradaki bölme kalktıktan sonra, yine (1.1.4) ifadesinde verilen girilebilir durum sayısı kullanılarak son durumda toplam sistemin entropisi için

$$S_{Topson}(T, V, N) = Nk \left[\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{V_A + V_B}{hN} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right] \right], \quad (1.1.6)$$

elde edilir. (1.1.5) ve (1.1.6) ifadelerinden görülebileceği gibi, parçacıkların ayırtedilemez olduğu varsayıldığında ilk ve son durumlar arasındaki entropi farkı beklendiği gibi sıfır olur. Buradan ayırtedilemezliğin mikro parçacıkların temel bir özelliği olduğu sonucu çıkartılabilir.

1.2. SPİN KAVRAMI

Yukarıda da belirttiğimiz gibi, parçacıkların enerji seviyelerine dağılımını belirleyen önemli bir diğer özellik, parçacıkların spin açısal momentumudur. Spin, kuantum mekaniksel bir kavramdır. Bu yüzden parçacıkların spinleri hakkında bilgi sahibi olabilmek için spin işlemcilerine ihtiyaç duyulur [3].

$$\hat{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{z},$$

ile tanımlanan spin işlemcisi vektörel bir işlemcidir. Bu yüzden spin işlemcisi yerine sayısal bir işlemci olan, spin işlemcisinin karesini kullanmak daha kolaydır:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2.$$

Spin işlemcileri açışal momentum cebirini sağladığından, ε_{ijk} Levi-civita tensörünü göstermek üzere, bu işlemciler

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_i] = 0, \quad i = x, y, z \quad (1.2.7)$$

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k, \quad (1.2.8)$$

sıra değişimlerini (komitasyonlarını) sağlar [3]. Hesap kolaylığı açısından \hat{S}_x ve \hat{S}_y işlemcileri yerine

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y, \quad (1.2.9)$$

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y, \quad (1.2.10)$$

şeklinde tanımlanan azaltıcı ve artırıcı işlemcilerini kullanmak daha elverişlidir. (1.2.7) ve (1.2.8) denklemlerini kullanarak bu işlemcilerin

$$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hbar\hat{S}_z \quad (1.2.11)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] = \pm\hbar\hat{S}_\pm \quad (1.2.12)$$

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_\pm] = 0 \quad (1.2.13)$$

sıra değiştirme bağıntılarını sağladıklarını göstermek kolaydır. Oluşturulan cebirde birbirleri ile sıra değiştirebilen maksimum iki işlemci vardır. İşlem yaparken baz vektör kümesini birbirleri ile sıra değiştiren iki işlemcinin öz vektörlerinin kümesi seçmek hesap kolaylığı sağlar. Birbiri ile sıra değiştiren işlemcileri için genellikle \hat{S}^2, \hat{S}_z çifti alınır. Bu işlemcileri her ikisinin de öz durumu olan $|\alpha, \beta\rangle$ 'ya uyguladığımızda

$$\hat{S}^2|\alpha, \beta\rangle = \alpha^2\hbar^2|\alpha, \beta\rangle, \quad (1.2.14)$$

$$\hat{S}_z|\alpha, \beta\rangle = \beta\hbar|\alpha, \beta\rangle, \quad (1.2.15)$$

elde edilir. Burada \hat{S}^2 işlemcisinin öz değerini $\alpha^2\hbar^2$ ve \hat{S}_z işlemcisinin öz değerini de $\beta\hbar$ olduğunu kabul ettik.

\hat{S}_z ve \hat{S}^2 işlemcileri $\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle$ durumlarına uygulanacak olursa;

$$\hat{S}^2[\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle] = \hbar^2\alpha^2[\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle], \quad (1.2.16)$$

$$\hat{S}_z[\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle] = \hbar(1 \pm \beta)[\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle], \quad (1.2.17)$$

bağıntıları elde edilir [3]. Bu bağıntılara göre $\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle$ durumları \hat{S}_z 'in $(m \pm 1)\hbar$ öz değerli öz durumlarıdır (bkz (1.2.17)).

$$\hat{S}_\pm|\alpha, \beta\rangle = C_\pm|\alpha, \beta \pm 1\rangle, \quad (1.2.18)$$

denkleminde de anlaşılabilceği gibi \hat{S}_+ ve \hat{S}_- işlemcileri sırasıyla β değerini bir artırır veya bir eksiltir. Buradaki C_\pm daha sonra bulacağımız α ve β ya bağlı sabitlerdir.

$\hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle$ vektörünün büyüklüğü:

$$|\hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle|^2 = \langle \hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle | \hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle, \quad (1.2.19)$$

$$|\hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle|^2 = \langle \alpha, \beta | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \alpha, \beta \rangle = |C_+|^2 \geq 0, \quad (1.2.20)$$

şeklinde yazılır. \hat{S}_- , \hat{S}_+ işlemcilerinin çarpımı yerine

$$\begin{aligned} \hat{S}_- \hat{S}_+ &= \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 - \hbar \hat{S}_z \\ \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 &\Rightarrow \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2, \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

ifadesini ve $(\hat{S}_-)^+ = \hat{S}_+$ eşitliğini kullanarak, \hat{S}_+ işlemcisinin $|\alpha, \beta\rangle$ öz değerine etkisi

$$\hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle = \hbar\sqrt{\alpha^2 - \beta(\beta + 1)}|\alpha, \beta + 1\rangle, \quad (1.2.22)$$

şeklinde bulunur [3]. Buradan

$$|C_+|^2 = \hbar^2\alpha^2 - \hbar^2\beta^2 - \hbar^2\beta \geq 0, \quad (1.2.23)$$

elde edilir. Benzer şekilde azaltıcı işlemcinin normu:

$$|\hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle|^2 = \langle \hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle | \hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle, \quad (1.2.24)$$

$$|\hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle|^2 = \langle \alpha, \beta | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \alpha, \beta \rangle = |C_-|^2 \geq 0, \quad (1.2.25)$$

şeklinde elde edilir [3]. \hat{S}_+ , \hat{S}_- işlemcilerinin çarpımı yerine

$$\begin{aligned}\hat{S}_+\hat{S}_- &= \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hbar\hat{S}_z, \\ \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 &\Rightarrow \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2,\end{aligned}\quad (1.2.26)$$

ifadesini ve $(\hat{S}_-)^+ = \hat{S}_-$ eşitliğini kullanarak, \hat{S}_+ işlemcisinin $|\alpha, \beta\rangle$ durumlarına etkisi

$$\hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle = \hbar\sqrt{\alpha^2 - \beta(\beta - 1)}|\alpha, \beta - 1\rangle, \quad (1.2.27)$$

şeklinde bulunur. Buradan \hat{S}_- işlemcisinin öz değerleri için

$$|C_-|^2 = \hbar^2\alpha^2 - \hbar^2\beta^2 + \hbar^2\beta \geq 0, \quad (1.2.28)$$

ifadesi bulunur [3]. Her vektörün normu sıfırdan büyüktür. $\hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle$ vektörlerinin de normu sıfırdan büyüktür. Bu özellik ve (1.2.23) ve (1.2.28) denklemleri kullanılarak

$$\alpha^2 \geq \beta(\beta + 1), \quad (1.2.29)$$

$$\alpha^2 \geq \beta(\beta - 1), \quad (1.2.30)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Arttırıcı işlemci $|\alpha, \beta\rangle$ öz durumuna her uygulandığında β öz değerini bir arttırarak başka bir öz vektöre dönüştürür

$$\hat{S}_+|\alpha, \beta\rangle = C_+|\alpha, \beta + 1\rangle, \quad (1.2.31)$$

$$\hat{S}_+|\alpha, \beta + 1\rangle = C_+|\alpha, \beta + 2\rangle. \quad (1.2.32)$$

⋮

Bu işlemler sonucunda β öyle bir değer alabilir ki (1.2.29)'daki eşitsizlik sağlanmaz. Bu yüzden β değeri bir β_{max} ile sınırlandırılmalıdır

$$\begin{aligned}\hat{S}_+|\alpha, \beta_{max}\rangle &= \hbar[\alpha^2 - \beta_{max}(\beta_{max} + 1)]^{\frac{1}{2}}|\alpha, \beta_{max} + 1\rangle = 0, \\ \hat{S}_+|\alpha, \beta_{max}\rangle = 0 &\Rightarrow \alpha^2 = \beta_{max}(\beta_{max} + 1).\end{aligned}\quad (1.2.33)$$

Benzer şekilde azaltıcı işlemciyi $|\alpha, \beta\rangle$ durumuna her uygulandığında β öz değerini bir azaltarak başka bir öz fonksiyona dönüştürür

$$\begin{aligned}\hat{S}_-|\alpha, \beta\rangle &= C_-|\alpha, \beta - 1\rangle, \\ \hat{S}_-|\alpha, \beta - 1\rangle &= C_-|\alpha, \beta - 2\rangle. \\ &\vdots\end{aligned}\tag{1.2.34}$$

Ama β öyle bir değer alabilir ki (1.2.30)'deki eşitsizlik sağlanmaz. Bu yüzden β değerinin bir β_{min} değeri ile sınırlandırılması gerekir

$$\begin{aligned}\hat{S}_-|\alpha, \beta_{min}\rangle &= \hbar[\alpha^2 - \beta_{min}(\beta_{min} - 1)]^{\frac{1}{2}}|\alpha, \beta_{min} - 1\rangle = 0, \\ \hat{S}_-|\alpha, \beta_{min}\rangle &= 0, \\ \alpha^2 &= \beta_{min}(\beta_{min} - 1).\end{aligned}\tag{1.2.35}$$

Yukarıdaki (1.2.33) ve (1.2.35) eşitliklerinden

$$\beta_{max}(\beta_{max} + 1) = \beta_{min}(\beta_{min} - 1),\tag{1.2.36}$$

ifadesi yazılır. Bu ifadeden

$$\beta_{max} = \beta_{min} - 1, \quad \beta_{max} = -\beta_{min},\tag{1.2.37}$$

eşitlikleri elde edilir. Ama β_{min} değerinin β_{max} değerinden bir fazla olması oluşturulan kurguya göre anlamsızdır. Bu yüzden (1.2.37)'daki ikinci eşitlik, (1.2.36) denkleminin doğru çözümüdür. (1.2.37)'daki ikinci eşitliği kullanarak artırıcı işlemci $|\alpha, \beta\rangle$ öz değerine n kere uyguladığında β_{max} , azaltıcı işlemci de $|\alpha, \beta\rangle$ öz değerine m kere uyguladığında β_{min} değerinin elde edildiği kabul edilsin.

$$(\hat{S}_+^n)|\alpha, \beta\rangle = |\alpha, \beta_{max}\rangle, \quad \beta + n = \beta_{max}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\tag{1.2.38}$$

$$(\hat{S}_-^m)|\alpha, \beta\rangle = |\alpha, \beta_{min}\rangle, \quad \beta - m = \beta_{min}, \quad m = 0, 1, 2, \dots\tag{1.2.39}$$

Artırıcı işlemci β değerini her seferinde bir artırdığından n kere uyguladığında n kez artar böylece $\beta_{max} = \beta + n$ olur. Benzer şekilde azaltıcı işlemci β değerini

her seferinde bir kez azalttığından dolayı m kere uyguladığında β değeri m kez azacaktır. Böylece β_{min} değeri $\beta_{min} = \beta - m$ olur. Burada n ve m doğal sayıdır. (1.2.38) ve (1.2.39) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\beta_{max} - \beta_{min} &= n + m = 2S \\ \beta_{max} - \beta_{min} &= 2\beta_{max} = J \\ J = 0, 1, 2, \dots \quad S &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\end{aligned}\quad (1.2.40)$$

ifadelerini elde ederiz [3]. (1.2.40) denkleminde üç boyutta spin değerlerinin ya tam sayı yada yarım tamsayı değerler aldığı görülmektedir.

Bu noktadan sonra $|\alpha, \beta\rangle$ öz durumunu $|S, m_s\rangle$ diye adlandıralım

$$|\alpha, \beta\rangle \equiv |S, m_s\rangle \quad (1.2.41)$$

Böylece (1.2.33) ve (1.2.40) eşitliklerini kullanarak

$$\beta_{max} = S \Rightarrow \alpha^2 = S(S+1) \quad (1.2.42)$$

elde edilir. Sonuçta \hat{S}^2 ve \hat{S}_z işlemcilerinin öz değerlerini

$$\begin{aligned}\hat{S}^2|S, m_s\rangle &= S(S+1)\hbar^2|S, m_s\rangle \\ \hat{S}_z|S, m_s\rangle &= m_s\hbar|S, m_s\rangle\end{aligned}\quad (1.2.43)$$

şeklinde buluruz. (1.2.37) bağıntısından

$$\beta_{max} = S, \beta_{min} = -S$$

değerleri elde edilir. Buradan m_s değeri $-S$ ile S arasında değerler aldığı ve birer birer arttığı görülür [3].

$$-S \leq m_s \leq S, m_s = (-S), (-S+1), \dots, (S-1), (S).$$

Yani üç boyutlu uzayda spin açısız momentumu kesikli değerler alır.

Şimdi iki boyutlu uzayda spin açısai momentum işlemcisinin aldığı değeri incelenecektir. İki boyutlu bir düzlemdede hareket eden bir parçacığın dönme ekseni, düzleme dik olan yöndedir. Hareket $x - y$ düzlemindeyse dönme z ekseni etrafında olur. Yani iki boyutlu dönmenin cebirinde \hat{S}_x ve \hat{S}_y işlemcileri bulunmaz. Tek bir işlemciye ihtiyaç vardır. Bu işlemci \hat{S}_z ile gösterilebilir. Bu işlemcinin öz durumu $|\alpha\rangle$ ile gösterilirse, $|\hat{S}_z\alpha\rangle$ vektörü ve S_z işlemcisi için

$$\|\hat{S}_z\alpha\|^2 = \langle\alpha|\alpha^2\hbar^2|\alpha\rangle \quad (1.2.44)$$

$$\hat{S}_z|\alpha\rangle = \alpha\hbar|\alpha\rangle$$

$$\alpha^2 \geq 0, \alpha \in R$$

eşitsizliği yazılabilir. $\alpha^2 \geq 0$ eşitsizliğini tüm gerçel sayılar sağladığından bu denklem herhangi bir koşul oluşturmaz, bu yüzden iki boyutlu uzayda spin açısai momentum değerini sınırlayan bir koşul yoktur [4]. Dolayısı ile iki boyutta hapsedilmiş parçacıklar fermiyon ve bozonlardan farklı davranışlar gösterebilirler. Bu yüzden bu tür parçacıkların uyabileceği farklı istatistik dağılımlar mümkündür.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİK

Sistemlerin termodinamik niceliklerini belirlemek için sistemi oluşturan temel parçacıkların dağılım fonksiyonlarını belirlemeliyiz. Bir önceki bölümden üç boyutlu uzayda spin açısız momentum özdeğerlerinin sadece \hbar 'nin yarım tamsayı ya da tamsayı katları olabileceğini biliyoruz. Bunun sonucunda üç boyutlu uzayda iki temel parçacık vardır: Bozonlar ve fermiyonlar. Bozonların spinleri tamsayıdır ve Bose-Einstein istatistik dağılımına uyarlar, fermiyonların spinleri yarım tamsayıdır ve Fermi-Dirac istatistik dağılımına uyarlar [5]. Fakat iki boyutlu uzayda spinlerin tam ya da buçuklu değerler almasını sınırlayan bir koşul yoktur. Bu yüzden "İki boyutta bozonlardan ve fermiyonlardan başka, farklı temel parçacıklar olabilir mi?" sorusu aklımıza gelebilir. Eğer böyle parçacıklar varsa bu parçacıkların istatistiksel dağılım fonksiyonları nasıl olmalıdır?

2.1. HALDENE KESİRLİ İSTATİSTİĞİ

Yaklaşıkça yirmi yıl önce Haldene [6] Pauli Dışarlama ilkesini genelleştiren, genelleştirilmiş dışarlama istatistiği (GDİ) kavramını tanıttı. Wu ise bu istatistiğe uyan sistemlerin termodinamiğini kurdu [7]. Haldene ve Wu' nun önerdiği formülasyondan sonra bir çok araştırmacı g-on gazı olarak adlandırılan bu tür sistemleri inceleyen çalışmalar yapmıştır. Örneğin, Bhaduri vd. ve Batchedor vd. güçlü etkileşmeye sahip anyon ve Bose gazlarının dağılımlarının [8,9], Hansson vd. 2 boyutta' de delta fonksiyonu etkileşmesine sahip bozonların GDİ' ye uyduğunu gösterdiler [10].

Haldene, bir parçacığın istatistiğini genelleştirmek için, g istatistik parametresi adı verilen bir değişken tanımlamıştır

$$g = -\left[\frac{d_{N+\Delta N} - d_N}{\Delta N}\right]. \quad (2.1.1)$$

Burada N parçacık sayısını, ΔN parçacık sayısındaki değişimi ve d_N sistemdeki $(N - 1)$ parçacığın durumu belirli iken geriye kalan tek parçacığın Hilbert uzayının boyutunu belirtmektedir. Verili bir durumda sınırsız sayıda bozon bulunabileceğinden, bozonlar için $g = 0$ olacağı açıktır. Diğer yandan, Pauli Dışarlama ilkesinden dolayı aynı durumda iki ayrıştırılmayan fermiyon bulunamayacağından, fermiyonlar için $g = 1$ olacaktır. Genellikle, bir duruma giren parçacığın, diğer parçacıkların bu duruma girmesini zorlaştırdığı varsayıldığından $g \leq 1$ alınır. $g > 1$ durumu bir enerji durumuna giren parçacığın birden fazla yani g tane enerji seviyesini kapatmaya karşılık geldiğinden fiziksel olarak anlamlı görünmemektedir. g değeri mutlaka sıfırdan büyük olmalıdır [12]. Tanımlanan bu istatistik parametreyi kullanarak N tane parçacığın p tane duruma kaç farklı şekilde dağılabileceğini veren W istatistiksel ağırlık fonksiyonu için Haldene 1991 yılında

$$W = \frac{[p + (N - 1)(1 - g)]!}{N![p - gN - (1 - g)]!} \quad (2.1.2)$$

genelleştirilmiş kombinatorik formülünü önerdi [6, 12]. Bu önerilen istatistiksel ağırlık fonksiyonu $g = 1$ ve $g = 0$ için sırasıyla fermiyonların ve bozonların istatistiksel ağırlık fonksiyonlarına indirgenir:

$$g = 1 \Rightarrow W_F = \frac{p!}{N!(p - N)!}$$

$$g = 0 \Rightarrow W_B = \frac{(p + N - 1)!}{N!(p - 1)!}$$

(2.1.2) kombinatorik formülünü kullanarak toplam enerji E ve parçacık sayısı N 'nin korunduğu sistemler için yeni bir dağılım elde etmek mümkündür.

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i, \quad N = \sum_i n_i \quad (2.1.3)$$

(2.1.3) bağ şartlarından Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak, \bar{S} ifadesi

$$W = \prod_i \frac{[p + (n_i - 1)(1 - g)]!}{n_i![p - gn_i - (1 - g)]!} \quad (2.1.4)$$

$$\ln W = \sum_i \ln W_i$$

$$\bar{S} = \ln W - \beta E - \beta \mu N$$

şeklinde tanımlanan lnW değeri \bar{S} ifadesinde yerine konulduğunda Stirling yaklaşımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \sum_i \{ [p + (1-g)(n_i - 1)] \ln [p + (1-g)(n_i - 1)] - n_i \ln n_i \\ & - [p - 1 - g(n_i - 1)] \ln [p - 1 - g(n_i - 1)] - \beta \epsilon_i n_i + \beta \mu n_i \}, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

denklemi elde edilir. Burada β ve μ değerleri Lagrange çarpanı adı verilen birer sabittir.

Bir istatistiksel durumda $p \gg 1$ ve $n_i \gg 1$ alınarak, \bar{S} ifadesinin n_i ye göre değişimi

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial n_i} = \sum_i (1-g) \ln [p + (1-g)n_i] - \ln n_i + g \ln [p(1-gn_i)] - \beta(\epsilon_i - \mu), \quad (2.1.6)$$

şeklinde elde edilir (p ve n_i çok büyük olduğundan $1/p$ ve $\frac{(1-g)}{p}$ değerleri ihmal edilmiştir.). En olası $\{n_i\}$ dağılımı, $\frac{\partial \bar{S}}{\partial n_i} = 0$ eşitliğini sağlayan dağılımdır. Buradan

$$[1 - g\bar{n}_i]^g [1 + (1-g)\bar{n}_i]^{(1-g)} = \bar{n}_i e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \quad (2.1.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\frac{n_i}{p}$ oranı yerine \bar{n}_i yazılarak dağılım, durum başına düşen parçacık sayısı cinsinden elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitlik $g = 0$ ve $g = 1$ için sırasıyla bozonların ve fermiyonların dağılım fonksiyonlarına indirgenir

$$\begin{aligned} g = 0 & \Rightarrow \bar{n}_B = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}, \\ g = 1 & \Rightarrow \bar{n}_F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}. \end{aligned}$$

$\omega(\xi) = \left(\frac{1-g\bar{n}_i}{\bar{n}_i}\right)$ ifadesi tanımlanarak (2.1.7) denkleminde yerine yazıldığında

$$\omega(\xi)^g [1 + \omega(\xi)]^{(1-g)} = e^{\beta(\epsilon - \mu)}, \quad (2.1.8)$$

eşitliği elde edilir. Buradan ortalama parçacık sayısı için Bose-Einstein ve Fermi-Dirac dağılımlarına benzer bir fade yazılabilir:

$$\bar{n} = \frac{1}{\omega(\xi) + g}. \quad (2.1.9)$$

Bu dağılımın ilginç bir özelliği de $g = 1/2$ için yüksek sıcaklıklarda Maxwell-Boltzmann dağılımına uymasındır: (2.1.8) bağıntısından

$$\begin{aligned}\omega(\xi)^g [1 + \omega(\xi)]^{(1-g)} &= e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \\ (\bar{n}_i)_{g=1/2} &= \frac{2}{[1 + 4e^{2\beta(\varepsilon_i-\mu)}]^{1/2}} \\ kT \gg 1, (\bar{n}_i)_{g=1/2} &\approx e^{-\frac{(\varepsilon_i-\mu)}{kT}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu dağılımdan istatistik parametreleri, $[0, 1]$ aralığında olan parçacıklar için genelleştirilmiş Pauli Dışarlama İlkesi adı verilen bir eşitlikte türetilebilir.

$$\omega(\xi)^g [1 + \omega(\xi)]^{(1-g)} = e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \quad (2.1.10)$$

denkleminin sağ tarafındaki exponansiyel ifadenin 0 dan büyük olması gerektiği kullanılarak

$$\omega(\xi) = \left(\frac{1 - g\bar{n}_i}{\bar{n}_i}\right) > 0 \Rightarrow \bar{n}_i \leq \frac{1}{g} \quad (2.1.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade $g = 1$ için Pauli dışarlama ilkesine indirgendiğinden, bu ifadeye genelleştirilmiş Pauli dışarlama ilkesi adı verilir. Genelleştirilmiş Pauli dışarlama ilkesine göre bir durumda en fazla $1/g$ parçacık bulunabilir. Bu yüzden, g nin fiziksel olarak anlamlı değerleri $[0, 1]$ aralığında rasyonel sayılardır.

2.2. BÖLÜŞÜM FONKSİYONU KULLANILARAK ELDE EDİLEN GENELLEŞTİRMELER

2.2.1. G-ON DAĞILIMI

Kuantum gazlarının dağılımı yeni bir bölüşüm fonksiyonu tanımlanarakta genelleştirilebilir [13]. Bu amaçla önerilen bir bölüşüm fonksiyonu

$$Z_g = \prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i} + (1-g)\sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)n_i}) \quad (2.2.12)$$

şeklindedir [13]. Bu bölüşüm fonksiyonuna göre, bir enerji durumuna birden fazla parçacık girebilir ve aynı bozonlarda olduğu gibi bir duruma girebilecek parçacık

sayısının bir üst limiti yoktur. Ancak, bir duruma iki ve ikiden fazla parçacık girme olasılığı ($0 \leq g \leq 1$ olduğundan) $(1 - g)$ çarpanı ile orantılı olarak azaltılmıştır.

Şimdi bu bölüşüm fonksiyonunu kullanıldığında, bir durumdaki ortalama parçacık sayısının ifadesini (\bar{n}_k) hesaplayalım. Bir sistemde n_k , k . enerji durumunu işgal eden ortalama parçacık sayısını, P_{n_k} ise k . enerji seviyesinin n_k parçacık tarafından işgal edilme olasılığını göstermek üzere, k . seviyedeki ortalama parçacık sayısı

$$\bar{n}_k = \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k P_g(n_k), \quad (2.2.13)$$

denklemleri ile hesaplanır. P_{n_k} 'nin değerini bulmak için öncelikle (2.2.12) bölüşüm fonksiyonunu kullanalım. Bölüşüm fonksiyonlarının açılımı sonucu oluşan her bir terimin, bölüşüm fonksiyonuna oranı belli bir i . enerji seviyesinin n_i parçacık tarafından işgal edilme olasılığını vermektedir. Bu sayede bir seviyenin n_k parçacık tarafından işgal edilebilme olasılığı

$$P_g^k(n_k) = \begin{cases} n_k = 0, 1 & \frac{e^{-n_k x_k} \prod_{n_i=0}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i x_i})}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i x_i} + (1-g) \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i x_i})}, \\ n_k \geq 2 & \frac{e^{-n_k x_k} \prod_{n_i=0}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i x_i} + (1-g) \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i x_i})}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i x_i} + (1-g) \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i x_i})}, \end{cases}$$

veya daha basit biçimde

$$P_g^k(n_k) = \begin{cases} n_k = 0, 1 & \frac{e^{-n_k x_k}}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i x_i} + (1-g) \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i x_i})}, \\ n_k \geq 2 & \frac{(1-g) e^{-n_k x_k}}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i x_i} + (1-g) \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i x_i})} \end{cases}, \quad (2.2.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemlerde $x_k = \beta(\epsilon_k - \mu)$, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ tanımlamaları kullanılmıştır. (2.2.14) ifadesi (2.2.13) eşitliğinde ifadesi yerine konarak

$$\bar{n}_k = \frac{e^{-x_k} + (1-g) \sum_{n_k=2}^{\infty} n_k e^{-n_k x_k}}{1 + e^{-x_k} + (1-g) \sum_{n_k=2}^{\infty} e^{-n_k x_k}}$$

elde edilir. Toplam ifadesi açılarsa üstteki eşitlik

$$\bar{n}_k = \frac{e^{-x_k} + (1-g)(2(e^{-x_k})^2 + 3(e^{-x_k})^3 + 4(e^{-x_k})^4 + \dots)}{1 + e^{-x_k} + (1-g)(e^{-x_k})^2(1 + e^{-x_k} + (e^{-x_k})^2 + \dots)} \quad (2.2.15)$$

şekline dönüşür ve birkaç ara işlem sonucunda ortalama parçacık sayısı için

$$\bar{n}_k = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}(ge^{-2\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 2ge^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1)}{(1 - ge^{-2\beta(\varepsilon_k - \mu)})(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)})} \quad (2.2.16)$$

eşitliği elde edilir.

(2.2.12) de önerilen genelleştirmede, bir enerji seviyesinin iki veya ikiden fazla parçacık tarafından işgal edilme olasılığı parçacık sayısından bağımsız olarak $(1 - g)$ ile orantılı olarak azaltılmıştı. Yani bu dağılımda bir durumun 2, 100 ya da 10^{10} parçacık tarafından işgal edilme olasılıkları birbirine eşittir. Oysa bozonik durumdan fermiyonik duruma geçiş yaparken, bir durumun belli sayıdaki parçacık tarafından işgal edilme olasılığının değeri, bu durumun kendinden daha az sayıdaki parçacık tarafından işgal edilme olasılığına göre daha düşük olmalıdır. Bu yüzden, bir durumun belli bir sayıda parçacık tarafında işgal edilme olasılığının, parçacık sayısı arttıkça azalacağı şekilde bir bölüşüm fonksiyonu önermek fiziksel olarak daha anlamlı olabilir. Genelleştirme parametresi g , $[0, 1]$ aralığında olduğundan

$$Z_g = \prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} + \sum_{n_i=2}^{\infty} (1 - g)^{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i}), \quad (2.2.17)$$

şeklindeki bir bölüşüm fonksiyonu yukarıda bahsedilen parçacık sayısı arttıkça, seviyenin işgal edilme olasılığının azalması şartını sağlar.

(2.2.17) bölüşüm fonksiyonu kullanılırsa, k . enerji seviyesinin, n_k parçacık tarafından işgal edilme olasılığı

$$P_g^k(n_k) = \begin{cases} n_k = 0, 1 & \frac{e^{-n_k \varepsilon_k} \prod_{n_i=0}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \varepsilon_i})_{i \neq k}}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \varepsilon_i} + (1-g)^{n_i} \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i \varepsilon_i})}, \\ n_k \geq 2 & \frac{e^{-n_k \varepsilon_k} \prod_{n_i=0}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \varepsilon_i} + (1-g)^{n_i} \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i \varepsilon_i})_{i \neq k}}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \varepsilon_i} + (1-g)^{n_i} \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i \varepsilon_i})} \end{cases},$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu eşitlik daha basit olarak

$$P_g^k(n_k) = \begin{cases} n_k = 0, 1 & \frac{e^{-n_k \varepsilon_k}}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \varepsilon_i} + (1-g)^{n_i} \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i \varepsilon_i})}, \\ n_k \geq 2 & \frac{(1-g)^{n_k} e^{-n_k \varepsilon_k}}{\prod_{i=1}^{\infty} (\sum_{n_i=0}^1 e^{-n_i \varepsilon_i} + (1-g)^{n_i} \sum_{n_i=2}^{\infty} e^{-n_i \varepsilon_i})} \end{cases}, \quad (2.2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Bu olasılık, ortalama parçacık sayısının (2.2.13) ifadesinde yerine konup

$$\sum_{n_k=2}^{\infty} (1-g)^{n_k} (e^{-x_k})^{n_k} = \frac{[(1-g)e^{-x_k}]^2}{1-(1-g)e^{-x_k}},$$

$$\sum_{n_k=2}^{\infty} e^{-n_k x_k} (1-g)^{n_k} n_k = \frac{2e^{-2x_k}(1-g)^2 - e^{-3x_k}(1-g)^3}{[1-e^{-x_k}(1-g)]^2},$$

esitlikleri kullanılırsa, ortalama parçacık sayısı için

$$\bar{n}_k = \frac{1-(1-g)e^{-x_k}}{1+ge^{-x_k}(1-e^{-x_k}+ge^{-x_k})} \left[e^{-x_k} \frac{2e^{-x_k}(1-g)^2 - (1-g)^3 e^{-3x_k}}{[1-e^{-x_k}(1-g)]^2} \right],$$

şeklinde yeni bir ifade elde edilir. Bu denklem basit birkaç düzenleme sonucunda

$$\bar{n}_k = \frac{e^{-x_k} [1-(1-g)e^{-x_k}]^2 + (1-g)^2 e^{-2x_k} (2-(1-g)e^{-x_k})}{(1-(1-g)e^{-x_k}) + (ge^{-x_k}(1-(1-g)e^{-x_k})^2)}, \quad (2.2.19)$$

şeklinde yazılabilir.

2.2.2. GENTILE DAĞILIMI

Haldene-Wu genelleştirmesinde denklem (2.1.1) ile tanımlanan g parametresinin fiziksel anlamı net olarak görülememektedir. Bu dağılımın g parametresi ile uyumluluğu, sağladığı genelleştirilmiş Pauli ilkesi olarakta adlandırılabilir (2.1.11) denkleminden görülebilir. 1940 yılında Gentile, FD ve BE istatistiklerini genelleştirmek için bir bölüşüm fonksiyonu önermişti [14]. Bu dağılım Haldene tarafından önerilen g parametresinin fiziksel anlamını doğal bir biçimde içermektedir. Gentile' nin de yeni bir dağılım önermedeki amacı bozon ve fermiyonların dağılımından daha genel bir istatistik dağılım elde etmektir [14]. Bunun için fermiyonlar gibi bir enerji durumuna yalnızca bir özdeş fermiyonun girdiği bir dağılımı değil de, bir duruma birden fazla ama bozonlardakinden farklı olarak bir duruma girebilecek parçacık sayısının bir üst limitinin olduğu bir dağılımın özelliklerini araştırdı.

İki boyuttaki anyonlar gibi fermiyon ve bozonların dışında parçacıkların olabileceğinin anlaşılması sonucu Haldane istatistiğinin [6] ortaya atılmasından

sonra başka genelleştirilmiş istatistikler önerildi [12]. Ayrıca, bu genelleştirilmiş istatistiklerden çok daha önce 1940 yılında ortaya atılan Gentile istatistiğine olan ilgi de arttı [15–36]. A.K. Rajagopal Gentile dağılımına uyan parçacık sisteminin hem Von Neumann hem de Tsallis istatistiğinde entropi hesaplarını yaptı [17]. Oshima vd. aynı sistemin faz uzayında oluşturduğu yüzeyin eğriliğini incelediler [19]. Bytsko, Gentile dağılımını da içeren genelleştirilmiş dağılımlar için Bethe ansatzlı oluşturdu [20]. W.S. Dai ve M. Xie sanıldığı aksine Gentile dağılımında bir duruma girebilecek parçacık sayısının üst limiti (q) sonsuza gittiğinde, Gentile dağılımından her zaman Bose-Einstein dağılımının elde edilemeyeceğini; bu limitte, sadece kimyasal potansiyelin sıfırdan (daha doğrusu taban durum enerji seviyesinden) küçük olduğunda Gentile dağılımının Bose-Einstein dağılımını verdiğini gösterdiler [23, 26]. Mead ve Papanicolaou, açısal momentum cebirini bozon işlemcilerinin cebirine dönüştüren Holstein-Primakoff (HP) dönüşümünü kullanarak etkileşen bir Bozon gazının incelenebileceğini gösterdiler. HP dönüşümünün ilginç bir özelliği Gentile istatistiği ile uyumlu olmasıdır [27]. Aucaise vd. çekirdek spini 1/2 den büyük olan sistemlerinin Gentile dağılımına uyduğunu HP temsilini kullanarak buldular ve deneysel olarak gösterdiler [27]. Rovenchak sonlu sayıda parçacık içeren bir boyutlu Bose sisteminin istatistiğinin Gentile istatistiği ile eşdeğer olduğunu gösterdi [28]. Dai ve Xie Gentile istatistiğinin cebirini oluşturdu [33]. Ryabov Gentile dağılımına uyan sistemlerin de Bose-Einstein yoğunluğuna benzer bir yoğunluğa uğrayabileceğini gösterdi [35].

Gentile, bir enerji durumuna girebilecek parçacık sayısının maksimum $q = 1/g$ olacağı düşüncesinin doğal sonucu olarak bu tür parçacıkların uyacağı bölüşüm fonksiyonu için

$$Z_G = \prod_{i=1}^{\kappa} \sum_{n_i=0}^{1/g} e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)n_i} \quad (2.2.20)$$

ifadesini önerdi [14]. k . enerji durumunu işgal eden ortalama parçacık sayısı \bar{n}_k

$$\bar{n}_k = \sum_{n_k}^{\infty} n_k P_{n_k}, \quad (2.2.21)$$

olmak üzere, $x_i = \beta(\mu - \varepsilon_i)$, $y_i = e^{x_i}$ ve $G = 1/g$ tanımları kullanılarak, (2.2.20)'de verilen bölüşüm fonksiyonu

$$Z_G = \prod_{i=1}^{\kappa} \sum_{n_i=0}^G y_i^{n_i}, \quad (2.2.22)$$

şeklinde yazılabilir. Bu toplam ifadesi

$$\sum_{n_i=0}^G y_i^{n_i} = \frac{(1 - y_i)^{\frac{1}{g} + 1}}{1 - y_i}, \quad (2.2.23)$$

şeklinde yazılarak, bölüşüm fonksiyonu için

$$Z_G = \prod_{i=1}^{\kappa} \frac{(1 - y_i)^{G+1}}{1 - y_i}, \quad (2.2.24)$$

ifadesi elde edilir. Bu bölüşüm fonksiyonunun açılımı sonucu oluşan her bir toplam terimin, bölüşüm fonksiyonu oranı bir k . enerji seviyesinin n_k parçacık tarafından işgal edilme olasılığını vermektedir. Bu yüzden bir seviyenin n_k parçacık tarafından işgal edilebilme olasılığı

$$P_k^g(n_k) = \frac{y_k \prod_{k=1}^{\kappa} \sum_{n_i=0}^G y_k^{n_i}}{\prod_{i \neq k} \sum_{n_i}^G y_i^{n_i}}, \quad (2.2.25)$$

şeklinindedir. Bir kaç matematiksel ara işlem sonucunda P_k ifadesi için

$$P_k^g(n_k) = \frac{e^{x_k n_k} (1 - e^{x_k})}{1 - e^{x_k(1+G)}}, \quad (2.2.26)$$

elde edilir. Buradan Gentile dağılımına uyan parçacıklar için ortalama parçacık sayısını veren en olası dağılım

$$\bar{n}_k = \sum_{n_k=0}^G P_k^g(n_k) n_k = \sum_{n_k=0}^G n_k \frac{e^{x_k n_k} (1 - e^{x_k})}{1 - e^{x_k(1+G)}} \quad (2.2.27)$$

şeklinde elde edilir. (2.2.27)'de, x_k , y_k ve G değerleride yerlerine yazılıp toplam alınarak ortalama parçacık sayısı

$$\bar{n}_k = \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} - (\frac{1}{g} + 1)e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)(\frac{1}{g}+1)} + \frac{1}{g}e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)(\frac{1}{g}+2)}}{(1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)})(1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)(\frac{1}{g}+1)})}, \quad (2.2.28)$$

şeklinde bulunur. Bu dağılımın anlamlı bir sonuç verebilmesi için g 'nin 0 ile 1 arasında $1/g$ 'nin tam sayı olacağı bir değer seçilmelidir.

Gentile dağılımdaki ortalama parçacık sayısının bu ifadesi, sırası ile $g = 0$ ve $g = 1$ için bozonların ve fermiyonların ortalama parçacık sayısı ifadelerine indirgenir.

$g = 0$ için

$$\bar{n}_k = \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}} = \frac{1}{e^{-\beta(\mu-\varepsilon_i)} - 1} \quad (2.2.29)$$

elde edilirken $g = 1$ için

$$\begin{aligned} \bar{n}_k &= \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}(1 - 2e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} + e^{2\beta(\mu-\varepsilon_i)})}{(1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)})^2(1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)})} \\ &= \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

bulunur.

(2.2.24) denkleminde verilen bölüşüm fonksiyonunu kullanılarak, Gentile istatistiğine uyan parçacıkların hal denklemi hesaplanabilir. Bunun için Grand Potansiyel Ω kullanılarak hesaplara başlanabilir

$$\Omega = -PV = -k_B T \ln Z_G = -k_B T \ln \left\{ \prod_{i=1}^{\kappa} \frac{(1 - y_i)^{G+1}}{1 - y_i} \right\}. \quad (2.2.31)$$

Bu eşitlikte y_k ve x_k değerlerini yerine yazarak

$$\begin{aligned} \Omega = & - k_B T \left[\sum \ln \left[1 - \exp\left(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_k)\right)(G + 1) \right] \right. \\ & \left. - \left[\ln \left(1 - \exp\left(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_k)\right) \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

elde ederiz. Burada toplam yerine durum yoğunluğu $D(\varepsilon)$ kullanıp integral yaklaşımı yapılarak

$$PV = -k_B T \int_0^\infty D(\varepsilon) [\ln(1 - \exp(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_k))(G+1)) - \ln(1 - \exp(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_k)))] d\varepsilon \quad (2.2.33)$$

elde edilir. Böylece hal denklemini için genel bir ifade elde edilebilir.

$$PV = -k_B T \int_0^\infty D(\varepsilon) \ln \left[\frac{(1 - \exp(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon)(G+1)))}{(1 - \exp(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon)))} \right] d\varepsilon \quad (2.2.34)$$

3. HARMONİK TUZAKTAKİ FARKLI PARÇACIKLAR

3.1. HARMONİK TUZAK İÇİN DURUM YOĞUNLUĞU

Öncelikle termodinamik limit yaklaşımı yaparak ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{N}{V} \rightarrow \text{sabit}$) D-boyutta harmonik tuzaktaki ideal gazların durum yoğunluğunu hesaplayalım¹. Bu hesabı ilgili sistemdeki spinlerin serbestlik dereceleri ihmal edilerek enerjilerinin, a bir sabit olmak üzere $\varepsilon(p) = ap^s$ şeklinde olduğu kabul ederek hesaplayacağız. Durum yoğunluğu

$$D(\varepsilon) = \int \frac{d^D r d^D p}{(2\pi\hbar)^D} \delta[\varepsilon - (\varepsilon p + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2)] \quad (3.1.1)$$

denklemi aracılığı ile hesaplanabilir [1]. Burada δ , Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir.

Denklem (3.1.1)'den durum yoğunluğu ifadesi, delta fonksiyonunun özellikleri kullanarak

$$D(\varepsilon) = \frac{S_D^2 2^{\frac{D-2}{2}} \varepsilon^{D-2} 2}{(2\pi m^{1/2})^D (\hbar\omega)^D} \int_0^{(\varepsilon/a)^{1/s}} dp p^{D-1} \left(1 - \frac{ap^s}{\varepsilon}\right)^{\frac{D}{2}-1} \quad (3.1.2)$$

biçimine dönüştürülebilir. Burada

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

D boyutlu birim kürenin yüzey alanıdır [37]. (3.1.2) integrali alınarak

$$D(\varepsilon) = \frac{S_D^2 2^{\frac{D-2}{2}}}{(2\pi m^{1/2})^D s a^{D/2}} \frac{\Gamma(D/s)\Gamma(D/2)}{\Gamma(\frac{D}{s} + \frac{D}{2})} \frac{\varepsilon^{\frac{D}{s} + \frac{D-2}{2}}}{(\hbar\omega)^D} \quad (3.1.3)$$

eşitliği elde edilir. Harmonik tuzak ile tuzaklanan parçacıkların karakteristik uzunluğu tuzaklamada kullanılan manyetik alanın frekansına bağlı olduğundan ($l_k \propto \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$), (3.1.3) denklemindeki ω^{-D} ifadesi harmonik tuzaktaki parçacıkların etkin hacmi olarak yorumlanabilir $V \equiv \omega^{-D}$ [38].

¹Bu ve bir sonraki bölüm [1] çalışmasının bir özeti ve bütünlüğün sağlanması amacı ile teze dahil edilmiştir.

3.2. HALDENE İSTATİSTİĞİNE UYAN PARÇACIKLARIN TERMODİNAMIĞI

Genelleştirilmiş Haldene istatistiğinin dağılım fonksiyonu

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\omega + g}, \quad (3.2.4)$$

denklemini aracılığı ile tanımlanır [7]. Burada ω

$$\omega^g(1 + \omega)^{1-g} = \exp[\beta(\varepsilon - \mu)] \quad (3.2.5)$$

şartını sağlamalıdır, $\beta = 1/(k_B T)$ ve μ kimyasal potansiyeli ifade etmektedir. Bu eşitlik $g = 0$ için bozonların ve $g = 1$ için fermiyonların dağılım fonksiyonuna indirgenir. $T = 0K$ de ortalama parçacık sayısı

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} (\varepsilon - \omega) \leq 0 \text{ için} & 1/g \\ (\varepsilon - \omega) > 0 \text{ için} & 0 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

şeklindedir. Bu denklemden de görüldüğü gibi Fermi dağılımı $T = 0K$ de basamak fonksiyonu kullanılarak ifade edilebilir.

$D(\varepsilon)$ durum yoğunluğu kullanılarak sistemdeki toplam parçacık sayısı N ve toplam enerji E sırasıyla

$$N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.2.7)$$

$$E = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.2.8)$$

integralleri alınarak bulunur.

Öncelikle, $T = 0K$ de (3.2.6) eşitliğindeki dağılım ve (3.1.3)'teki durum yoğunluğu ifadesini kullanıp (3.2.8)'deki integrali alarak genelleştirilmiş Fermi enerjisini bulalım. Bu amaçla (3.2.6) denklemini, (3.2.7)'de yerine konup $T = 0K$ 'de $\varepsilon_f = \mu$ alınarak, ε_f 'nin N cinsinden ifadesi bulunur. Bu ifade (3.2.8)'de kullanıldığında genelleştirilmiş fermi enerjisi,

$$\varepsilon_F = \left[\frac{Ng}{\gamma} \left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2} \right) \right]^{1/(\frac{D}{s} + \frac{D}{2})}. \quad (3.2.9)$$

bulunur. Burada $\gamma = \frac{S_D^2 2^{\frac{D-2}{2}}}{(2\pi m^{1/2})^D s a^{D/s}} \frac{\Gamma(D/s)\Gamma(D/2)}{\Gamma(\frac{D}{s} + \frac{D}{2})} \frac{1}{(\hbar\omega)^D}$ tanımlaması yapılmıştır. Fermi enerjisi cinsinden parçacık başına düşen enerji

$$\frac{E}{N} = \frac{(\frac{D}{s} + \frac{D}{2})}{\frac{D}{s} + \frac{D+2}{2}} \epsilon_F \quad (3.2.10)$$

şeklindedir.

Sonlu sıcaklıklarda da parçacık başına düşen enerji (3.2.8) denklemi aracılığı ile hesaplanır. Bunun için ilk olarak verili bir sıcaklık ve parçacık sayısı için kimyasal potansiyel belirlenmelidir. Bu (3.2.7) denklemi, kimyasal potansiyel μ için çözümlenerek yapılabilir. Ancak kimyasal potansiyeli (3.2.7) denklemden çekmek zordur. Bu nedenle

$$N = \int_0^\infty \gamma \frac{1}{\omega + g} \epsilon^{(\frac{D}{2} + \frac{D-2}{2})} d\epsilon \quad (3.2.11)$$

integralinde ϵ değişkeni yerine

$$\omega^g (1 + \omega)^{1-g} = e^{\beta(\epsilon - \mu)} \quad (3.2.12)$$

denklemi ile tanımlanan ω değişkenini kullanıp, μ yerine de bu integralin alt limiti olan $\epsilon = 0$ değeri kullanılarak

$$\omega_0^g (1 + \omega_0)^{1-g} = e^{-\beta\mu} \quad (3.2.13)$$

şeklinde elde edilen ω_0 değerini kullanmak daha kolaydır. Bu işlemler yapılarak

$$1 = \left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}\right) \left(\frac{T}{\epsilon_F}\right)^{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \int_{\omega_0}^\infty \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \left\{ \ln\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^g \left(\frac{1+\omega}{1+\omega_0}\right)^{1-g}\right] \right\}^{\left(\frac{D}{s} + \frac{D-2}{2}\right)} \quad (3.2.14)$$

elde edilir. Buradan ω_0 çekilirse

$$\frac{E}{N \epsilon_F} = \left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}\right) \left(\frac{T}{\epsilon_F}\right)^{\frac{D}{s} + \frac{D+2}{2}} \int_{\omega_0}^\infty \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \times \left\{ \ln\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^g \left(\frac{1+\omega}{1+\omega_0}\right)^{1-g}\right] \right\}^{\left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}\right)} \quad (3.2.15)$$

denklemi aracılığı ile parçacık başına düşen enerji bulunur. (3.2.14) denkleminde ϵ_F , $g = 1$ 'deki yani fermiyonlar için Fermi enerjisinin değeridir.

Bu sistemlerin özısıısı $C_v = (\frac{\partial E}{\partial T})_V$ tanımı kullanılarak hesaplanabilir:

$$C_v = \int d\varepsilon D(\varepsilon) \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\omega + g}. \quad (3.2.16)$$

Bu denklemdeki integralin içindeki türev alınarak özısıı ifadesi

$$C_v = \int d\varepsilon D(\varepsilon) \varepsilon \left[\frac{\varepsilon - \mu}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial \mu}{\partial T} \right] \frac{\omega(1 + \omega)}{(\omega + g)^3} \quad (3.2.17)$$

şeklinde bulunur. (3.2.14) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial T} = & - \ln[\omega_0^g (1 + \omega_0)^{1-g}] \\ & - \frac{(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}) \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \{ \ln[(\frac{\omega}{\omega_0})^g (\frac{1+\omega}{1+\omega_0})^{1-g}] \}^{(\frac{D}{s} + \frac{D-2}{2})}}{(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}) \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \{ \ln[(\frac{\omega}{\omega_0})^g (\frac{1+\omega}{1+\omega_0})^{1-g}] \}^{(\frac{D}{s} + \frac{D-4}{2})}} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

ifadesi bulunduktan sonra bu (3.2.17) denkleminde yerine konup

$$\begin{aligned} \frac{C_v}{N} = & \left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2} \right) \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right)^{\frac{D}{s} + \frac{D+2}{2}} \\ & \times \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \{ \ln[(\frac{\omega}{\omega_0})^g (\frac{1+\omega}{1+\omega_0})^{1-g}] \}^{(\frac{D}{s} + \frac{D}{2})} \\ & \times \left[\ln[(\frac{\omega}{\omega_0})^g (\frac{1+\omega}{1+\omega_0})^{1-g}] - \frac{(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}) \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \{ \ln[(\frac{\omega}{\omega_0})^g (\frac{1+\omega}{1+\omega_0})^{1-g}] \}^{(\frac{D}{s} + \frac{D-2}{2})}}{(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}) \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(1+\omega)} \{ \ln[(\frac{\omega}{\omega_0})^g (\frac{1+\omega}{1+\omega_0})^{1-g}] \}^{(\frac{D}{s} + \frac{D-4}{2})}} \right] \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

elde edilir.

Basınç ve toplam enerji arasındaki genelleştirilmiş ilişkiyi bulmak için Gibbs serbest enerjisi kullanılabilir:

$$\Omega = -PV = -k_B T \ln Z. \quad (3.2.20)$$

Bu denklemde Z, büyük kanonik kümedeki bölüşüm fonksiyonunu göstermektedir:

$$Z = \sum_{\{N_i\}} W(\{N_i\}) \exp[-\beta \sum_i N_i (\varepsilon_i - \mu)]. \quad (3.2.21)$$

Denklem (3.2.4) deki dağılım bağıntısını kullanarak termodinamik potansiyel ifadesi

$$\Omega = -PV = -k_B T \sum_i G_i \ln \left[1 + \frac{1}{\omega} \right] \quad (3.2.22)$$

şeklinde bulunur. Termodinamik limit yaklaşımı yapıp bu toplam ifadesi yerine integral denklemi kullanılabilir. Buradan basınç ifadesi için

$$\frac{P}{k_B T} = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \ln\left[1 + \frac{1}{\omega}\right] \quad (3.2.23)$$

elde edilir. Bu denklemde kısmi integrasyon yapılırsa

$$(u = \varepsilon^{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}}, dv = \ln\left[1 + \frac{1}{\omega}\right] d\omega)$$

$$\frac{P}{T} = \frac{\beta}{\left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty f(\varepsilon) \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.2.24)$$

eşitliği bulunur. $E = \int_0^\infty f(\varepsilon) \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon$ ifadesi toplam enerjiye eşit olduğundan denklem (3.2.24)'ün her iki tarafı VT ile çarpılarak

$$PV = \frac{E}{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \quad (3.2.25)$$

denklemi elde edilir. Bu eşitlik genelleştirilmiş dışarlama istatistiğine uyan harmonik tuzaktaki ideal gazlar için Bernoulli eşitliği olarak adlandırılır. Sistemin entropisi ise $S = \frac{E}{T} + \ln Z - \frac{N\mu}{T}$ ilişkisi kullanılarak

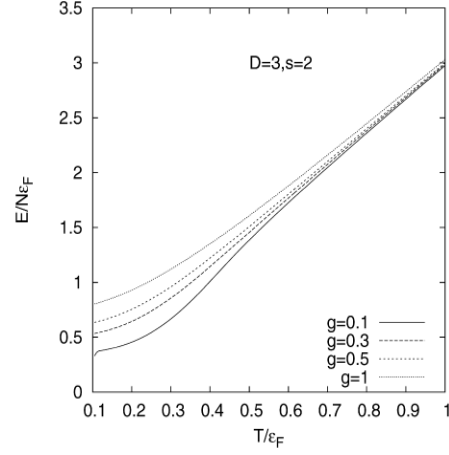
$$S = \frac{E}{T} \left[1 + \frac{1}{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}}\right] - \frac{N\mu}{T}. \quad (3.2.26)$$

şeklinde bulunur.

3.2.1. SONUÇLAR

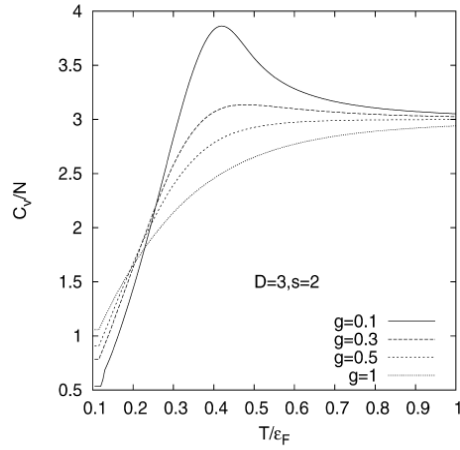
D-boyutta Haldene istatistiğine uyan harmonik tuzaktaki ideal gazın termodinamik özelliklerinin, teorik formülasyonu bir önceki bölümde oluşturulmuştur. Bu bölümde farklı g değerlerinin enerjiye ve ısı sığasına etkisi çeşitli grafikler aracılığı ile gösterilecektir. Bu grafiklerin hepsinde $k_B = 1$ alınmıştır.

Şekil 3.1 de üç boyutta $s = 2$ ve farklı g değerleri için parçacık başına düşen toplam enerji sıcaklığın bir fonksiyonu olarak verilmiştir. Grafik incelendiğinde hem düşük hem de yüksek sıcaklıklarda g istatistiksel parametresi arttıkça toplam enerjinin de arttığı görülmektedir. g değeri artarken bir duruma girebilen parçacık

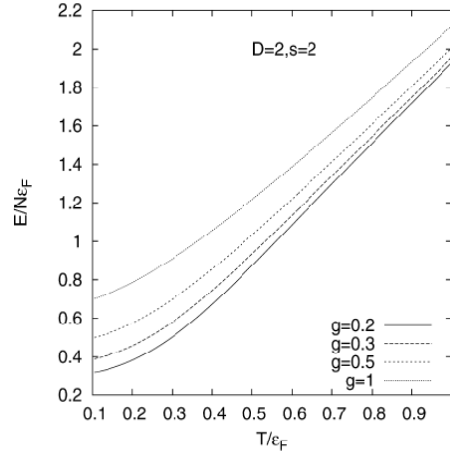


Şekil 3.1. $s=2$ ve $3D$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.

sayısı azalır. Bunun sonucunda verili bir N değeri için alt enerji seviyelerine girebilecek parçacık sayısı düşecektir. Bu enerji seviyelerine giremeyen parçacıklar toplam parçacık sayısı sabit olduğundan zorunlu olarak üst enerji seviyelerini dolduracaklardır. Yani g değeri artıp fermiyonik davranış baskın hale geldikçe, parçacıklar taban durumuna yakın enerji seviyeleri yerine daha üst enerji seviyelerini işgal ederler. Bu da sistemin toplam enerjisini artırır. Şekil 3.2 de ise üç boyutta $s = 2$ ve farklı g değerleri için özısının sıcaklıkla değişimi gösterilmektedir. Düşük sıcaklıklarda hızla artan özısının düşük g değerleri için

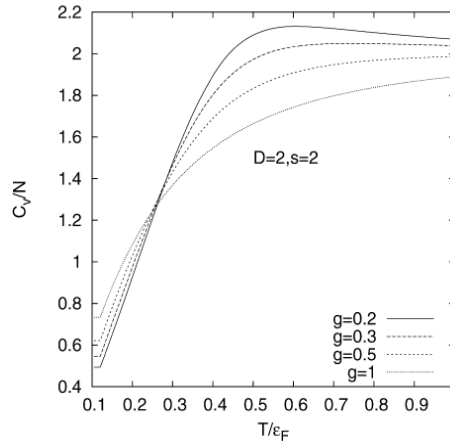


Şekil 3.2. $s=2$ ve $3D$ 'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.

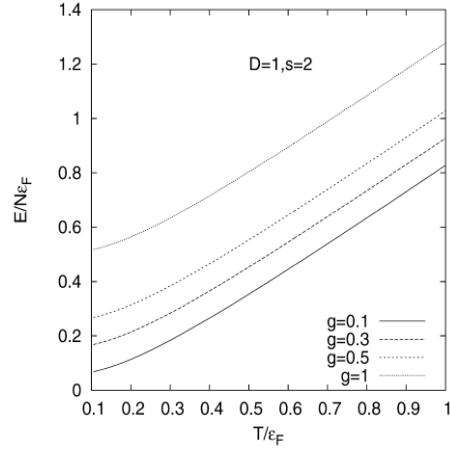


Şekil 3.3. $s=2$ ve $2D$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.

($g = 0.1$ ve $g = 0.3$) belli bir sıcaklıktan sonra azalıp sıcaklık arttıkça sabit bir değere doğru gittiği görülürken, daha büyük g değerlerinde ($g = 0.5$ ve $g = 1$) özısının sıcaklıkla düzgün bir biçimde artıp sabit bir değer aldığı gözlenmektedir. Bunu anlayabilmek için bozon ve fermiyonların özısı sıcaklık değişimini gözönüne almalıyız. Şekil 3.2 de fermiyonların özısı değişimi zaten verilmiştir ($g = 1$). Fermiyonlar $T = 0K$ sıcaklıklarına yaklaşılsa bile Pauli dışarlama ilkesinden dolayı bozonlarda olduğu gibi bir faz dönüşümüne uğramazlar. Bu yüzden fermiyonların özısı sıcaklık değişimi düzgün artan ve yüksek sıcaklıklarda klasik gazlarda olduğu



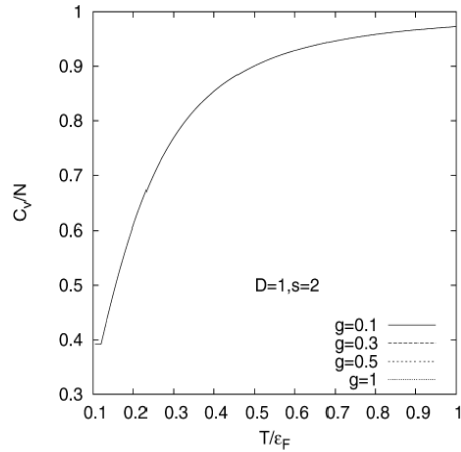
Şekil 3.4. $s=2$ ve $2D$ 'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.



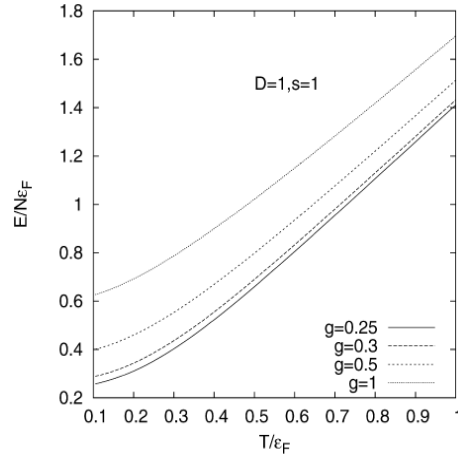
Şekil 3.5. $s=2$ ve 1D'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.

gibi sabit bir değer alan eğridir. Bu yüzden g değeri bire yaklaştıkça özısı sıcaklık değişimi de düzgün artıp sabit değer alan eğriler şekline dönüşmektedir.

Bozonların ise düşük sıcaklıklarda yoğunlaşma faza geçtiği bilinmektedir [39]. Üç boyutta harmonik tuzak içindeki bozonlar faz değişimi sıcaklığına ulaştığında özısılarında süreksizlik oluşur ve özısıları ani bir düşüş yaşar. Bunun nedeni faz dönüşümü sıcaklığında verilen enerjinin bir bölümünün sıcaklığı arttırmaya değil de faz dönüşümüne harcanmasıdır. Şekil 3.2 de g değeri azalıp özısının belli bir sıcaklıkta azalmaya başlaması parçacıkların bozonik hale yaklaştığının bir



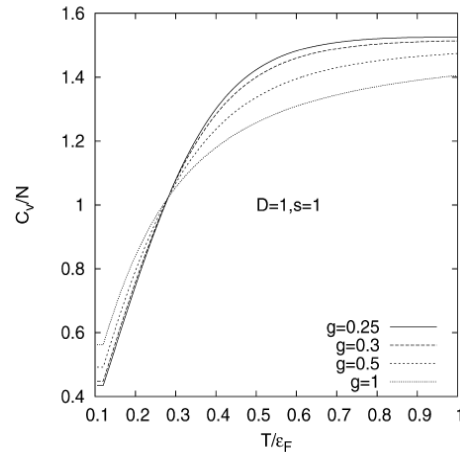
Şekil 3.6. $s=2$ ve 1D'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.



Şekil 3.7. $s=1$ ve 1D'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği.

göstergesidir. Küçük g değerli parçacıklarda bu etki görülse de $g = 0$ olmadığından bozonlardaki kadar keskin değildir.

Şekil 3.3 ve şekil 3.4'te iki boyutlu, şekil 3.5 ve şekil 3.6 da ise bir boyutlu sistemler için sırasıyla enerji ve özısı grafikleri verilmiştir. Hem bir hemde iki boyutta beklendiği gibi enerji artan g değerleri ile artmıştır. Özısı sıcaklık grafiklerinde ise, özısının büyük g değerleri için belli bir sıcaklıkta üç boyuttakine benzer bir azalma gösterdiği ancak bu azalmanın miktarının çok az olduğu görülmektedir. Bu iki boyutta harmonik tuzaktaki bozonların özısılarının faz geçişi sırasındaki



Şekil 3.8. $s=1$ ve 1D'de parçacık başına özısı-sıcaklık grafiği.

azalmasının üç boyuta göre çok düşük olması ile açıklanabilir. Bir boyuttaki bozonlarda özısının süreksizlik gösterdiği bir faz geçişi yoktur bu yüzden bir boyutta g nin hiçbir değeri için özısında bir azalma görülmez. Ayrıca, bir boyut ve $s = 2$ için Şekil 3.6'daki grafikte değişen g değerlerine rağmen özısı tek bir değer almıştır. Yani bir boyutta özısı g parametresinden bağımsızdır.

Son olarak bir boyutta enerjisi görelî (rölativistik) sistemlerdekine benzer biçimde p ile orantılı olan bir sistem için enerji ve özısının sıcaklıkla değişimi Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 de verilmiştir. Bu grafikler iki boyutta enerji ifadesinin p^2 ile orantılı olduğu sistemlerdeki toplam enerji ve özısı grafiklerine benzemektedir.

3.3. GENTİLE İSTATİSTİĞİNE UYAN PARÇACIKLARIN TERMODİNAMİĞİ

Bu bölümde D-boyutta tuzaklanmış harmonik potansiyel içindeki, Gentile istatistiğine [14] uyan parçacıkların termodinamik nicelikleri gösterilecektir. Öncelikle basınç ifadesini elde edelim. (2.2.34) genelleştirilmiş basınç denkleminde, harmonik tuzağın durum yoğunluğu ifadesi (3.1.3) yerine yazılarak

$$P = -\frac{k_B T}{V} \gamma \int_0^\infty \varepsilon^{\left(\frac{D}{s} + \frac{D-2}{2}\right)} \ln \left[\frac{\left[1 - \exp\left(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_k)(G+1)\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_k)\right)\right]} \right] d\varepsilon \quad (3.3.27)$$

bulunur. Bu integralde $dv = \varepsilon^{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} d\varepsilon$ ve $u = \ln \left\{ \frac{(G+1)e^{\beta(\mu-\varepsilon)} - Ge^{\beta(\mu-\varepsilon)(G+2)} - e^{\beta(\mu-\varepsilon)}}{[1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon)}][1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon)(G+1)}]} \right\}$ tanımları yapıp kısmi integrasyon uygulandığında

$$P = -\frac{1}{V\left(\frac{D}{s} + \frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \frac{(G+1)e^{\beta(\mu-\varepsilon)} - Ge^{\beta(\mu-\varepsilon)(G+2)} - e^{\beta(\mu-\varepsilon)}}{(1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon)})(1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon)(G+1)})} d\varepsilon \quad (3.3.28)$$

ifadesi elde edilir. (2.2.28) Gentile dağılımı ve (3.1.3) eşitliğindeki durum yoğunluğu denklemini kullanarak genelleştirilmiş basınç ifadesinin

$$PV = \frac{1}{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \int_0^\infty D(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.3.29)$$

şeklinde olduğu görülür. Bilindiği gibi (3.3.29) denklemindeki integral ifadesi, (3.2.8) de verilen toplam enerji integralidir. Buradan genelleştirilmiş basınç ifadesi

$$PV = \frac{E}{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \quad (3.3.30)$$

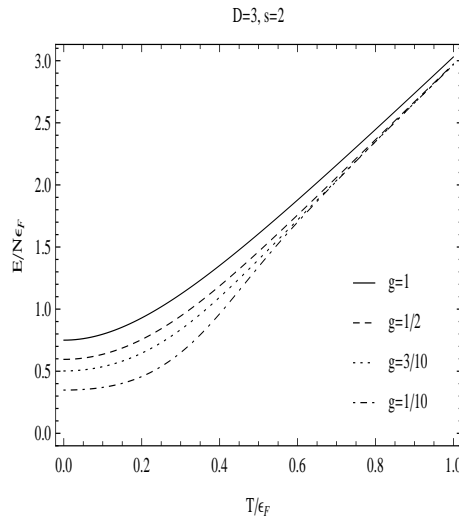
bulunur. Sistemin toplam entropisi ise $S = \frac{E}{T} + \ln Z - \frac{N\mu}{T}$ ilişkisi kullanılarak

$$S = \frac{E}{T} \left[1 + \frac{1}{\frac{D}{s} + \frac{D}{2}} \right] - \frac{N\mu}{T}. \quad (3.3.31)$$

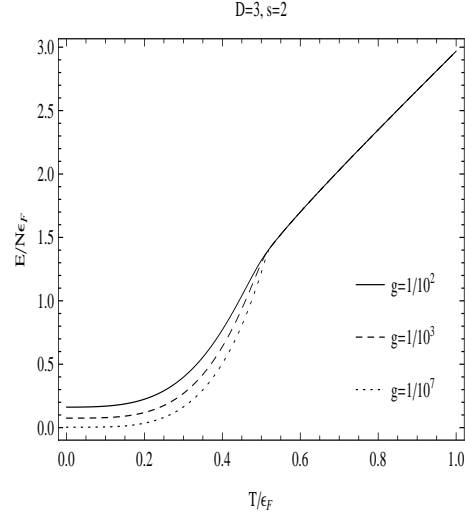
şeklinde bulunur. Bu sonuçlar Haldene istatistiğini inceleyen bu ünitenin önceki bölümlerinde tanımlanan [1]'deki genelleştirilmiş basınç ve toplam entropi ifadeleri ile aynıdır (3.2.25), (3.2.26).

3.3.1. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde farklı boyutlarda harmonik potansiyel içindeki, Gentile istatistiğine uyan parçacıkların değişik g değerlerinde, enerji-sıcaklık, kimyasal potansiyel-sıcaklık ve özısı-sıcaklık grafikleri gösterilecektir. Bu grafiklerde de (3.2) bölümünde olduğu gibi $k_B = 1$ alınmıştır.

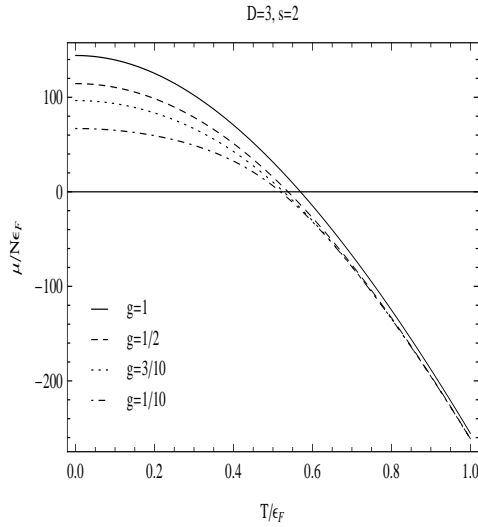


Şekil 3.9. 3D ve s=2'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği-1.



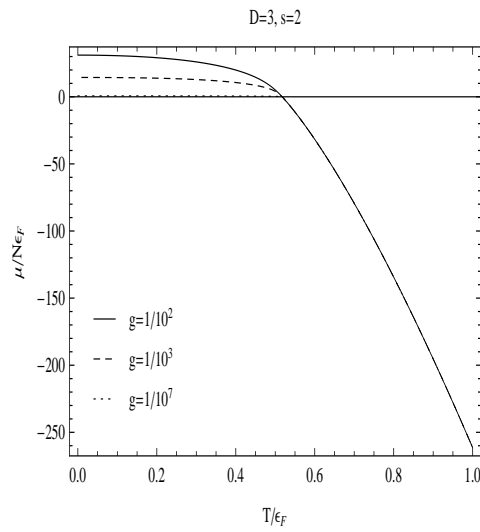
Şekil 3.10. 3D ve $s=2$ 'de parçacık başına enerji-sıcaklık grafiği-2.

Şekil 3.9 ve şekil 3.10'da $D = 3$ ve $s = 2$ için parçacık başına enerji sıcaklığın bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Şekillerden de görülebileceği gibi verili bir sıcaklıkta daha düşük g değerlerine sahip parçacıklardan oluşan sistemin toplam enerjisi daha azdır. Bu özellik şu şekilde açıklanabilir: g azaldıkça bir duruma girebilen parçacık sayısı artar. Bu yüzden sabit bir N değeri için g azaldıkça



Şekil 3.11. 3D ve $s=2$ 'de parçacık başına kimyasal potansiyel-sıcaklık grafiği-1.

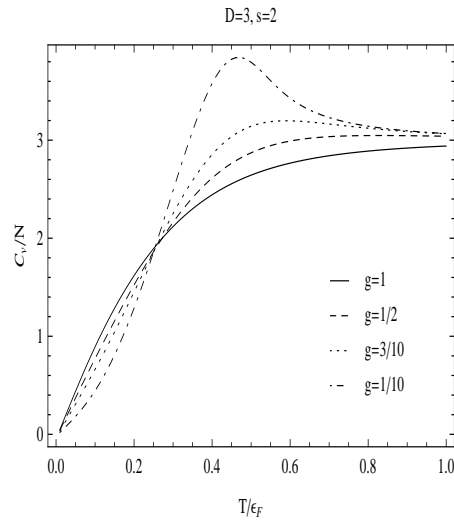
bir duruma girebilen parçacık sayısı artar. Bu yüzden taban durumu ve ona yakın seviyelere giren parçacık sayısı arttığından üst durumlara yerleşen parçacık sayısı azalacaktır. Böylece g azaldıkça toplam enerji de azalır. Şekil 3.10'da g parametresinin sıfıra yakın değerlerinde (bozonlara yaklaşan değerlerde) bozon gazındakine benzer faz geçişlerinin olduğu görülmektedir. Bu özellikler bir önceki bölümde tanımlanan Haldene istatistiğine uyan parçacıklarda da görülmüştür. Bunun nedeni olarak her iki sisteminde genelleştirilmiş Pauli dışarlama ilkesine uyması olarak gösterilebilir. Ayrıca Sıcaklık arttıkça Bose-Einstein ve Fermi-Dirac dağılımları arasındaki farkın önemsizleşip, hem bozonların hemde fermiyonların Maxwell-Boltzman istatistiğine benzer bir davranış gösterdiği bilinmektedir [5].



Şekil 3.12. 3D ve s=2'de parçacık başına Kimyasal Potansiyel-Sıcaklık grafiği-2.

Şekil 3.11 ve şekil 3.12'de verili durumda g parametresinin farklı değerlerine karşılık kimyasal potansiyel, sıcaklığın bir fonksiyonu olarak çizilmiştir. Bu şekillerden de görüldüğü gibi verili bir sıcaklıkta kimyasal potansiyel g değeri ile azalmaktadır. Bilindiği gibi, kimyasal potansiyel, sisteme bir parçacık ekleyebilmek için, o sisteme verilmesi gereken minimum enerji miktarı olarak tanımlanmaktadır [40]. Bu tanımın uygunluğu Gentile dağılımında daha iyi

görülebılır: Fermiyonlar ($g = 1$) için sisteme eklenen yeni bir parçacık genellikle sistemdeki en büyük enerjiye sahip parçacıktan daha üst enerji seviyelerine yerleşir. Oysa g değeri azaldıkça yeni eklenen parçacıklar sistemde varolan parçacıklarla aynı seviyelere yerleşebilirler. Ayrıca bir enerji seviyesinde birden fazla parçacık bulunabildiğinden enerjisi en fazla olan parçacık(lar)ın enerjileri de, benzer bir sistemdeki fermiyonlardan daha düşük olacaktır. Bu yüzden, g değeri azaldıkça sisteme yeni bir parçacık eklemek için gerekli enerji miktarı dolayısıyla da kimyasal potansiyel daha düşük değerler alır. Şekil 3.12’de ise g ’inin çok küçük değerlerinde, 0 K civarında bozonlardakine benzer olarak kimyasal potansiyelin taban enerji seviyesine yaklaştığı görülmektedir.

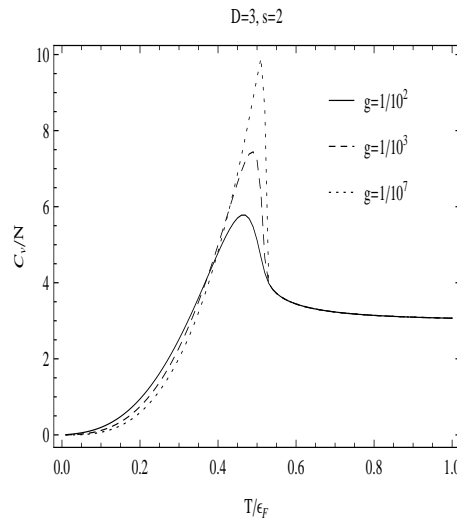


Şekil 3.13. 3D ve $s=2$ ’de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği-1.

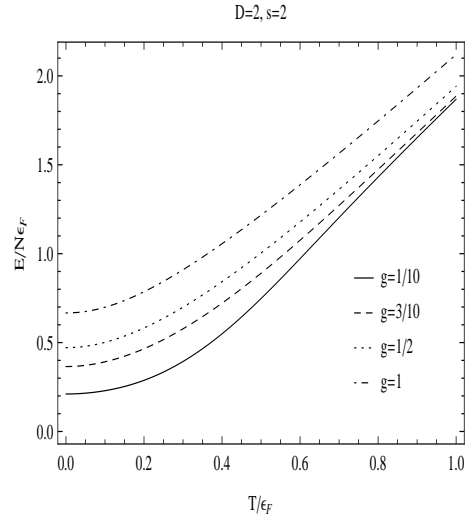
Şekil 3.13 ve şekil 3.14’de üç boyutlu uzayda, özısı sıcaklığın bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. $g = 1$ için özısı değerleri fermiyon dağılımına uyarken, g ’nin azalan değerlerinde bozon dağılımına benzer eğriler elde edilmiştir. Şekil 3.14’de ise g parametresinin çok küçük değerler alması ile birlikte belli bir sıcaklıkta faz geçişine uğrayan bozon davranışı daha açık görülebilmektedir. Bu sonuç Haldene istatistiğine uyan parçacık davranışlarının incelendiği, [1]’deki sonuçlarla da uyumludur.

Şekil 3.15’de iki boyutlu uzayda parçacık başına düşen enerji ifadesi sıcaklığın bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Aynı değişimi üç boyutta veren şekil 3.9’a kıyasla, azalan g parametresine karşılık gelen enerji değerleri arasındaki fark artmıştır. Bunun nedeni ise iki boyutlu tuzakta aynı enerji değerlerine karşılık gelen katlılığın diğer bir deyişle yozlaşmanın üç boyuttakine göre daha az olmasıdır. Yozlaşma azaldığından düşük enerji değerlerindeki durum sayısı azalacağından sabit bir N değeri için daha üst enerji seviyelerine giren parçacıkların sayısı artacaktır. Bu g arttıkça parçacıkların daha üst seviyelere yerleşmelerine yol açar. Bu yüzden daha büyük g değerlerine sahip parçacıklarla daha düşük g değerlerine sahip parçacıklar arasındaki enerji farkı da artacaktır. Haldene istatistiğine uyan parçacıklar için de durum yoğunluğu aynı olduğundan bu parçacıklar da benzer davranışlar göstermektedir [1].

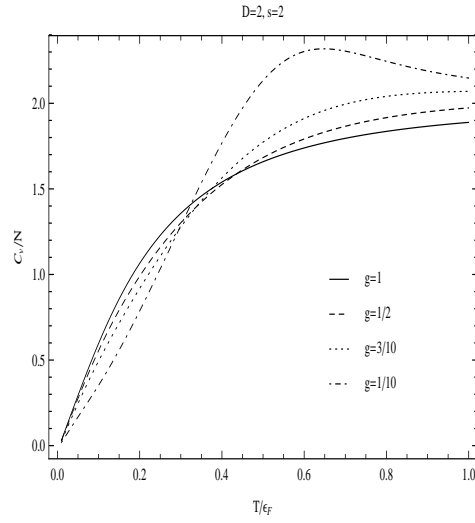
Şekil 3.16’da $D = 2$ ve $s = 2$ için, parçacık başına düşen özısının sıcaklığa göre değişimi verilmiştir. Bu durumda da azalan g değerlerinde bozon davranışına benzer eğriler görmek mümkündür, ancak elde edilen bu grafik şekil 3.13 ile karşılaştırıldığında, şekil 3.13’te bozon davranışının daha belirgin olduğu



Şekil 3.14. 3D ve s=2’de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği-2.



Şekil 3.15. 2D ve $s=2$ 'de parçacık başına Enerji-Sıcaklık grafiği.

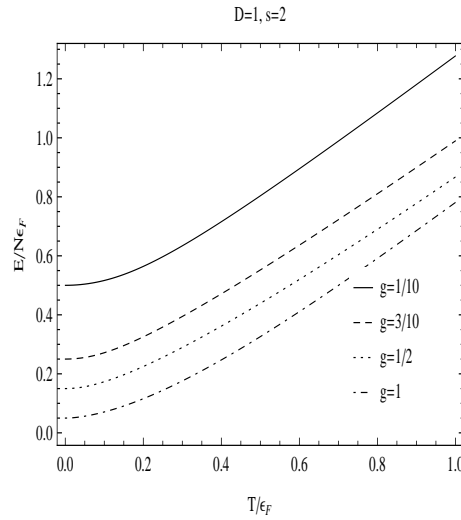


Şekil 3.16. 2D ve $s=2$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği.

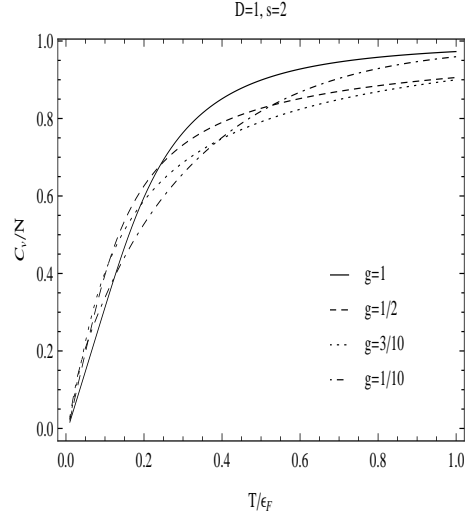
açıktır. Bu da boyuttaki azalmanın parçacıkları bozon davranışından az da olsa uzaklaştırdığını göstermektedir. Şekil 3.16’da elde edilen bu sonuç [1]’teki sonuçla uyumludur. Ayrıca şekil 3.15 ve 3.17’den de görülebileceği gibi boyut azaldıkça sıcaklık artışı ile farklı g değerli parçacıkların $E - T$ grafiklerinin tek bir eğriye doğru gidişi 3 boyuta göre daha yavaştır. Buda azalan boyutlarda parçacık türünün farklılığını gösteren g parametresinin daha fazla önem kazandığını göstermektedir. Hatta bir boyutta farklı g değerlerine karşılık gelen $E - T$ grafikleri birbirlerine hiç yaklaşmamaktadırlar.

Şekil 3.17’de bir boyutlu uzayda parçacık başına düşen enerji sıcaklığın bir fonksiyonu olarak verilmiştir. İki ve üç boyutta elde edilen şekil 3.9 ve şekil 3.15 ile karşılaştırıldığında görüldüğü üzere bu durumda da azalan g değerleri ile toplam enerji azalmaktadır. Daha öncede vurguladığımız gibi boyuttaki azalmaya bağlı olarak sistemin katlılığı azaldığından sistemlerin toplam enerjileri arasındaki fark artmıştır.

Şekil 3.18’de bir boyutta ve $s = 2$ durumunda parçacık başına düşen özısının sıcaklığa göre değişimi verilmiştir. g parametresinin azalan değerlerinde bozon



Şekil 3.17. 1D ve s=2’de parçacık başına Enerji-Sıcaklık grafiği.

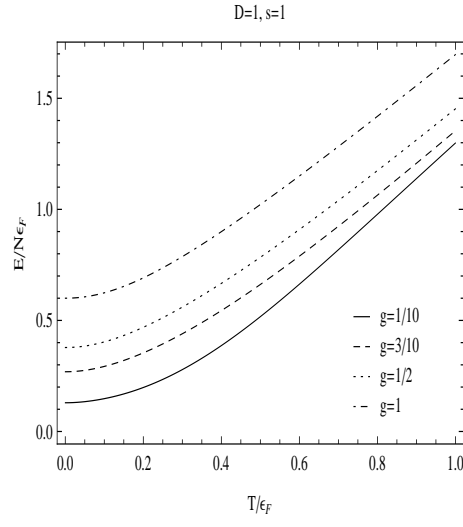


Şekil 3.18. 1D ve $s=2$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği.

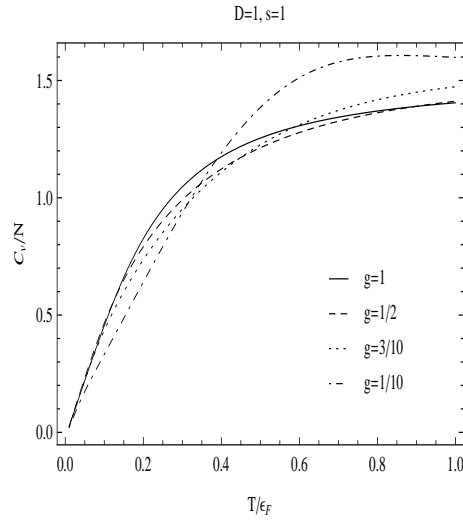
davranışına benzer eğriler elde edilmiştir, ancak elde edilen bu grafik sırası ile üç ve iki boyutta elde edilen şekil 3.13 ve şekil 3.16 ile karşılaştırıldığında, boyuttaki azalmanın parçacıkları bozon davranışından az da olsa uzaklaştırdığını göstermektedir.

Haldene ve Gentile istatistiğine uyan parçacıklar daha önce de vurgulandığı gibi genelleştirilmiş Pauli dışarlama ilkesini sağladıklarından bir çok özellikleri benzerdir. Ancak bu iki dağılıma uyan parçacıklar arasında bazı farklar da görülmektedir. Örneğin $D = 2$, $s = 2$ durumunda şekil 3.4'den de görülebileceği üzere Haldene istatistiğine uyan parçacıklar için g değerinin öz ısıya herhangi bir etkisi yoktur. Her g değerindeki parçacık tüm sıcaklıklarda aynı özısı değerine sahiptir. Oysa Gentile istatistiğinde böyle bir durum gözlenmemiştir. Şekil 3.18'den görülebileceği gibi parçacıkların özısı değerlerinin sıcaklıkla değişimi birbirlerine benzer olsa da aynı değildir.

Son olarak $1D$ 'de enerjisi p ile orantılı olan bir sistem için enerji ve özısı değeri Şekil 3.19 ve Şekil 3.20 de verilmiştir. Bu grafikte $2D$ 'de enerji ifadesi p^2 ile değişen sistemler için çizilmiş grafiklerle benzerlik göstermektedir. Bu sonuç



Şekil 3.19. $s=1$ ve $1D$ 'de parçacık başına Enerji-Sıcaklık grafiği.



Şekil 3.20. $s=1$ ve $1D$ 'de parçacık başına Özısı-Sıcaklık grafiği.

Haldene istatistiğine uyan parçacık davranışlarının incelendiği, [1]'deki sonuçlarla da uyumludur. Özısı için g parametresinin küçük değerlerinde birbirine benzer eğriler elde edilse de g değeri arttıkça özısı değerinin değiştiği görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Tanatar, B., Sevinçli, S. 2007. Thermodynamic properties of harmonically trapped D-dimensional ideal gases within generalized exclusion statistics. **Physics Letters A**, 371: 389-394
- [2] Apaydın, F. 2004. İstatistik fizik. 2. Baskı. Hacettepe Üniversitesi, pp: 135-139, Ankara.
- [3] Dereli, F., Verçin A., 2009. Kuantum Mekaniği Temel Kavranlar ve Uygulamalar. 2. Baskı TÜBA, pp: 154-159 Ankara.
- [4] Khare, A. 2005. Fractional statistic and quantum theory. 2. Baskı, World Scientific, pp:21, New Jersey.
- [5] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. 1997. Thermodynamics and statistical mechanics. Colombia University, pp: 297-313, New York.
- [6] Haldane, F. D. M., 1991. "Fractional statistics" in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle. **Phys. Rev. Lett.**, 67: 937-940
- [7] Wu, Y. S., 1994. Statistical distribution for particles obeying fractional statistics, **Phys. Rev. Lett.**, 72: 922-925.
- [8] Bhaduri, R., K., Murthy, M., V., N., Srivastava, M., K., 2007. Fermions at unitarity and Haldane exclusion statistics, **J. Phys B.: At. Mol. Opt. Phys.**, 40: 1775-1780
- [9] Batchelor, M., T., Guan, X., -W., Oelkers, N., 2006. One-dimensional interacting anyon gas: Low-energy properties and haldane exclusion statistics, **Phys. Rev. Lett.**, 96, 210402
- [10] Hansson, T.H., Leinaas, J.M., Viefers, S., 2001. Exclusion statistics in a trapped two-dimensional Bose gas. **Phys. Rev. Lett.**, 86: 2930-2933
- [11] Batchelor, M., T., Guan, X., -W., 2006. Generalized exclusion statistics and degenerate signature of strongly interacting anyons. **Phys. Rev.B**, 74: 195121
- [12] Khare, A. 2005. Fractional statistic and quantum theory. World Scientific, 2. Baskı, pp:145-147, New Jersey.
- [13] Büyükkılıç, F., Uncu, H., Demirhan, D. 2003. Thermostatistics of the g-on gas. **Eur. Phys. J.B.**, 35: 111-116

- [14] Gentile, G., 1940. Osservazioni sopra le statistiche intermedie. **Nuovo Cim.**, 17: 493-497
- [15] Ramanathan, R. 1993. Further aspects of an interpolative quantum statistics. **Physical Review E**, 48: 843-845
- [16] Ramanathan, R. 1995. Implications of interpolative quantum statistics - a review. **Modern Physics Letters B**, 9: 135-143
- [17] Rajagopal, AK. 1996. Von Neumann and Tsallis entropies associated with the Gentile interpolative quantum statistics. **Physics Letters A**, 214: 127-130
- [18] Hikami, K. 1998. Statistical mechanical interpretation of the inverse scattering method: Level dynamics for exclusion statistics. **Physical Review Letters**, 80: 4374-4377
- [19] Oshima, H., Obata, T., Hara, H. 1999. Riemann scalar curvature of ideal quantum gases obeying Gentile's statistics. **Journal of Physics A-Mathematical and General**, 32: 6373-6383
- [20] Bytsko, A. G. 2001. Thermodynamic Bethe ansatz for generalized extensive statistics. **Nuclear Physics B**, 604: 455-478
- [21] Wang, Q. A., Nivanen, L., Le Mehaute, A., et al. 2003. About an alternative distribution function for fractional exclusion statistics. **Nuovo Cimento Della Societa italiana di Fisica B-General Physics Relativity Astronomy and Mathematical Physics and Methods**, 118: 635-640
- [22] Dai, W. S., Xie, M. 2004. A representation of angular momentum (SU(2)) algebra. **Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications**, 331: 497-504
- [23] Dai, W. S., Xie, M. 2004. Gentile statistics with a large maximum occupation number. **Annals of Physics**, 309: 295-305
- [24] Srivatsan, C. S., Murthy, MVN., Bhaduri, RK. 2006. Gentile statistics and restricted partitions. **Pramana-Journal of Physics**, 66: 485-494
- [25] Hernandez-Perez, R., Tun, Dionisio. 2007. Complete state counting for Gentile's generalization of the Pauli exclusion principle. **Physica A-Statistical Mechanics and Its applications**, 384: 297-304
- [26] Dai, W. S., Xie, M. 2009. Do bosons obey Bose-Einstein distribution: Two iterated limits of Gentile distribution. **Physics Letters A**, 373: 1524-1526

- [27] Auccaise, R., Teles, J., Bonagamba, T.J., Oliveira, I.S., Azevedo, E. R., Sarthour, R.S. 2009. NMR quadrupolar system described as Bose-Einstein-condensate-like system. **Journal of Chemical Physics** 130: 144501
- [28] Rovenchak, A. 2009. The relation between fractional statistics and finite bosonic systems in the one-dimensional case. **Low Temperature Physics**, : 35: 400-403
- [29] Shen, Yao., Ai, Q., Long, G. L. 2010. The relation between properties of Gentile statistics and fractional statistics of anyon. **Physica A-Statistical Mechanics and Its applications**, 389: 1565-1570
- [30] Nemnes, G. A., Anghel, D. V. 2010. Stochastic simulations for the time evolution of systems which obey generalized statistics: fractional exclusion statistics and Gentile's statistics. **Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment**, P09011
- [31] Behrouz, M., Hosein, M. 2010. Thermodynamic geometry of fractional statistics. **Physical Review E**, 82: 031137
- [32] MacDonald, Z., van Zyl, B.P. 2013. Finite temperature analytical results for a harmonically confined gas obeying exclusion statistics in d-dimensions. **Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical**, 46: 045001
- [33] Dai, W.S., Xie, M. 2013. Calculating statistical distributions from operator relations: The statistical distributions of various intermediate statistics. **Annals of Physics**, 332: 166-179
- [34] Shen, Y., Jin, B-Y. 2013. Correspondence between Gentile Oscillators and N-Annulenes. **Journal of Physical Chemistry A**, 117: 12540-12545
- [35] Ryabov, A. 2014. Zero-range process with finite compartments: Gentile's statistics and glassiness. **Physical Review E**, 89: 022115
- [36] Maslov, V. P. 2014. The relationship between the van-der-waals model and the undistinguishing statistics of objectively distinguishable objects. the new parastatistics. **Russian Journal of Mathematical Physics** 21: 99-111
- [37] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. 1997. Thermodynamics and statistical mechanics. Columbia University, pp:129-130 , New York.
- [38] Romero-Rochin V. 2005. Equation of state of an interacting Bose gas confined by a harmonic trap: The role of the "harmonic" pressure. **Phys. Rev. Lett.**, 94: 010402.

- [39] Petchick, C.J., Smith, H. 2008. Bose-Einstein condensation in dilute gases. 2. baskı. Cambridge University Press, pp:36-38, New York
- [40] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. 1997. Thermodynamics and statistical mechanics. Columbia University, pp: 13-15, New York.

A. Gentile Dağılımı İçin İstatistiksel Ağırlık

1.1. Yöntemin Tanıtılması

Gentile istatistiği, bir kuantum durumuna fermiyonlardan farklı olarak birden çok, bozonlardan farklı olarsa sınırlı sayıda (q tane) parçacık girmesi durumunda Fermi-Dirac ve Bose-Einstein istatistiklerinin nasıl değiştiğini inceler. Bölüm (2.2.2.)’de de ifade edildiği üzere Gentile, istenilen bu tür parçacıklar için genelleştirilmiş bir bölüşüm fonksiyonu önerdi. Ancak önerilen bu bölüşüm fonksiyonunun nasıl bir istatistiksel ağırlığa yol açtığı tam olarak bilinmemektedir. Litaratürde bu istatistiksel ağırlığı bulmak için bir çalışma yapılmış olsa bile bu çalışma olası tüm q , N ve G değerleri için sonuç vermemektedir [25] (Burada q bir duruma girebilecek maksimum parçacık sayısını, N toplam parçacık sayısını ve G durum sayısını belirtmektedir). R. Hernandez-Perez, Dionisio Tun’ un yaptıkları çalışmada, girilebilir durum sayısı için:

$$W_q = \binom{G+N-1}{N} - G \binom{G+N-q-2}{N-q-1} \quad (1.1.1)$$

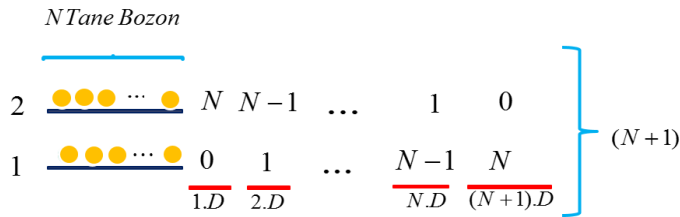
eşitliğini elde etmişlerdir [25]. Bu ifade $q \geq [N/2]$ değerleri için tam çözüm, $q < [N/2]$ değerlerinde ise yaklaşık çözüm vermektedir. Ayrıca $G \geq N$ için

$$W_q(G, N) = \sum_{j=0}^{[N/q]} \binom{G}{j} W_{q-1}(G-j, N-qj) \quad (1.1.2)$$

yine genel bir formül elde etmişlerdir.

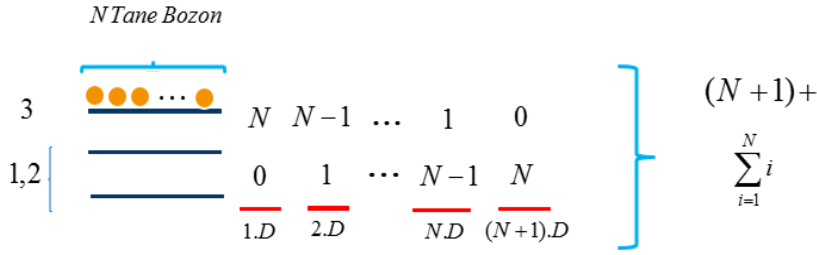
Şimdi Gentile’nin önerdiği genelleştirilmiş bölüşüm fonksiyonuna karşılık gelen istatistiksel ağırlığını bulmak için yeni bir yöntem tanıtacağız. Bu yöntem bozonların girilebilir durum sayılarının belirlenmesinde ikinci bir yöntem olarak kullanılabilir. Daha anlaşılabilir olması açısından önce bu yöntemi kullanarak bozonların istatistiksel ağırlığının nasıl bulunacağını anlatıp ardından yöntemi Gentile dağılımına genelleştirelim.

$$G = 2$$



Şekil A.1. N farklı bozonun 2 duruma dağılımı

$$G = 3$$



$$(N+1) + \sum_{i=1}^N i = (N+1) + \frac{N(N+1)}{2}, \quad \frac{(N+2)(N+1)}{2} = \binom{N+3-1}{3-1} = \binom{N+2}{2}$$

Şekil A.2. N farklı bozonun 3 duruma dağılımı

N tane özdeş bozon (bozonlar için $q = 0$) $G = 2$ duruma

$$W(2, N) = N + 1 \quad (1.1.3)$$

farklı şekilde yerleştirilebilir (Bkz. Şekil A.1). N tane bozonun 3 duruma kaç farklı şekilde yerleşebileceği, bu bozonların 2 duruma $W(2, N) = N + 1$ farklı şekilde yerleştiğini veren ifade kullanılarak bulunabilir. Bunun için 3 gruptan birini ayırıp bu gruba sırası ile $N, N-1, \dots, j, \dots, 1, 0$ tane parçacık girdiğini düşünelim. Ayırdığımız durumda j tane parçacık var iken kalan diğer iki durumda $N-j$ tane parçacık bulunur (Bkz. Şekil A.2). Bu $N-j$ parçacığın 2 duruma $N-j+1$ farklı şekilde yerleşebileceğini (1.1.3) denkleminde biliyoruz. Böylece her farklı j için ($j = 0, 1, \dots, N$), $G = 2$ durumdaki yerleşim sayılarını toplayarak, N bozonun 3 duruma kaç farklı şekilde yerleşebileceği bulunmuş olur:

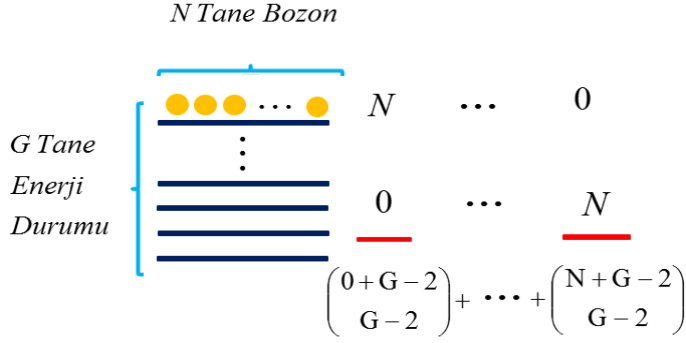
$$W(3, N) = \sum_{i=1}^{N+1} i = \frac{(N+2)(N+1)}{2} \quad (1.1.4)$$

farklı şekilde yerleşir. Bu ifadeyi

$$W(3, N) = \binom{N+3-2}{3-1} \quad (1.1.5)$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu şekilde devam edilerek aynı mantık G farklı duruma uygulandığında

$$W(G, N) = \sum_{i=0}^N \binom{G+i-2}{G-2} \quad (1.1.6)$$



Şekil A.3. N farklı bozonun G duruma dağılımı

bulunur. Bu ifade

$$\sum_{i=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad (1.1.7)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanıp bozonlar için girilebilir durum sayısı tümevarım yöntemiyle de türetilir:

$$W(G, N) = \binom{N+G-1}{G-1}. \quad (1.1.8)$$

Aynı mantık değişen şartları gözönüne alarak Gentile istatistiğine uyan parçacıkların girilebilir durum sayılarının belirlenmesinde de kullanılabilir. Bozonlardakine benzer şekilde öncelikle verili bir q değerinde N tane özdeş parçacığın $G = 2$ enerji durumuna kaç farklı şekilde dağılabileceğini inceleyelim. $q \geq N$ ise, Gentile dağılımı bozon dağılımı ile aynı olacağından $(N+1)$ yerleşim olduğunu biraz önce göstermiştik. $q < N$ olduğu durum incelendiğinde ise $W_q(2, N) = 2q - N + 1$ durum olduğu bulunur.

$$G = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2q - N + 1 & q \leq N \leq 2q \\ N + 1 & N \leq q \end{cases} \quad (1.1.9)$$

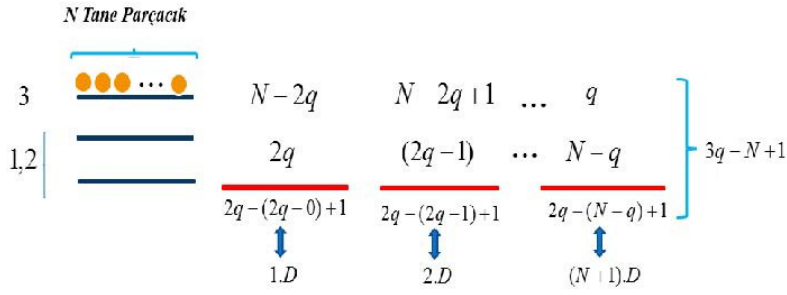
Benzer şekilde N tane özdeş Gentile parçacıklarının $G = 3$ enerji durumuna kaç farklı şekilde dağıtılabileceği incelendiğinde, toplam parçacık sayısı $2q \leq N \leq 3q$ aralığında olduğu durumda: Şekil A.4' tende görülebileceği üzere $W_q(3, N) = \sum_{i=1}^{3q-N+1} i$ toplamına eşittir. Bu toplamı daha açık olarak

$$W_q(3, N) = \sum_{i=1}^{3q-N+1} i = \frac{(3q+2-N)(3q+1-N)}{2} \quad (1.1.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi

$$W_q(3, N) = \binom{3q-N+2}{2} \quad (1.1.11)$$

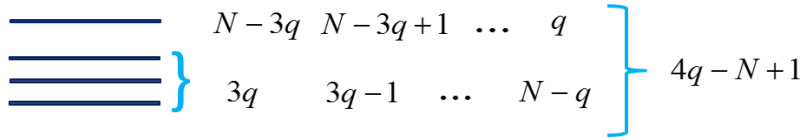
$$G = 3, \quad 2q \leq N \leq 3q$$



Şekil A.4. N tane Gentile parçacığının 3 duruma dağılımı

biçiminde ifade etmek, bulmak istediğimiz genel formül için kolaylık sağlayacaktır. Yapılan hesaplara benzer şekilde bu kez toplam parçacık sayısı $3q \leq N \leq 4q$ arasında olmak üzere N tane özdeş parçacığın $G = 4$ enerji durumuna kaç farklı şekilde dağıtılacağı incelendiğinde, olası durumlar şekil A.5 görüldüğü üzere

$$G = 4, \quad 3q \leq N \leq 4q$$



$$\sum_{i=1}^{4q-N+1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(4q+3-N)(4q+2-N)(4q+1-N)}{3!}$$

Şekil A.5. N tane Gentile parçacığının 4 duruma dağılımı

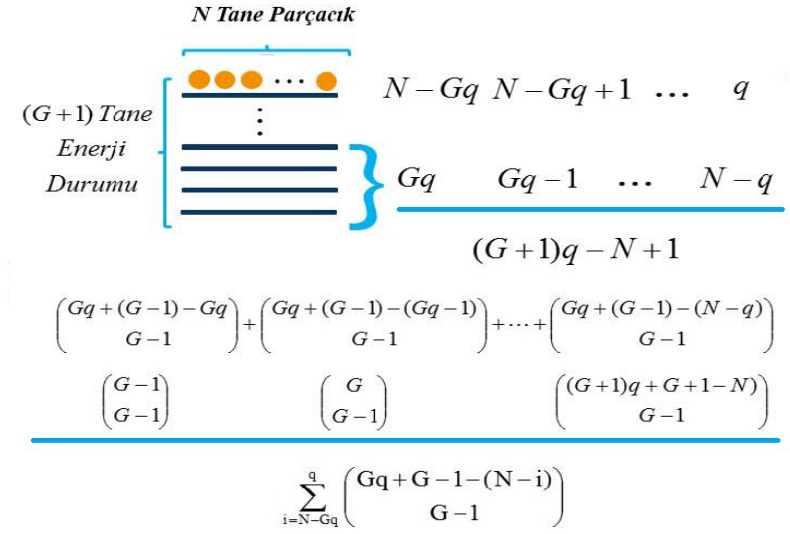
$$W_q(4, N) = \sum_{i=1}^{4q-N+1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(4q+3-N)(4q+2-N)(4q+1-N)}{3!} \quad (1.1.12)$$

biçimindedir. Aynı mantıkla devam edilirse tümevarım yöntemi ile genelleştirilmiş bir formül elde edilebilir. G tane enerji durumu ve toplam parçacık sayısı $(G-1)q \leq N \leq Gq$ olduğu durumda, $W_q(G, N)$ girilebilir durum sayısının

$$W_q(G, N) = \frac{(Gq+G-1-N)!}{(G-1)!(Gq-N)!} \quad (1.1.13)$$

olduğunu kabul edelim. Bu kabülü ve tümevarım yöntemini kullanarak benzer bir formülün $(G+1)$ enerji durumu için de geçerli olduğunu gösterip, (1.1.13)

denklemini kanıtlayalım. Bu amaçla $(G + 1)$ enerji seviyesine N tane parçacığın kaç farklı şekilde yerleşebileceğini inceleyelim. Şekil A.6'dan da görülebildiği



Şekil A.6. N tane Gentile parçacığının G duruma dağılımı

üzere (1.1.13) denklemini kullanarak $(G + 1)$ duruma toplam yerleşimin sayısı

$$W_q(G+1, N) = \sum_{i=N-Gq}^q \frac{[Gq + G - 1 - (N-i)]!}{(G-1)!(Gq-N)!} \quad (1.1.14)$$

denklemini aracılığı ile bulunur. Bu toplam başka bir ifade ile

$$W_q(G+1, N) = \sum_{i=N-Gq}^q \binom{Gq + G - 1 - (N-i)}{G-1} \quad (1.1.15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte i koşan indisi yerine $k = Gq + G - 1 - (N - i)$ indisi kullanılarak ve (1.1.7) denklemini aracılığı ile (1.1.14) ifadesinin (1.1.13)

$$W_q(G, N) = \binom{(G+1)q + G - N}{G} \quad (1.1.16)$$

ifadesine eşdeğer olduğu görülebilir.

Buraya kadar toplam enerji seviyesi G iken parçacık sayısı $[(G-1)q, (Gq)]$ aralığında olan durumları inceledik. Yani g parametresine bağlı olarak, $(G-1)$ enerji durumuna kadar tüm seviyeler dolu olduğu durumda, kalan parçacıkların G . enerji seviyesine kaç farklı şekilde yerleşebileceğini veren genel bir ifade bulduk. Ancak her zaman toplam parçacık sayısı bu şekilde olmayabilir. q parametresi bir enerji seviyesine yerleşebilecek maksimum parçacık sayısını vermek üzere G

enerji durumuna sahip bir sistem için toplam parçacık sayısı $(G - 1)q$ dan küçük olabilir. Bu durumda istatistiksel ağırlıklar toplamlardan oluşan ardışık bir formül ile bulunabilir. $\alpha = \left[\frac{N}{q} \right]$ ve $\alpha \neq (G - 1)$ olmak üzere toplam parçacık sayısı $\alpha q \leq N \leq (\alpha + 1)q$ aralığında değerler aldığı anda istatistiksel ağırlık tümevarım mantığı kullanılarak

$$W_q(G, N) = \sum_{i=0}^q W_q(G - 1, N - i) \quad (1.1.17)$$

bulunur.

ÖZ GEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Sevilay Selvi
Doğum Yeri ve Tarihi : SİVAS 27/10/1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

-Ulusal : **Selvi, S.** , Uncu, H.
: Gentile İstatistiğinde Girilebilir Durum Sayısının
: Belirlenmesi, İstatistik Fizik Günleri,
: Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 19-21 Haziran 2014
: (SÖZLÜ SUNUM), 20/06/2014.

İLETİŞİM

E-posta Adresi : selvisvly@hotmail.com
Tarih : 11.08.2014