T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATiK ANABİLİM DALI
2021-YL-004

GAMMA HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK KOŞULLARI ÜZERİNE

Cemre DEMİRCİ

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN

AYDIN

ÖZET

GAMMA HALKALARDA DEĞİŞMELİLİK KOŞULLARI ÜZERİNE

Cemre DEMİRCİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN
2021, 63 sayfa

Bu çalışmanın amacı, halkalarda ve gamma halkalarda bazı özdeşlikleri sağlayan dönüşümlerden yararlanarak bu yapıların değişmeliliği hakkında neler söylenebileceği konusunu araştırmaktır. Bu doğrultuda tez temel olarak dört bölümden oluşturulmuştur.

Birinci bölümde, literatürde halkalarda ve gamma halkalarda değişmelilik koşullarını araştıran bazı çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde tezi okumada kolaylık sağlayacak bazı tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir. Bu amaçla, halka ve gamma halkanın tanımları verilerek bu yapıların belli özellikleri sağlayan idealleri ile bu yapılar üzerinde bazı özdeşlikleri sağlayan dönüşümler tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, H. E. Bell ve M. N. Daif'in 1994 yılında yayınlanan "Değişmelilik ve güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümler üzerine" başlıklı çalışma detaylarıyla incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, X. Xu, J. Ma ve Y. Zhou'nun 2015 yılında yapmış oldukları "Yarı asal gamma halkalar üzerinde sol türevler ve güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümler" başlıklı çalışmaları ele alınmıştır.

Anahtar Sözcükler: Türev, Değişmeliliği Koruyan Dönüşüm, Asal ve Yarı Asal Halka, Gamma Halka.

ABSTRACT

ON COMMUTATIVITY CONDITIONS OF GAMMA RINGS

Cemre DEMİRCİ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Okan ARSLAN
2021, 63 pages

The aim of this study is to investigate what can be said about the commutativity of rings and gamma rings by making use of maps that provide some identity in these structures. In this direction, the thesis is basically composed of four chapters.

In the first chapter, some studies investigating the commutativity conditions in rings and gamma rings in the literature are mentioned.

In the second chapter, some basic definitions and properties that will make it easier to read the thesis is given. For this purpose, the definitions of the ring and the gamma ring are given, and the ideals of these structures that provide certain properties and the maps that provide some identities on these structures are introduced.

In the third chapter, the paper of H. E. Bell and M. N. Daif, published in 1994, entitled "On commutativity and strong commutativity preserving maps" is examined in detail.

In the fourth chapter, the paper of X. Xu, J. Ma and Y. Zhou published in 2015, entitled "Left derivations and strong commutativity preserving maps on semiprime Γ-rings" are discussed.

Key Words: Derivation, Commutativty Preserving Map, Prime and Semiprime Ring, Gamma Ring.

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince gerek bilgisi gerek tecrübesiyle benden yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her türlü konuda desteğini ve sabrını üzerimde hissettiğim, bana hocadan öte bir abi olan saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN'a gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Hayattaki en büyük şansım olarak gördüğüm, aldığım kararlarda bana olan inançlarıyla maddi manevi her koşulda ve her zaman yanımda olan annem Leyla DEMİRCİ, kardeşlerim M. Furkan DEMİRCİ, H. Ayşe DEMİRCİ ve ailemin diğer fertlerine teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez, Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından FEF-17035 kod numaralı bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Cemre DEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
(a)	a elemanı tarafından üretilen ideal
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$C_R(I)$	I kümesinin R halkasındaki merkezi
$\mathrm{Ker}(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{char}(R)$	R halkasının karakteristiği
$[a,b]$	a ve b elemanlarının komütatörü
$\mathrm{Ann}_l(S)$	S kümesinin sol sıfırlayanı
$\mathrm{Ann}_r(S)$	S kümesinin sağ sıfırlayanı
$(\Gamma,M)_N$	Nobusawa gamma halka
$(\Gamma,M)_B$	Barnes gamma halka
$(\Gamma,M)_{wN}$	Zayıf Nobusawa gamma halka
$Z(M)$	M, Γ halkasının merkezi
$[u,v]_\gamma$	u, v ve γ elemanlarının komütatörü

1. GİRİŞ

Bir matematiksel yapı üzerinde çalışırken genel olarak bu yapının tüm özelliklerini bilmek isteriz. Bu çalışmanın konusu olan halkalar veya daha genel olarak gamma halkalar için de durum aynıdır. Bu yapıların değişmeli olması onların yapısı ile ilgili birçok bilgiyi beraberinde getirir. Bunun bir sonucu olarak bu yapıları değişmeli yapan koşullar birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır.

Halkaların yapısını anlamakla ilgili yapılan çalışmalarda kullanılan kavramlardan biri halkanın türevidir. R herhangi bir halka olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ oluyorsa R üzerinde toplamsal d fonksiyonuna bir türev denir. Eğer d türevi her $x \in R$ için $xd(x) = d(x)x$ koşulunu sağlarsa bu türeve değişimli (commuting), her $x \in R$ için $xd(x) - d(x)x$ elemanı halkanın merkezindeyse bu türeve merkezcil (centralizing) adı verilir. R halkasının bir S alt kümesinde her $x \in S$ için $xd(x) - d(x)x$ elemanı halkanın merkezindeyse bu durumda d ye S kümesi üzerinde merkezcil denir. Genel olarak otomorfizmalar üzerinde elde edilen sonuçlar türevle ilgili elde edilecek sonuçların temeli olmuştur. Luh, asal bir R halkası üzerinde aşikar olmayan değişimli otomorfizma varsa R nin değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olduğunu ispatlamıştır [16]. Mayne 1976 da bu sonucu aşikar olmayan merkezcil otomorfizmalara genişletmiştir [19]. Herstein 1978 de yaptığı çalışmasında halkada türev ve değişmelilik kavramları arasında bağlantı kurmuştur [7]. Mayne 1982 yılındaki çalışmasında R asal halkasının sıfırdan farklı bir U ideali üzerinde merkezcil olan ve her $u \in U$ için $d(u) \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir d otomorfizması veya bir d türevi varsa R nin değişmeli olduğunu ispatlamıştır [20, 21]. Daha sonra Mayne 1984 teki çalışmasında $d(U) \subseteq U$ koşulunu kaldırarak aynı sonucu elde etmiştir [22]. Mayne'nin bu sonucundan sonra 1987 de Bell ve Martindale asal bir R halkasının aşikar olmayan bir U sol ideali verildiğinde R nin U üzerinde birebir ve merkezcil olan fakat aşikar olmayan bir T endomorfizması varsa R nin değişmeli olduğunu ispatlamıştır [2]. 1990 yılında Vukman karakteristiği 2 veya 3 ten farklı ve sıfırdan farklı merkezcil türeve sahip olan asal bir halkanın değişmeli olduğunu ispatlamıştır [25].

Bir modülün endomorfizmalar halkası cebir alanındaki çalışmalarda önemli bir rol oynamaktadır. Bir R halkasını, bir modülün endomorfizmalarının halkası olarak düşünmek halkanın yapısının anlaşılmasına yardımcı olur. Bir modülden başka bir modül üzerine tanımlanan homomorfizmaların oluşturduğu küme üzerinde aşikar olarak tanımlanan toplama işlemi kapalıdır. Ancak çarpma işlemi tanımlanamayacağından bir halka elde edilemez. Bu düşünceden yola çıkarak N. Nobusawa 1964 yılında üçlü işlem yardımıyla gamma halka tanımını vermiştir [23]. Her halka bir gamma halka olduğundan gamma halka aslında halkaların bir genellemesi olarak düşünülebilir. Devam eden yıllarda bu tanım Barnes tarafından zayıflatılarak yeni bir tanım verilmiş [1] ve gamma halkaların yapısı hakkında birçok çalışma yapılmıştır.

Gamma halka teorisinin ortaya atıldığı ilk yıllarda matematikçiler gamma halkanın yapısı üzerinde çalışmışlardır. Barnes, gamma halkaların radikallerini tanımlayarak onların sağladığı bazı özellikleri ispatlamıştır [1]. Kyuno, gamma halkalarda asal ve yarı asal idealler üzerine sonuçlar elde etmiştir [13, 14].

Halkalarda olduğu gibi gamma halkalarda da değişmelilik koşullarının araştırılması bu alandaki çalışmaların yoğunlaştığı konulardan biridir. Bu araştırmalarda yararlanılan kavramlardan biri olan türev; bir M, $\Gamma-$halkasında her $a,b \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\delta(a\alpha b) = \delta(a)\alpha b + a\alpha\delta(b)$ koşulunu sağlayan M üzerinde toplamsal bir δ dönüşümü olarak 1987 yılında Jing tarafından verilmiştir [10]. Daha sonra 2000 yılında Kandamar, gamma halkalarda $k-$türevi tanımlamış ve bundan yararlanarak gamma halkayı değişmeli yapan bazı koşullar ortaya koymuştur [12].

Bu çalışmada halkalarda güçlü değişmelilik koruyan türevler ve endomorfizmalar üzerinde durulmuş, temel kavramlar tanımlanarak bu konuda H. E. Bell ve M. N. Daif in 1994 yılında elde ettikleri sonuçlar detaylarıyla incelenmiştir [3]. Ayrıca bu çalışmada X. Xu, J. Ma ve Y. Zhou nun yarı asal gamma halkalarda güçlü değişmeliliği koruyan sol türevler üzerinde 2012 yılındaki çalışmalarındaki sonuçlar ele alınmıştır [26].

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Gruplar ve Halkalar

Tanım 2.1.1. G boş olmayan bir küme olsun. Eğer $\circledast : G \times G \to G$ ikili işlemi için,

(G$_1$) Her $a, b, c \in G$ için $a \circledast (b \circledast c) = (a \circledast b) \circledast c$

(G$_2$) Her $a \in G$ için $a \circledast e = e \circledast a = a$ şartını sağlayan bir $e \in G$ vardır

(G$_3$) Her $a \in G$ için $a \circledast x = x \circledast a = e$ şartını sağlayan bir $x \in G$ vardır

(G$_4$) Her $a, b, \in G$ için $a \circledast b = b \circledast a$

koşullarından (G_1), (G_2) ve (G_3) sağlanıyorsa G kümesine $\circledast$ ikili işlemi altında bir **grup** denir. Eğer G grubu için (G_4) koşulu sağlanıyorsa bu durumda G ye **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.1.2. G kümesi $\circledast$ işlemi ile bir grup ve H, G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi $\circledast$ işlemine göre bir grup oluyorsa H alt kümesine G grubunun bir **alt grubu** denir.

Tanım 2.1.3. G bir grup, H kümesi G grubunun bir alt grubu olsun. $H \neq G$ ve $H \neq \{e_G\}$ koşulları sağlanıyorsa H alt grubuna G grubunun bir **öz alt grubu** denir.

Lemma 2.1.4. ***(Brauer's Trick)*** *Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.*

Tanım 2.1.5. R boş olmayan bir küme, $+ : R \times R \to R$ ve $\cdot : R \times R \to R$ ikili işlemleri verilsin. Eğer,

(R$_1$) R kümesi $+$ işlemi ile bir değişmeli gruptur

(R$_2$) Her $a, b, c \in R$ için $(a.b).c = a.(b.c)$

(R$_3$) Her $a, b, c \in R$ için $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b).c = a.c + b.c$

koşulları sağlanıyorsa R kümesine bu ikili işlemlere göre bir **halka** denir ve $(R, +, .)$ ile gösterilir.

R halkasında her $a,b \in R$ için $a.b = b.a$ koşulu sağlanıyorsa bu halkaya **değişmeli halka** denir. Eğer R halkasında her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ elemanı varsa bu halkaya da **birimli halka** adı verilir. Birim elemanı var olan değişmeli halkalara da birimli ve değişmeli halka denir.

Tanım 2.1.6. R bir halka ve S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. S, R halkası üzerinde tanımlı işlemlere göre bir halka oluyorsa S kümesine R halkasının bir **alt halkası** denir ve $S \leq R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. I, R halkasının bir alt halkası olsun. Her $r \in R$ ve $x \in I$ için $r.x \in I$ ise I alt halkasına R halkasının **sol ideali** denir ve $I <_l R$ ile gösterilir. Eğer her $r \in R$ ve $x \in I$ için $x.r \in I$ ise bu durumda I alt halkasına R halkasının **sağ ideali** denir ve $I <_r R$ ile gösterilir.

Eğer I, R halkasının hem sağ hem de sol ideali ise I alt halkasına R halkasının **ideali** denir ve $I < R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. R bir halka olsun. $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına **nilpotent eleman** denir.

Tanım 2.1.9. R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer $I^n = (0)$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise I idealine **nilpotent ideal** denir.

Tanım 2.1.10. $(R,+,.)$ ve $(S,\Delta,\odot)$ iki halka olsun. $f : R \to S$ fonksiyonu her $a,b \in R$ için $f(a+b) = f(a)\Delta f(b)$ ve $f(a.b) = f(a) \odot f(b)$ koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna **halka homomorfizması** denir. R den R ye tanımlı bir homomorfizmaya **endomorfizma** denir.

Tanım 2.1.11. [11] R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı her K ideali için $I \cap K \neq (0)$ oluyorsa I idealine **asli ideal (essential ideal)** denir.

Tanım 2.1.12. [17] R bir halka ve P, R halkasının bir ideali olsun. $P \neq R$ ve R halkasındaki herhangi iki A ve B idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P idealine **asal ideal** denir.

Teorem 2.1.13. [17] *R bir halka ve P, R halkasının bir ideali olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

(i) P asal idealdir.

(ii) $a,b \in R$ olmak üzere $aRb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) $(a) < R$, $(b) < R$ esas idealler olmak üzere $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) $U,V <_r R$ olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

(v) $U,V <_l R$ olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

Tanım 2.1.14. [17] R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olsun. $Q \neq R$ ve R halkasındaki herhangi bir A ideali için $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ koşulu sağlanıyorsa Q idealine **yarı asal ideal** denir.

Teorem 2.1.15. [17] *R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

(i) Q yarı asal idealdir.

(ii) $a \in R$ olmak üzere $aRa \subseteq Q$ iken $a \in Q$ dur.

(iii) $(a) < R$ esas ideal olmak üzere $(a)(a) \subseteq Q$ iken $a \in Q$ dur.

(iv) $U <_r R$ olmak üzere $U^2 \subseteq Q$ iken $U \subseteq Q$ dur.

(v) $U <_l R$ olmak üzere $U^2 \subseteq Q$ iken $U \subseteq Q$ dur.

Tanım 2.1.16. [17] Sıfır ideali asal ideal olan halkalara **asal halka** denir. Benzer şekilde sıfır ideali yarı asal ideal olan halkalara da **yarı asal halka** denir.

Sonuç 2.1.17. *R bir halka olsun.*

(i) R halkasının asal halka olması için gerek ve yeter koşul R halkasının herhangi a ve b elemanları için $aRb = (0)$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

(ii) R halkasının yarı asal halka olması için gerek ve yeter koşul R halkasının herhangi bir a elemanı için $aRa = (0)$ *iken* $a = 0$ *olmasıdır.*

Önerme 2.1.18. *Asal bir R halkasında sıfırdan farklı her I ideali asli idealdir.*

İspat: I, R halkasının sıfırdan farklı asli olmayan bir ideali olsun. Bu durumda R halkasının sıfırdan farklı bir K ideali $I \cap K = (0)$ eşitliğini sağlar. $IK \subseteq I \cap K = (0)$ ve (0) asal ideal olduğundan $I = (0)$ veya $K = (0)$ olmak zorundadır. Ancak bu I ve K ideallerinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla asal bir halkada sıfırdan farklı her ideal bir asli idealdir. □

Tanım 2.1.19. R bir halka olsun. $Z(R) = \{c \in R \mid cx = xc, \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının **merkezi** denir. Halkanın merkezi tarafından kapsanan bir ideale ise **merkezcil ideal** denir.

Tanım 2.1.20. R bir halka ve I, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. $C_R(I) = \{a \in R \mid as = sa, \forall s \in I\}$ kümesine I **kümesinin** R **halkasındaki merkezleyeni** denir.

Tanım 2.1.21. R bir halka olsun. R halkasında sıfırdan farklı bir a elemanı için $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ var ise a elemanına **sol sıfır bölen** denir. Eğer $ca = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c \in R$ var ise a elemanına **sağ sıfır bölen** denir. Eğer a elemanı hem sağ hem de sol sıfır bölen ise bu durumda a elemanına **sıfır bölen** denir.

Tanım 2.1.22. R bir halka ve S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. $Ann_r(S) = \{a \in R \mid sa = 0, \forall s \in S\}$ kümesine S nin R deki **sağ sıfırlayanlar kümesi**, $Ann_l(S) = \{a \in R \mid as = 0, \forall s \in S\}$ kümesine S nin R deki **sol sıfırlayanlar kümesi** denir.

Tanım 2.1.23. [6] Bir halkada sıfırdan farklı bir elemanın sağ sıfırlayanı ve sol sıfırlayanı yoksa bu elemana **regüler eleman** denir.

Tanım 2.1.24. R ve S herhangi iki halka ve $f : R \to S$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ koşulunu sağlıyorsa f dönüşümüne halka homomorfizması denir. Bu durumda $\text{Ker} f = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$ kümesine de f homomorfizmasının **çekirdeği** denir.

Tanım 2.1.25. R bir halka ve δ, R üzerinde bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$ şartı sağlanıyorsa δ dönüşümüne R halkasının bir **sol türevi** denir.

Tanım 2.1.26. R bir halka ve δ, R üzerinde bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ oluyorsa δ dönüşümüne R halkasının bir **türevi** denir.

Tanım 2.1.27. R bir halka olsun. $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanı **komütatör çarpım** olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.28. [25] R bir halka olsun. S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olmak üzere,

(i) Her $x \in S$ için $[f(x), x] = 0$ ise f dönüşümüne R halkasının S üzerinde bir **değişimli (commuting) dönüşümü** denir.
(ii) Her $x \in S$ için $[f(x), x] \in Z(R)$ ise f dönüşümüne R halkasının S üzerinde bir **merkezcil (centralizing) dönüşümü** denir.

Tanım 2.1.28 e göre her değişimli dönüşüm bir merkezcil dönüşümdür. Ancak bunun karşıtının her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 2.1.29. $R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ halkası verilsin ve $f : R \to R$ fonksiyonu $f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak tanımlansın. R halkasının $\begin{bmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$ tipindeki elemanlardan oluşan alt kümesi S olmak üzere S deki her A elemanı için $[f(A), A] \in Z(R)$ dir. Buna göre f dönüşümü S üzerinde merkezcil dönüşümdür. Ancak, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in S$ için $[f(B), B] \neq 0$ olduğundan f dönüşümü değişimli değildir.

Tanım 2.1.30. [4] R bir halka olsun. S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olmak üzere her $x,y \in S$ için $[x,y]=0$ iken $[f(x),f(y)]=0$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna S kümesi üzerinde **değişmeliliği koruyan dönüşüm** denir.

Tanım 2.1.31. [3] R bir halka olsun. S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olmak üzere her $x,y \in S$ için $[f(x),f(y)]=[x,y]$ oluyorsa f fonksiyonuna S üzerinde **güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm** denir.

Tanım 2.1.32. [18] R bir asal halka ve A, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.

$$\mathcal{M} = \{(A,f) \mid f : A \to R \text{ sol } R\text{-modül homomorfizması}\}$$

kümesi üzerinde

“$(A,f) \sim (B,g) \iff R$ nin sıfırdan farklı bir $C \subseteq A \cap B$ ideali üzerinde $f = g$ dir.”

olarak tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir (A,f) elemanının denklik sınıfı $[A,f]$ ile gösterilsin. $\sim$ denklik bağıntısına göre ortaya çıkan tüm denklik sınıflarından oluşan $Q_l(R)$ kümesi,

$$[A,f]+[B,g]=[A\cap B, f+g] \text{ ve } [A,f][B,g]=[BA,fg]$$

işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya **sol Martindale kesirler halkası** denir. Benzer şekilde sağ Martindale kesirler halkası da tanımlanabilir. $Q_l(R)$ halkasının merkezine R halkasının **genişletilmiş merkezi** denir.

Tanım 2.1.33. [9] K bir cisim ve A herhangi bir halka olsun. Eğer A bir $K-$vektör uzayı ve her $x \in K$, $a,b \in A$ için $x(ab)=(xa)b=a(xb)$ eşitlikleri sağlanıyorsa A halkasına bir $K-$cebirdir denir.

Lemma 2.1.34. [2]

a) R yarı asal halkasının sıfırdan farklı tek yanlı idealinin merkezi, R halkasının merkezi tarafından kapsanır. Özel olarak, her değişmeli tek yanlı ideal R halkasının merkezi tarafından kapsanır.

b) R bir asal halka ise sıfırdan farklı herhangi bir tek yanlı idealin merkezleyeni R halkasının merkezine eşittir. Eğer R nin merkezi tarafından kapsanan sıfırdan farklı bir sağ ideal varsa R halkası değişmeli olur.

Lemma 2.1.35. [5] *R bir yarı asal halka ve K kümesi R nin sıfır idealinden farklı bir ideali olsun. Eğer $z \in R$ ve z, $[K,K]$ kümesinin merkezleyenin bir elemanı ise bu durumda z, K idealinin merkezleyeninin de bir elemanı olur.*

Lemma 2.1.36. [18] *R bir asal halka olsun. Eğer R halkasının a ile b elemanları, her $x \in R$ için $axb = bxa$ koşulunu sağlarsa ve $a \neq 0$ ise R halkasının genişletilmiş merkezindeki bazı λ elemanları için $b = \lambda a$ olur.*

Lemma 2.1.37. [2] *R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. T, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere U daki her bir u elemanı için $T(u) = u$ oluyorsa T, R halkası üzerinde birim dönüşüm olur.*

2.2. Gamma Halkaları

Tanım 2.2.1. [23] M ve Γ toplamsal değişmeli iki grup olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} M\times\Gamma\times M \to M & \text{ile} & \Gamma\times M\times\Gamma \to \Gamma \\ (a,\alpha,b) \to a\alpha b & & (\alpha,a,\beta) \to \alpha a\beta \end{array}$$

fonksiyonları her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için

(i) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$

$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(ii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c) = a(\alpha b\beta)c$

(iii) $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere her $x,y \in M$ için $x\gamma y = 0$ ise $\gamma = 0$

şartlarını sağlıyorsa M halkasına **Nobusawa** $\Gamma-$**halka** denir ve $(\Gamma,M)_N$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. [1] M ve Γ toplamsal değişmeli iki grup olsun. Eğer

$$M \times \Gamma \times M \to M$$
$$(a, \alpha, b) \to a\alpha b$$

fonksiyonu her $a, b, c \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

(i) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$

$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(ii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

özelliklerini sağlıyorsa M halkasına **Barnes $\Gamma-$halka** denir ve $(\Gamma, M)_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. [15] M bir Barnes Γ-halka olmak üzere her $a, b, c \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $a\alpha(b\beta c) = a(\alpha b\beta)c$ şartı sağlanıyorsa M ye **zayıf Nobusawa $\Gamma-$halka** denir ve $(\Gamma, M)_{wN}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. [15] M bir Nobusawa Γ-halka ve $a \in M$ olmak üzere her $\gamma, \delta \in \Gamma$ için $\gamma a\delta = 0$ iken $a = 0$ şartı sağlanıyorsa M ye **güçlü Nobusawa $\Gamma-$halka** denir ve $(\Gamma, M)_{sN}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.5. [15] U ile V aynı cisim üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olsun. Eğer U dan V ye lineer dönüşümlerin kümesi M ve V den U ya lineer dönüşümlerin kümesi Γ ise fonksiyonlardaki elemanter toplama işlemi ve bileşke işlemi ile M bir güçlü Nobusawa $\Gamma-$halkadır.

Örnek 2.2.6. [15] R bir halka ve I, R halkasının herhangi bir ideali olsun. Buna göre $(R,R)_{wN}$, $(R,I)_{wN}$ ve $(I,R)_{wN}$ dir.

Örnek 2.2.7. [15] R bir halka olmak üzere R_n halkası R üzerindeki $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası olsun. S birimli bir halka ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $(\mathbb{Z}, R)_B$, $(R, R_n)_B$ ve $(S,S)_N$ dir.

Tanım 2.2.8. [15] M bir $\Gamma-$halka ve U, M nin bir toplamsal alt grubu olsun.

(i) Her $u \in U$, $\gamma \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $m\gamma u \in U$ ise U alt grubuna M nin **sol ideali** denir ve $U <_l M$ ile gösterilir.
(ii) Her $u \in U$, $\gamma \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $u\gamma m \in U$ ise U alt grubuna M nin **sağ ideali** denir ve $U <_r M$ ile gösterilir.
(iii) Eğer U alt grubu M halkasının hem sağ hem sol ideali oluyorsa U ya M nin **ideali** denir ve $U < M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9. [15] M bir $\Gamma-$halka olsun.

$$\{a \in M \mid a\alpha b = b\alpha a, \forall b \in M, \forall \alpha \in \Gamma\}$$

olarak tanımlanan kümeye M $\Gamma-$halkasının **merkezi** denir ve $Z(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.10. [15] M bir $\Gamma-$halka olsun. Eğer $a, b \in M$ için $a\Gamma M\Gamma b = (0)$ iken $a = 0$ ya da $b = 0$ oluyorsa M ye **asal $\Gamma-$halka** denir.

Tanım 2.2.11. M bir $\Gamma-$halka olsun. Eğer $a \in M$ için $a\Gamma M\Gamma a = (0)$ iken $a = 0$ oluyorsa M ye **yarı asal $\Gamma-$halka** denir.

Tanım 2.2.12. [10] M bir $\Gamma-$halka olsun.

(i) Her $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\delta(x\alpha y) = x\alpha\delta(y) + y\alpha\delta(x)$ şartını sağlayan $\delta : M \to M$ toplamsal dönüşümüne **M üzerinde sol türev** denir.
(ii) Her $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\delta(x\alpha y) = \delta(x)\alpha y + \delta(y)\alpha x$ şartını sağlayan $\delta : M \to M$ toplamsal dönüşümüne **M üzerinde sağ türev** denir.
(iii) Her $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\delta(x\alpha y) = \delta(x)\alpha y + x\alpha\delta(y)$ şartını sağlayan $\delta : M \to M$ toplamsal dönüşümüne **M üzerinde türev** denir.

Tanım 2.2.13. [15] M bir $\Gamma-$halka olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\varphi(x\alpha y) = \varphi(x)\alpha\varphi(y)$ şartını sağlayan $\varphi : M \to M$ toplamsal dönüşümüne M **üzerinde endomorfizma** denir.

Tanım 2.2.14. [12] M bir $\Gamma-$halka, $a,b\in M$ ve $\alpha\in\Gamma$ olsun. $a\alpha b-b\alpha a$ elemanına **komütatör çarpımı** denir ve $[a,b]_\alpha$ ile gösterilir. Buna benzer olarak $\alpha,\beta\in\Gamma$ ve $x\in M$ için $\alpha x\beta-\beta x\alpha$ ifadesine de **komütatör çarpımı** denir ve $[\alpha,\beta]_x$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.15. [12] M bir $\Gamma-$halka, $a,b,c\in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ için aşağıdaki komütatör formülleri geçerlidir:

(i) $[a,b]_\alpha=-[b,a]_\alpha \quad [\alpha,\beta]_a=-[\beta,\alpha]_a$

(ii) $[a+b,c]_\alpha=[a,c]_\alpha+[b,c]_\alpha \quad [\alpha+\beta,\gamma]_a=[\alpha,\gamma]_a+[\beta,\gamma]_a$

(iii) $[a,b\alpha c]_\beta=[a,b]_\beta\,\alpha c+b\alpha\,[a,c]_\beta+b\beta a\alpha c-b\alpha a\beta c$

(iv) $[a\alpha b,c]_\beta=[a,c]_\beta\,\alpha b+a\alpha\,[b,c]_\beta+a\alpha c\beta b-a\beta c\alpha b$

(v) $[\alpha a\beta,\gamma]_b=\alpha a\,[\beta,\gamma]_b+\alpha\,[a,b]_\gamma\,\beta+[\alpha,\gamma]_b\,a\beta$

(vi) $[[a,b]_\alpha,c]_\alpha+[[c,a]_\alpha,b]_\alpha+[[b,c]_\alpha,a]_\alpha=0$

(vii) $[[\alpha,\gamma]_a,\beta]_a+[[\beta,\alpha]_a,\gamma]_a+[[\gamma,\beta]_a,\alpha]_a=0$

Tanım 2.2.16. [26] M bir $\Gamma-$halka ve S, M nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere her $x,y\in S$ ve $\alpha\in\Gamma$ için $[f(x),f(y)]_\alpha=[x,y]_\alpha$ koşulunu sağlayan $f:M\to M$ dönüşümüne M nin S alt kümesi üzerinde **güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümü** denir.

3. HALKALARDA DEĞİŞMELİLİĞİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Halkaların yapısı hakkında bilgi sahibi olmak için halkada özel bir koşul sağlayan dönüşümler tanımlanabilir. Bu dönüşümlerden biri güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümlerdir. Bu bölümde, H. E. Bell ve M. N. Daif'in "Değişmelilik ve güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümler üzerine" başlıklı çalışmalarında güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümler yardımıyla halkanın değişmeliliği hakkında elde ettikleri sonuçlara yer verilmiştir.

3.1. Yarı Asal Halkalarda Güçlü Değişmeliliği Koruyan Türevler

Bu kısımda, yarı asal halka üzerinde tanımlı olan ve belirli bir özdeşliği sağlayan türevler yardımıyla halkadaki değişmelilik koşulları araştırılacaktır.

Teorem 3.1.1. *R bir yarı asal halka ve U kümesi R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer R halkasının D türevi U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm ise $U \subseteq Z(R)$ olur.*

İspat: D türevi U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olduğundan her $x,y \in U$ için $[x,xy] = [D(x),D(xy)]$ dir. Buradan her $x,y \in U$ için,

$$x[x,y]+[x,x]y = [D(x),D(x)y+xD(y)] = [D(x),D(x)y]+[D(x),xD(y)]$$

$$\Rightarrow x[x,y]+[x,x]y = D(x)[D(x),y]+[D(x),D(x)]y+x[D(x),D(y)]+[D(x),x]D(y)$$

$$\Rightarrow x[x,y]+[x,x]y = D(x)[D(x),y]+0+x[x,y]+[D(x),x]D(y)$$

$$\Rightarrow x[x,y] = D(x)[D(x),y]+0+x[x,y]+[D(x),x]D(y)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$[D(x),x]D(y)+D(x)[D(x),y] = 0 \tag{3.1.1}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.1) eşitliğinde $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazılırsa her $x, y \in U$ ve $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}
& D(x)\,[D(x), yr] + [D(x), x]\,D(yr) = 0 \\
\Rightarrow & D(x)\,(y\,[D(x), r] + [D(x), y]\,r) + [D(x), x]\,(yD(r) + D(y)r) = 0 \\
\Rightarrow & D(x)y\,[D(x), r] + D(x)\,[D(x), y]\,r + [D(x), x]\,yD(r) + [D(x), x]\,D(y)r = 0 \\
\Rightarrow & D(x)y\,[D(x), r] + [D(x), x]\,yD(r) + (D(x)\,[D(x), y] + [D(x), x]\,D(y))\,r = 0
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$D(x)y\,[D(x), r] + [D(x), x]\,yD(r) = 0 \tag{3.1.2}$$

eşitliği elde edilir. Burada $r = D(x)$ yazılırsa her $x, y \in U$ için,

$$\begin{aligned}
& D(x)y\,[D(x), D(x)] + [D(x), x]\,yD\,(D(x)) = 0 \\
\Rightarrow & [D(x), x]\,yD^2(x) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre her $x \in U$ için,

$$[D(x), x]\,UD^2(x) = (0)$$

olup U, R nin bir sağ ideali olduğundan,

$$[D(x), x]\,URD^2(x) = (0) \tag{3.1.3}$$

elde edilir. R halkasının tüm asal ideallerinin ailesi $\mathscr{P} = \{P_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ olsun. Bu durumda R yarı asal olduğundan $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = (0)$ dır. P, $\mathscr{P}$ ailesinin herhangi bir elemanı ve $x \in U$ için (3.1.3) gereği,

$$D^2(x) \in P \text{ veya } [D(x), x]\,U \subseteq P \tag{3.1.4}$$

bulunur. $D^2(x) \in P$ ise her $x \in U$ için $[x, yD(x)] = [D(x), D\,(yD(x))]$ yazabiliriz. Burada $x, y \in U$, $D(x) \in R$ ve U, R nin sağ ideali olduğundan $yD(x) \in U$ olur. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
& y[x,D(x)]+[x,y]D(x) = \left[D(x),yD^2(x)+D(y)D(x)\right] \\
\Rightarrow & y[x,D(x)]+[x,y]D(x) = \left[D(x),yD^2(x)\right]+[D(x),D(y)D(x)] \\
\Rightarrow & y[x,D(x)]+[x,y]D(x) = y\left[D(x),D^2(x)\right]+[D(x),y]D^2(x)+D(y)[D(x),D(x)] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[D(x),D(y)]D(x) \\
\Rightarrow & y[x,D(x)]+[x,y]D(x) = y\left[D(x),D^2(x)\right]+[D(x),y]D^2(x)+[x,y]D(x) \\
\Rightarrow & y[x,D(x)] = y\left[D(x),D^2(x)\right]+[D(x),y]D^2(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. $D^2(x)\in P$ ifadesinden her $y\in U$ için $y[x,D(x)]\in P$ olur. O halde U, R nin sağ ideali olduğundan $UR[x,D(x)]\subseteq P$ elde edilir. Bu durumda P asal ideal olduğundan ya $U\subseteq P$ ya da $[x,D(x)]\in P$ olur. Her iki durumda da $[x,D(x)]U\subseteq P$ ifadesi geçerlidir. Çünkü, $U\subseteq P$ ise $[x,D(x)]U\subseteq[x,D(x)]P\subseteq P$ ve $[x,D(x)]\in P$ ise $[x,D(x)]U\subseteq PU\subseteq P$ dir. Bu halde (3.1.4) ifadesi, her $x\in U$ ve $P\in\mathscr{P}$ için $[x,D(x)]U\subseteq P$ olduğunu gösterir. $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha=(0)$ olduğundan her $x\in U$ için $[x,D(x)]U=(0)$ olur. Bu durumda (3.1.2) ifadesi göz önüne alınırsa her $x\in U$, $r\in R$ için,

$$D(x)U[D(x),r]=(0)$$

bulunur. U, R nin sağ ideali olduğundan $D(x)UR[D(x),r]=(0)$ yazılabilir. Bu sebeple her bir $P\in\mathscr{P}$ ve her bir $x\in U$ için $D(x)U\subseteq P$ veya $[D(x),R]\subseteq P$ elde edilir. Şimdi $A=\{x\in U \mid D(x)U\subseteq P\}$ ve $B=\{x\in U\mid [D(x),R]\subseteq P\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B kümeleri U sağ idealinin alt gruplarıdır ve $U=A\cup B$ dir. Buna göre Teorem 2.1.4 gereği $U=A$ veya $U=B$ dir. Böylece U idealinin bütün elemanları ya sadece A kümesine ya da sadece B kümesine aittir. Bu nedenle, P idealinin asallığından faydalanarak elde edilen yukarıdaki koşullar,

$$D(U)U\subseteq P \text{ veya } [D(U),R]\subseteq P \qquad (3.1.5)$$

olarak yeniden yazılabilir. Varsayalım ki $D(U)U \subseteq P$ olsun. Keyfi seçilen $x,y,z \in U$ için $[x,yz] = [D(x),D(yz)]$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
& y[x,z]+[x,y]z = [D(x),yD(z)+D(y)z] \\
\Rightarrow & y[x,z]+[x,y]z = [D(x),yD(z)]+[D(x),D(y)z] \\
\Rightarrow & y[x,z]+[x,y]z = y[D(x),D(z)]+[D(x),y]D(z)+D(y)[D(x),z]+[D(x),D(y)]z \\
\Rightarrow & y[x,z]+[x,y]z = y[x,z]+[D(x),y]D(z)+D(y)[D(x),z]+[x,y]z \\
\Rightarrow & [D(x),y]D(z)+D(y)[D(x),z] = 0
\end{aligned}
$$

olup bu eşitlik düzenlenirse $[D(x),y]D(z) = -D(y)[D(x),z]$ eşitliğine ulaşılır. Eşitliğin sağ tarafı P idealinin elemanı olduğu için eşitliğin sol tarafındaki ifade de P idealinin elemanıdır. Yani $[D(x),y]D(z) \in P$ olur. Buradan,

$$(D(x)y - yD(x))D(z) = D(x)yD(z) - yD(x)D(z)$$

elde edilir. Burada $(D(x)y - yD(x))D(z) \in P$ ve $D(x)yD(z) \in P$ olduğundan her $y \in U$ için $yD(x)D(z) \in P$ bulunur. Bu durumda her $x,z \in U$ için $U[D(x),D(z)] = U[x,z] \subseteq P$ elde edilir. P idealinin asallığı $U \subseteq P$ ya da $[U,U] \subseteq P$ olmasını gerektirir. Buna göre her iki durumda da $[U,U] \subseteq P$ elde edilir. (3.1.5) ifadesi gereği $[D(U),R] \subseteq P$ olması $[D(U),D(U)] \subseteq P$ olmasını gerektirir. Bu durumda $[U,U] \subseteq P$ elde edilir. O halde (3.1.5) ifadesindeki her iki durumda da $[U,U] \subseteq P$ bulunur. Bu kapsama her bir P asal ideali için geçerli olduğundan $[U,U] = (0)$ elde edilir. Böylece U değişmeli bir sağ ideal olup R yarı asal halka olduğundan Lemma 2.1.34 gereği $U \subseteq Z(R)$ elde edilir. □

Teorem 3.1.1 de yer alan R halkasının yarı asal olması koşulu kaldırılamaz bir koşuldur. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.1.2. [3] R karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde 3-boyutlu bir cebir olsun ve R deki çarpma işlemi, $\{u_0,u_1,u_2\}$ kümesi R nin bir tabanı olmak üzere,

$$u_i u_j = \begin{cases} u_0 & , \quad (i,j) = (1,2) \ ise \\ 0 & , \quad diğer \ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda R değişmeli olmayan bir halkadır ve yarı asal değildir. d, R üzerinde $d(u_0) = 0$, $d(u_1) = u_1$, $d(u_2) = u_2$ şeklinde tanımlı lineer dönüşüm olsun. d dönüşümü R üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan bir dönüşümdür.

Teorem 3.1.1 de yer alan hipotezlerin R halkasının değişmeli olmasını gerektirmeyeceğini bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.1.3. [3] R_1 değişmeli olmayan bir asal halka ve R_1 üzerinde d_1 türevi tanımlı olsun. R_2 halkası da değişmeli olan sıfır bölensiz bir halka olsun ve $R = R_1 \oplus R_2$ halkası tanımlansın. Buna göre R halkası yarı asaldır. Bu halka üzerinde $d((r_1, r_2)) = (d_1(r_1), 0)$ olarak tanımlanan d dönüşümü bir türevdir. $U = \{(0, r_2) : r_2 \in R_2\}$ kümesi R halkasının bir idealidir ve d türevi U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan bir dönüşümdür. Ancak burada R_1 halkası değişmeli olmadığı için R halkası da değişmeli değildir.

Sonuç 3.1.4. *Yarı asal R halkası üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan bir türev varsa R halkası değişmelidir.*

3.2. Asal ve Yarı Asal Halkalarda Güçlü Değişmeliliği Koruyan Endomorfizmalar

Bu kısımda, asal ve yarı asal halka üzerinde tanımlı güçlü değişmeliliği koruyan türevler ile endomorfizmalar yardımıyla halkaların değişmeliliği üzerine elde edilen sonuçlar incelenecektir.

Teorem 3.2.1. *R bir asal halka ve U, R halkasının asli sağ ideali olsun. Eğer T endomorfizması, U üzerinde R halkasının birim dönüşümünden farklı güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm ise R değişmelidir.*

İspat: Hipotez gereği her $x,y \in U$ için $[x,xy] = [T(x),T(xy)]$ dir. Bu eşitlik düzenlenirse $(T(x)-x)[x,y] = 0$ elde edilir. Burada $r \in R$ için y yerine yr yazılırsa $(T(x)-x)[x,yr] = 0$ ifadesinden her $y \in R$ için $(T(x)-x)y[x,r] = 0$ elde edilir. U, R halkasının sağ ideali olduğundan,

$$(T(x)-x)UR[x,r] = (0),\ \forall x,y \in U, r \in R$$

bulunur. R halkasının asal olması her $x \in U$ için,

$$(T(x)-x)U = (0) \quad \text{veya} \quad [x,r] = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan Teorem 2.1.4 gereği her $x \in U$ için $(T(x)-x)U = (0)$ veya her $x \in U$ için $[x,r] = 0$ dır. Böylece,

$$(T(x)-x)U = (0) \quad \text{veya} \quad U \subseteq Z(R)$$

bulunur. Eğer $U \subseteq Z(R)$ ise Lemma 2.1.34 gereği R değişmelidir. Her $x \in U$ için,

$$(T(x)-x)U = (0) \tag{3.2.6}$$

olduğunu kabul edelim. T, U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olduğundan her $x,y \in U$ için $[x,yx] = [T(x),T(yx)]$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& y[x,x] + [x,y]x = T(y)[T(x),T(x)] + [T(x),T(y)]T(x) \\
\Rightarrow\ & [x,y]x = [x,y]T(x) \\
\Rightarrow\ & [x,y]T(x) - [x,y]x = (0) \\
\Rightarrow\ & [x,y](T(x)-x) = (0)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $w \in U$ olmak üzere son eşitlikte y yerine yw yazılırsa her $w \in U$ için,

$$\begin{aligned}
& [x,yw](T(x)-x) = (0) \\
\Rightarrow\ & (y[x,w] + [x,y]w)(T(x)-x) = (0) \\
\Rightarrow\ & y[x,w](T(x)-x) + [x,y]w(T(x)-x) = (0) \\
\Rightarrow\ & [x,y]w(T(x)-x) = (0)
\end{aligned}$$

elde edilir. U sağ ideal olduğundan her $x,y \in U$ için,

$$[x,y]UR(T(x)-x) = (0) \tag{3.2.7}$$

bulunur. O halde R halkası asal olduğundan,

$$[x,y]U = (0) \quad \text{veya} \quad T(x)-x = 0$$

olur. Burada $T(x)-x=0$ olursa her $x \in U$ için $T(x)=x$ eşitliğine ulaşılır. Bu ise T dönüşümünün U üzerinde birim dönüşüm olması demektir. Bu durumda Lemma 2.1.37 gereği T dönüşümü R üzerinde birim dönüşümdür. Oysa bu hipotezle çelişir. Bu durumda,

$$[x,y]U = (0), \ \forall x,y \in U \tag{3.2.8}$$

olmak zorundadır. $V := U \cap T^{-1}(U)$ kümesi her $x,y \in U$ için bütün $[x,y]$ komütatörlerini içerir. Varsayalım ki V bütün komütatör çarpımları içermesin. Bu durumda $x,y \in U$ olmak üzere V kümesinin elemanı olmayan bir $[x,y]$ komütatörü vardır. O halde $[x,y] \notin T^{-1}(U)$ olmak zorundadır. Buradan $[T(x),T(y)] \notin U$ bulunur. T dönüşümü U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olduğundan $[x,y] \notin U$ elde edilir. Bu ise U, R halkasının sağ ideali olduğundan bir çelişkidir. O halde V kümesi bu komütatör çarpımların tamamını içerir. Eğer U değişmeli ise U, R halkasının merkezcil bir sağ ideali olup Lemma 2.1.34 gereği R halkası da değişmelidir. U sağ idealinin değişmeli olmadığını varsayalım. U asli ideal olduğundan $V \neq (0)$ dır. $V-\{0\}$ kümesinin herhangi bir b elemanını alalım. Bu b elemanı aynı zamanda U kümesinin de bir elemanıdır. R halkasından x ve y elemanları alınırsa U nun sağ ideal olması da kullanılarak (3.2.8) ifadesinden her $x,y \in R$ için $[bx,by]b = (0)$ yazılabilir. Buradan $bxbyb = bybxb$ elde edilir. R halkasında sabit bir x elemanı için Lemma 2.1.36 gereği $bxb = \lambda b$ olacak şekilde R nin genişletilmiş merkezinde bir $\lambda = \lambda(x)$ elemanı vardır. Bu eşitliği kullanarak her $x \in R$ için,

$$[bxb, b] = 0$$
$$\Rightarrow b[xb, b] + [b, b]xb = 0$$
$$\Rightarrow b[xb, b] = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer b sol sıfır bölen değilse $[xb, b] = 0$ olacağından b elemanı sıfırdan farklı Rb sol idealini merkezler. O halde Lemma 2.1.34 gereği b elemanı R halkasını da merkezler. Sıfırdan farklı b elemanı sol sıfır bölen değilse merkezde olduğu için sağ sıfır bölen de olamaz. Bu durumda b regülerdir. Fakat (3.2.8) eşitliğine göre b bir sağ sıfır bölendir. Dolayısıyla sol sıfır bölen de olmak zorundadır ve böylece $Ann_r(b) \neq (0)$ dır. U asli sağ ideal olduğundan $ba = 0$ olacak şekilde bir $a \in U - (0)$ vardır. T homomorfizmasının U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olma özelliğini kullanarak,

$$[a, b] = [T(a), T(b)]$$
$$\Rightarrow ab - ba = T(a)T(b) - T(b)T(a)$$
$$\Rightarrow ab = T(a)T(b)$$

eşitliği elde edilir. b, V nin elemanı olduğu için $T(b)$ de U nun bir elemanıdır. Buna göre (3.2.6) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(T(a) - a)T(b) = 0$$
$$\Rightarrow T(a)T(b) - aT(b) = 0$$
$$\Rightarrow ab - aT(b) = 0$$
$$\Rightarrow a(b - T(b)) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte R nin herhangi bir r elemanı için a yerine ar yazılırsa,

$$ar(b - T(b)) = 0$$
$$\Rightarrow aR(b - T(b)) = 0$$

bulunur. Bu durumda R asal halka olduğu için ya $a = 0$ ya da $b - T(b) = 0$ olur. Ancak $a \in U - (0)$ olduğundan $b - T(b) = 0$, yani $b = T(b)$ olmak zorundadır. Bu durumda T, V üzerinde birim dönüşüm olur. Bu da Lemma 2.1.37 ile çelişir. Böylece U değişmeli olmak zorundadır. Dolayısıyla R halkasının değişmeli olduğu elde edilir. □

Önerme 2.1.18 gereği asal bir halkanın sıfırdan farklı her ideal aynı zamanda asli sağ ideal olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2. *R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer R, U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan birimden farklı bir endomorfizmaya sahipse R değişmelidir.*

Teorem 3.2.3. *R bir yarı asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer R nin T endomorfizması U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm ve $U \cap T^{-1}(U)$ ideali üzerinde birim dönüşüm değilse R sıfırdan farklı merkezcil bir ideale sahiptir.*

İspat: R halkasındaki tüm asal ideallerin ailesi $\mathscr{P} = \{P_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ olsun. R yarı asal halka olduğundan,

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = (0) \tag{3.2.9}$$

dir. Hipotez gereği bir önceki teoremin ispatında elde edilen (3.2.7) eşitliği burada da geçerlidir. Buna göre her $x, y \in U$ için,

$$\begin{aligned} & [x,y]UR(T(x)-x) = (0) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha \\ \Rightarrow & [x,y]UR(T(x)-x) \subseteq P_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda \\ \Rightarrow & [x,y]U \subseteq P_\alpha \vee (T(x)-x) \in P_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda \end{aligned}$$

olur. P_α grubunun $A = \{x \in U \mid [x,y] \in P_\alpha\}$ ve $B = \{x \in U \mid (T(x)-x) \in P_\alpha\}$ alt grupları göz önüne alınırsa Lemma 2.1.4 gereği her $x, y \in U$ için $[x,y]U \subseteq P_\alpha$ veya her $x \in U$ için $(T(x)-x) \in P_\alpha$ bulunur. U nun sol ideal olması sebebiyle

$[x,y]RU \subseteq P_\alpha$ yazılabilir. P_α asal ideal olduğundan,

$$[x,y] \in P_\alpha \quad \text{veya} \quad U \subseteq P_\alpha$$

dır. Eğer $U \subseteq P_\alpha$ olsaydı $U = (0)$ bulunurdu. Ancak U sıfırdan farklı ideal olduğundan bir çelişki elde edilir. O halde her $x,y \in U$ için $[x,y] \in P_\alpha$ olur. Buna göre (3.2.9) ifadesi göz önüne alındığında her $\alpha \in \Lambda$ için P_α nın ideal olmasından her $x,y,u \in U$ için,

$$(T(x)-x)[y,u] = 0 = [y,u](T(x)-x) \tag{3.2.10}$$

bulunur. $W = U \cap T^{-1}(U)$ kümesinin herhangi bir x elemanı için (3.2.10) eşitliği ve Lemma 2.1.35 gereği $T(x)-x \in Z(U)$ olur. Lemma 2.1.34 gereği W nin her bir x elemanı için,

$$(T(x)-x) \in Z(R) \tag{3.2.11}$$

elde edilir. W kümesinden $T(x_0)-x_0$ sıfırdan farklı olacak şekilde bir x_0 elemanı alınsın. Hipotez gereği böyle bir x_0 elemanı vardır. $K = U(T(x_0)-x_0)$ olsun. (3.2.11) gereği K, R nin iki yanlı idealidir. Üstelik $T(x_0)-x_0$ sıfırdan farklı olduğundan K ideali sıfırdan farklıdır. Aksi takdirde $U \cap Ann_r(U)$ sıfırdan farklı nilpotent bir ideal olur. Dolayısıyla $(T(x_0)-x_0) \in Z(R)$ olduğundan (3.2.10) gereği her $y,u \in U$ için,

$$[y,u]K = [y,u]U(T(x_0)-x_0) = [y,u](T(x_0)-x_0)U = (0)$$

elde edilir. Benzer şekilde $K[y,u] = (0)$ dır. Buna göre Lemma 2.1.34 ve Lemma 2.1.35 gereği $K \subseteq Z(R)$ olur. □

Teorem 3.2.3 de yer alan R halkasının yarı asal olması koşulu kaldırılamaz. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.2.4. [3] Herhangi bir S halkası verilsin. $R = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in S \right\}$ ve $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid v \in S \right\}$ olsun. Buna göre matrislerde bilinen işlemlerle R bir halka ve U da bir ideal olur. $T\left(\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan $T : R \to R$ dönüşümü bir endomorfizmadır. Ayrıca her $x, y \in U$ için $[T(x), T(y)] = [x, y]$ olduğundan T dönüşümü U üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümdür. Üstelik T dönüşümü $U = U \cap T^{-1}(U)$ kümesi üzerinde de birim dönüşüm değildir. Ancak S halkası uygun seçilirse R halkasının sıfırdan farklı merkezcil bir ideali var olamaz. Örneğin S halkası bir bölümlü halka ise $Z(R) = (0)$ olacağından R nin sıfırdan farklı bir merkezcil ideali yoktur.

4. GAMMA HALKALAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİLİĞİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Gamma halkaların değişmelilik koşulları araştırılırken bu yapı üzerinde tanımlı türev ile endomorfizma kavramlarından yararlanılır. Bu amaçla, X. Xu, J. Ma ve Y. Zhou'nun 2015 yılında, "Yarı asal gamma halkalar üzerinde sol türevler ve güçlü değişmeliliği koruyan dönüşümler" başlıklı çalışmalarında elde ettikleri sonuçlar bu bölümün konusudur.

4.1. Yarı Asal Gamma Halkalarda Sol Türevler

Lemma 4.1.1. *M bir $\Gamma-$halka ve δ, M üzerinde bir sol türev olsun. Bu durumda her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $[c,b]_\beta \alpha\delta(a) = a\alpha c\beta\delta(b) - c\beta a\alpha\delta(b)$ ile $\delta\left([a,b]_\alpha\right) = 0$ eşitlikleri sağlanır.*

İspat: Verilen eşitliklerin ispatı $\Gamma-$halkada sol türev tanımı ile $\Gamma-$halka olmanın birleşme özelliğinden faydalanarak yapılabilir. Her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$ eşitliğinden $\delta\left((a\alpha b)\beta c\right) = \delta\left(a\alpha(b\beta c)\right)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\delta\left((a\alpha b)\beta c\right) &= a\alpha b\beta\delta(c) + c\beta\delta(a\alpha b) \\
&= a\alpha b\beta\delta(c) + c\beta\left(a\alpha\delta(b) + b\alpha\delta(a)\right) \\
&= a\alpha b\beta\delta(c) + c\beta a\alpha\delta(b) + c\beta b\alpha\delta(a)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\delta\left(a\alpha(b\beta c)\right) &= a\alpha\delta(b\beta c) + b\beta c\alpha\delta(a) \\
&= a\alpha\left(b\beta\delta(c) + c\beta\delta(b) + b\beta c\alpha\delta(a)\right) \\
&= a\alpha b\beta\delta(c) + a\alpha c\beta\delta(b) + b\beta c\alpha\delta(a)
\end{aligned}$$

olduğundan eşitliğin düzenlenmesiyle,

$$a\alpha b\beta\delta(c)+c\beta a\alpha\delta(b)+c\beta b\alpha\delta(a)=a\alpha b\beta\delta(c)+a\alpha c\beta\delta(b)+b\beta c\alpha\delta(a)$$
$$\Rightarrow c\beta b\alpha\delta(a)-b\beta c\alpha\delta(a)=a\alpha c\beta\delta(b)-c\beta a\alpha\delta(b)$$
$$\Rightarrow [c,b]_\beta\,\alpha\delta(a)=a\alpha c\beta\delta(b)-c\beta a\alpha\delta(b)$$

elde edilir. Ayrıca her $a,b\in M$ ve $\alpha\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}\delta\left([a,b]_\alpha\right)&=\delta\left(a\alpha b-b\alpha a\right)\\&=\delta\left(a\alpha b\right)-\delta\left(b\alpha a\right)\\&=(a\alpha\delta(b)+b\alpha\delta(a))-(b\alpha\delta(a)+a\alpha\delta(b))\\&=a\alpha\delta(b)+b\alpha\delta(a)-b\alpha\delta(a)-a\alpha\delta(b)\\&=0\end{aligned}$$

olur. □

Lemma 4.1.2. *M bir $\Gamma-$halka, $c\in Z(M)$, $a_1,a_2,...,a_n\in M$ ve $\beta_1,...\beta_n\in\Gamma$ olmak üzere her $i\in\{1,2,...,n\}$ için,*

$$c\beta_1a_1...\beta_na_n=a_1\beta_{\sigma(1)}...a_i\beta_{\sigma(i)}c\beta_{\sigma(i+1)}a_{i+1}...\beta_{\sigma(n)}a_n$$

olur. Burada σ, S_n permütasyon grubunun herhangi bir elemanıdır.

İspat: $c\in Z(M)$ olduğundan her bir $i\in\{1,2,...,n\}$ için,

$$c\beta_1a_1...\beta_na_n=a_1\beta_1...a_i\beta_ic\beta_{i+1}a_{i+1}...\beta_na_n$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden her $\sigma\in S_n$ için

$$c\beta_1a_1...\beta_na_n=c\beta_{\sigma(1)}a_1...\beta_{\sigma(n)}a_n$$

eşitliğini göstermek yeterlidir. Bu eşitliği tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. $n=1$ için eşitliğin sağlandığı açıktır. $n>1$ olmak üzere her $k\leq n$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Eğer $\sigma(n) = n$ ise S_{n-1} in bir τ elemanı vardır öyle ki $1 \leq i \leq n-1$ arasındaki her i için $\tau(i) = \sigma(i)$ dir. Tümevarım hipotezine göre,

$$c\beta_1 a_1 ... \beta_{n-1} a_{n-1} = c\beta_{\tau(1)} a_1 ... \beta_{\tau(n-1)} a_{n-1} = c\beta_{\sigma(1)} a_1 ... \beta_{\sigma(n-1)} a_{n-1}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $c\beta_1 a_1 ... \beta_n a_n = c\beta_{\sigma(1)} a_1 ... \beta_{\sigma(n)} a_n$ olur. Eğer $\sigma(n) \neq n$ ise tümevarım hipotezi ve $c \in Z(M)$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& c\beta_1 a_1 ... \beta_n a_n \\
&= \left(c\beta_{\sigma(n)} a_1 \beta_{j_1} ... a_{n-2} \beta_{j_{n-2}} a_{n-1}\right) \beta_n a_n \\
&= c\beta_{\sigma(n)} \left(a_1 \beta_{j_1} ... a_{n-2} \beta_{j_{n-2}} a_{n-1} \beta_n a_n\right) \\
&= \left(a_1 \beta_{j_1} ... a_{n-2} \beta_{j_{n-2}} a_{n-1} \beta_n a_n\right) \beta_{\sigma(n)} c \\
&= \left(c\beta_{j_1} a_1 ... \beta_{j_{n-2}} a_{n-2} \beta_n a_{n-1}\right) \beta_{\sigma(n)} a_n \\
&= c\beta_{\sigma(1)} a_1 ... \beta_{\sigma(n-1)} a_{n-1} \beta_{\sigma(n)} a_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 4.1.2 de verilen özellik, asal ve yarı asal $\Gamma-$halkalar için önemlidir. Örneğin, M yarı asal $\Gamma-$halkanın merkezi sıfırdan farklıysa merkezde olan sıfırdan farklı bir eleman yardımıyla her komütatör formülü daha kısa bir formda ifade edilebilir. Yani, $Z(M)$ nin sıfırdan farklı bir d elemanı verildiğinde her $a, b, c \in M$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ için $d\alpha [a\beta b, c]_\gamma = d\alpha \left(a\beta [b,c]_\gamma + [a,c]_\gamma \beta b\right)$ eşitliği geçerlidir. Özellikle merkezi sıfırdan farklı olan asal bir $\Gamma-$halkadaki her bir komütatör formülü asal halkada olan komütatör formülü ile aynı formdadır. Ancak genel olarak çoğu asal ya da yarı asal $\Gamma-$halkaların merkezi sıfırdır. Bununla birlikte, bir yarı asal $\Gamma-$halkanın merkezi sıfıra eşit olsa bile bu $\Gamma-$halkanın değişmeliliği üzerindeki bazı sonuçların ispatlanması için Lemma 4.1.2 hala kullanışlıdır. Gerçekten de asal veya yarı asal $\Gamma-$ halkalardaki sol türevler için verilen aşağıdaki teorem bunu göstermektedir.

Teorem 4.1.3. *M yarı asal $\Gamma-$ halkasının bir sol türevi M yi merkezine eşleyen bir dönüşümdür.*

İspat: $\delta : M \to M$ bir sol türev olsun. Lemma 4.1.1 gereği her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için

$$[c,b]_\beta \alpha\delta(a) = a\alpha c\beta\delta(b) - c\beta a\alpha\delta(b) \tag{4.1.1}$$

dir. (4.1.1) de b yerine $[b,d]_\gamma$ yazılırsa her $a,b,c,d \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için,

$$\left[c,[b,d]_\gamma\right]_\beta \alpha\delta(a) = a\alpha c\beta\delta([b,d]_\gamma) - c\beta a\alpha\delta([b,d]_\gamma) \tag{4.1.2}$$

bulunur. Lemma 4.1.1 gereği her $a,b \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\delta\left([a,b]_\alpha\right) = 0$ dır. O halde (4.1.2) den,

$$\left[c,[b,d]_\gamma\right]_\beta \alpha\delta(a) = 0 \tag{4.1.3}$$

eşitliği elde edilir. Buradan her $a,b,c,d,a_1 \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1 \in \Gamma$ için,

$$\left[c,\left[b,[a_1,d]_{\gamma_1}\right]_\gamma\right]_\beta \alpha\delta(a) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\left[c,\left[b,[a_1,d]_{\gamma_1}\right]_\gamma\right]_\beta \alpha\delta(a) = c\beta\left[b,[a_1,d]_{\gamma_1}\right]_\gamma \alpha\delta(a) - \left[b,[a_1,d]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha\delta(a)$$

eşitliği göz önüne alınırsa her $a,b,c,d,a_1 \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1 \in \Gamma$ için,

$$\left[b,[a_1,d]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha\delta(a) = 0 \tag{4.1.4}$$

bulunur. Buradan her $a,b,c,a_1 \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma,\gamma_1 \in \Gamma$ için (4.1.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha\left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \\
= \; & \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha b\gamma[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1} - \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\gamma b \\
= \; & \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha b\gamma a_1\gamma_1\delta(a) - \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha b\gamma\delta(a)\gamma_1 a_1 \\
& - \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha a_1\gamma_1\delta(a)\gamma b - \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \beta c\alpha\delta(a)\gamma_1 a_1\gamma b \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma \Gamma M\Gamma \left[b,[a_1,\delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma = 0$$

olur. M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan son eşitliğe göre her $a,b \in M$ ve $\gamma, \gamma_1 \in \Gamma$ için,

$$0 = \left[b, [a_1, \delta(a)]_{\gamma_1}\right]_\gamma$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$b\gamma[a_1, \delta(a)]_{\gamma_1} - [a_1, \delta(a)]_{\gamma_1} \gamma b = 0$$

olur. Buna göre her $a, a_1 \in M$ ve $\gamma_1 \in \Gamma$ için $[a_1, \delta(a)]_{\gamma_1} \in Z(M)$ bulunur. (4.1.1) de a elemanı yerine $d\gamma a$ elemanı yazılırsa,

$$[c,b]_\beta \alpha d\gamma\delta(a) + [c,b]_\beta \alpha a\gamma\delta(d) = d\gamma a\alpha c\beta\delta(b) - c\beta d\gamma a\alpha\delta(b) \qquad (4.1.5)$$

bulunur. Ayrıca (4.1.1) eşitliği sol taraftan $d\gamma$ ile çarpılırsa,

$$d\gamma[c,b]_\beta \alpha\delta(a) = d\gamma a\alpha c\beta\delta(b) - d\gamma c\beta a\alpha\delta(b) \qquad (4.1.6)$$

olur. (4.1.5) ile (4.1.6) taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\begin{aligned} &[c,b]_\beta \alpha d\gamma\delta(a) + [c,b]_\beta \alpha a\gamma\delta(d) - d\gamma[c,b]_\beta \alpha\delta(a) \\ &= d\gamma c\beta a\alpha\delta(b) - c\beta d\gamma a\alpha\delta(b) \end{aligned} \qquad (4.1.7)$$

bulunur. (4.1.7) de c yerine b yazılırsa bu eşitliğin sol tarafı sıfıra eşit olur. Yine (4.1.7) de d yerine $[\delta(b), b]_\beta \sigma\delta(b)$ yazılırsa,

$$[\delta(b), b]_\beta \sigma\delta(b)\gamma b\beta a\alpha\delta(b) - b\beta [\delta(b), b]_\beta \sigma\delta(b)\gamma a\alpha\delta(b) = 0$$

eşitliği elde edilir. $[\delta(b), b]_\beta \in Z(M)$ ve Lemma 4.1.2 yardımıyla her $a,b \in M$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} &[\delta(b), b]_\beta \sigma\delta(b)\beta b\gamma a\alpha\delta(b) - [\delta(b), b]_\beta \sigma b\beta\delta(b)\gamma a\alpha\delta(b) = 0 \\ \Rightarrow &[\delta(b), b]_\beta \sigma [\delta(b), b]_\beta \gamma a\alpha\delta(b) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$[\delta(b), b]_\beta \sigma [\delta(b), b]_\beta \Gamma M \Gamma [\delta(b), b]_\beta \sigma [\delta(b), b]_\beta = (0)$$

eşitliği elde edilir. M yarı asal olduğundan her $b \in M$ ve $\beta, \sigma \in \Gamma$ için,

$$[\delta(b), b]_\beta \, \sigma \, [\delta(b), b]_\beta = 0$$

olur. Buradan her $b, y \in M$ ve $\beta, \sigma, \varepsilon \in \Gamma$ için,

$$[\delta(b), b]_\beta \, \sigma \, [\delta(b), b]_\beta \, \varepsilon y = 0$$

yazılabilir. Her $b \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $[\delta(b), b]_\beta \in Z(M)$ olduğundan,

$$[\delta(b), b]_\beta \, \sigma y \varepsilon \, [\delta(b), b]_\beta = 0$$

olur. Buradan M yarı asal $\Gamma-$halka olduğu için $[\delta(b), b]_\beta = 0$ sonucuna ulaşılır. (4.1.7) eşitliğinde c yerine $\delta(b)$ ve d yerine de $[d, \delta(b)]_\beta \, \sigma d$ yazılırsa $[b, \delta(b)]_\beta = 0$ olduğundan,

$$[d, \delta(b)]_\beta \, \sigma d \gamma \delta(b) \beta a \alpha \delta(b) - \delta(b) \beta \, [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma d \gamma a \alpha \delta(b) = 0$$

elde edilir. Lemma 4.1.2 ve $[d, \delta(b)]_\beta \in Z(M)$ olduğu göz önüne alınırsa her $a, b, d \in M$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} & [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma d \beta \delta(b) \gamma a \alpha \delta(b) - [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma \delta(b) \beta d \gamma a \alpha \delta(b) = 0 \\ \Rightarrow & [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma \, [d, \delta(b)]_\beta \, \gamma a \alpha \delta(b) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre her $b, d \in M$ ve $\beta, \sigma \in \Gamma$ için,

$$[d, \delta(b)]_\beta \, \sigma \, [d, \delta(b)]_\beta \, \Gamma M \Gamma \, [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma \, [d, \delta(b)]_\beta = (0)$$

bulunur. O halde M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan $[d, \delta(b)]_\beta \, \sigma \, [d, \delta(b)]_\beta = 0$ elde edilir. Böylece her $b, d, y \in M$ ve $\beta, \sigma, \varepsilon \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} & [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma \, [d, \delta(b)]_\beta \, \varepsilon y = 0 \\ \Rightarrow & [d, \delta(b)]_\beta \, \sigma y \varepsilon \, [d, \delta(b)]_\beta = 0 \end{aligned}$$

olup M yarı asal bir $\Gamma-$halka olduğundan $[d, \delta(b)]_\beta = 0$ elde edilir. Buradan her $b \in M$ için $\delta(b) \in Z(M)$, yani $\delta(M) \subseteq Z(M)$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.1.4. *Sıfırdan farklı sol türeve sahip asal bir M, $\Gamma-$halkası değişmelidir.*

İspat: M, $\Gamma-$halkası üzerinde sıfırdan farklı bir sol türev δ olsun. Lemma 4.1.1 den,

$$[c,b]_\beta\,\alpha\delta(a) = a\alpha c\beta\delta(b) - c\beta a\alpha\delta(b)$$

dir. Lemma 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 gereği her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$[c,b]_\beta\,\alpha\delta(a) = a\beta c\alpha\delta(b) - c\beta a\alpha\delta(b) = [a,c]_\beta\,\alpha\delta(b)$$

elde edilir. Burada c yerine a yazılır ve $\delta(a) \in Z(M)$ olduğu göz önüne alınırsa her $a,b \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $[a,b]_\beta\,\alpha\delta(a) = 0$ olur. Buna göre her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[a,b]_\beta\,\alpha\delta(a)\gamma y = 0$ olup $[a,b]_\beta\,\alpha y\gamma\delta(a) = 0$ bulunur. Böylece $[a,b]_\beta\,\Gamma M\Gamma\delta(a) = (0)$ dır. M asal $\Gamma-$halka olduğundan,

$$[a,b]_\beta = 0 \text{ veya } \delta(a) = 0$$

dır. Buradan her $a \in M$ elemanı için,

$$a \in Z(M) \text{ veya } \delta(a) = 0$$

bulunur. Bu durumda $M = \mathrm{Ker}\delta \cup Z(M)$ olup Teorem 2.1.4 gereği $M = \mathrm{Ker}\delta$ veya $M = Z(M)$ olur. Ancak hipotez gereği $\delta \neq 0$ olduğundan M değişmeli olmak zorundadır. □

4.2. Yarı Asal Gamma Halkalarda Güçlü Değişmeliliği Koruyan Dönüşümler

Bu kısımda Bölüm 3 te yarı asal halkalar için elde edilen bazı özelliklerin yarı asal gamma halkalarda da sağlandığı gösterilmiştir.

Teorem 4.2.1. *M bir yarı asal $\Gamma-$halka olsun. M üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan bir δ türevi varsa M değişmelidir.*

İspat: δ, M üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olduğundan her $x,y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için,

$$[\delta(a),\delta(b)]_\alpha = [a,b]_\alpha$$

eşitliği geçerlidir. Buna göre her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $[x\beta z,y]_\alpha = [\delta(x\beta z),\delta(y)]_\alpha$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} x\beta\,[z,y]_\alpha + [x,y]_\alpha\,\beta z + x\,[\beta,\alpha]_y\,z = {} & \delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha + [\delta(x),\delta(y)]_\alpha\,\beta z \\ & + \delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z + x\beta\,[\delta(z),\delta(y)]_\alpha \\ & + [x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z) + x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$x\,[\beta,\alpha]_y\,z = \delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha + \delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z + [x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z) + x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z) \tag{4.2.8}$$

elde edilir. (4.2.8) de z yerine $z\gamma t$ yazılırsa her $x,y,z,t \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} x\,[\beta,\alpha]_y\,z\gamma t = {} & \delta(x)\beta\,[z\gamma t,\delta(y)]_\alpha + \delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma t + [x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z\gamma t) \\ & + x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z\gamma t) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x\,[\beta,\alpha]_y\,z\gamma t = {} & \delta(x)\beta\,\Big(z\gamma[t,\delta(y)]_\alpha + [z,\delta(y)]_\alpha\,\gamma t + z\,[\gamma,\alpha]_{\delta(y)}\,t\Big) \\ & + \delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma t + ([x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z)\gamma t \\ & + [x,\delta(y)]_\alpha\,\beta z\gamma\delta(t) + x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z)\gamma t + x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma\delta(t) \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. (4.2.8) eşitliğinin her iki tarafı sağdan γt ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} x\,[\beta,\alpha]_y\,z\gamma t = {} & \delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha\,\gamma t + \delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma t + [x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z)\gamma t \\ & + x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z)\gamma t \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik ve (4.2.9) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha\,\gamma t+\delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma t+[x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z)\gamma t+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z)\gamma t\\
=&\delta(x)\beta z\gamma[t,\delta(y)]_\alpha+\delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha\,\gamma t+\delta(x)\beta z\,[\gamma,\alpha]_{\delta(y)}\,t+\delta(x)\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma t\\
&+[x,\delta(y)]_\alpha\,\beta\delta(z)\gamma t+[x,\delta(y)]_\alpha\,\beta z\gamma\delta(t)+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(z)\gamma t+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\gamma\delta(t)
\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}
&\delta(x)\beta\left(z\gamma[t,\delta(y)]_\alpha+z\,[\gamma,\alpha]_{\delta(y)}\,t\right)\\
&\quad+\left([x,\delta(y)]_\alpha\,\beta z+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\right)\gamma\delta(t)=0
\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

elde edilir. (4.2.10) da t yerine $\delta(y)$ ve γ yerine α yazalım. Bu durumda her $x,y,z\in M$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ elemanları için,

$$\begin{aligned}
&\delta(x)\beta\left(z\alpha\,[\delta(y),\delta(y)]_\alpha+z\,[\alpha,\alpha]_{\delta(y)}\,\delta(y)\right)\\
&\quad+\left([x,\delta(y)]_\alpha\,\beta z+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\right)\alpha\delta(\delta(y))=0\\
\Rightarrow&\left([x,\delta(y)]_\alpha\,\beta z+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\right)\alpha\delta(\delta(y))=0\\
\Rightarrow&\left([x,\delta(y)]_\alpha\,\beta z+x\,[\beta,\alpha]_{\delta(y)}\,z\right)\alpha\delta^2(y)=0
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$(x\alpha\delta(y)\beta z-\delta(y)\alpha x\beta z+x\beta\delta(y)\alpha z-x\alpha\delta(y)\beta z)\,\alpha\delta^2(y)=0$$

ifadesinden

$$(x\beta\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha x\beta z)\,\alpha\delta^2(y)=0\tag{4.2.11}$$

elde edilir. (4.2.11) eşitliğinde α yerine $\alpha+\gamma$ yazılırsa her $x,y,z\in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}
&(x\beta\delta(y)(\alpha+\gamma)z-\delta(y)(\alpha+\gamma)x\beta z)\,(\alpha+\gamma)\delta^2(y)=0\\
\Rightarrow&(x\beta\delta(y)\alpha z+x\beta\delta(y)\gamma z-\delta(y)\alpha x\beta z-\delta(y)\gamma x\beta z)\,(\alpha+\gamma)\delta^2(y)=0\\
\Rightarrow&(x\beta\delta(y)\alpha z+x\beta\delta(y)\gamma z-\delta(y)\alpha x\beta z-\delta(y)\gamma x\beta z)\,\alpha\delta^2(y)\\
&+(x\beta\delta(y)\alpha z+x\beta\delta(y)\gamma z-\delta(y)\alpha x\beta z-\delta(y)\gamma x\beta z)\,\gamma\delta^2(y)=0
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(x\beta\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha x\beta z)\,\gamma\delta^2(y)=-\,(x\beta\delta(y)\gamma z-\delta(y)\gamma x\beta z)\,\alpha\delta^2(y)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&(x\beta\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha x\beta z)\,\gamma\delta^2(y)\Gamma M\Gamma\,(x\beta\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha x\beta z)\,\gamma\delta^2(y)\\=&-\,(x\beta\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha x\beta z)\,\gamma\delta^2(y)\Gamma M\Gamma\,(x\beta\delta(y)\gamma z-\delta(y)\gamma x\beta z)\,\alpha\delta^2(y)\\=&(0)\end{aligned}$$

olur ve M bir yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan her $x,y,z\in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ için,

$$(x\beta\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha x\beta z)\,\gamma\delta^2(y)=0$$

elde edilir. Burada β yerine α ve x yerine $\delta(x)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}&(\delta(x)\alpha\delta(y)\alpha z-\delta(y)\alpha\delta(x)\alpha z)\,\gamma\delta^2(y)=0\\\Rightarrow&[\delta(x),\delta(y)]_\alpha\,\alpha z\gamma\delta^2(y)=0\\\Rightarrow&[x,y]_\alpha\,\alpha z\gamma\delta^2(y)=0\end{aligned}$$

olur. Her $x,y,z\in M$ ve $\alpha\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}[x,y]_\alpha\,\alpha z\Gamma M\Gamma\,[x,y]_\alpha\,\alpha z&\subseteq[x,y]_\alpha\,\Gamma M\Gamma\left[\delta^2(x),\delta^2(y)\right]_\alpha\alpha z\\&\subseteq[x,y]_\alpha\,\Gamma M\Gamma\left(\delta^2(x)\alpha\delta^2(y)\alpha z-\delta^2(y)\alpha\delta^2(x)\alpha z\right)\\&=(0)\end{aligned}$$

bulunur. M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan $[x,y]_\alpha\,\alpha z=0$ elde edilir. Bu eşitlikte $t\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için x yerine $t\gamma x$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}0&=[t\gamma x,y]_\alpha\,\alpha z\\&=t\gamma[x,y]_\alpha\,\alpha z+[t,y]_\alpha\,\gamma x\alpha z+t\,[\gamma,\alpha]_y\,x\alpha z\\&=t\gamma[x,y]_\alpha\,\alpha z+t\alpha y\gamma x\alpha z-y\alpha t\gamma x\alpha z+t\gamma y\alpha x\alpha z-t\alpha y\gamma x\alpha z\\&=t\gamma[x,y]_\alpha\,\alpha z+(t\gamma y\alpha x-y\alpha t\gamma x)\,\alpha z\end{aligned}$$

olup buradan

$$(t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\alpha z = 0 \tag{4.2.12}$$

bulunur. (4.2.12) de α yerine $\alpha+\beta$ yazılırsa her $t,x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= (t\gamma y(\alpha+\beta)x - y(\alpha+\beta)t\gamma x)\,(\alpha+\beta)z \\ &= (t\gamma y\alpha x + t\gamma y\beta x - y\alpha t\gamma x - y\beta t\gamma x)\,(\alpha+\beta)z \\ &= (t\gamma y\alpha x + t\gamma y\beta x - y\alpha t\gamma x - y\beta t\gamma x)\,\alpha z + (t\gamma y\alpha x + t\gamma y\beta x - y\alpha t\gamma x - y\beta t\gamma x)\,\beta z \end{aligned}$$

olur. Burada (4.2.12) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &(t\gamma y\beta x - y\beta t\gamma x)\,\alpha z + (t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\beta z = 0 \\ &\Rightarrow (t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\beta z = -\,(t\gamma y\beta x - y\beta t\gamma x)\,\alpha z \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde her $t,x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} &(t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\beta z\Gamma M\Gamma\,(t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\beta z \\ &= -\,(t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\beta z\Gamma M\Gamma\,(t\gamma y\beta x - y\beta t\gamma x)\,\alpha z \\ &= (0) \end{aligned}$$

olup M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan $(t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x)\,\beta z = 0$ bulunur. Burada $y \in M$ ve $\varepsilon \in \Gamma$ için x yerine $x\varepsilon y$ ve z yerine $t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x$ yazılırsa M nin yarı asal olması kullanılarak,

$$t\gamma y\alpha x - y\alpha t\gamma x = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre her $t,x,y \in M$ ve $\alpha,\gamma \in \Gamma$ için,

$$[t\gamma x, y]_\alpha = t\gamma x\alpha y - y\alpha t\gamma x = t\gamma x\alpha y - t\gamma y\alpha x = t\gamma[x,y]_\alpha$$

yazılabilir. Öyleyse bu eşitlik ile δ dönüşümünün güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olması kullanılarak her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} x\beta\,[z,y]_\alpha &= [x\beta z,y]_\alpha \\ &= [\delta(x\beta z),\delta(y)]_\alpha \\ &= [\delta(x)\beta z,\delta(y)]_\alpha + [x\beta\delta(z),\delta(y)]_\alpha \\ &= \delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha + x\beta\,[\delta(z),\delta(y)]_\alpha \\ &= \delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha + x\beta\,[z,y]_\alpha \end{aligned}$$

eşitliğinden $\delta(x)\beta\,[z,\delta(y)]_\alpha = 0$ elde edilir. Burada $t \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için z yerine $t\gamma z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\delta(x)\beta\,[t\gamma z,\delta(y)]_\alpha = 0 \\ \Rightarrow &\delta(x)\beta t\gamma[z,\delta(y)]_\alpha = 0 \end{aligned}$$

olması

$$[\delta(x),\delta(y)]_\alpha\,\Gamma M\Gamma\,[\delta(x),\delta(y)]_\alpha = 0$$

olmasını gerektirir. M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan her $x,y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için,

$$[\delta(x),\delta(y)]_\alpha = [x,y]_\alpha = 0$$

elde edilir. Böylece $M \subseteq Z(M)$ olacağından M değişmelidir. □

Teorem 4.2.2. *M yarı asal bir $\Gamma-$halka, σ, M üzerinde bir endomorfizma olsun. O halde, σ nın M üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $x \in M$ için $\sigma(x) = x + \zeta(x)$ olacak şekilde $\zeta : M \to Z(M)$ dönüşümünün var olmasıdır.*

İspat: σ endomorfizması M üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olsun. Buna göre her $x,z \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için,

$$[\sigma(x\alpha z),\sigma(x)]_\alpha = [x\alpha z,x]_\alpha$$

eşitliği sağlanır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
&[\sigma(x)\alpha\sigma(z),\sigma(x)]_\alpha = [x\alpha z,x]_\alpha \\
\Rightarrow &\sigma(x)\alpha\,[\sigma(z),\sigma(x)]_\alpha + [\sigma(x),\sigma(x)]_\alpha\,\alpha\sigma(z) + \sigma(x)\,[\alpha,\alpha]_\alpha\,\sigma(z) \\
&= x\alpha\,[z,x]_\alpha + [x,x]_\alpha\,\alpha z + x\,[\alpha,\alpha]_x\,z \\
\Rightarrow &\sigma(x)\alpha\,[\sigma(z),\sigma(x)]_\alpha - x\alpha\,[z,x]_\alpha = 0 \\
\Rightarrow &\sigma(x)\alpha\,[z,x]_\alpha - x\alpha\,[z,x]_\alpha = 0 \\
\Rightarrow &(\sigma(x)-x)\,\alpha\,[z,x]_\alpha = 0
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sigma(x)-x)\,\alpha\,[y\beta z,x]_\alpha \\
&= (\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta\,[z,x]_\alpha + [y,x]_\alpha\,\beta z + y\,[\beta,\alpha]_x\,z) \\
&= (\sigma(x)-x)\,\alpha y\beta\,[z,x]_\alpha + (\sigma(x)-x)\,\alpha\,[y,x]_\alpha\,\beta z + (\sigma(x)-x)\,\alpha y\,[\beta,\alpha]_x\,z \\
&= (\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\alpha x - y\beta x\alpha z + y\beta x\alpha z - y\alpha x\beta z) \\
&= (\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\alpha x - y\alpha x\beta z) \qquad (4.2.13)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.2.13) te α yerine $\alpha+\gamma$ yazılırsa her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için,

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sigma(x)-x)\,(\alpha+\gamma)\,(y\beta z\,(\alpha+\gamma)\,x - y\,(\alpha+\gamma)\,x\beta z) \\
&= (\sigma(x)-x)\,\alpha y\beta z\,(\alpha+\gamma)\,x - (\sigma(x)-x)\,\alpha y\,(\alpha+\gamma)\,x\beta z \\
&\quad + (\sigma(x)-x)\,\gamma y\beta z\,(\alpha+\gamma)\,x - (\sigma(x)-x)\,\gamma y\,(\alpha+\gamma)\,x\beta z \\
&= (\sigma(x)-x)\,\alpha y\beta z\alpha x + (\sigma(x)-x)\,\alpha y\beta z\gamma x - (\sigma(x)-x)\,\alpha y\alpha x\beta z \\
&\quad - (\sigma(x)-x)\,\alpha y\gamma x\beta z + (\sigma(x)-x)\,\gamma y\beta z\alpha x + (\sigma(x)-x)\,\gamma y\beta z\gamma x \\
&\quad - (\sigma(x)-x)\,\gamma y\alpha x\beta z - (\sigma(x)-x)\,\gamma y\gamma x\beta z
\end{aligned}
$$

olup (4.2.13) gereği,

$$
(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x - y\gamma x\beta z) = -(\sigma(x)-x)\,\gamma\,(y\beta z\alpha x - y\alpha x\beta z)
$$

eşitliği elde edilir. Buradan her $x,y,z\in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}&(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)\,\Gamma M\Gamma\,(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)\\&=-(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)\,\Gamma M\Gamma\,(\sigma(x)-x)\,\gamma\,(y\beta z\alpha x-y\alpha x\beta z)\\&=(0)\end{aligned}$$

olur. O halde M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan,

$$(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)=0$$

bulunur. Bu eşitlikte $t\in M$ olmak üzere x yerine $x+t$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}0&=(\sigma(x+t)-(x+t))\,\alpha\,(y\beta z\gamma(x+t)-y\gamma(x+t)\beta z)\\&=(\sigma(x+t)-(x+t))\,\alpha\,(y\beta z\gamma x+y\beta z\gamma t-y\gamma x\beta z-y\gamma t\beta z)\\&=(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)+(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)\\&\quad+(\sigma(t)-t)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)+(\sigma(t)-t)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)=-(\sigma(t)-t)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)$$

elde edilir. Her $x,y,z,t\in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}&(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)\,\Gamma M\Gamma\,(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)\\&=-(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)\,\Gamma M\Gamma\,(\sigma(t)-t)\,\alpha\,(y\beta z\gamma x-y\gamma x\beta z)\\&=(0)\end{aligned}$$

eşitliğinde M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan,

$$(\sigma(x)-x)\,\alpha\,(y\beta z\gamma t-y\gamma t\beta z)=0$$

bulunur. Böylece her $x,y,z\in M$ ve $\beta,\gamma\in\Gamma$ için,

$$\begin{aligned}&((\varphi(b)-b)\,\lambda c\mu a-(\varphi(b)-b)\,\mu a\lambda c)\,\Gamma M\Gamma\,((\varphi(b)-b)\,\lambda c\mu a-(\varphi(b)-b)\,\mu a\lambda c)\\&=(0)\end{aligned}$$

ve

$$\left(y\beta\left(\sigma(x)-x\right)\gamma z-y\gamma z\beta\left(\sigma(x)-x\right)\right)\Gamma M\Gamma\left(y\beta\left(\sigma(x)-x\right)\gamma z-y\gamma z\beta\left(\sigma(x)-x\right)\right)$$
$$=(0)$$

sağlanır. Buna göre M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan her $x,y,z\in M$ ve $\beta,\gamma\in\Gamma$ için,

$$\left(\sigma(y)-y\right)\beta z\gamma x-\left(\sigma(y)-y\right)\gamma x\beta z=0 \tag{4.2.14}$$

ve

$$y\beta\left(\sigma(x)-x\right)\gamma z-y\gamma z\beta\left(\sigma(x)-x\right)=0 \tag{4.2.15}$$

olur. Buradan,

$$\left[\left(\sigma(x)-x\right)\alpha y,z\right]_\beta=\left(\sigma(x)-x\right)\alpha\left[y,z\right]_\beta+\left[\sigma(x)-x,z\right]_\beta\alpha y+\left(\sigma(x)-x\right)\left[\alpha,\beta\right]_z y$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\left[\left(\sigma(x)-x\right)\alpha y,z\right]_\beta &=\left[\sigma(x)-x,z\right]_\beta\alpha y+\left(\sigma(x)-x\right)\alpha y\beta z-\left(\sigma(x)-x\right)\alpha z\beta y\\ &\quad+\left(\sigma(x)-x\right)\alpha z\beta y-\left(\sigma(x)-x\right)\beta z\alpha y\\ &=\left[\sigma(x)-x,z\right]_\beta\alpha y+\left(\sigma(x)-x\right)\alpha y\beta z-\left(\sigma(x)-x\right)\beta z\alpha y\end{aligned}$$

olup (4.2.14) göz önüne alınırsa her $x,y,z\in M$ ve $\alpha,\beta\in\Gamma$ için,

$$\left[\left(\sigma(x)-x\right)\alpha y,z\right]_\beta=\left[\sigma(x)-x,z\right]_\beta\alpha y$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\left[y\alpha\left(\sigma(x)-x\right),z\right]_\beta &=y\alpha\left[\left(\sigma(x)-x\right),z\right]_\beta+\left[y,z\right]_\beta\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\\ &\quad+y\left[\alpha,\beta\right]_z\left(\sigma(x)-x\right)\end{aligned}$$

olup bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\left[y\alpha\left(\sigma(x)-x\right),z\right]_\beta &=\left[y,z\right]_\beta\alpha\left(\sigma(x)-x\right)+y\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\beta z-y\alpha z\beta\left(\sigma(x)-x\right)\\ &\quad+y\alpha z\beta\left(\sigma(x)-x\right)-y\beta z\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\\ &=\left[y,z\right]_\beta\alpha\left(\sigma(x)-x\right)+y\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\beta z-y\beta z\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\end{aligned}$$

olup (4.2.15) göz önüne alınırsa her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$[y\alpha\left(\sigma(x)-x\right),z]_\beta = [y,z]_\beta\,\alpha\left(\sigma(x)-x\right)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$[y\alpha z,\sigma(x)-x]_\beta = y\alpha\,[z,\sigma(x)-x]_\beta + [y,\sigma(x)-x]_\beta\,\alpha z + y\,[\alpha,\beta]_{\sigma(x)-x}\,z$$

olup bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}[y\alpha z,\sigma(x)-x]_\beta &= [y,\sigma(x)-x]_\beta\,\alpha z + y\alpha z\beta\left(\sigma(x)-x\right) - y\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\beta z \\ &\quad + y\alpha\left(\sigma(x)-x\right)\beta z - y\beta\left(\sigma(x)-x\right)\alpha z \\ &= [y,\sigma(x)-x]_\beta\,\alpha z + y\alpha z\beta\left(\sigma(x)-x\right) - y\beta\left(\sigma(x)-x\right)\alpha z\end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.2.15) göz önüne alınırsa her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$[y\alpha z,\sigma(x)-x]_\beta = [y,\sigma(x)-x]_\beta\,\alpha z$$

eşitliği elde edilir. σ endomorfizma olduğu için $[x\alpha y,z]_\beta = [\sigma(x)\alpha\sigma(y),\sigma(z)]_\beta$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}0 &= [\sigma(x)\alpha\sigma(y),\sigma(z)]_\beta - [x\alpha y,z]_\beta \\ &= [\sigma(x)\alpha\sigma(y),\sigma(z)]_\beta - [x\alpha y,z]_\beta + [\sigma(x)\alpha y,\sigma(z)]_\beta - [\sigma(x)\alpha y,\sigma(z)]_\beta \\ &\quad + [x\alpha y,\sigma(z)]_\beta - [x\alpha y,\sigma(z)]_\beta \\ &= \Big([\sigma(x)\alpha\sigma(y),\sigma(z)]_\beta - [\sigma(x)\alpha y,\sigma(z)]_\beta\Big) + \Big([\sigma(x)\alpha y,\sigma(z)]_\beta - [x\alpha y,\sigma(z)]_\beta\Big) \\ &\quad + \Big([x\alpha y,\sigma(z)]_\beta - [x\alpha y,z]_\beta\Big) \\ &= [\sigma(x)\alpha\left(\sigma(y)-y\right),\sigma(z)]_\beta + [\left(\sigma(x)-x\right)\alpha y,\sigma(z)]_\beta + [x\alpha y,\sigma(z)-z]_\beta \\ &= [\sigma(x),\sigma(z)]_\beta\,\alpha\left(\sigma(y)-y\right) + [\sigma(x)-x,\sigma(z)]_\beta\,\alpha y + [x,\sigma(z)-z]_\beta\,\alpha y \\ &= [x,z]_\beta\,\alpha\left(\sigma(y)-y\right) + [x,z]_\beta\,\alpha y - [x,\sigma(z)]_\beta\,\alpha y + [x,\sigma(z)]_\beta\,\alpha y - [x,z]_\beta\,\alpha y\end{aligned}$$

olup böylece her $x,y,z \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için,

$$[x,z]_\beta\,\alpha\left(\sigma(y)-y\right) = 0$$

bulunur. Burada x yerine $(\sigma(y)-y)\,\gamma x$ yazılırsa,

$$[(\sigma(y)-y)\,\gamma x,z]_\beta\,\alpha\,(\sigma(y)-y)=[\sigma(y)-y,z]_\beta\,\gamma x\alpha\,(\sigma(y)-y)=0$$

olup buradan

$$[\sigma(y)-y,z]_\beta\,\Gamma M\Gamma\,[\sigma(y)-y,z]_\beta=(0)$$

elde edilir. O halde M yarı asal $\Gamma-$halka olduğundan her $y,z\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için,

$$[\sigma(y)-y,z]_\beta=0$$

bulunur. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Tersine, her $x\in M$ için $\sigma(x)=x+\zeta(x)$ olacak şekilde $\zeta:M\to Z(M)$ dönüşümü var olsun. Her $x,y\in M$ için $[\sigma(x),\sigma(y)]=[x,y]$ ise σ endomorfizması M üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan dönüşüm olur. Buna göre $\zeta(x)\in Z(M)$ olduğu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}[\sigma(x),\sigma(y)]&=[x+\zeta(x),y+\zeta(y)]\\&=[x,y]+[x,\zeta(y)]+[\zeta(x),y]+[\zeta(x),\zeta(y)]\\&=[x,y]\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.2.3. *Değişmeli olmayan asal bir $\Gamma-$halkada güçlü değişmeliliği koruyan endomorfizma yalnızca birim dönüşümdür.*

İspat: M değişmeli olmayan asal bir $\Gamma-$ halka, $\sigma:M\to M$ güçlü değişmeliliği koruyan endomorfizma olsun. Teorem 4.2.2 gereği her $x\in M$ için $\sigma(x)=x+\zeta(x)$ olacak şekilde $\zeta:M\to Z(M)$ dönüşümü vardır.

Buna göre her $x,y\in M$ ve $\alpha\in\Gamma$ için,

$$x\alpha y+\zeta(x\alpha y)=\sigma(x\alpha y)=\sigma(x)\alpha\sigma(y)=x\alpha y+x\alpha\zeta(y)+\zeta(x)\alpha y+\zeta(x)\alpha\zeta(y)$$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$\zeta(x\alpha y) = x\alpha\zeta(y) + \zeta(x)\alpha y + \zeta(x)\alpha\zeta(y) \tag{4.2.16}$$

elde edilir. (4.2.16) eşitliği ve Lemma 4.1.2 gereği $\zeta(x) \neq 0$ olacak şekildeki her $x \in M$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= [x, \zeta(x\alpha y)]_\beta \\ &= [x, x\alpha\zeta(y) + \zeta(x)\alpha y + \zeta(x)\alpha\zeta(y)]_\beta \\ &= \zeta(x)\alpha[x,y]_\beta, \qquad \forall y \in M,\ \alpha,\beta \in \Gamma \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik ve $0 \neq \zeta(x) \in Z(M)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &\zeta(x)\Gamma[x,y]_\beta\Gamma M = (0) \\ \Rightarrow &[x,y]_\beta\Gamma M\Gamma\zeta(x) = (0) \\ \Rightarrow &x \in Z(M) \end{aligned}$$

olur. Yani $\zeta(x) \neq 0$ olacak şekildeki her $x \in M$ için $x \in Z(M)$ dir. Varsayalım ki $\zeta(x_0) \neq 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in M$ vardır. M değişmeli olmadığından $y_0 \notin Z(M)$ olacak şekilde bir $y_0 \in M$ vardır. O zaman $\zeta(y_0) = 0$ olup (4.2.16) da x yerine x_0 ve y yerine y_0 yazılırsa,

$$\zeta(x_0\alpha y_0) = x_0\alpha\zeta(y_0) + \zeta(x_0)\alpha y_0 + \zeta(x_0)\alpha\zeta(y_0) = \zeta(x_0)\alpha y_0$$

olur. Buradan her $z \in M$ için,

$$0 = [z, \zeta(x_0\alpha y_0)]_\beta = [z, \zeta(x_0)\alpha y_0]_\beta$$

olup $\zeta(x_0)\alpha y_0 \in Z(M)$ elde edilir. Öyleyse her $z \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$0 = [\zeta(x_0)\alpha y_0, z]_\beta = \zeta(x_0)\alpha[y_0,z]_\beta$$

bulunur. Burada $\zeta(x_0) \neq 0$ olması ve M nin asal $\Gamma-$halka olduğu göz önüne alınırsa $\zeta(x_0)\Gamma[y_0,z]_\beta\Gamma M = (0)$ eşitliğinden $y_0 \in Z(M)$ elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\zeta(x_0) \neq 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in M$ var olamaz. Böylece her $x \in M$ için $\sigma(x) = x$ olup istenen elde edilir. □

Aşağıdaki örnekte değişmeli olmayan bir yarı asal $\Gamma-$halkada birimden farklı güçlü değişmeliliği koruyan endomorfizmaların var olduğu gösterilmektedir.

Örnek 4.2.4. $R = M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ olsun. Buna göre R değişmeli olmayan bir yarı asal halkadır. $\sigma : R \to R$, $\sigma(A,a) = (A,\bar{a})$ tanımlanırsa σ, R üzerinde güçlü değişmeliliği koruyan otomorfizma olur ve açıkça σ, R halkası üzerinde birim dönüşüm değildir.

KAYNAKLAR

[1] Barnes, W. E. 1966. On the Γ-rings of Nobusawa. **Pacific J. Math.**, 18(3): 411-422.

[2] Bell, H.E., Martindale III, W.S. 1987. Centralizing mappings of semiprime rings. **Canad. Math. Bull.**, 30(1): 92-101.

[3] Bell, H.E., Daif, M.N. 1994. On commutativity and strong commutativity preserving maps. **Canad. Math. Bull.**, 37: 443-447.

[4] Bresar, M. 1993. Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 335: 525-546.

[5] Daif, M. N., Bell, H. E. 1992. Remarks on derivations on semiprime rings. **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 15: 205-206.

[6] Herstein, I. N. 1969. Topics in Ring Theory, The Univ. of Chicago Press, Chicago.

[7] Herstein, I. N. 1978. A note on derivations. **Canad. Math. Bull.**, 21(3): 369-370.

[8] Herstein, I. N. 1979. A note on derivations II. **Canad. Math. Bull.**, 22(4): 509-511.

[9] Hungerford, T. W. 1974. Algebra, Holf, Rinehart and Wiston Inc., Newyork, Chicago.

[10] Jing, F. J. 1987. On derivations of Γ-rings. **Qu fu Shifan Daxue Xuebeo Ziran Kexue Ban**, 13(4): 159-161.

[11] Johnson, R. E. 1951. The extended centralizer of a ring over a module, **Math. Soc.**, 2: 891-895.

[12] Kandamar, H. 2000. The k-derivation of a Gamma-Ring. **Turk. J. Math.**, 23(3): 221-229.

[13] Kyuno, S. 1975. On the radicals of Γ-rings. **Osaka J. Math.**, 12: 639-645.

[14] Kyuno, S. 1982. Prime ideals in gamma rings. **Pac. J. Math.**, 98: 375-379.

[15] Kyuno, S. 1991. Gamma Rings, Hadronic Press, Palm Habor.

[16] Luh, J. 1970. A note on commuting automorphisms of rings. **Maer. Math.**, Monthly 77: 61-62.

[17] McCoy, N. H., The Theory of Rings, The Macmillan Company, New York, 1964.

[18] Martindale, W. S. 1969. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. **J. Algebra**, 12: 576-584.

[19] Mayne, J. 1976. Centralizing automorphisms of prime rings. **Canad. Math. Bull.**, 19(1): 113-115.

[20] Mayne, J. 1982. Ideals and centralizing mappings in prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 86(2): 211-212.

[21] Mayne, J. 1983. Erratum to ideals and centralizing mappings in prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 89(2): 187.

[22] Mayne, J. 1984. Centralizing mappings of prime rings. **Canad. Math. Bull.**, 27: 122-126.

[23] Nobusawa, N. 1964. On a generalization of the ring theory. **Osaka J. Math.**, 1: 81-89.

[24] Posner, E. C. 1957. Derivations in Prime Rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 8: 1093-1100.

[25] Vukman, J. 1990. Commuting and centralizing mappings in prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 109(1): 47-52.

[26] Xu, X., Ma, J., Zhou, Y. 2015. Left derivations and strong commutativity preserving maps on semiprime Γ-rings. **Southeast Asian Bull. Math.**, 39: 735-745.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Cemre DEMİRCİ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Malatya 02.01.1992

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
-SCI :

-Diğer :

b) Bildiriler
-Uluslararası :

-Ulusal :

c) Katıldığı Projeler :

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	1610500105@stu.adu.edu.tr
Tarih	:	