T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-YL-007

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS GEOMETRİ

Cihan TURAN

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Sibel SEVİNÇ

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Cihan TURAN tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Kompleks Geometri" başlıklı tez, 22.07.2020 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof.Dr. Leyla ONAT	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sibel SEVİNÇ	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Gülşah AYDIN ŞEKERCİ	SDÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

22.07.2020

Cihan TURAN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS GEOMETRİ

Cihan TURAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sibel SEVİNÇ
2020, 41 sayfa

Bu tezin amacı, genelleştirilmiş kompleks geometri kavramını incelemek ve bu kavramla ilgili önemli bazı özellikleri araştırıp, bu özellikleri de bazı örneklerle desteklemektir. Uzun yıllar boyunca matematikçiler ve fizikçiler, ayna simetrisi ile ortaya çıkan kompleks ve simplektik geometriler arasındaki bağıntıları çalışmışlardır. Bu tezde de temel olarak kompleks ve simplektik yapılar çalışılacak, bu iki yapı arasındaki ilişkiler incelenecektir. Daha sonra genelleştirilmiş kompleks ve simplektik yapılar üzerine bazı teoriler irdelenecektir. Ayrıca kontakt manifoldların genelleştirilmiş kompleks yapı ile ilişkisi irdelenmiştir.

Bu konuda yazılmış makaleler ve konu ile ilgili kitaplar, veri toplama konusunda esas materyalleri oluşturmaktadır. Çalışmanın yöntemi ise; önce literatür taramasıyla şimdiye kadar konuyla ilgili yapılan çalışmaları bulup inceleme ve elde edilen bilgiler ışığında yeni teoriler ve örnekler verme şeklinde olacaktır. Yani, çalışma süresince kompleks geometri, diferensiyel geometri ve teorik fizikte kullanılan yöntemler, öncelikli kullanılacak yöntemlerdir.

Anahtar Sözcükler: Kompleks geometri, genelleştirilmiş kompleks geometri, genelleştirilmiş kompleks yapılar, kompleks yapı, simplektik yapı, genelleştirilmiş kompleks manifoldlar, kontakt manifoldlar.

ABSTRACT

ON GENERALIZED COMPLEX GEOMETRY

Cihan TURAN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Asts. Prof. Sibel SEVİNÇ
2020, 41 pages

The aim of this thesis is to examine the concept of generalized complex geometry and to investigate some important features related to this concept and to support these features with some examples. For many years, mathematicians and physicists have studied the relationship between mirror symmetry and complex and symplectic geometries. In this thesis, mainly complex and symplectic structures will be studied and the relations between these two structures will be examined. Then, some theories on generalized complex and symplectic geometries will be examined.In addition,the relationship in the contact manifolds with the generalized complex structure is examined.

Articles and books on this subject constitute are the main materials for data collection. The method of the study; firstly, the literature review will be in the form of finding and examining the studies done so far and giving new theories and examples in the light of the information obtained. That is, the methods used in complex geometry, differantial geometry and theoterical physics during the study are the methods to be used with priority.

Key Words: Complex geometry, genaralized complex geometry, genaralized complex structures, complex structure, symplectic structure, genaralized complex manifolds, contact manifolds.

ÖNSÖZ

Tez çalıma dönemim boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik ve bilimsel bakış açısı geliştirmeme zemin hazırlayan saygıdeğer danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sibel SEVİNÇ'e , ayrıca tez dönemim boyunca yardımını esirgemeyen saygıdeğer arkadaşım Sayın Metin ASLAN'a ve manevi desteklerini her zaman hissettiren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Cihan TURAN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI v
ÖZET vii
ABSTRACT ix
ÖNSÖZ xi
SİMGELER DİZİNİ xv

1. GİRİŞ 1

2. TANIM VE ÖZELLİKLER 2

2.1. Kompleks Vektör Uzayı 2
2.2. Simplektik Vektör Uzayı 3
2.3. $V \oplus V^*$ Direkt Toplam Uzayının Lineer Cebiri 7
2.4. $V \oplus V^*$ Direkt Toplam Uzayının Simetrileri 8
2.5. Maksimal İzotropik Altuzaylar 10
2.6. Lie çarpımı 11
2.7. Courant Braketi 12
2.8. Twisted (Bükülmüş) Courant Braketi 14
2.9. Courant Braketinin Simetrileri Olarak B- Alan Dönüşümleri 15
2.10. Dirac Yapılar 17

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS YAPILAR 19

3.1. Jacobi Özdeşliğinin Eksikliği 19
3.2. Genelleştirilmiş Kompleks Yapıların Lineer Cebiri 21
3.3. Örnekler 25

4. KONTAKT MANİFOLDLAR 29

4.1. $\varepsilon^1(M)$ Dirac Yapıları 29
4.2. Kontakt Yapıların Karakterizasyonu 31
4.3. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar 32
4.4. Hemen Hemen Kontakt Yapılar 33
4.5. İntegrallenebilme 35
4.6. Normal Hemen Hemen Kontakt Yapılar 36

KAYNAKLAR 39

ÖZGEÇMİŞ 41

SİMGELER DİZİNİ

$Ann(E)$	: E in sıfırlayanı
B	: Kapalı 2-form
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cismi
d	: Dış Türev
E	: Vektör demeti
$\mathbb{J}$	: Kompleks yapı
$Ker(\Omega)$	: Ω fonksiyonunun çekirdeği
$\mathbb{H}$	: Reel Kapalı 3-form
Jac	: Jacobitör
$\mathcal{L}$	: Lie türevi
M	: Manifold
Nij	: Nijenhuis operatörü
T_pM	: p noktasında tanjant uzay
TM	: Tanjant demet
T^*M	: Kotanjant demet
V	: Reel vektör uzayı
V^*	: Reel vektör uzayının dual uzayı
$\chi(M)$	: Manifoldun vektör alanlarının uzayı
$\Gamma(M)$	: Manifoldun vektör alanlarının uzayı
$SO(m,m)$	: Özel ortogonal grup
$\mathcal{J}$	: Genelleştirilmiş kompleks yapı
ω	: Simplektik yapı
$<$	: Alt küme
$[,]$	: Parantez operatörü
$\langle,\rangle$	:İç çarpım
$\circ$	: Dorfman braketi
$\bigoplus$	: Direk toplam
$\bigwedge$	: Dış çarpım

1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş kompleks geometri, tanjant ve kotanjant demetlerinin birlikte ele alındığı nispeten geometrinin yeni bir alanıdır. Bu konu ilk olarak N.Hitchin tarafından 2003 yılında tanıtıldı. Hitchin, Dirac yapıları kompleks vektör demetine genişleterek bir kompleks yapı kavramı tanımladı.

Hitchin'in çalışmasının ardından Hitchin'in öğrencileri M. Gualtieri ve G. Cavalcati konuyu geliştirdiler. Aslında Gualtieri'nin doktora tezi bu alandaki ana kaynak kabul edilmektedir. Hitchin'in çalışmasından kısa bir süre sonra bu konunun teorik fiziğin temel çalışma alanlarından biri olan String Teorisi ile ilişkileri olduğu görüldü.

Genelleştirilmiş geometri iki öncül üzerine kuruludur. Birincisi bir M manifoldunun T tanjant demetini $T \oplus T^*$ direkt toplamı ile değiştirmek. İkincisi Lie Braketini Courant Braketi ile değiştirmek. Aslında genelleştirilmiş kompleks geometri tanımlanırken izlenen yol kompleks ve simplektik yapıların birleştirilmesidir. Bunun için de tanjant ve kotanjant demetlerinin $T \oplus T^*$ direkt toplamı üzerinde çalışılacaktır. Direkt toplamın bazı ortogonal simetrileri β alan dönüşümleri yardımıyla elde edilebilir.

$T \oplus T^*$ direkt toplamının düzgün kesitleri Courant braketi denilen doğal bir parantez operatörüne sahiptir. Courant (1990) Dirac yapılar üzerinde çalışırken $V \oplus V^*$ toplamı üzerinde tanımlanan Courant braketini ortaya koymuştur. Bu braket Lie braketinin özel bir hali olup ayrıca $T \oplus T^*$ üzerinde gerekli integrallenebilme koşullarını da sağlamaktadır.

Bu tezin amacı genelleştirilmiş kompleks, simplektik ve kontakt yapılar arasındaki bağıntıları anlamaya çalışmak olacaktır. Yani genelleştirilmiş kompleks yapılar ve kontakt manifoldların karşılık gelebileceği diğer yapılar incelenecektir.

2. TANIM VE ÖZELLİKLER

Tezin bu bölümünde temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir.

2.1. Kompleks Vektör Uzayı

V, $n-$ boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde özdeşlik dönüşümü I olmak üzere;

$$J^2 = -I \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan $J : V \to V$ lineer endomorfizmine V vektör uzayında bir kompleks yapı denir. V reel vektör uzayını bir kompleks uzaya dönüştürmek için $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$ ve $X \in V$ olmak üzere;

$$(a+ib)X = aX + bJX \tag{2.1.2}$$

biçiminde bir çarpma işlemi kullanılabilir. Bu çarpma işlemi ile V reel vektör uzayı bir kompleks vektör uzayına dönüştürülebilir. (V,J) ile gösterilen kompleks vektör uzayında, V reel vektör uzayı (V,J) kompleks uzayının temel uzayıdır.
Bu durumda V nin reel $n-$ boyutu çift olmak zorundadır. (V,J) nin kompleks boyutu ise $\frac{n}{2}$ dir. Tersine, J (V,J) kompleks vektör uzayı üzerinde $JX = iX$ şeklinde tanımlı bir lineer endomorfizm olsun. Eğer (V,J) reel $2n-$ boyutlu bir reel vektör uzayı olarak göz önüne alınırsa J, V reel vektör uzayının bir kompleks yapısı olur. Bu durumda söz konusu J kompleks yapısına (V,J) tarafından V üzerine indirgenmiş kompleks yapı adı verilir. [1]

Teorem: J , $2n-$ boyutlu V reel vektör uzayı üzerinde bir kompleks yapı olsun. O zaman $\{e_1, ..., e_n\}$ (V,J) nin bir bazı olmak üzere $\{e_1, ..., e_n, Je_1, ..., Je_n\}$ de V'nin bir bazıdır. [3] [2]

2.2. Simplektik Vektör Uzayı

Tanım: V reel uzayı üzerinde tanımlanan $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $\forall \quad u, v, w \in V$ vektörleri ve $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$ için;

i) $\Phi(u,v) = \Phi(v,u)$

ii) $\Phi(au + bv, w) = a\Phi(u,w) + b\Phi(v,w)$

$$\Phi(u, av + bw) = a\Phi(u,v) + b\Phi(u,w)$$

koşullarını sağlıyorsa, Φ dönüşümüne V reel vektör uzayında bir simetrik bilineer form denir. [4]

Tanım: V bir reel vektör uzayı ve Φ, V üzerinde tanımlı simetrik bilineer bir form olsun. $0 \neq v \in V$ olmak üzere $\forall \quad u \in V$ için $\Phi(u,v) = 0$ oluyorsa Φ simetrik lineer formuna, V üzerinde dejeneredir denir. Aksi takdirde Φ non-dejeneredir.
Non-dejenere için $\forall \quad u \in V$ için $\Phi(u,v) = 0$ iken $v = 0$ dır. [4]

Bir simplektik form kısaca non-dejenere ve kapalı bir 2-formdur. Bir simplektik manifold ise simplektik formlarla donatılmış bir manifolddur. Buna göre simplektik geometri, simplektik manifoldların geometrisidir. Simplektik manifoldlar çift boyutlu ve yönlendirilebilir olmak zorundadır. Kapalılık şartı ise doğal bir diferansiyel denklem olup, bütün simplektik formları lokal olarak benzer yapar. [2]

Tanım: V, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü $\forall \ u,v \in V$ için $\Phi(u,v) = -\Phi(v,u)$ ise Φ ye alterne bilineer dönüşüm (veya anti-simetrik bilineer dönüşüm) denir. [5]

Teorem: Φ, n-boyutlu V reel vektör uzayı üzerinde alterne bilineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri sağlayan V nin bir $u_1,...,u_k,e_1,...,e_n,h_1,...,h_n$ bazı vardır:

$$\begin{aligned} \Phi(u_i,v) &= 0, \qquad \forall v \in V \\ \Phi(e_i,e_j) &= \Phi(h_i,h_j) = 0 \\ \Phi(e_i,h_j) &= \delta_{i,j} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

[5]

İspat: Teoremin ispatı Gram-Schmidt yönteminin bir antisimetrik versiyonu alınarak tümevarımla yapılacaktır. Bunun için ilk olarak V vektör uzayının

$$U = \{u \in V | \Phi(u,v) = 0, \forall v \in V\} \tag{2.2.4}$$

eşitliğiyle verilen U alt uzayı gözönüne alınsın ve $\{u_1,u_2,u_3,...,u_k\}$ kümesi U alt uzayının bir bazı olsun. $U \oplus W = V$ olacak şekilde W alt uzayını sıfırdan farklı e_1 vektörü verilsin. Bu durumda $\Phi(e_1,h_1) \neq 0$ eşitliğini sağlayan $h_1 \in W$ vektörü vardır. Aksi takdirde $W \subset U$ dır. Buna göre $\Phi(e_1,h_1) = 1$ olarak alınabilir.
$W_1 = Sp(e_1,h_1)$ olmak üzere

$$W_1^{\Phi} = \{w \in W : \Phi(w,v) = 0, \quad \forall v \in W_1\} \tag{2.2.5}$$

olsun. Bu durumda $W_1 \cap W_1^{\Phi} = \{0\}$ dır. Bu eşitliğin doğru olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.
Herhangi bir $\alpha \in W_1 \cap W_1^{\Phi}$ için $\alpha = ae_1 + bh_1 \quad (a,b \in \mathbb{R})$ şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda $\alpha \in W_1^{\Phi}$ olduğundan W_1^{Φ} nın tanımından $\Phi(\alpha,e_1) = \Phi(\alpha,h_1) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha,e_1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Phi(ae_1 + bh_1, e_1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad a\Phi(e_1,e_1) + b\Phi(h_1,e_1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad b = 0. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha,h_1)=0 \quad &\Rightarrow \quad \Phi(ae_1+bh_1,h_1)=0 \\ &\Rightarrow \quad a\Phi(e_1,h_1)+b\Phi(h_1,h_1)=0 \\ &\Rightarrow \quad a=0 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

olur. $\alpha = ae_1+bh_1$ olduğundan dolayı $\alpha=0$ elde edilir.
Buradan $W_1 \cap W_1^{\Phi} = \{0\}$ olduğu görülür.
Ayrıca $W_1 \oplus W_1^{\Phi} = W$ dır. Şimdi, herhangi bir $v \in W$ verilsin ve $\Phi(v,e_1)=c$, $\Phi(v,h_1)=d$ olsun. Bu durumda v vektörü ;

$$v=(-ch_1+de_1)+(v+ch_1-de_1) \tag{2.2.8}$$

şeklinde alınabilir. Burada birinci bileşenin W_1 de ikinci bileşenin de W_1^{Φ} da olduğunu göstermek için $\Phi(-ch_1+de_1,v+ch_1-de_1)=0$ olduğu gösterilmeli. Φ alterne bilineer dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} \Phi(-ch_1+de_1,v \quad &+ \quad ch_1-de_1) = -c\Phi(h_1,v)-c^2\Phi(h_1,h_1) \\ &+ \quad cd\Phi(h_1,e_1)+d\Phi(e_1,v)+dc\Phi(e_1,h_1)-d^2\Phi(e_1,e_1) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

hipotezi ele alınırsa $\Phi(-ch_1+de_1,v+ch_1-de_1)=0$ elde edilir. Şimdi sıfırdan farklı $e_2 \in W_1^{\Phi}$ vektörü verilsin. O halde $\Phi(e_2,h_2)\neq 0$ olacak şekilde bir $h_2 \in W_1^{\Phi}$ vardır. $\Phi(e_2,h_2)=1$ ve $W_2=Sp\{e_2,h_2\}$ verilsin. Buradan

$$V=U\oplus W_1\oplus W_2\oplus \ldots \oplus W_n \tag{2.2.10}$$

elde edilir. W_i altuzaylarının baz vektörleri $\Phi(e_1,h_1)=1$ olacak şekildeki e_i,h_i vektörlerinden oluşur. [6]

$$U=\{u\in V|\Phi(u,v)=0, v\in V\} \tag{2.2.11}$$

olmak üzere U, V nin bir alt uzayıdır.W, V de U nun tümleyeni olmak üzere W da V nin bir alt uzayıdır ve

$$V = U \oplus W$$

şeklinde yazılır. U nun tanımı baz seçiminden bağımsızdır.

Tanım: V, $\mathbb{R}$ üzerinde n- boyutlu bir vektör uzayı ve $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ bir bilineer dönüşüm olsun. V nin duali V^* olmak üzere

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} \quad &: \quad V \to V^* \\ &\overline{\Phi}(v)(u) = \Phi(v,u) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

şeklinde tanımlı $\overline{\Phi}$ dönüşümünün çekirdeği U dur.

Eğer $\overline{\Phi}$ birebir yani $U = \{0\}$ ise Φ ye V üzerinde simplektik yapı , (V, Φ) ikilisine de simplektik vektör uzayı denir. [7]

Manifold

Tanım: M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer M nin her bir açık alt kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayına veya $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesine homeomorf ise M ye bir n- boyutlu topolojik manifold denir. [5]

Tanım: (Hemen Hemen Kompleks Manifold) M, $2n$ boyutlu düzgün bir manifold ve Ω, M üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$ için

$$\Omega_P : T_PM \to T_pM$$

lineer dönüşümü T_PM üzerinde bir kompleks yapı ise yani $\Omega^2 = -I$ sağlanıyorsa Ω ye M üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. M manifolduna ise Ω kompleks yapısıyla beraber bir hemen hemen kompleks manifold denir. [8]

Tanjant Vektör Uzayı

Tanım: M, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık alt kümesi olsun. $q \in M$ noktasında, tanjant vektörleri kümesine M nin q noktasındaki tanjant uzayı denir ve T_qM ile gösterilir. Tanjant uzayı, $\mathbb{R}$ üzerinde n- boyutlu vektör uzayıdır. [5]

Tanım: M, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesi olsun. M nin her bir q noktasına tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşüme vektör alanı denir. M üzerindeki X vektör alanı;

$$X : M \to \bigcup_{q \in M} T_qM$$

$\forall q \in M$ için $X(q) \in T_q(\mathbb{R}^n)$ şeklinde bir dönüşümdür. [5]

Kotanjant Vektör Uzayı

Tanım: $p \in M$ ve M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M manifoldunun q noktasındaki T_qM tanjant uzayının dual uzayına M nin q noktasındaki kotanjant uzayı denir.

$$T_q^*M = \{w | w : T_qM \to \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir.

T_p^*M nin her bir elemanına p noktasında bir kotanjant vektör denir. Her bir kotanjant vektöre M üzerinde *diferansiyel 1- form* veya *1-form* denir. [9]

2.3. $V \oplus V^*$ Direkt Toplam Uzayının Lineer Cebiri

V, *m- boyutlu* bir vektör uzayı ve V^* da bunun dual uzayı olsun. Bu durumda $V \oplus V^*$ aşağıda verilen simetrik ve anti- simetrik bilineer formlar tarafından donatılır:

$$\langle X+\zeta,Y+\eta\rangle_+ = \frac{1}{2}(\zeta(Y)+\eta(X)), \tag{2.3.13}$$
$$\langle X+\zeta,Y+\eta\rangle_- = \frac{1}{2}(\zeta(Y)-\eta(X)). \tag{2.3.14}$$

$X,Y \in V$ ve $\zeta, \eta \in V^*$ dır. Burada bu iki bilineer form da non- dejeneredir. $\langle , \rangle$ ile iç çarpım ifade edilecektir. Buradaki iç çarpım (m,m) işareti ile verilecektir. Ayrıca bu bilineer formlara ek olarak $V \oplus V^*$ uzayı için dış çarpım

$$\wedge^{2m}(V\oplus V^*) = \wedge^m V \oplus \wedge^m V^* \tag{2.3.15}$$

şeklinde ayrıştırılabilirdir ve $\wedge^k V^*$ ile $\wedge^k V$ arasında doğal bir eşleşme var olup,

$$(v^*,u) = det(v_i^*(u_j)) \tag{2.3.16}$$

şeklinde verilir. Burada $v^* = v_1^* \wedge ... \wedge v_k^* \in \wedge^k V^*$ ve $u = u_1 \wedge ... \wedge u_k \in \wedge^k V$ dir. Böylece $\wedge^{2m}(V \oplus V^*) = \mathbb{R}$ şeklinde doğal bir tanımlama yapılabilir ve $1 \in \mathbb{R}$ sayısı $V \oplus V^*$ üzerinde bir kanonik yönlendirme belirtir. [10]

2.4. $V \oplus V^*$ Direkt Toplam Uzayının Simetrileri

$SO(V \oplus V^*)$ özel ortogonal grubun *Lie grubu* genel olarak şöyle tanımlanır:

$$SO(V\oplus V^*) = \{T \mid \langle T_x, Y\rangle + \langle X, T_y\rangle = 0, \quad \forall X,Y \in V \oplus V^*\}. \tag{2.4.17}$$

$V \oplus V^*$ uzayının ayrışımı kullanılarak

$$T = \begin{pmatrix} A & \beta \\ B & -A^* \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Burada $A \in End(V), B : V \to V^*, \beta : V^* \to V$ olmak üzere B, β ters-simetrik, yani $B^* = -B$ ve $\beta^* = -\beta$ dır. Böylece $B, \wedge^2 V^*$ ın bir *2- formu* olarak düşünülebilir ve

$$B(X) = i_x B \tag{2.4.18}$$

olur. Benzer şekilde β , $\wedge^2 V$ nin bir elemanı olarak, yani bir bivektör olarak düşünülebilir. Buna göre

$$so(V \oplus V^*) = \wedge^2(V \oplus V^*) = End(V) \oplus \wedge^2 V^* \oplus \wedge^2 V \tag{2.4.19}$$

olur. Üstel fonksiyon yardımıyla $SO(V \oplus V^*)$ özel ortogonal grubunun özdeşlik kısmında $T \oplus T^*$ ın bazı önemli ortogonal simetrileri elde edilebilir (örneğin *B-dönüşümü*, β- *dönüşümü*, $GL(V)$ etkisi vb.) [10]

Örnek 1. (*B- dönüşüm*) B yukarıdaki gibi verilsin ve

$$exp(B) = e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + \zeta \to X + \zeta + i_x B$$

şeklinde verilen ortogonal dönüşümü verilsin. e^B dönüşümünü bir *kırpma dönüşümü* olarak düşünmek kullanışlı olacaktır. Burada e^B dönüşümü, izdüşümleri T te bağlayan ve T^* yönünde kırpan bir dönüşümdür. Bu şekildeki dönüşüm bir *B- dönüşümü* olarak adlandırılır. [10]

Örnek 2. (β- *dönüşümü*) Benzer şekilde, β yukarıdaki gibi verilsin ve

$$exp(\beta) = e^\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + \zeta \to X + \zeta + i_\zeta \beta$$

şeklinde verilen ortogonal dönüşümü verilsin. Bu kez e^β yı, izdüşümleri T^* a bağlayan ve T yönünde kırpan bir kırpma dönüşümüdür. Bu şekildeki dönüşüme de β- *dönüşümü* denir. [10]

Örnek 3. (GL(V) Etkisi) Eğer $A \in SO(V \oplus V^*)$ yukarıdaki gibi seçilirse bu durumda

$$exp(A) = e^A = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^{(A^*)^{-1}} \end{pmatrix}$$

dönüşümü, $so(V \oplus V^*)$ ın özdeşlik kısmındaki $GL^+(V)$ nin bir diogonal gömmesi olur. Bunu $GL(V)$ nin tamamına genişletmek için

$$P \to \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & (P^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

dönüşümü kullanılabilir. $SO(V \oplus V^*)$ iki tane bağlantılı bileşene sahiptir ve $GL(V)$ nin iki bağlantılı bileşeni, $SO(V \oplus V^*)$ ın iki ayrı bileşeni üzerine ayrı ayrı dönüşüm oluştururlar. [10]

2.5. Maksimal İzotropik Altuzaylar

$\forall X, Y \in L$ için $\langle X, Y \rangle = 0$ ise $L < V \oplus V^*$ alt uzayına izotropiktir denir. (m, m) işareti altında çalışıldığından böyle bir alt uzayın maksimal boyutu m olacaktır ve L uzayına maksimal izotropiktir denir. $V \oplus V^*$ uzayının maksimal izotropik alt uzaylarına aynı zamanda lineer Dirac yapılar da denir. [10]

Örnek: $E \leq V$ herhangi bir alt uzay olsun. E nin V^* daki annihilatörü $Ann(E)$ olmak üzere

$$E \oplus Ann(E) < V \oplus V^*$$

olur ve bu bir maksimal izotropik alt uzaydır. [10]

Örnek: $E \leq V$ herhangi bir altuzay ve $\varepsilon \in \wedge^2 E$ olsun. ε bir ters simetrik dönüşüm olup $E \to E^*$, $X \to i_x \varepsilon$ şeklinde verilsin. ε dönüşümüne benzeyen bir alt uzay olarak

$$L(E, \varepsilon) = \{X + \zeta \in E \oplus V^* : \zeta|_E = \varepsilon(X)\}$$

uzayı verilsin. Bu durumda $\forall X+\zeta, Y+\eta \in L(E,\varepsilon)$ için,

$$\begin{aligned} \langle X+\zeta, Y+\eta\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\zeta(Y)+\eta(X)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\varepsilon(Y,X)+\varepsilon(X,Y)\Big)=0 \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Bu da tanım gereği $L(E,\varepsilon)$ uzayının bir maksimal izotropik alt uzay olduğunu gösterir.

İkinci örnek $\varepsilon=0$ durumunda birinci örneğin özel hali olur. Ayrıca $L(V,0)=V$ ve $L(\{0\},0)=V^*$ dır. [10]

Önerme: $V\oplus V^*$ uzayının her maksimal izotropiği $L(E,\varepsilon)$ formundadır. [10]

2.6. Lie çarpımı

Tanım: $V,W\in\chi(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $f\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ için

$$[V,W][f]=V[W[f]]-W[V[f]] \tag{2.6.21}$$

eşitliği ile tanımlı $[V,W]$ vektör alanına, V ve W vektör alanlarının ***Lie çarpımı*** (veya ***bracket çarpımı***) denir.

Lie çarpımı, $\chi(\mathbb{R}^n)\times\chi(\mathbb{R}^n)$ kümesinden $\chi(\mathbb{R}^n)$ kümesine giden bir fonksiyondur. $p\in\mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} [V,W]_p[f] &= ([V,W][f])(p)=(V[W[f]]-W[V[f]])(p) \\ &= (V[W[f]])(p)-(W[V[f]])(p)=V_p[W[f]]-W_p[V[f]] \end{aligned} \tag{2.6.22}$$

olduğundan

$$[V,W]_p[f]=V_p[W[f]]-W_p[V[f]] \tag{2.6.23}$$

olur. [11]

Teorem: $V,W,X \in \chi(\mathbb{R}^n)$ ve $f,g \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

a)

$$[W,V] = -[V,W] \tag{2.6.24}$$

b)

$$[V,[W,X]] + [W,[X,V]] + [X,[V,W]] = 0 \tag{2.6.25}$$

c)

$$[fV,gW] = fV[g]W - gW[f]V + fg[V,W] \tag{2.6.26}$$

d)

$$[V,W][fg] = f[V,W][g] + g[V,W][f] \tag{2.6.27}$$

[11]

2.7. Courant Braketi

Courant braketi, $T \oplus T^*$ toplam uzayın elemanları için kullanılan *Lie braketine* alternatif, anti-simetrik ve bilineer bir operatörüdür.

T bir tanjant demeti ve T^* , T nin duali olmak üzere, X bir tanjant vektör ve ζ bir kotanjant vektörü olarak tanımlanırsa, $X+\zeta \in T \oplus T^*$ olur. i_x iç çarpımı

$$(X+\zeta, X+\zeta) = i_x\zeta \qquad (= \langle \zeta, X \rangle = \zeta(X))$$

şeklinde tanımlanmış doğal bir iç çarpımdır.

Bu bölüm boyunca Lie türevi ve iç çarpım, X,Y vektör alanı olmak üzere

$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X, \quad \mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y], \quad i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$$

şeklinde olacaktır.

Tanım: $[X,Y]$ iki kısımdan oluşan vektör alanı olmak üzere $u = X + \zeta$, $v = Y + \eta$ nin $T \oplus T^*$ Courant braketi;

$$[u,v] = [X+\zeta, Y+\eta] = [X,Y] + \mathcal{L}_X \eta - \mathcal{L}_Y \zeta - \frac{1}{2} d(i_X \eta - i_Y \zeta) \qquad (2.7.28)$$

ile tanımlanır. [12]

Teorem: B kapalı bir *2-form* olmak üzere;

$$[X+\zeta+i_X B, Y+\eta+i_Y B] = [X+\zeta, Y+\eta] + i_{[X,Y]} B \qquad (2.7.29)$$

dir.

İspat: Diferansiyel form α'nın *Lie Türevi* için *Cartan formülü* kulanlacaktır: $\mathcal{L}_X \alpha = d(i_X \alpha) + i_X d\alpha$.
Genelleştirilmiş olarak:

$$\begin{aligned} & [X+\zeta+i_X B, Y+\eta+i_Y B] \\ = \; & [X+\zeta, Y+\eta] + \mathcal{L}_X i_Y B - \mathcal{L}_Y i_X B - \frac{1}{2} d(i_X i_Y B - i_Y i_X B) \end{aligned} \qquad (2.7.30)$$

$d(i_Y i_X B) = \mathcal{L}_Y i_X B - i_Y d(i_X B)$'nin son iki terimi *Cartan formülü*nü verir ve bundan dolayı tekrar *Cartan formülü*ne göre;

$$\begin{aligned} [X+\zeta+i_X B, Y+\eta+i_Y B] &= [X+\zeta, Y+\eta] + \mathcal{L}_X i_Y B - i_Y d(i_X B) \\ &= [X+\zeta, Y+\eta] + i_{[X,Y]} B + i_Y \mathcal{L}_X B - i_Y d(i_X B) \\ &= [X+\zeta, Y+\eta] + i_{[X,Y]} B + i_Y i_X dB \end{aligned} \qquad (2.7.31)$$

şeklinde bulunur. Eğer $dB = 0$ ise braket korunur.
Doğal olarak yukarıda tanımlanan iç çarpım ve *Courant braketi*, bir M manifoldunun bir difeomorfizminin etkisi altında invaryanttır. Bununla birlikte, bir kapalı diferansiyel *2-form B* hem iç çarpımı hem de braketi korur. Kapalı *2-form*;

$$W^2(M)_{cl} \rtimes Diff(M)$$

difeomorfizminin y arı-direkt ç arpımının g enel b ir s onucu a nlamına g elir. Bu genelleştirilmiş geometrinin temel bir özelliği olup *B-alan* dönüşümlerini ve difeomorfizmlerinin göz önünde bulundurulması gerekir.
$\Omega^2(M)_{cl} \rtimes Diff(M)$ grubunun *Lie cebiri* B nin kapalı olduğu $T \oplus \wedge^2 T^*$ ın $X+B$ kısımlarından oluşur. Eğer $B = -d\zeta$ şeklinde alınırsa, $Y+\eta$ üzerindeki *Lie cebir* etkisi,

$$(X-d\zeta)(Y+\eta) = \mathcal{L}_X(Y+\eta) - i_Y d\zeta = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\zeta + d(i_Y\zeta) \quad (2.7.32)$$

şeklindedir. Bundan sonra, *Courant braketi* bunun ters-simetrik versiyonu olarak yeniden yorumlanabilir.

$$[X+\zeta, Y+\eta] = \frac{1}{2}((X-d\zeta)(Y+\eta) - (Y-d\eta)(X+\zeta)) \quad (2.7.33)$$

Bununla birlikte *Courant braketi* bu şekilde bir *Lie cebirinden* türetilmiş olsa da *Jacobi* özdeşliğini sağlamayan herhangi bir *Lie cebiri braketi* olur.

f düzgün fonksiyon ve $u = X+\zeta$, $v = Y+\eta$, $w = Z+\varsigma$ olmak üzere Courant braketi aşağıdaki iki özelliği sağlar.

$$[u, fv] = f[u,v] + (Xf)v - \langle u,v\rangle df \quad (2.7.34)$$

$$X\langle v,w\rangle = \langle [u,v] + d\langle u,v\rangle, w\rangle + \langle v, [u,w] + d\langle u,w\rangle\rangle \quad (2.7.35)$$

[12]

2.8. Twisted (Bükülmüş) Courant Braketi

$T \oplus T^*$ üzerindeki Courant parantez operatörü, bir H reel kapalı *3- formu* yardımıyla *twisted* (bükülebilir) hale getirilebilir, şöyle ki bir H *3- formu* verilsin ve $T \oplus T^*$ üzerinde başka bir $[,]_H$ operatörü

$$[X+\zeta, Y+\eta]_H = [X+\zeta, Y+\eta] + i_Y i_X H \quad (2.8.36)$$

şeklinde tanımlansın. Bu operatör kullanılarak Nij_H ve Jac_H yeniden hesaplanırsa, $A = X + \zeta, B = Y + \eta$ ve $C = Z + \varsigma$ olmak üzere

$$Nij_H(A,B,C) = Nij(A,B,C) + H(X,Y,Z) \tag{2.8.37a}$$

$$Jac_H(A,B,C) = d(Nij(A,B,C)) + i_Z i_Y i_X H \tag{2.8.37b}$$

şeklinde olacaktır.

Burada Nij ifadesi Nijenhuis operatörünü temsil eder ve

$$Nij(A,B,C) = \frac{1}{3}\Big(\langle [A,B],C\rangle + \langle [B,C],A\rangle + \langle [C,A],B\rangle\Big)$$

şeklindedir.

Tüm bunlar göz önüne alınırsa, *2- formlarla* twisted Courant parantez operatörleri arasındaki ilişki şöyle elde edilir:

Önerme: *b* bir *2- form* olsun. $\forall W,Z \in C^\infty(T \oplus T^*)$ için

$$\Big[e^b(W), e^b(Z)\Big]_H = e^b[W,Z]_H + db \tag{2.8.38}$$

olup, buna göre e^b nin $[,]_H$ operatörünün bir simetrisi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $db = 0$ olmasıdır. Ayrıca bunlar birer *B- alan* dönüşümü tanımlar. [10]

2.9. Courant Braketinin Simetrileri Olarak *B*- Alan Dönüşümleri

Düzgün vektör alanlarının *Lie parantez operatörü*, manifold üzerinde bir yapı tanımlar ve bu yapı difeomorfizmler altında invaryanttır. Ayrıca tanjant demetin *Lie operatörünü* sağlayan başka bir simetrisi de yoktur.

Önerme: Bir M düzgün manifoldun $\pi : TM \to M$ tanjant demetinin bir otomorfizmi (f,F) olsun. Bu durumda F lifler üzerindeki lineer dönüşüm ve $f : M \to M$, $F : TM \to TM$ olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

diyagramı ile , F *Lie parantez operatörünü* korusun, yani $\forall X,Y$ vektör alanları için

$$F([X,Y]) = [F(X),F(Y)] \tag{2.9.39}$$

olsun. Bu durumda F, f fonksiyonunun türevi olan f_* a eşittir.

$T \oplus T^*$ direkt toplam uzayında *Courant parantez operatörü* doğal iç çarpım olup difeomorfizmler altında invaryanttır. Ayrıca $B-$ *alan dönüşümü* adındaki simetrilere sahiptirler. B düzgün *2-form* olup, $T \to T^*$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve $X \to i_X B = B(X)$ iç çarpımı ile verilir. $T \oplus T^*$ üzerindeki demet dönüşümü e^B ile verilmektedir ve

$$e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}$$

şekilnde yazılır. Ayrıca $B^* = -B$ olacağından,

$$B^*B = (e^B)^* e^B = e^{B-B} = 1 \tag{2.9.40}$$

olup, ortogonaldir. [10]

Önerme: e^B dönüşümünün Courant braketinin bir otomorfizmi olabilmesi için gerek ve yeter koşul *B-alan* dönüşümünün kapalı olması, yani $dB = 0$ olmasıdır.

İspat: $X+\zeta, Y+\eta \in \mathbb{C}^\infty(T\oplus T^*)$ ve B düzgün *2-form* olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
[e^B(X+\zeta), e^B(Y+\eta)] &= [X+\zeta+i_XB, Y+\eta+i_YB] \\
&= [X+\zeta, Y+\eta]+[X, i_YB]+[i_XB, Y] \\
&= [X+\zeta, Y+\eta]+\mathcal{L}_X i_Y B-\frac{1}{2}di_Xi_YB-\mathcal{L}_Y i_X B+\frac{1}{2}di_Yi_XB \\
&= [X+\zeta, Y+\eta]+\mathcal{L}_X i_Y B-i_Y\mathcal{L}_X B+i_Yi_XdB \\
&= e^B([X+\zeta, Y+\eta])+i_Yi_XdB \qquad (2.9.41)
\end{aligned}$$

olur. e^B dönüşümü, Courant braketinin bir otomorfizmi ise $\forall X, Y$ için $i_Xi_YdB=0$ olmalıdır. Buna göre $dB=0$ olmak zorundadır. [10]

2.10. Dirac Yapılar

$V\oplus V^*$ üzerindeki iç çarpımın, biri simetrik ve diğeri ters-simetrik olan iki ayrı ifadeyle

$$\begin{aligned}
\langle X+\zeta, Y+\eta\rangle_+ &= \frac{1}{2}(\zeta(Y)+\eta(X)) \\
\langle X+\zeta, Y+\eta\rangle_- &= \frac{1}{2}(\zeta(Y)-\eta(X))
\end{aligned}$$

şeklinde verildiği bilinmektedir. O halde şu tanım verilebilir.

Tanım: (Vektör Uzayları üzerinde) Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı olan bir *Dirac yapı* , yukarıdaki iç çarpım altında *maksimal izotropik* olan $L\subset V\oplus V^*$ şeklindeki bir alt uzaydır. [13]

Tanım: (Manifoldlar üzerinde) Bir hemen hemen *Dirac yapı* (ya da *Dirac demet*), bir M manifoldu üzerindeki $L\subset TM\oplus T^*M$ alt demetine karşılık gelir ve yukarıda verilen iç çarpım altında *maksimal izotropiktir*. Bir hemen hemen *Dirac yapı* integrallenebilirlik koşulunu sağladığında Dirac yapı (veya integrallenebilir Dirac yapı) adını alır. [13]

$TM \oplus T^*M$ üzerindeki bilineer parantez operatörü

$$[X+\zeta, Y+\eta] = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\zeta + d(\langle X+\zeta, Y+\eta\rangle_-) \qquad (2.10.42)$$

şeklinde tanımlanır. [13]

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS YAPILAR

Kompleks ve simplektik yapılar birleştirilirken, manifoldun tanjant demeti üzerindeki lineer operatörler değil de tanjant ve kotanjant demetlerin direkt toplamı üzerinde çalışır. Bu nedenle $T \oplus T^*$ toplamının düzgün kesitleri *Courant braketi* adı verilen doğal braket operatörüne sahip olduğundan, ayrıca bu braket $T \oplus T^*$ üzerinde gerekli integrallenebilme koşullarını sağladığından kullanılacaktır.

3.1. Jacobi Özdeşliğinin Eksikliği

Courant braketi Jacobi özdeşliğini karşılamıyor. Bunun ne olduğunu belirlemek yararlı olacaktır.

Önerme:

$$Jac(A,B,C) = d(Nij(A,B,C)) \tag{3.1.1}$$

Burada N_{ij} ifadesi Nijenhuis operatörünü temsil eder ve

$$Nij(A,B,C) = \frac{1}{3}(\langle [A,B],C\rangle + \langle [B,C],A\rangle - \langle [C,A],B\rangle)$$

şeklinde olup $\langle , \rangle$ $T \oplus T^*$ üzerindeki iç çarpımdır.

İspat: Bu önermeyi ispatlamak için önce $T \oplus T^*$ üzerinde Dorfmann braketini tanımlayalım. $\circ$ Dorfmann braketi ters simetrik değildir fakat ters simetrik olsaydı Courant braketi olurdu.

$$(X+\zeta)\circ(Y+\eta) = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - i_Y d\zeta$$

İki braket arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

$$[A,B] = A\circ B - d\langle A,B\rangle$$

Ve elbette $[A,B] = \frac{1}{2}(A \circ B - B \circ A)$ dır. Dorfmann braketi Leibniz kuralını sağladığından

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C + B \circ (A \circ C)$$

olur. $A = X + \zeta$, $B = Y + \eta$, $C = z + \varsigma$ alınırsa :

$$\begin{aligned}
& (A \circ B) \circ C + B \circ (A \circ C) \\
= \;& [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] + \mathcal{L}_{[X,Y]}\varsigma \\
- \;& i_Z d(\mathcal{L}_X \eta - i_Y d\zeta) + \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \varsigma - i_Z d\zeta) - i_{[X,Z]} d\eta \\
= \;& [X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \varsigma - \mathcal{L} i_Z d\zeta + i_Z d i_Y d\zeta \\
= \;& [X,[Y,Z]] + \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \varsigma - i_Z d\eta) - i_{[Y,Z]} d\varsigma \\
= \;& A \circ (B \circ C) \qquad (3.1.2)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi;

$$\begin{aligned}
[[A,B],C] &= [A,B] \circ C - d\langle [A,B],C \rangle \\
&= (A \circ B - d\langle A,B \rangle) \circ C - d\langle [A,B],C \rangle \\
&= (A \circ B) \circ C - d\langle [A,B],C \rangle \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

Burada μ kapalı *1-form* olduğundan $\mu \circ C = 0$ durumunu kullanıldı. Son olarak, Jacobitörü şu şekilde ifade edilir. (C.p cylicpermutations: Devirli permütasyonları gösterir.)

$$
\begin{aligned}
Jac(A,B,C) &= [[A,B],C]+C.p \\
&= \frac{1}{4}((A\circ B)\circ C - C\circ(A\circ B) - (B\circ A)\circ C + C\circ(B\circ A) + C.p) \\
&= \frac{1}{4}(A\circ(B\circ C) - B\circ(A\circ C) - C\circ(A\circ B) - B\circ(A\circ C) \\
&+ A\circ(B\circ C) + C\circ(B\circ A) + C.p) \\
&= \frac{1}{4}(A\circ(B\circ C) - B\circ(A\circ C) + C.p) \\
&= \frac{1}{4}((A\circ B)\circ C + C.p) \\
&= ([[A,B],C] + d\langle[A,B],C\rangle + C.p) \\
&= \frac{1}{4}(Jac(A,B,C) + 3d(Nij(A,B,C))) \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

Buradan;

$$Jac(A,B,C) = d(Nij(A,B,C))$$

olur. [10]

3.2. Genelleştirilmiş Kompleks Yapıların Lineer Cebiri

V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olsun. V üzerindeki bir kompleks yapı $J : V \to V, J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan endomorfizmdir. V üzerindeki simplektik yapı ise nondegenere bir $\omega \in \wedge^2 V$ formudur. $\omega : V \to V^*$ şeklinde olup, iç çarpım yardımıyla $\upsilon \in V$ için $\omega : \upsilon \to i_\upsilon \omega$ şeklini alır. Yani V üzerindeki simplektik yapı $\omega : V \to V^*, \omega^* = -\omega$ şeklindeki izomorfizmdir. Bu iki yapıyı birleştirilirse $V \oplus V^*$ direkt toplam uzayının endomorfizmleri ele alınabilir. O halde V uzayı üzerinde bir *genelleştirilmiş kompleks yapı*, $V \oplus V^*$ direkt toplam uzayının bir j endomorfizmidir ve

i) komplekstir, yani $j^2 = -I$

ii) simplektiktir, yani $j^* = -j$

dir. Ayrıca V üzerindeki genelleştirilmiş kompleks yapı, $V \oplus V^*$ üzerinde doğal iç çarpıma ortogonal olan kompleks yapıdır. [2]

Önerme: J nin V üzerinde bir genelleştirilmiş kompleks yapı olması için gerek ve yeter koşul $J^2 = -I$ olmasıdır. [14]

İspat: V üzerinde genelleştirilmiş bir kompleks yapı J olsun. O zaman V üzerinde kompleks yapı olduğu açıktır ve ayrıca

$$J^* \cdot J = -J \cdot J = -(-I) = I$$

tersine $J^2 = -I$ ve $J^*J = I$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned} (J^*J)J &= IJ \\ J^*(JJ) &= IJ \\ J^*(-I) &= IJ \\ J^* = -I. & \end{aligned}$$

Şimdide V nin bütün genelleştirilmiş kompleks yapıların uzayını ele alalım. Burada J yapısının özelleştirilmesi aslında $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ uzayının bir maksimal izotropik alt uzayının özelleştirilmesiyle eşdeğer olduğunu aşağıdaki önermeye bağlı olarak söylenebilir.

Önerme : V üzerindeki genelleştirilmiş kompleks yapı, reel indeksi sıfır olan (yani $L \cap \overline{L} = \{0\}$) bir $L < (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ maksimal izotropik kompleks alt uzaya eşdeğerdir.

İspat : Eğer J genelleştirilmiş kompleks yapı ise L, $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ nin *i-özuzayı*dır. O halde $x, y \in L$ için ortogonallikten

$$\langle x, y \rangle = \langle J_x, J_y \rangle = \langle i_x, i_y \rangle = -\langle x, y \rangle$$

olur. Buradan $\langle x,y\rangle = 0$ dır. Bu nedenle L izotropik ve yarı-boyutludur. Yani maksimal izotropiktir. Ayrıca L, J nin i-özuzayıdır ve bu nedenle $L\cap\overline{L} = \{0\}$ dır. Tersine böyle bir L verildiğinde J yi L üzerinde i ve $\overline{L}$ üzerinde $-i$ olarak tanımlanabilir. Bu reel dönüşüm $V\oplus V^*$ üzerinde genelleştirilmiş bir kompleks yapı tanımlar. [10]

Önerme : $T\oplus T^*$ toplamının L alt demeti verilsin. Aşağıdakiler sağlanır.

· L involütif

· $Nij|_L = 0$

· $Jac|_L = 0$

İspat : Eğer L involütif ise $Nij|_L = 0$ olduğu açıktır. $Jac(A,B,C) = d(Nij(A,B,C))$ olduğundan $Jac|_L = 0$ olur.

Gösterilmesi gereken $Jac|_L = 0$ olduğunda L nin involütif olmasıdır. Varsayalım ki $Jac|_L = 0$ fakat L involütif olmasın. O halde $\langle [A,B],C\rangle = 0$ olacak şekilde $A,B,C\in \mathbb{C}^\infty(L)$ mevcuttur.

$\forall f\in\mathbb{C}^\infty(L)$ için ;

$$0 = Jac(A,B,fC) = d(Nij(A,B,fC)) = \frac{1}{3}\langle [A,B],C\rangle df$$

olur ki bu da çelişkidir. Böylece L involütif olmak zorunda. [10]

Herhangi kompleks ya da simplektik yapı $(T\oplus T^*)\otimes\mathbb{C}$ nin bir maksimal izotropik alt demetini belirler. Bu yapıların maksimal izotropik alt demeti belirlemesi için özel olarak *Courant involütif* olması gerekir. Courant braketi, Dirac yapıyı tanımlamak için ortaya atılmıştır. Courant involütif olmak, Courant braketi altında kapalı olmak anlamına gelir. Buna göre, eğer L involütif ise

$$Nij\,|_L = 0 \qquad veya \qquad Jac\,|_L = 0 \tag{3.2.5}$$

olur. Burada Nij ve Jac sırası ile *Nijenhius* tensörü ve *Jacobitörü* temsil eder, ayrıca aralarında

$$Jac(A,B,C) = d(Nij(A,B,C)) \tag{3.2.6}$$

eşitliği vardır. $A,B,C \in C^{\infty}(T \oplus T^{*})$ olmak üzere

$$Jac(A,B,C) = [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] \tag{3.2.7}$$

ve

$$Nij(A,B,C) = \frac{1}{3}(\langle [A,B],C\rangle + \langle [B,C],A\rangle + \langle [C,A],B\rangle) \tag{3.2.8}$$

şekinde olup, $X+\zeta, Y+\eta \in C^{\infty}(T \oplus T^{*})$ için Courant braketi de

$$[X+\zeta, Y+\eta] = [X,Y] + L_X\eta - L_Y\zeta - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\zeta) \tag{3.2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_X *Lie türevi* ve interior çarpımı

$$L_X = i_X d + di_X, L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y], i_{[X,Y]} = [L_X, i_Y] \tag{3.2.10}$$

şeklindedir. [10]

Bu $L < T \oplus T^{*}$ reel maksimal izotropik alt demetine bir *hemen hemen Dirac yapı* denir. L involütif ise L alt demetine *integrallenebilirdir* veya kısaca *Dirac yapı* denir. Bu tanım $T \oplus T^{*}$ uzayının kompleks alınması durumunda da geçerli olur.

Teorem. Bir L hemen hemen Dirac yapısının Courant involütif olması için gerek ve yeter koşul, d dış türevinin

$$d(C^{\infty}(U_0)) \subset C^{\infty}(U_1) \tag{3.2.11}$$

ifadesini sağlamasıdır. Diğer bir ifadeyle L nin involütif olabilmesi için gerek ve yeter koşul, U nun bir ρ diferansiyel formu için $X+\zeta \in C^{\infty}((T \oplus T^{*}) \otimes \mathbb{C})$ olmak üzere

$$d\rho = i_X\rho + \zeta \wedge \rho \tag{3.2.12}$$

olmasıdır. [10]

İspat. L hemen hemen Dirac yapı olsun. $A,B \in C^{\infty}(L)$ ve $\rho \in U$ için

$$[A,B] \cdot \rho = A \cdot B \cdot \rho \tag{3.2.13}$$

olur. Burada L involütif is $A \cdot B \cdot \rho = 0$ dır, dolayısıyla $d\rho \in C^{\infty}(U_1)$ olmalıdır. $A = X + \zeta, B = Y + \eta$ olsun. Bu durumda $i_X \rho = -\zeta \wedge \rho$ ve $i_Y \eta = -\eta \wedge \rho$ dur. O halde

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]} &= [L_X, i_Y]\rho = L_X(-\eta \wedge \rho) - i_Y(d(-\zeta \wedge \rho) + i_X d\rho) \\ &= -L_X \eta \wedge \rho - \eta \wedge (i_X d\rho + d(-\zeta \wedge \eta)) - i_Y(-d\zeta \wedge \rho + \zeta \wedge d\rho + i_X d\rho) \\ &= (-L - X\eta + i_Y d\zeta) \wedge \rho - (i_Y + \eta \wedge)(i_X + \zeta \wedge) d\rho \\ &= (-L_X \eta + i_Y d\zeta) \wedge \rho + A \cdot B \cdot d\rho \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

elde edilir ki buna göre

$$[A,B] \cdot \rho = (A \circ B) \cdot \rho = A \cdot B \cdot \rho \tag{3.2.15}$$

olmalıdır. [10]

3.3. Örnekler

Örnek 1 (Kompleks Geometri):

$E = V \oplus V^*$ verilsin. V bir I kompleks yapısına sahipse o zaman $J_I = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I^* \end{pmatrix}$ matrisi biçiminde yazılabilen bir kompleks yapıdır. [15]

Çünkü

$$J_I^2 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 & 0 \\ 0 & I^{2^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -I$$

dır. Ayrıca;

$$J_I^* = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (I^*)^* & 0 \\ 0 & (-I)^* \end{pmatrix} = -J_I$$

dır.

Örnek 2:(Simplektik Geometri) V üzerinde ω simplektik yapısı verilsin. O halde

$$J_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

yapısı V üzerinde genelleştirilmiş kompleks yapıdır. [16]

$$\begin{aligned} (J_\omega)^* &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & (-\omega^{-1})^* \\ (\omega)^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} = -J_\omega \\ (J_\omega)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = -I \end{aligned}$$

dır. Yani ω; V üzerinde genelleştirilmiş kompleks yapıdır.

Örnek 3 (Presimplektik Geometri) : Tanjant demeti Dirac yapıdır. Eğer *2-form* $\omega \in \Gamma(\wedge^2 T^*)$ ve B alan dönüşümü kullanırsak

$$e^\omega T = \{X + \omega X | X \in T\}$$

hemen hemen Dirac yapıdır. Aslında 2.9.41 dan $[e^\omega u, e^\omega \upsilon] = e^\omega[u, \upsilon] - i_X i_Y d\omega$ elde edilir. $e^\omega T$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $d_\omega = 0$ olmalıdır. Ayrıca Nijenhuis operatörünü $e^\omega X \wedge, e^\omega Y, e^\omega Z \in \Gamma(e^\omega T)$ için hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} Nij(e^\omega X, e^\omega Y, e^\omega Z) &= ([e^\omega X, e^\omega Y], e^\omega Z) \\ &= (e^\omega[X,Y] - i_X i_Y d\omega, e^\omega Z) \\ &= (e^\omega[X,Y], e^\omega Z) - (i_X i_Y d\omega, e^\omega Z) \\ &= ([X,Y], Z) - \frac{1}{2} i_Z i_X i_Y d\omega \\ &= \frac{1}{2} d\omega(X,Y,Z) \end{aligned}$$

[17].

Örnek 4 (Kompleks geometri) : Bir hemen hemen $J \in End(T)$ kompleks yapısı, $T_{0,1} < T \otimes \mathbb{C}$ biçimindeki $-i$ özdemeti ile bir kompleks dağılımı belirler. Maksimal izotropik

$$L_J = T_{0,1} \oplus Ann(T_{0,1}) = T_{0,1} \oplus T^*_{1,0}$$

uzayı kurulursa şunlar söylenebilir: Eğer L Courant involütif ise $T_{0,1}$ de Lie involütif olmalıdır. O halde J integrallenebilirdir. Eğer J integrallenebilirse $X+\zeta, Y+\eta \in \mathbb{C}^\infty(T_{0,1} \oplus T^*_{1,0})$ olmak üzere

$$[X+\zeta, Y+\eta] = [X,Y] + i_X\overline{\partial}\eta - i_Y\overline{\partial}\zeta$$

olup, açıkça $T_{0,1} \oplus T^*_{1,0}$ ın bir kesitidir. Bundan dolayı L nin Courant involütif olması için J nin integrallenebilir olması gerekir. Buna göre, integrallenebilir kompleks yapılar birer kompleks Dirac yapı olarak tanımlanabilir. [10]

Örnek 5 (Simplektik Geometri): T tanjant demeti maksimal izotropik ve involütif olup, dolayısıyla bir Dirac yapı tanımlar. Bu temel Dirac yapı için herhangi bir $\omega \in \Omega^2(M)$ *2-formu* (kompleks de olabilir) kullanılarak, diğer involütif ve maksimal izotropik olan yapılar da elde edilebilir. Örneğin;

$$e^\omega(T) = \{X + i_X\omega | X \in T\}$$

maksimal izotropik alt uzayının involütif olabilmesi için $d\omega = 0$ olması yeterlidir. Buna göre kapalı *2-form*larla tanımlanan simplektik geometri bir Dirac yapı olarak tanımlanabilir. [10]

Örnek 6: Örnek 4 te bir vektör uzayı üzerinde, bir kompleks yapıdan genelleştrilmiş bir kompleks yapı ürettiğimizi unutmayalım. Şimdi M üzerinde hemen hemen bir J kompleks yapısı verilsin. Hemen hemen $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}$ kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul J nin integrallenebilmesidir. Bu iddayı ispatlamak için ilkin $L = T_{1,0} \oplus T_{0,1}$ verilsin ve $T_{0,1}$ anti-holomorfik vektörler ve M üzerinde holomorfik *1-formlar* tarafından donatılsın. $X,Y \in T_{0,1}$ ve $\zeta, \eta \in T^*_{0,1}$ verilsin. O halde Courant braketi

$$[X+\zeta, Y+\eta] = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\zeta - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\zeta)$$

denklemi şayet J integrallenebilirse Lie braketi altında kapalıdır. İfadenin tersi için J nin integrallenebilir olsun. O zaman Courant braketi

$$\begin{aligned} [X+\zeta, Y+\eta] &= [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\zeta - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\zeta) \\ &= [X,Y] + d(i_X\eta) + i_X(d\eta) - d(i_Y\zeta) - i_Y(d\zeta) \end{aligned}$$

olur. [10]

Örnek 7: Bir reel *2-form* B, $E = V \oplus V^*$ üzerinde B-alan dönüşümü

$$e \to e - B(\pi(e))$$

ile etki eder. Eğer V i özuzayı, L olan genelleştirilmiş J kompleks yapısı ile donatılırsa bir B-alan etkisi düşünülebilir: $L_B = \{e - B(\pi(e)) : e \in L\}$. B reel olduğu için $L_B \cap \overline{L}_B = (Id - B)L \cap L = \{0\}$. Ters-simetri L_B nin izotropik olduğu anlamına gelir. Eğer E nin ayrışımı varsa J nin B-alan dönüşümü olan J_B yi matris formu :

$$J_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. [15]

 29

4. KONTAKT MANİFOLDLAR

4.1. $\varepsilon^1(M)$ Dirac Yapıları

$\varepsilon^1(M) = (TM \times \mathbb{R}) \oplus (T^*M \times \mathbb{R})$ vektör demeti üzerindeki doğal bilineer form $\langle , \rangle$ şöyle tanımlanabilir.

$$\forall (X_j, f_j) + (\alpha_j, g_j) \in \Gamma(\varepsilon'(M)), \quad j = 1,2$$

$$\langle (X_1, f_1) + (\alpha_1, g_1), (X_2, f_2) + (\alpha_2, g_2) \rangle = \frac{1}{2}(i_{X_2}\alpha_1 + i_{X_1}\alpha_2 + f_1 g_2 + f_2 g_1) \quad (4.1.1)$$

Ayrıca herhangi $k \geq 1$ tam sayısı için

$$\tilde{d} : \Omega^k(M) \times \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^{k+1}(M) \times \Omega^k(M)$$
$$(\alpha, \beta) \to \tilde{d}(\alpha, \beta) = (d\alpha, (-1)^k \alpha + d\beta) \quad (4.1.2)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Burada $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^{k-1}(M)$, d dış diferansiyel operatörüdür. Eğer $k = 0$ ise, bu durumda $\tilde{d}f = (df, f)$ yani $\tilde{d}^2 = 0$ dır. Bunların yanında, her $X \in \chi(M)$, $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, için daralma dönüşümü

$$i_{(X,f)}(\alpha, \beta) = (i_X \alpha + (-1)^{k+1} f\beta, i_X \beta) \quad (4.1.3)$$

şeklindedir. Bu iki operatörden,

$$\hat{\mathcal{L}}_{(X,f)} = i_{(X,f)}\tilde{d} + \tilde{d}_0 i_{(X,f)} \quad (4.1.4)$$

elde edilir.

$\varepsilon^1(M)$ nin düzgün kesitlerinin uzayı üzerinde, Courant braketine benzer bir operatör şöyle tanımlanır.

$$[(X_1, f_1) + (\alpha_1, g_1), (X_2, f_2) + (\alpha_2, g_2)]$$
$$= ([X_1, X_2], X_1 f_2 - X_2 f_1) + \hat{\mathcal{L}}_{(X_1, f_1)}(\alpha_2, g_2) - i_{(X_2, f_2)}\tilde{d}(\alpha_1, g_1) \quad (4.1.5)$$

$\tilde{d}$ burada $d^{(0,1)}$ operatörüdür. [8]

Tanım: Bir $\varepsilon^1(M)$ Dirac yapısı, $\varepsilon^1(M)$ nin bir L alt demeti olup , $\langle , \rangle$ bilineer formuna göre maksimal izotropik ve integrallenebilirdir. Yani $\Gamma(L)$, $[,]$ braketi altında kapalıdır. [8]

Şimdi, $\varepsilon^1(M)$ Dirac yapısının bazı örneklerini verelim.

i) Jacobi Yapıları: Bir M manifoldu üzerindeki , bir bivektör alanı π ve bir vektör alanı E tarafından oluşturulan (π, E) ikilisi ile verilsin.

$$[E,\pi]_s = 0, \qquad [\pi,\pi]_s = 2E \wedge \pi$$

Burada $[,]_s$ çoklu vektör alanları üzerinde *Schouten -Nijenhuis* braketidir. Jacobi yapısına sahip bir manifoldda Jacobi manifoldu denir.

M üzerinde π bir bivektör alanı ve E bir vektör alanı olmak üzere, $\wedge^2(TM \times \mathbb{R})$ nin herhangi düzgün kesitli $P(\pi, E)$ ikilisiyle tanımlanır. Aslında P düzgün vektör dönüşümü ile aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. $\forall \alpha$ 1-form ve $g \in \mathbb{C}^\infty(M)$ için,

$$P : T^*M \times \mathbb{R} \to TM \times \mathbb{R}$$

$$P(\alpha, g) = (\pi\alpha + gE, -i_E\alpha) \tag{4.1.6}$$

[18]

ii) Diferaniyel 1-formlar: Herhangi 2-form ω ve 1-form η tarafından üretilen (ω, η) ikilisi

$$\left(L_{(\omega,\eta)}\right)_\chi = \left\{(X,f)_\chi + (i_X\omega + f\eta, -1_X\eta)_\chi : X \in \chi(M), f \in \mathbb{C}^\infty(M)\right\}$$

tarafından verilen $\varepsilon^1(M)$ nin maksimal izotropik alt demeti $L(\omega, \eta)$ yı belirler.
Ayrıca, $\omega = d\eta$ olduğunda $T(L_{(\omega,\eta)})$ 4.1.5'de verilen braket ile kapalı olur. [8]

iii) Yerel Konformal Presimplektik Yapılar (l.c.p) : Bir l.c.p (lokal conformal presymplectic) yapısı (Ω,ω) ikilisi ile M üzerinde bir manifold olmak üzere Ω, bir M üzerinde 2-form, ω kapalı 1-form ve $d\Omega=\omega\wedge\Omega$. Eğer (Ω,ω) M üzerinde bir l.c.p yapısı ise $\varepsilon^1(M)$ nin vektör alt demeti $L_{(\Omega,\omega)}$ şu şekilde tanımlanabilir.

$$\Gamma(L_{(\Omega,\omega)})=\{(X_1-i_X\omega)+(i_X\Omega+f\omega,f)/(X,f)\in\chi(M)\times\mathbb{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \quad (4.1.7)$$

vektör demeti $L(\Omega,\omega)$ ve $TM\times\mathbb{R}$ izomorftur. Ek olarak, $L_{(\Omega,\omega)}$ bir $\varepsilon^1(M)$ Dirac yapısıdır. [19]

4.2. Kontakt Yapıların Karakterizasyonu

Tanım: M $2n+1$ boyutlu düzgün manifold ve η , M manifoldu üzerinde kotanjant vektör alanı olmak üzere M manifoldunun her noktasında $\eta\Lambda(d\eta)^n\neq 0$ ise η 1-formu M üzerinde kontakttır denir. [20]

Önerme: L, $\varepsilon'(M)$ nin alt demeti olmak üzere $L_{(\wedge,E)}$ formundan $L_{(\omega,\eta)}$ formuna ve bir $(\wedge,E)\in\chi^2(M)\times\chi(M)$ ikilisinden $(\omega,\eta)\in\Omega^2(M)\times\Omega(M)$ ikilisine geçmek için gerek ve yeter koşul,

i) L, $\langle,\rangle$ ile maksimal izotropiktir.

ii) $L_X\cap((T_XM\times\mathbb{R})\oplus\{0\})=\{0\},\forall X\in M$

olmasıdır. Ayrıca, $(\wedge,E)$ nin Jacobi yapısı $(\omega=d\eta)$ olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma(L)$ nin 4.1.5 de verilen genişletilmiş Courant braketi altında kapalı olmasıdır. [8]

Teorem: Bir $\varepsilon^1(M)$ Dirac yapısı L_η nın kontakt 1-form η ya karşılık gelmesi için gerek ve yeter koşul $L_\eta\cap((TM\times\{0\})\oplus(\{0\}\times\mathbb{R}))$ nin $\varepsilon^1(M)$ nin bir boyutlu alt demeti $(\zeta,0)+(0,-1)$ tarafından üretilmesi gerekir.

İspat: $e_X = (X,0) + (0,-i_X\eta)$ ise $e_X \in L_\eta$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle (Y,g) + (i_Y d\eta + g\eta, -i_Y\eta), e_X\rangle = 0$$
$$\forall (Y,g) \in \chi(M) \times \mathbb{C}^\infty(M)$$

olmasıdır. Fakat bu $\forall Y \in \chi(M)$ için $d\eta(X,Y) = 0$ demektir. Bu da gösteriyor ki $L_\eta \cap ((TM \times \{0\}) + (\{0\} \times \mathbb{R}))$, $\varepsilon^1(M)$ nin 1 boyutlu alt demeti olması ancak ve ancak $ker \quad d\eta$, TM nin 1 boyutlu alt demeti olmasıdır. Eğer $(\zeta,0)+(0,-1)$ $L_\eta \cap (TM \times \{0\} \oplus \{0\} \times \mathbb{R})$ yi üretirse

$$\langle (\zeta,0)+(0,-1),(0,1)+(\eta,0)\rangle = \eta(\zeta) - 1 = 0.$$

Buradan

$$kerd_\eta \cap ker\eta = \{0\}$$

η nın kontakt olduğu sonucuna varılır. [8]

4.3. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Tanım: M hemen hemen bir kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı Ω olsun. $[,]$ Lie parantez operatörü ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$N_\Omega(X,Y) = [\Omega X, \Omega Y] - [X,Y] - \Omega[\Omega X, Y] - \Omega[X, \Omega Y] \qquad (4.3.8)$$

bilineer fonksiyonuna Ω nin Nijenhius tensör alanı denir. Eğer M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde $N_\Omega(X,Y) = 0$ ise M ye kompleks manifold denir. [9]

Teorem: M hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerindeki Ω hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul Nijenhius tensör alanının sıfır olmasıdır. [9]

İspat: M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Ayrıca X ve Y, M manifoldu üzerinde vektör alanı olmak üzere $z = [X - i\Omega X, Y - i\Omega Y]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
z + i\Omega z &= [X - i\Omega X, Y - i\Omega Y] + i\Omega[X - i\Omega X, Y - i\Omega Y] \\
&= [X,Y] - [X, i\Omega Y] - [i\Omega X, Y] + [i\Omega X, i\Omega Y] \\
&+ i\Omega\{[X,Y] - [X, i\Omega Y] - [i\Omega X, Y] + [i\Omega X, i\Omega Y]\} \\
&= [X,Y] - i[X, \Omega Y] - i[\Omega X, Y] + i^2[\Omega X, \Omega Y] \\
&+ i\Omega\{[X,Y] - i[X, \Omega Y] - i[\Omega X, Y] + i^2[\Omega X, \Omega Y]\} \\
&= [X,Y] + \Omega[X, \Omega Y] + \Omega[\Omega X, Y] - [\Omega X, \Omega Y] \\
&- i\Omega\{-[X,Y] - \Omega[X, \Omega Y] - \Omega[\Omega X, Y] + [\Omega X, \Omega Y]\} \\
&= -N(X,Y) - i\Omega N(X,Y)
\end{aligned}$$

olur. Hemen hemen kompleks yapı integrallenebilir olduğundan $z, (1,0)$ tipindedir ve buradan $z + i\Omega z = 0$ dır. Bu durumda $N = 0$ olur. [9]

Tanım: M $2n$ boyutlu manifold olsun. M üzerinde hemen hemen kompleks yapı $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ yi kompleksleştirmenin bir alt demeti E olup aşağıdakiler sağlanır

i) E izotropiktir

ii) $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C} = E \oplus \overline{E}$. Burada $\overline{E}$, E nin kompleks eşleniğidir.

[8]

4.4. Hemen Hemen Kontakt Yapılar

Tanım: $2n+1$ boyutlu bir reel düzgün bir M manifoldu verilsin. $\varepsilon'(M) \otimes \mathbb{C}$, M üzerinde genelleştirilmiş hemen hemen kontakt yapı olup E nin alt demetidir. E izotropiktir ve E nin kompleks eşleniği $\overline{E}$ olmak üzere $\varepsilon(M) \otimes \mathbb{C} = E \oplus \overline{E}$ dir. [20]

Önerme: $2n+1$ boyutlu bir reel düzgün M manifoldu verilsin. M üzerinde genelleştirilmiş hemen hemen $\varepsilon^1(M)$ vektör demeti ile J endomorfizması arasında birebir eşleşme vardır ve $J^2 = -id$ olup J ile $\langle , \rangle$ ortogonaldir. [20]

Tanım:Hemen Hemen Kontakt Yapılar $d = 2n+1$ boyutlu düzgün bir M manifoldu verilsin. (Ω, ζ, η) üçlüsü M üzerinde hemen hemen bir kontakt yapıdır. Burada, Ω: bir $(1,1)$ tensör cismi , ζ: M üzerinde bir vektör alanı ve η: 1-form olmak üzere

$$\eta(\zeta) = 1 \quad ve \quad \Omega^2(X) = -X + \eta(X)\zeta, \quad \forall X \in \chi(M)$$

İlk sonuç olarak $\Omega(\zeta) = 0$, $\eta \circ \Omega = 0$. [20]

Teorem: $d = 2n+1$ boyutlu düzgün bir M manifoldu verilsin. (Ω, ζ, η) yapısı M üzerinde bir hemen hemen kontakt yapı olup Ω endomorfizminin rankı $2n$ dir.

İspat: $\Omega^2 = -I + \eta \otimes \zeta$ ve $\eta(\zeta) = 1$ den

$$\Omega^2\zeta = -\zeta + \eta(\zeta) \cdot \zeta = 0$$

ve buradan $\Omega\zeta = 0$ veya $\Omega\zeta$, 0 değerine karşılık gelen Ω nin özvektörüdür. Tekrardan $\Omega^2 = -I + \eta \otimes \zeta$ kullanılırsa

$$0 = \Omega^2\Omega\zeta = -\Omega\zeta + \eta(\Omega\zeta)\zeta$$

veya

$$\Omega\zeta = \eta(\Omega\zeta)\zeta$$

olur. Şimdi eğer $\Omega\zeta$, 0 özdeğerinin özvektörü ise $\eta(\Omega\zeta) \neq 0$ ve bundan dolayı

$$0 = \Omega^2\zeta = \eta(\Omega\zeta)\Omega\zeta = (\eta(\Omega\zeta))^2 \neq 0$$

Bu da çelişkidir. Dolayısıyla $\Omega\zeta = 0$.

şimdi, $\Omega\zeta = 0$ olduğundan herhangi bir X vektör alanı için

$$\eta(\Omega X)\zeta = \Omega^3 X + \Omega X = -\Omega X + \Omega(\eta(X)\zeta) + \Omega X = 0$$

olur ve buradan $\eta \circ \Omega = 0$.

Sonuç olarak $\Omega\zeta = 0$ ve $\zeta \neq 0$ olduğundan rank $\Omega < 2n+1$. Eğer bir vektör alanı $\overline{\zeta}$, $\Omega\overline{\zeta} = 0$ eşitliğini sağlıyorsa $\Omega^2 = -I + \eta \otimes \zeta$, $0 = -\overline{\zeta} + \eta(\overline{\zeta})\zeta$ denklemini verir. Dolayısıyla $\overline{\zeta}$ ile ζ eşdeğerdir ve böylece rank $\Omega = 2n$. [20]

Şimdi her hemen hemen kontakt yapının genelleştirilmiş kontakt yapı olduğunu gösterelim.

$$J : \Gamma(TM \times \mathbb{R}) \to \Gamma(TM \times \mathbb{R})$$

$$J(X, f) = (\Omega X - f\zeta, \eta(X)), \qquad \forall X \in \chi(M), f \in \mathbb{C}^\infty(M) \tag{4.4.9}$$

ile tanımlansın. $J^2 = -id$ ve J nin dual dönüşümü J^* ile verilsin. J endomorfizmi $u = (X, f) + (\alpha, g) \in \Gamma(\varepsilon'(M))$ için $J(u) = J(X, f) - J^*(\alpha, g)$ olmak üzere; J, $J^2 = -id$ ve $J^* = -J$ yi sağlar. Ek olarak, $Ann(F)$ E nin sıfırlayanı ve

$$F_X = \left\{ J(X, f)_X + \sqrt{-1}(X, f)_X | (X, f) \in \Gamma(TM \times \mathbb{R}) \right\} \tag{4.4.10}$$

olmak üzere genelleştirilmiş hemen hemen E kontakt yapısı

$$E = F \oplus Ann(F) \tag{4.4.11}$$

şeklinde verilebilir. [8]

4.5. İntegrallenebilme

Tanım: Tek boyutlu düzgün bir M manifoldu, genelleştirilmiş hemen hemen kontakt $E \subset \varepsilon'(M) \otimes \mathbb{C}$ yapısı denklem 4.1.5 de verilen genişletilmiş Courant braketinin altında kapalı olması durumunda integrallenebilirdir. [8]

4.6. Normal Hemen Hemen Kontakt Yapılar

Hemen hemen kontakt Ω, ζ, η yapısı

$$N_\Omega(X,Y) + d\eta(X,Y)\zeta = 0 \qquad \forall X,Y \in \chi(M)$$

ise normaldir. Burada N_Ω, Ω nin Nihenhuis tensörüdür.

$$N_\Omega(X,Y) = [\Omega X, \Omega Y] + \Omega^2[X,Y] - \Omega[\Omega X,Y] - \Omega[X,\Omega Y] \tag{4.6.12}$$

Yardımcı Teorem: Eğer Ω, ζ, η hemen hemen kontakt yapısı normal ise $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X,\zeta) = 0 \tag{4.6.13}$$

$$\eta[\Omega X,\zeta] = 0 \tag{4.6.14}$$

$$[\Omega X,\zeta] = \Omega[X,\zeta] \tag{4.6.15}$$

$$d\eta(\Omega X,Y) = d\eta(\Omega Y,X) \tag{4.6.16}$$

dır.

İspat: $Y = \zeta$ normallik koşulu uygulandığında

$$\begin{aligned} 0 &= N_\Omega(X,\zeta) + d\eta(X,\zeta)\zeta \\ &= [\Omega X, \Omega Y] + \Omega^2[X,\zeta] - \Omega[\Omega X,\zeta] - \Omega[X,\Omega\zeta] + d\eta(X,\zeta)\zeta \\ &= \Omega^2[X,\zeta] - \Omega[\Omega X,\zeta] + d\eta(X,\zeta)\zeta \end{aligned}$$

elde edilir. $\eta \circ \Omega = 0$ kullanılırsa $d\eta(X,\zeta) = 0$ olur $(\forall X \in \chi(M))$. Sonuç olarak $\eta[\Omega X,\zeta] = 0$. Bir diğer deyişle

$$\begin{aligned} 0 &= N_\Omega(\Omega X,\zeta) + d\eta(\Omega X,\zeta)\zeta \\ &= \Omega^2[\Omega X,\zeta] - \Omega[\Omega^2 X,\zeta] + d\eta(\Omega X,\zeta)\zeta \\ &= -[\Omega X,\zeta] + \Omega[X,\zeta] \end{aligned}$$

Son olarak eğer $X,Y \in \chi(M)$ olursa

$$\eta(N_\Omega(\Omega X,Y)+d\eta(\Omega X,Y)\zeta) = -\eta([\Omega^2X,Y]+[\Omega X,\Omega Y])+d\eta(\Omega X,Y)$$

Buradan $d\eta(\Omega X,Y) = d\eta(\Omega Y,X)$ sonucuna ulaşılır. [8]

Her (Ω,ζ,η) hemen hemen kontakt yapısının kompleks yapı olan $E \subset \varepsilon'(M)\otimes\mathbb{C}$ yi belirlediğini gördük. Ayrıca aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem: (Ω,ζ,η) hemen hemen kontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul 4.4.11 de verilen E alt demeti ile integrallenebilmesidir.

İspat: E nin integrallenebilmesi genelleştirilmiş Courant braketi altında $\Gamma(F)$ nin kapalılığına eşdeğerdir. Burada F 4.4.10 denkleminde tanımlanan alt demettir. $[\Gamma(F),\Gamma(F)] \subset \Gamma(F)$ olsun ve

$$u_X = (X,0), \quad u_Y = (Y,0) \quad \in \Gamma(\varepsilon'(M))$$

verilsin. $e_X = Ju_X + \sqrt{-1}u_X$ ve $e_Y = Ju_Y + \sqrt{-1}u_Y$ ile gösterilir. O zaman

$$[e_X,e_Y] \in F \Leftrightarrow [Ju_X,Ju_Y]-[u_X,u_Y] = J([Ju_X,u_Y]+[u_X,Ju_Y])$$

Basit bir hesaplama ile

$$[Ju_X,Ju_Y]-[u_X,u_Y] = \Big([\Omega X,\Omega Y]-[X,Y],\Omega X\cdot\eta(Y)-\Omega Y\cdot\eta(X)\Big)$$

Ayrıca $J([Ju_X,u_Y]+[u_X,Ju_Y])$ ifadesi

$$\Big(\Omega([\Omega X,Y]+[X,\Omega Y])-(X,\eta(Y)-Y\eta(X))\zeta,\eta([\Omega X,Y]+[X,\Omega Y])\Big)$$

ifadesine eşittir. Bunun yanında $[e_X,e_Y] \in \Gamma(F)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$[\Omega X,\Omega Y]-[X,Y] = \Omega([\Omega X,Y]+[X,\Omega Y])-(X\eta(Y)-Y\eta(X))\zeta$$

$$[\Omega X\eta(Y) - \Omega Y\eta(X)] = \eta([\Omega X,Y] + [X,\Omega Y])$$

olmasıdır. Çünkü $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $[X,Y] = -\Omega^2([X,Y]) + \eta([X,Y])\zeta$ ve $\eta(\Omega X) = 0$ dır. Bu bağıntılar ile

$$N_\Omega(X,Y) + d\eta(X,Y)\zeta = 0$$
$$d\eta(\Omega X,Y) = d\eta(\Omega Y,X)$$

sonucuna ulaşılır.

Bu da eğer E integrallenebilir ise hemen hemen kontakt yapının normal olduğunu gösterir. Diğer taraftan $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $N_\Omega(X,Y) + d\eta(X,Y)\zeta = 0$ verilsin. Yardımcı teoremi kullanarak şu sonuca ulaşılır.

$$d\eta(\Omega X,Y) = d\eta(\Omega Y,X)$$

Böylece herhangi bir

$$e_X = u_X + \sqrt{-1}Ju_X \quad , \quad e_Y = u_Y + \sqrt{-1}Ju_Y \quad \in \Gamma(F)$$

için $[e_X, e_Y] \in \Gamma(F)$ sonucuna ulaşılır. Geriye herhangi bir $e_X = Ju_X + \sqrt{-1}u_X \in \Gamma(F)$ bölümü için $[e_X, J(0,1) + \sqrt{-1}(0,1)] \in \Gamma(F)$ yi göstermek kalıyor. Bu koşul

$$\begin{aligned} [\Omega X, \zeta] &= \Omega[X,\zeta] \\ \zeta\eta(X) &= -\eta([X,\zeta]) \end{aligned}$$

ile eşdeğerdir.

$\zeta\eta(X) = -\eta([X,\zeta])$ bağıntısı yardımcı teoremden $d\eta(X,\zeta) = 0$ denklemini sağlar. Böylece $[e_X, J(0,1) + \sqrt{-1}(0,1)] \in \Gamma(F)$ sonucuna varılır. Bu nedenle F, genişletilmiş Courant braketi altında kapalıdır ve bu da E nin integrallenebilir olduğu anlamına gelir. [8]

 39

KAYNAKLAR

[1] Küpeli, N.D., 1996. Singular Semi-Riemannian Geometry. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 147.

[2] Sevinç, S., 2017. Genelleştirilmiş İndefinite Kompleks Geometri Üzerine. Süleyman Demirel Üniversitesi Doktora tezi. 88p.

[3] Kobayashi, S., Nomizu, K., 1969. Foundations of Differential Geometry Vol.2. Interscience Publishers, 470p, U.S.A.

[4] O'neill, B., 1983. Semi- Riemannian Geometry. Birinci Baskı. California.

[5] Hacısalihoğlu, H., 1997. Lineer Cebir. Ertem Matbaası.

[6] Ata, E., 2004. Simplektik Diferansiyel Geometri Üzerine. Ankara Üniversitesi Doktora tezi. 118p.

[7] Cannas da Silva, A., 2000. Lectures on Symplectic Geometry. Birinci Baskı. Berkeley.

[8] Iglesias, D., Ponte, Wade, A., 2004. Contact Manifolds and Generalized Complex Structures. **arxiv** 0404.519v2.

[9] Yano, K., Kon, M., 1984. Structures on Manifolds. World Scientific.

[10] Gualtieri, M., 2003. Generalized Complex Geometry. University of Oxford, D. Phil. Thesis, Oxford, 99p.

[11] Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferansiyel Geometri.Nobel Yayıncılık.Ankara.

[12] Hitchin, N., 2010. Lectures on Generalized Geometry. **arxiv** 1008.0973v1.

[13] Courant, T., 1990. Dirac Manifolds. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 319: 631-661.

[14] Gualtieri, M., 2014. Generalized Kaehler Geometry. **Commun. Math. Phys.**, 331: 297-331.

[15] Cavalcanti, G.R., 2006. Introduction to Generalized Complex Geometry. University of Oxford.

[16] Cavalcanti, G.,R., Gualtieri, M., 2009. Blow-up of Generalized Complex 4-Manifolds. **Jour. Of Topology 2**, doi:10.1112: 840-864.

[17] Baraglia, D., 2007. Generalized Geometry. The University of Adelaide.

[18] Wade, A., 2000. Conformal Dirac Structures. **Lett. in Math. Phys. 53:** 331-348.

[19] Iglesias, D., Marrero, J.,C., 2001. Lie Algebroid Foliations and $\varepsilon^1(M)$-Dirac Structures. **arxiv** 0106.086v1.

[20] Blair, D.,E., 2001. Rienmannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Michigan State University.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Cihan TURAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Muş, 20.02.1991

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	cihanturan.0949@gmail.com
Tarih	:	22.07.2020