T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-YL-019

RİCCİ TENSÖRÜ ve UYGULAMALARI

Çağrı ÜSTEK

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Leyla ONAT

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Çağrı ÜSTEK tarafından hazırlanan "Ricci Tensörü ve Uygulamaları" başlıklı tez, 07/02/2020 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Doç. Dr. Çetin CAMCI	Çomü Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Leyla ONAT	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Dr.Öğr.Üyesi Dilek AÇIKGÖZ KAYA	ADÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof.Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

07/02/2020

Çağrı ÜSTEK

ÖZET

RİCCİ TENSÖRÜ ve UYGULAMALARI

Çağrı ÜSTEK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Leyla ONAT
2020, 57 sayfa

Birinci bölümü giriş olarak ayrılan bu çalışma temel olarak dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde diferensiyel geometride sık sık kullanılan bazı diferensiyel operatörler ile tez konusunda önemli bir yer tutan uzaklık fonksiyonu ve bazı özellikleri verilecektir.

Ricci tensörü Myers teoreminde önemli bir yer tutmaktadır. Üçüncü bölümde bu tensörün bir uygulaması olarak complete bir (M,g) Riemann manifoldunun küreye izometrik olması ile ilgili olarak Cheng [5] tarafından elde edilen Myers çap teoremi verilecektir.

Myers çap teoremini Bakry-Emery Ricci tensörüne uygulanmasının 2009 yılında Qi-Hu Ruan tarafından "Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü ile verilen Riemann manifoldları için rigiditi teoremleri" isimli makelede yapıldığı görülmüştür. Bu tez çalışmasının son bölümünde bu makelede yer alan rigiditi teoremlerinden ilki ispatlanacaktır.

Anahtar Sözcükler: Riemann Manifoldu, Ricci eğrilik tensörü, Myers Teoremi, Bakry-Emery Ricci Tensörü, Uzaklık Fonksiyonu, Hessian Operatörü, Einstein Manifoldu, Lie Türevi.

ABSTRACT

RICCI TENSOR AND ITS APPLICATIONS

Çağrı ÜSTEK

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Leyla ONAT
2020, 57 pages

The thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to a brief introduction to the subject and the main theorems and definitions are given in chapter two. Moreover, the distance function and its properties are also stated in this chapter.

It is well-known that the Ricci tensor has an important role in Myers' theorem. In the chapter three, an application of this tensor is given so that a complete Riemannian manifold is isometric to the sphere which is proven by Cheng[5].

Another study on Myers' theorem is "Two rigidity theorems on manifolds with Bakry-Emery Ricci curvature" by Ruan[3] which involves application of theorem to the Bakry-Emery Ricci tensor. In the last chapter, the first rigidity theorem of [3] is examined in details.

Key Words: Riemannian Manifold, Ricci Curvature Tensor, Myers Theorem, Bakry-Emery Ricci Tensor, Distances Function, Hessian Operator, Einstein Manifold, Lie Derivative.

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, diferensiyel geometri alanında her türlü sorun karşısında eksiksiz bir şekilde ilerlememi sağlayan danışman hocam Prof. Dr. Leyla ONAT'a, çalışmanın biçimlendirilmesinde emeği geçen hocam Araş. Gör. Seçkin GÜNSEN'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hayatım boyunca aldığım kararlarda desteklerini eksik etmeyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma güvenleri ve hoşgörüleri için en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Çağrı ÜSTEK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M^n	n boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$\mathfrak{X}(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanları kümesi
$\mathfrak{X}^*(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün 1-formlar kümesi
$\mathfrak{F}(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün fonksiyonlar kümesi
$\mathfrak{T}_s^r(M)$	M manifoldu üzerindeki $(r,s)-$tipindeki tensör alanları kümesi
$\mathcal{D}$	Tensör türevi
X,Y,V,Z,Q,W	M manifoldu üzerinde vektör alanları
θ,ω	M manifoldu üzerinde 1-formlar
D	M manifoldu üzerinde konneksiyon
II	M manifoldu üzerinde ikinci temel form
∇f	f fonksiyonun gradiyenti
Hess r	r fonksiyonunun hessiyanı
Δr	r uzaklık fonksiyonun laplasyanı
Ric	M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü
S_k^n	sabit k kesitsel eğriliği ile verilen küre
S	Hessiyan operatörü
$scal$	Skaler eğriliği
$\mathcal{R}$	Eğrilik operatörü
sec	Kesitsel eğrilik
L_Z	Lie türevi
$\widetilde{Ricci}$	Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü
L	Weighted laplasiyanı
φ	Warping fonksiyonu
M_k^m	Uzay formu
$diam\ M$	M manfioldunun çapı
$v(m,k,r)$	M_k^m uzay formundaki $B(k,r)$ yuvarının hacmi

R	Eğrilik tensörü
R_x	x vektörü yönündeki eğrilik operatörü
tr	İz operatörü
div	Diverjans
$B \times_f F$	Warped çarpım manifoldu
U_r	Seviye yüzeyi
R^r	Seviye yüzeyinin eğrilik tensörü
can	Standart (Öklid) metrik

1. GİRİŞ

Einstein manifoldları diferensiyel geometride önemli bir yer tutar. Örneğin $S^{n-1}(1)$ küresi skaler eğriliği sabit kompakt bir Einstein manifoldudur. Bir manifoldun rigid olması ile yapılan çalışmaların bir kısmı o manifoldun küreye izotmetrik olması ile ilgilidir. Buna göre manifoldun kompakt olması önemli bir özelliktir.

Klasik Myers [6] teoreminin manifoldun kompakt olması için bir karekterizasyon verdiği söylenebilir. Buna göre (M,g), $Ricci \geq (n-1)kg > 0$, $n \geq 2$ olacak şekilde tam, irtibatlı bir Riemann manifoldu olmak üzere M manifoldunun çapı $D \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ dır. Buna göre M manifoldu kompakttır.

Cheng [5] Myers teoremi ile ilgili olarak 1975 yılında yaptığı çalışmada $D = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğunda M manifoldunun S^n_k küresine izometrik olduğunu göstermiştir.
Bakry ve Ledoux [7] 1996 yılında yaptıkları çalışmada klasik Myers teoreminin bir benzerini Ricci tensörü yerine

$$\widetilde{Ricci} = Ricci - \nabla\nabla h - \frac{1}{m-n}\nabla h \otimes \nabla h$$

eşitliği ile verilen ve kendi ismiyle anılan Bakry-Emery Ricci tensörü olarak uygulamıştır. Buna göre $n \geq 2$, $m \geq n$, $k > 0$ ve $h : M \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\widetilde{Ricci} \geq (m-1)k > 0$$

ise M manifoldu kompakt ve $D \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ dır.
Ayrıca (M,g) Bakry-Emery manifoldunun $g = \pi^* g_M + h^2\sigma^2 g_F$ metrik tensörü ile verilen Einstein $N = M^n \times_f F^m$ warped çarpım manifoldunun taban manifoldu olduğu biliniyor. 2009 yılında Ruan [4] tarafından yapılan çalışmada (M,g) tam,

irtibatlı Riemann manifoldu $n \geq 2$ ve $\widetilde{Ricci} \geq (m-1)kg$ ve $D = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğunda M manifoldunun S_k^n küresine izometrik olduğu ve $h = (m-n)\ln \frac{\sin\sqrt{k}r}{\sqrt{k}}$ olduğu gösterilmiştir. Bu teoremin bir sonucu olarak (M,g) tam, irtibatlı Riemann manifoldu $n \geq 2$, $\widetilde{Ricci} \geq (m-1)kg > 0$, $m \geq n$ ve $D = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ için
$N = M_k^n \times_{e^{\frac{h}{m-n}}} S_k^{m-n}$ ise $N = S_k^n \times_{\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}r} S_k^{m-n}$ olduğu kolaylıkla söylenebilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez konusuyla ilgili sıklıkla kullanılan notasyonlar ve temel kavramlar verilecektir.

2.1. Tensör Kavramı

M, n boyutlu Riemann manifoldu, (U,ξ) M manifoldu için bir koordinat komşuluğu, $\xi = (x^1, x^2, ..., x^n)$ bu koordinat komşuluğundan elde edilen koordinat sistemi olsun. $1 \leq i \leq n$ için $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ olmak üzere $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ koordinat çatı alanı ve bu çatı alanının duali $\{dx_1, ..., dx_n\}$ olsun.

M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye bütün diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $\mathfrak{F}(M)$ ve M üzerindeki bütün diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ olmak üzere, $\mathfrak{X}(M)$ kümesi $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür ve $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir Lie Cebiridir. $\mathfrak{X}^*(M)$ kümesi ise M manifoldu üzerinde 1-formların kümesidir. M manifoldu üzerinde bir V vektör alanı ve θ 1-formunun bileşenleri V^i ve θ^j fonksiyonları olmak üzere $V = \sum\limits_{i=1}^{n} V^i \partial_i$ ve $\theta = \sum \theta_j dx_j$ dir. Ayrıca $f \in \mathfrak{F}(M)$ için f fonksiyonu bir Y vektör alanı yönündeki türevi için $\nabla_Y f = D_Y f = L_Y f = df(Y) = Y(f)$ gösterimleri kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.1. [9] $s,t \geq 0$ tamsayıları için

$$T : (\mathfrak{X}^*(M))^s \times (\mathfrak{X}(M))^t \to \mathfrak{F}(M)$$

$\mathfrak{F}(M)$-çoklineer dönüşümüne M manifoldu üzerinde "(s,t) tipinde bir tensör alanı" denir.

T tensör alanlarının ξ koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_t} = T(dx^{i_1},\dots,dx^{i_s},\partial_{j_1},\dots,\partial_{j_t})$$

eşitliğiyle tanımlanan $T^{i1\dots is}_{j1\dots jt}$ reel değerli fonksiyonlardır. Buna göre (s,t) tipindeki bir T tensör alanı

$$T = T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_t}\partial_{i_1}\otimes\dots\otimes\partial_{i_s}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_t}$$

eşitliğiyle verilebilir. Genel olarak (s,t) tipinde bir T tensör alanı

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M)\otimes\dots\otimes\mathfrak{X}(M)}_{s-tane}\otimes\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\otimes\dots\otimes\mathfrak{X}^*(M)}_{t-tane}$$

tensör demetinin bir kesitidir. M manifoldu üzerinde (s,t) tipindeki tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{T}^s_t(M)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.2. $r = s = 1$ için $T\in\mathfrak{T}^1_1(M)$ olsun. $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektör alanı $X=\sum X^j\partial_j$ ve $\theta\in\mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu $\theta=\sum\theta_i dx^i$ için

$$\begin{aligned} T(\theta,X) &= T(\theta_i dx^i, X^j\partial_j) = T(dx^i,\partial_j)\theta_i.X^j \\ &= T^i_j\partial_i(\theta).dx^j(X) = T^i_j(\partial_i\otimes dx^j)(\theta,X) \end{aligned}$$

olduğundan

$$T = T^i_j\partial_i\otimes dx^j$$

eşitliğiyle verilebilir.

$\theta\in\mathfrak{X}^*(M)$ olmak üzere $X(\theta)=\theta(X)$ eşitliğiyle tanımlı $X:\mathfrak{X}^*(M)\to\mathfrak{F}(M)$ dönüşümü lineer olduğundan $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektör alanı $(1,0)$ tipinde tensör alanı, $\theta\in\mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu da M manifoldu üzerinde $(0,1)$ tipinde tensör alanıdır.

$T_0^1(M) \cong \mathfrak{X}(M)$, $T_1^0(M) \cong \mathfrak{X}^*(M)$ dir. Özel olarak $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$ dir. Ayrıca, $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı verildiğinde $A(V)W = g(V,W)$ eşitliğiyle belirli olan

$$A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$$

dönüşümü lineer izormorfizmdir. $A(V) \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu V^* ile gösterilsin. Böylece $V^*(W) = g(V,W)$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikle belirli olan V^* 1-formuna, V vektör alanına karşılık gelen 1-form denir. Karşıt olarak
$A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ dönüşümü lineer izormorfizm olduğundan $V^* \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu verildiğinde $A(V) = V^*$ olacak biçimdeki V vektör alanına θ 1-formuna karşılık gelen vektör alanı denir. $\mathfrak{X}(M)$ ve $\mathfrak{X}^*(M)$ uzayları arasındaki izormorfizmden elde edilen vektör alanları ve 1-formlar arasındaki bu karşılık gelmeye $\mathfrak{X}(M)$ ve $\mathfrak{X}^*(M)$ uzaylarının metriksel olarak denk olması denir.
V^* 1-formunun bileşenleri

$$V^*(E_j) = \langle g^{ij} v_i E_i, E_j \rangle = v_j$$

olduğundan, V^* 1-formuna karşılık gelen V vektör alanının j-nci bileşeni $g^{ij} v_i$ fonksiyonlarıdır. Buna göre $V = g^{ij} V_i E_j$ olarak yazılabilir. Kısaca V^* 1-formuna karşılık gelen V vektör alanının bileşenleri V^j olmak üzere $v^j = g^{ij} v_i$ dir. Ayrıca V vektör alanlarına karşılık gelen V^* 1-formunun bileşenleri de $V_j = g_{ij} V^j$ olarak yazılabilir.

2.2. Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1. M, n boyutlu bir manifold olmak üzere, M manifoldunun her p noktasına

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu karşılık getiren bir g dönüşümüne M üzerinde "Riemann metrik tensör alanı" denir. g, M manifoldu üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensör alanıdır. Bu metrikle birlikte (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir. Her $V,W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} g(V,W) &= g(dx^i(v)E_i, dx^j(w)E_j) \\ &= g(E_i,E_j)dx^i(v).dx^j(w) \end{aligned}$$

olduğundan g metrik tensör alanı

$$g = g(E_i,E_j)dx^i \otimes dx^j$$

eşitliğiyle verilebilir. Burada $g(E_i,E_j)$ fonksiyonları g metrik tensör alanının bileşenleridir. Bu fonksiyonlar g_{ij} ile gösterilir. Özel olarak $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerindeki standart(kanonik) metrik g olmak üzere,

$$g = \delta_{ij}dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$$

dir. Boyutları eşit bütün iç çarpım uzayları izometrik olduğundan (M,g) Riemann manifoldu olmak üzere $T_p(M)$ uzayı $\mathbb{R}^n$ uzayına izomorfiktir. Bu nedenle $T_p(M)$ uzayı üzerindeki iç çarpım "$\langle\ \rangle$" olmak üzere $\forall v_p, w_p \in T_p(M)$ için
$g_p(v_p,w_p) = \langle v,w \rangle$ dir.
g metrik tensör alanına karşılık gelen $g = [g_{ij}]$ matrisinin tersi $g^{-1} = [g^{ij}]$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.2.

$$S_r^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \ \|p\| = r\}$$

eşitliğiyle tanımlı $S^n(r)$ kümesi, orijin merkezli r yarıçaplı Öklidyen küredir. $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayından $S^n(r)$ küresi üzerine indirgenen metrikle birlikte $S^n(r)$ kümesi n-boyutlu Riemann manifoldudur.
$S^n = S^n(1)$ küresi $\mathbb{R}^{n+1}$ de birim küre ya da standart küre denir.

Örnek 2.2.3. [2] M manifoldu olarak $\mathbb{R}^2$-{yarı doğru} kümesi ve (r,θ) bir p noktasının kutupsal koordinatları olmak üzere,

$x^1 = rcos\theta,$

$x^2 = rsin\theta$ için

$$\begin{aligned} dx^1 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ dx^2 &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

dir. M manifoldu üzerindeki $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ Riemann metrik tensör alanını kutupsal koordinatlarda

$$\begin{aligned} g &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)dr^2 + (r\cos\theta\sin\theta - r\cos\theta\sin\theta)dr\otimes d\theta \\ &\quad +(r\cos\theta\sin\theta - r\cos\theta\sin\theta)d\theta\otimes dr + (r^2\sin^2\theta)d\theta\otimes d\theta \\ &\quad +(r^2\cos^2\theta)d\theta\otimes d\theta \\ &= (dr\otimes dr) + r^2(d\theta\otimes d\theta) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $dr\otimes dr = (dr)^2$ ve $d\theta\otimes d\theta = (d\theta)^2$ gösterimleri kullanılarak, $M = \mathbb{R}^2 - \{$yarı doğru$\}$ Riemann manifoldu üzerindeki metrik tensör alanı

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

eşitliğiyle verilebilir. Burada g metrik tensörünün bileşenleri

$g_{rr} = 1,\ \ g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0,\ \ g_{\theta\theta} = r^2$ dir.

Örnek 2.2.4. x_1Ox_3 düzlemindeki $\alpha_1(t) > 0$ olacak biçimdeki $\alpha(t) = (\alpha_1(t), 0, \alpha_3(t))$ eğrisinin Ox_3-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey M olsun. $\alpha_1(t)$ ışınının uzunluğu $\alpha_1(t) = r(t)$ olmak üzere r sayısıdır. Burada $r : M \to \mathbb{R},\ \ r(p) = r$ fonksiyonudur. M dönel yüzey üzerindeki bir

$P(p_1, p_2, p_3)$ noktası için

$$\begin{aligned} p_1 &= r\cos\theta \\ p_2 &= r\sin\theta \\ p_3 &= \alpha_3(t) \end{aligned}$$

olduğundan M yüzeyi için silindirik koordinat sistemi $\{r, \theta, \alpha(t)\}$ kümesidir. Burada $\theta : M \to \mathbb{R}$, $\theta(p) = \theta$ fonksiyonudur. M yüzeyinin bu koordinat sisteminden elde edilen çatı alanı ve dual çatı alanı sırasıyla $\{\partial_t, \partial_\theta\}$ ve $\{dt, d\theta\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dx_1 &= r^{'}(t)\cos\theta dt - r(t)\sin\theta d\theta \\ dx_2 &= r^{'}(t)\sin\theta dt + r(t)\cos\theta d\theta \\ dx_3 &= \alpha^{'}(t)dt \end{aligned}$$

olduğundan M yüzeyi üzerindeki $\mathbb{R}^3$ uzayından indirgenmiş Riemann metrik tensör alanı

$$\begin{aligned} g &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ &= \left(r^{'}(t)\cos\theta dt - r(t)\sin\theta d\theta\right)^2 \\ &\quad + \left(r^{'}(t)\sin\theta dt + r(t)\cos\theta d\theta\right)^2 + \left(\alpha_3^{'}(t)dt\right)^2 \\ &= \left(r^{'}(t)^2 + \alpha_3^{'}(t)^2\right)dt^2 + r(t)^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

dir. α eğrisi birim hızlı olacak şekilde yeniden parametre edilebilmesinden dolayı $r^{'}(t)^2 + \alpha_3^{'}(t)^2 = 1$ olarak alınabilir. Buradan,

$$g = dt^2 + r(t)^2 d\theta^2$$

olarak bulunur. Bu eşitlik kısaca

$$g = dt^2 + r^2 d\theta^2$$

olarak da yazılabilir.

Tanım 2.2.5. [2] S^1, $\mathbb{R}^2$ uzayında birim çember olmak üzere $M = I \times S^1$ çarpım manifoldu ve $\eta, \varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olmak üzere,

$$g = \eta^2(t)dt^2 + \varphi^2(t)d\theta^2$$

biçimde ise M çarpım manifolduna "rotasyonel simetriktir" denir.

Örnek 2.2.6. x_1Ox_3 düzlemindeki $\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ birim çemberin Ox_3-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzey M olsun. M yüzeyi için bir parametrizasyon

$$F(t,\theta) = (\sin t \cos\theta, \sin t \sin\theta, \cos\theta)$$

olmak üzere, g metrik tensör alanı

$$g = (1 + \sin^2 t)dt^2 + \sin^2 t d\theta^2$$

eşitliğiyle verilebilir.
$\eta(t) = 1 + \sin^2 t$, $\varphi(t) = \sin t$ olsun. Bu durumda M dönel yüzeyi rotasyonel simetriktir. Burada $\alpha'(t) = (-\cos t, 0, -\sin t)$, $\| \alpha'(t) \| = 1$ dir. $r(t) = \sin t$ olduğundan $|\cos t| \leq 1$ yani $|r'(t)| \leq 1$ dir.

Örnek 2.2.7. $\alpha(t) = \left(r\sin\frac{t}{r}, 0, r\cos\frac{t}{r}\right)$ birim hızlı eğrisinin Ox_3-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey M olsun. $t \geq 0$ ve $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $M = S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ dir. M yüzeyi için bir parametrizasyon,

$$F(t,\theta) = \left((r\sin\frac{t}{r}\cos\theta), (r\sin\frac{t}{r})\sin\theta, r\cos\frac{t}{r}\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \left(\cos\frac{t}{r}\right)\cos\theta dt - \left(r\sin\frac{t}{r}\right)\sin\theta d\theta \\
dx_2 &= \left(\cos\frac{t}{r}\right)\sin\theta dt + \left(r\sin\frac{t}{r}\right)\cos\theta d\theta \\
dx_3 &= -\sin\frac{t}{r}dt
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan M dönel yüzeyi üzerindeki Riemann metrik tensör alanı g için, $dt \otimes d\theta = d\theta \otimes dt$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ &= \big(\cos^2 \frac{t}{r}\big)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)dt^2 + r^2\big(\sin^2 \frac{t}{r}\big)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta^2 + \sin^2 \frac{t}{r} dt^2 \\ &= \cos^2 \frac{t}{r} dt^2 + r^2 \sin^2 \frac{t}{r} d\theta^2 + \sin \frac{t}{r} dt^2 \\ &= \big(\cos^2 \frac{t}{r} + \sin^2 \frac{t}{r}\big) dt^2 + r^2 \sin \frac{t}{r} d\theta^2 \\ &= dt^2 + r^2 \sin^2 \frac{t}{r} d\theta^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$M = S^2(r)$ küresinin yarıçapı sonsuza yaklaştığında $\lim\limits_{r\to\infty} r \sin \frac{t}{r} = t$ ve $\lim\limits_{r\to\infty} r \cos \frac{t}{r} = 0$ olduğundan $M = S^2(r)$ küresi için bir parametrizasyon $F(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, 0)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ &= (\cos\theta dt - t\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dt + t\cos\theta d\theta)^2 \\ &= dt^2 + d\theta^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan $r \to \infty$ için $M = S^2(r)$ küresi Öklid uzayı gibi düşünülebilir. Ayrıca $S^2(r)$ küresinin kesitsel eğriliği $k = \frac{1}{r^2} > 0$ olmak üzere

$$\alpha_1^{'}(t) = r \sin \frac{t}{r} \quad fonksiyonunun$$

$$\alpha_1^{''}(t) + k\alpha_1(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= 0 \\ \alpha_1^{'}(0) &= 1 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu çözüm Sn_k ile gösterildiğinde,

$$Sn_k = r \sin \frac{t}{r} = \frac{1}{\sqrt{k}} . \sin \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{\sin \sqrt{k} r}{\sqrt{k}}$$

dır. Bu durumda $S^2(r)$ küresi üzerindeki Riemann metrik tensör alanı

$$g = dt^2 + sn_k^2(t)d\theta^2$$

rotasyonel simetriktir.

2.3. Yerel Koordinatlara Göre Notasyonlar ve Tanımlar

Tanım 2.3.1. [2] (M,g) bir Riemann manifoldu, $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun. Her $V \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$g(V,\nabla f) = df(V)$$

eşitliğini sağlayan ∇f vektör alanına f fonksiyonunun "Gradiyenti" denir ve $grad f$ olarak yazılır. $g = g_{ij}dx^i dx^j$ metrik tensörü için g_{ij} matrisinin tersi g^{ij} olmak üzere, M manifoldunun yerel koordinatlarına göre ∇f vektör alanı

$$\nabla f = g^{ij}\partial_i(f)\partial_j$$

olarak yazılabilir.
$V \in \mathfrak{X}(M),\ V = v_k\partial_k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} df(V) = (\partial_i(f)dx_i)(v_k\partial_k) &= v_k\partial_i(f)\delta_{ik} \\ &= v_k.\partial_k(f) \\ &= g(V,\nabla f) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.3.2. [2] (Çarpım Kuralı) S, M manifoldu üzerinde $(0,r)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Her $Z, W_1, ..., W_r \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} DS(Z,W_1,...,W_r) &= (D_Z S)(W_1,...,W_r) \\ &= D_Z(S(W_1,...,W_r)) - \sum_{i=1}^{r} S(W_1,...,D_Z W_i,...,W_r) \end{aligned}$$

eşitliğiyle belirli olan $(0, r+1)$ tipindeki DS tensör alanına S tensör alanının "kovaryant diferensiyeli" denir. Burada D_Z operatörü, S tensör alanının tensör türevidir.

Tanım 2.3.3. [1] $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun.

$$Hess\ f = D(Df)$$

eşitliğiyle tanımlı $Hess\ f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun "Hessiyanı" denir.

Lemma 2.3.4. *[1] f fonksiyonunun Hessiyanı ve her $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ için*

$$(Hess\ f)(W,Z) = Z(Wf) - (D_Z W)f$$

eşitliğini sağlayan $(0,2)$ tipinde simetrik tensör alanıdır.

İspat:

$$\begin{aligned}
(Hess\ f)(Z,W) &= (D(Df))(Z,W) \\
&= (D_W(Df))Z \\
&= D_W((Df)Z) - (Df)(D_W Z) \\
&= D_W(Zf) - (D_W Z)f \\
&= W(Zf) - (D_W Z)f \\
&= W\langle \nabla f, Z\rangle - \langle \nabla f, \nabla_W Z\rangle \\
&= \langle \nabla_W \nabla f, Z\rangle + \langle \nabla f, \nabla_W Z\rangle - \langle \nabla f, \nabla_W Z\rangle \\
&= \langle \nabla_W \nabla f, Z\rangle
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$(Hess\ f)(Z,W) = \langle D_Z(\nabla f), W\rangle$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}(Hess\ f)(Z,W)-(Hess\ f)(W,Z) &= W(Zf)-(D_WZ)f-Z(Wf)+(D_ZW)f\\ &= W(Zf)-Z(Wf)+(D_ZW)f-(D_WZ)f\\ &= [W,Z](f)+(D_ZW-D_WZ)f\\ &= ([W,Z]+[Z,W])f\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan

$$(Hess\ f)(Z,W)=(Hess\ f)(W,Z)$$

dir. □

Tanım 2.3.5. [1] (M,g) bir Riemann manifoldu $f\in\mathfrak{F}(M)$ ve $Z,W,Q\in\mathfrak{X}(M)$ için

$$L_Zf=Zf,\ \ L_ZW=[Z,W]$$

ve $L_Z,\ g$ tensör alanının tensör türevi olmak üzere,

$$(L_Zg)(W,Q)=L_Z(g(W,Q))-g(L_ZW,Q)-g(W,L_ZQ)$$

eşitliğiyle belirli olan $(0,2)$ tipindeki L_Zg tensör alanına g metrik tensör alanının Z vektör alanına göre "Lie Türevi" denir.

Lemma 2.3.6. *[2] $f\in\mathfrak{F}(M)$ için*

$$\frac{1}{2}L_{\nabla f}g=Hess\ f$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}L_{\nabla f}g\right)(W,Q) &= \frac{1}{2}\Big[(L_{\nabla f}g)(W,Q)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[L_{\nabla f}\big(g(W,Q)\big)-g(L_{\nabla f}W,Q)-g(W,L_{\nabla f}Q)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[L_{\nabla f}\langle W,Q\rangle-g([\nabla f,W],Q)-g\big(W,[\nabla f,Q]\big)\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Big[\langle \nabla_{\nabla f} W, Q\rangle + \langle W, \nabla_{\nabla f} Q\rangle - \langle \nabla_{\nabla f} W, Q\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_W \nabla f, Q\rangle - \langle W, \nabla_{\nabla f} Q\rangle + \langle W, \nabla_Q \nabla f\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle \nabla_W \nabla f, Q\rangle + \langle W, \nabla_Q \nabla f\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[Hess\ f(W,Q) + Hess\ f(W,Q)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[2Hess\ f(W,Q)\Big] \\
&= Hess\ f(W,Q)
\end{aligned}$$

dir. □

$f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

lineer dönüşümü $SX = \nabla_X \nabla f$ eşitliğiyle verilsin. Buna göre

$$\begin{aligned}
\overline{S} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{F}(M) \\
(\theta, X) &\mapsto \overline{S}(\theta, X) = \theta(SX)
\end{aligned}$$

eşitliğiyle verilen $\overline{S}$ dönüşümü $\mathfrak{F}(M)$ lineer olduğundan $\overline{S} \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ dir. Dolayısıyla S lineer dönüşümü verildiğinde $(1,1)$ tipinde $\overline{S}$ tensör alanı tek olarak belirlidir. Bu nedenle $S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ lineer dönüşümü $(1,1)$ tipinde tensör alanı olarak düşünülür. Açık olarak,

$$Hess\ f(X,Y) = g(S(X),Y) \tag{2.3.1}$$

dir. (2.3.1) eşitliğinde verilen $S(\cdot) = \nabla_{\cdot} \nabla f$ lineer dönüşümüne $Hess\ f$ tensör alanının $(1,1)$ tipinde gösterimi denir.

M manifoldunun yerel koordinat sistemine göre $\nabla f = g^{kl}\partial_k(f)\partial_l$ olmak üzere $Hess\ f$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
2Hess\ f(\partial_i,\partial_j) &= (L_{\nabla f}g)(\partial_i,\partial_j) \\
&= D_{\nabla f}g_{ij} - g(L_{\nabla f}\partial_i,\partial_j) - g(\partial_i, L_{\nabla f}\partial_j) \\
&= D_{g^{kl}\partial_k(f)\partial_l}g_{ij} + g(L_{\partial_i}\nabla f,\partial_j) + g(\partial_i, L_{\partial_j}\nabla f) \\
&= g^{kl}\partial_k(f)\partial_l g_{ij} + g\big(L_{\partial_i}g^{kl}\partial_k(f)\partial_l,\partial_i) + g(\partial_i, L_{\partial_i}g^{kl}\partial_k(f)\partial_l\big) \\
&= \partial_k(f)g^{kl}(\partial_l g_{ij}) + \partial_i(g^{kl}\partial_k(f))g_{lj} + g^{kl}\partial_k(f)L_{\partial_i}\partial_j \\
&\quad +\partial_j(g^{kl}\partial_k(f))g_{il} + g^{kl}\partial_k(f)L_{\partial_j}\partial_l \\
&= \partial_k(f)g^{kl}(\partial_l g_{ij}) + \partial_i g^{kl}\partial_k(f)g_{lj} + g^{kl}\partial_i\partial_k(f)g_{lj} \\
&\quad +\partial_j g^{kl}\partial_k(f)g_{il} + g^{kl}\partial_i\partial_k(f)g_{il} \\
&= 2\partial_i\partial_j f + (\partial_k f)\big[(\partial_i g^{kl})g_{lj} + (\partial_j g^{kl})g_{il} + g^{kl}\partial_l g_{ij}\big]
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$0 = \partial_i\delta_l^i = \partial_i(g^{jk}g_{kl}) = (\partial_i g^{jk})g_{kl} + g^{jk}(\partial_i g^{kl})$$

olduğundan

$$(\partial_i g^{jk})g_{kl} = -g^{jk}(\partial_i g_{kl}) \qquad (2.3.2)$$

olarak bulunur. (2.3.2) eşitliğinden yararlanarak bulunur.

$$\begin{aligned}
2Hess\ f(\partial_i,\partial_j) &= 2\partial_i\partial_j f + (\partial_k f)\Big((\partial_i g^{kl})g_{lj} + (\partial_j g^{kl})g_{il} + g^{kl}(\partial_l g_{ij})\Big) \\
&= 2\partial_i\partial_j f + (\partial_k f)\Big(-g^{kl}\partial_i g_{lj} - g^{kl}\partial_j g_{li} + g^{kl}(\partial_l g_{ij})\Big) \\
&= 2\partial_i\partial_j f - g^{kl}\big(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\big)\partial_k f \\
&= 2\big(\partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f\big)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$Hess\ f(\partial_i,\partial_j) = (\partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f)$$

dir.

Tanım 2.3.7. [2] $(\cdot,r)$ tipindeki bir S tensör alanının ikinci kovaryant türevi aşağıdaki eşitlikte tanımlı olan $(\cdot,r+2)$ tipindeki $\nabla^2 S$ tensör alanıdır.

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2_{Z_1,Z_2}S(W_1,\dots,W_r)\right) &= (\nabla_{Z_1}(\nabla S))(Z_2,W_1,\dots,W_r))\\ &= (\nabla_{Z_1}(\nabla_{Z_2}S))(W_1,\dots,W_r)-(\nabla_{\nabla_{Z_1}Z_2}S)(W_1,\dots,W_r)\end{aligned}$$

Yukarıdaki tanıma göre,

$$\begin{aligned}Hess\, f(Z,W) &= (\nabla(\nabla f))(Z,W)=\nabla^2_{Z,W}f\\ &= \nabla_Z\nabla_W f-\nabla_{\nabla_Z W}f=\nabla_Z g(W,\nabla f)-g(\nabla_Z W,\nabla f)\\ &= g(W,\nabla_Z\nabla f)=g(S(Z),W)\end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.3.8. [2] (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z-\nabla^2_{Y,X}Z\\ &= \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_{\nabla_X Y}Z-\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_{\nabla_Y X}Z\\ &= [\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

eşitliği ile belirli olan $R:\mathfrak{X}^3(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 3-lineer dönüşümüne M manifoldunun "eğrilik tensör alanı" denir ve R ile gösterilir. Buna göre R eğrilik tensör alanı $(1,3)$ tipinde tensör alanı olarak düşünülebilir. Ayrıca

$$\overline{R}(W,X,Y,Z)=g(W,R(X,Y)Z)$$

eşitliği ile verilen $\overline{R}$ tensör alanı R tensör alanına metriksel olarak denktir. Burada tensör alanlarının metriksel olarak denk olması demek metrik tensörü ve tersleri kullanılarak bir tensör alanından diğerine geçilmesi anlamındadır. Yani yerel koordinat sistemine göre R eğrilik tensörünün bileşenleri için

$$R_{ijkl} = g_{im} R^m_{jkl}$$

ve

$$R^i_{jkl} = g^{im} R_{mjkl}$$

dir. Burada $R^m_{jkl} = \partial_i \Gamma^m_{kl} - \partial_k \Gamma^m_{jk} + \Gamma^s_{il} \Gamma^m_{js} - \Gamma^s_{jl} \Gamma^m_{ks}$ dir.

Örnek 2.3.9. $\mathbb{R}^n$ öklid uzayı üzerindeki $\{x_1, ..., x_n\}$ ortogonal koordinat sistemine göre $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ olduğundan $\mathbb{R}^n$ uzayının eğrilik tensörü R=0 dır.

Tanım 2.3.10. [2] $\forall\, x \in T_p(M)$ için

$$R_x(y) = R(y,x)x$$

eşitliğiyle tanımlı olan

$$\begin{aligned} R_x : T_p(M) &\rightarrow Hom(T_p(M), T_p(M)) \\ z &\mapsto R_x(y) \end{aligned}$$

dönüşümüne "x vektörü yönündeki eğrilik operatörü" denir. R_x operatörü self adjointtir. Yani $g(R_x(y), z) = g(y, R_x(z))$ dir.

$\{e_i\}$ kümesi $T_p(M)$ uzayının ortonormal tabanı olmak üzere $i < j$ için $e_i \wedge e_j$ bivektörlerinin kümesi $\wedge^2_p M$ uzayının ortonormal bir tabanıdır. $\wedge^2_p M$ uzayı üzerindeki iç çarpım g olmak üzere,

$$g(x \wedge y, v \wedge w) = det \begin{pmatrix} g(x,v) & g(x,w) \\ g(y,v) & g(y,w) \end{pmatrix}$$

eşitliğiyle belirlidir. Burada,

$$\begin{aligned} (v \wedge w)x &= g(w,x)v - g(v,x)w \\ &= -\big(g(v,x)w - g(w,x)v\big) \\ &= -(w \wedge v)x \end{aligned}$$

olduğundan $\wedge : T_p(M) \times T_p(M) \mapsto Hom(T_p(M) \to \mathbb{R})$ dönüşümü ters simetrik ve

$$(x \wedge y)z + (y \wedge z)x + (z \wedge x)y = 0$$

jacobi eşitliğini sağlar.

R eğrilik tensörünün simetri özellikleri sağladığı biliniyor. Buna göre $\wedge^2 M$ uzayı üzerinde

$$R(X \wedge Y, V \wedge W) = R(X, Y, W, V)$$

eşitliğiyle tanımlanan $R : \wedge^2 M \times \wedge^2 M \to \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü simetrik ve bilineerdir. Bu dönüşümünün $(1,1)$ gösterimi $\mathcal{R}$ olmak üzere,

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), V \wedge W) = R(X \wedge Y, V \wedge W) = g(R(X,Y)V, W)$$

eşitliğiyle belirli olan $\mathcal{R} : \wedge^2 M \to \wedge^2 M$ self-adjoint dönüşümüne eğrilik operatörü denir.

Tanım 2.3.11. [2] $\forall\, x, y \in T_p(M)$ için

$$\begin{aligned} sec(x,y) &= \frac{g(R_x(y), y)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2} \\ &= \frac{g(R(y,x)x, y)}{g(x \wedge y, x \wedge y)} \\ &= \frac{g(\mathcal{R}(x \wedge y), x \wedge y)}{(Alan(x,y))^2} \end{aligned}$$

eşitliğiyle verilen $sec(x,y)$ sayısına (M,g) Riemann manifoldunun $\pi = S_p\{x,y\}$ düzlem kesitlerine göre "kesitsel eğriliği" denir.

Lemma 2.3.12. *(Riemann-1854) Aşağıdaki önermeler denktir.*

1) $sec(\pi) = k$

2) Her $x_1, x_2, x_3 \in T_p(M)$, $R(x_1, x_2)x_3 = k(x_1 \wedge x_2)x_3$

3) Her $y \in T_p(M)$, $\mid x \mid = 1$, $R_x(y) = k.(y - g(y,x)x)$

4) Her $y \in \wedge^2(M)$, $\mathcal{R}(z \wedge y) = k.z \wedge y$

Tanım 2.3.13. [2] $T_p(M)$ uzayında her $p \in M$ noktası için elde edilen $\pi = S_p\{x,y\}$ düzlemi için $sec(x,y) = sec(\pi) = k$ ise M manifolduna "sabit eğrilikli manifold" denir. $\mathbb{R}^n$ öklid uzayının kesitsel eğriliği 0 dır.

Tanım 2.3.14. [2] (M,g) Riemann manifoldunun R eğrilik tensörünün izine M manifoldunun "Ricci tensörü" denir. $\{e_1,...,e_n\}$ kümesi $T_p(M)$ uzayının ortonormal tabanı olmak üzere, her $v,w \in T_p(M)$ için

$$\begin{aligned} Ricci(v,w) &= tr(x \to R(x,v)w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,v)w,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(v,e_i)e_i,w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,w)v,e_i) \end{aligned}$$

dir. Ricci tensörü $T_p(M)$ üzerinde simetrik bilineer formdur. Ricci tensörü

$$Ricci(v) = \sum_{i=1}^{n} R(v,e_i)e_i$$

eşitliğine göre $(1,1)$ tipinde yazılabilir.

$$Ricci(v,w) = g(Ricci(v),w)$$

eşitliğine göre Ricci tensörü $T_p(M)$ üzerinde $(0,2)$ tipindedir.

Tanım 2.3.15. [2] $Ricci \geq k$ eşitsizliğinin anlamı $Ricci(v) = kv$ olacak şekildeki Ricci simetrik bilineer formun bütün k eigen değerleri için $Ricci(v) \geq k$ olması demektir. Ricci tensörü $(0,2)$ tipinde olduğundan bu eşitsizlik her $v \in T_p(M)$ için $Ricci(v,w) \geq kg(v,v)$ dir.

Eğer $Ricci(v) = kv$ veya $Ricci(v,w) = kg(v,w)$ ise bu durumda (M,g) Riemann manifolduna Einstein sabiti k olan "Einstein Manifoldu" denir. (M,g) sabit k eğriliğine sahip bir manifold ise bu durumda M nin Einstein sabiti $(n-1)k$ olan Einstein manifoldu olduğu açıktır.

Tanım 2.3.16. [2] (M,g) Riemann manifoldunun Ricci tensörünün izine M manifoldunun "Skaler Eğriliği" denir.

$$scal = tr(Ricci) = tr\mathcal{R}$$

dir. $scal : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $T_p(M)$ uzayının ortonormal $\{e_i\}$ tabanına göre

$$\begin{aligned} scal &= tr(Ricci) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g\big(Ricci(e_j), e_j\big) \\ &= \sum_{j}\sum_{i} g\big(R(e_i,e_j)e_j, e_i\big) \\ &= \sum_{j,i} g(\mathcal{R}(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j) \\ &= 2\sum_{i<j} g(\mathcal{R}(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j) \\ &= 2\sum_{i<j} sec(e_i,e_j). \end{aligned}$$

Önerme 2.3.17. [2] (M,g) Riemann manifoldu olmak üzere

$$dtr(Ricci) = 2div(Ricci)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğe daraltılmış "Bianchi eşitliği" denir.

İspat: Eşitlik, ikinci Bianchi eşitliğini kullanarak uzun ve kalıplaşmış bir hesaplama ile verilecektir. $p \in M$ için ortonormal tabanı olmak üzere $\nabla E_i p = 0$ ve W vektör alanı için $\nabla W|_p = 0$ olsun. İkinci Bianchi eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} (dtr(Ricci))(W)(p) &= D_W \sum g(Ricci(E_i), E_i) \\ &= D_W \sum g(R(E_i,E_j)E_j, E_i) \\ &= \sum g(\nabla_W (R(E_i,E_j)E_j), E_i) \\ &= \sum g((\nabla_W R)(E_i,E_j)E_j), E_i) \\ &= -\sum g((\nabla_{E_i} R)(W,E_i)E_j, E_i) - \sum g((\nabla_{E_i} R)(E_j,W)E_j, E_i) \\ &= -\sum (\nabla_{E_j} R)(W,E_i,E_j,E_i) - \sum (\nabla_{E_i} R)(E_j,W,E_j,E_i) \\ &= \sum (\nabla_{E_j} R)(E_j,E_i,E_i,W) + \sum (\nabla_{E_i} R)(E_i,E_j,E_j,W) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum(\nabla_{E_j}R)(E_j,E_i,E_i,W) \\
&= 2\sum\nabla_{E_j}(R(E_j,E_i,E_i,W)) \\
&= 2\sum\nabla_{E_j}g(Ricci(E_j),W) \\
&= 2\sum\nabla_{E_j}g(Ricci(W),E_j) \\
&= 2\sum g(\nabla_{E_j}Ricci(W),E_j) \\
&= 2\sum g((\nabla_{E_j}Ricci)(W),E_j) \\
&= 2div(Ricci)(W)(p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Lemma 2.3.18. *(Schur, 1886)* (M,g) $n \geq 3$ *boyutlu bir Riemann manifoldu ve* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *olsun.*

a) $sec(\pi) = f(p)$ *her* $\pi \subset T_p(M)$, $p \in M$

b) $Ricci(w) = (n-1).f(p).w$ *her* $w \in T_p(M)$, $p \in M$

önermelerinden birisi sağlanıyor ise f *fonksiyonu sabittir. Yani Einstein manifoldudur.*

İspat: $\{w,e_2,...,e_n\}$ $T_p(M)$ uzayının ortonormal bir tabanı olmak üzere, $sec(\pi) = f(p)$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
Ricci(w,w) &= g(R(w,w)w,w) + \sum_{i=2}^{n} g(R(e_i,w)w,e_i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} sec(w,e_i) \\
&= (n-1)f(p)
\end{aligned}
$$

olduğundan Ric tensör alanının $(1,1)$ gösteriminden

$$Ricci(w) = (n-1)f(p).w$$

eşitliği elde edilir. Buradan a) önermesinin b) önermesini gerektirdiği açıktır. Teoremin ispatı için b) önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$dscal = 2div(Ricci)$$

eşitliğinden yararlanılmalıdır. Ayrıca, Ric tensörünün $(1,1)$ gösterimi kullanıldığında,

$$\begin{aligned} dscal &= dtr(Ricci) \\ &= g((n-1)f(p).w,w) = (n-1)f(p).g(w,w) \\ &= d(n.(n-1)f) \\ &= n.(n-1).df \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 2(div(Ricci))(w) &= 2\sum g\big((\nabla_{e_i}Ricci)(w),e_i\big) \\ &= 2\sum g\big((\nabla_{e_i}((n-1)f(p)).I)(w),e_i\big) \\ &= 2\sum g\big((n-1)(\nabla_{e_i}f)w,e_i\big) + \sum g\big((n-1)f(\nabla_{e_i}I)w,e_i\big) \\ &= 2(n-1)g\big(w,\sum(\nabla_{e_i}f)e_i\big) \\ &= 2(n-1)g(w,\nabla f) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $dscal = 2div\ Ricci(.)$ eşitliğinden yararlanarak

$$2df = ndf \tag{2.3.3}$$

eşitliği elde edilir. (2.3.3) eşitliğinden $n \neq 2$ için $df = 0$ dır. Buradan $f \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu sabittir. Buradan

$$Ricci(w) = (n-1).f(p).w$$

eşitliğine göre

$$Ricci(w,w) = (n-1)f(p).g(w,w)$$

olduğundan

$$Ricci = k.g$$

elde edilir. Yani M Einstein manifoldudur. □

Sonuç 2.3.19. *[2] (M,g), $n \geq 2$ boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere (M,g) manifoldunun Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $Ricci = \frac{scal}{n}g$ olmasıdır.*

İspat: Lemma 2.3.18 in b) önermesine göre $Ricci = (n-1)g$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafının izi alındığında

$$R = (n-1).n$$

eşitliği elde edilir. Buradan $(n-1) = \frac{scal}{n}$ olduğundan

$$Ricci = \frac{scal}{n}g$$

dir. □

2.4. Uzaklık Fonksiyonu

Tanım 2.4.1. [2] U, (M,g) Riemann manifoldunun açık alt kümesi olsun. $\| \nabla r \| = 1$ olacak şekilde $r : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna "uzaklık foksiyonu" denir. Kısaca

$$\| \nabla r \|^2 = 1$$

birinci basamaktan lineer olmayan Hamilton-Jakobi denkleminin basit çözümüdür.

Örnek 2.4.2. [2] $(\mathbb{R}^2, can)$ uzayı üzerinde uzaklık fonsiyonu, $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesi üzerinde $|\nabla r| \equiv 1$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir $r : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyondan yararlanarak U kümesi üzerinde verilen herhangi iki A ve B noktaları arasındaki uzaklık elde edilebilir. Bunun için $p \in \mathrm{U}$, r uzaklık fonksiyonu için referans noktası olmak üzere

$$\forall A \in \mathrm{U}, \;\; r(p) = |A - p|$$

eşitliğiyle tanımlansın. Kısaca $r(p)$ sayısı $\overrightarrow{PA}$ vektörünün uzaklığıdır. $A(a_1, a_2)$ olmak üzere, r fonksiyonu

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$$

eşitliğiyle verilebilir. $\mathbb{R}^2$ uzayının $e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \partial_2$ olacak şekilde ortonormal tabanı için

$$\nabla r = (\nabla_{e_i} r) e_i$$

olduğundan $|\nabla r| \equiv 1$ dir. Ayrıca $r : \mathbb{R}^2 - \{A\} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyondur.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ uzayında farklı $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ noktaları için $r : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ uzaklık

fonksiyonu

$$r(p) = min\{|A-p|, |B-p|\}$$

eşitliğiyle verilebilir. Yani kümenin minimumu olan $|A-p|$ veya $|B-p|$ sayılarından birisi $r(p)$ sayısını veren r uzaklık fonksiyonudur. Bu durumda r uzaklık fonksiyonu belirlendiğinden her $B \in \mathrm{U}$ noktası için $r(p) = |A-p|$ ve $r(p) = |B-p|$ olacağından $|A-p| = |B-p|$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla p noktası A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan AB doğru parçasının orta dikme doğrusu üzerinde olur.

Benzer durum $(\mathbb{R}^n, can)$ uzayı için düşünüldüğünde $p \in \mathbb{R}^n$ noktası A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan $\{p \in \mathbb{R}^n \mid |A-p| = |B-p|\}$ hiperdüzlemi üzerindedir.

Örnek 2.4.3. [2] $M \subset \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. $p \in M$ noktası için M üzerinde $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere $r : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu

$$r(p) = d(p, M) = inf\{d(p, y) \mid y \in M\}$$

eşitliğiyle verilebilir. M yönlendirilebilir yüzey olduğunda N vektörü M yüzeyini birim normal vektör alanı olmak üzere, $t \in \mathbb{R}$ parametresi ve $y \in M$ noktası için $p = tN + y$ olsun. Yani p noktası $y \in M$ noktasından geçen N vektörüne paralel bir l doğrusu üzerinde olacak şekilde yeniden parametrelendirilsin.

$p \in l$ noktasının ε komşuluğunu $B_\varepsilon(y)$ $p \in B_\varepsilon(y) \subset l$ olduğundan $B_\varepsilon(y)$ kümesi l

doğrusu üzerinde bir aralıktır. Bu durumda

$$\mathrm{U} = B_\varepsilon(y) = \{tN + y \mid y \in M, \ \ |t| < \varepsilon\}$$

kümesindeki her noktasının (t,y) biçiminde bir tek koordinata sahip olacak biçimde bir $\varepsilon_y : U = B_\varepsilon(y) \mapsto (0,\infty)$, $\varepsilon_y(p) = t$ fonksiyonu vardır.
Dolayısıyla yukarıdaki U kümesi için $r : U \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu $r(p) = t$ olarak tanımlanır.
$p \in \mathrm{U} - M$ için $r(p) = d(p,M) = |t|$ dir. Bu fonksiyonlara karşılık gelen bölge üzerinde yüzey üzerinde uzaklık fonksiyonları denir.
Genel olarak yönlendirelebilir $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hiperyüzeyi için N, M hiperyüzeyinin birim dik vektör alanı olmak üzere

$$\mathrm{U} = \{tN + y, \ \ y \in M, \ \ |t| < \varepsilon(y)\}$$

kümesi üzerinde $r(p) = t$ veya $\mathrm{U} - M$ kümesi üzerinde $r(p) = |\, t \,|$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.4.4. [2] $I \times M$ çarpım manifoldu üzerindeki metrik tensör, dr^2 $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerindeki standart metrik ve g_r, $\{r\} \times M$ manifoldu üzerindeki metrik olmak üzere, $g = dr^2 + g_r$ biçimindedir. Burada hem dr^2 hem de g_r metrikleri r uzaklık fonksiyonuna bağlı olduğundan $I \times M$ manifoldundan I aralığına izdüşüm fonksiyonu r uzaklık fonksiyonu olarak alınabilir. Örneğin rotasyonel simetrik metrikler bu durumun özel halidir.

$U \subset M$ ve $r : U \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu olsun. $U_r = \{x \in U | r(x) = r\}$ kümesi $r : U \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu için seviye yüzeyi ve bu yüzey üzerindeki indirgenmiş metrik tensör g_r olmak üzere M manifoldu üzerindeki metrik tensör $g = dr^2 + g_r$ şeklindeki warped çarpım metriğidir. $\partial_r = \nabla r$ vektör alanı U_r seviye yüzeyinin birim dik vektör alanıdır.
∇^r ve R^r sırasıyla (U_r, g_r) seviye yüzeyi üzerindeki Riemann konneksiyonu ve eğrilik tensör alanı olsun.

$r : U \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu Hessiyanının $(1,1)$ gösterimi

$$S(.) = \nabla_{.}\partial_r$$

olmak üzere,

$$Hessr(X,Y) = g(S(X),Y)$$

eşitliğiyle verilebilir. Burada S, U_r seviye yüzeyinin şekil operatörü ya da ikinci temel formudur.

Teorem 2.4.5. *[2] (Radyal Eğrilik Denklemi) $U \subset (M,g)$ ve $r : U \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu olsun. r uzaklık fonksiyonu Hessiyanının $(1,1)$ gösterimi $S(\cdot) = \nabla_{\cdot}\partial_r$ olmak üzere,*

$$\nabla_{\partial_r} S + S^2 = -R_{\partial_r}$$

dir.

İspat: $Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_r} S + S^2)(Y) &= (\nabla_{\partial_r} S)(Y) + S^2(Y) \\
&= \nabla_{\partial_r}(S(Y)) - S(\nabla_{\partial_r} Y) + S(S(Y)) \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_Y \partial_r - \nabla_{\nabla_{\partial_r} Y}\partial_r + \nabla_{\nabla_Y \partial_r}\partial_r \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_Y \partial_r - \nabla_{\nabla_{\partial_r} Y - \nabla_Y \partial_r}\partial_r \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_Y \partial_r - \nabla_{[\partial_r, Y]}\partial_r \qquad (2.4.4)
\end{aligned}$$

dir.

Ayrıca

$$R_{\partial_r}(Y) = R(Y,\partial_r)\partial_r = \left[\nabla_Y \nabla_{\partial_r}\partial_r - \nabla_{\partial_r}\nabla_Y \partial_r - \nabla_{[Y,\partial_r]}\partial_r\right] \qquad (2.4.5)$$

olduğunu biliniyor. Diğer yandan U üzerindeki herhangi bir Z vektör alanı için,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial_r}\partial_r, Z) &= Hess\, r(\partial_r, Z) \\ &= Hess\, r(Z, \partial_r) \\ &= g(\nabla_Z \partial_r, \partial_r) \\ &= \langle \nabla_Z \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= \frac{1}{2} Z\langle \partial_r, \partial_r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \nabla_Z (g(\partial_r, \partial_r)) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_Z 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = S(\partial_r) = 0$$

dır. Buradan (2.4.5) eşitliğine göre

$$R_{\partial_r}(Y) = -\nabla_{\partial_r}\nabla_Y \partial_r + \nabla_{[\partial_r, Y]}\partial_r$$

olarak bulunur. Bu eşitlik (2.4.4) eşitliğinde yerine yazılarak Radyal eğrilik denklemi ispatlanmış olur. □

$(U_r, g_r) \subset (U, M)$ seviye hiperyüzeyi verilsin. $v \in T_p(M)$ için

$$v = tanv + norv = v - g(v, \partial_r)\partial_r + g(v, \partial_r)\partial_r$$

olarak yazılabilir. Ayrıca, U_r seviye yüzeyinin ikinci temel formu II olmak üzere,

$$II(X,Y) = Hess\, r(X,Y) = g(S(X), Y)$$

eşitliğiyle belirlidir.

Teorem 2.4.6. *[2] (Tanjant Eğrilik Denklemi)*

$$tanR(X,Y)Z = R^r(X,Y)Z - (S(X)\wedge S(Y))Z$$

$$g(R(X,Y)Z,W) = g_r(R^r(X,Y)Z,W) - II(Y,Z)II(X,W) + II(X,Z)II(Y,W)$$

Teorem 2.4.7. *[2] (Normal Eğrilik Denklemi)*
$\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(U_r)$ için

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,\partial_r) &= g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X), Z) \\ &= -(\nabla_X II)(Y,Z) + (\nabla_Y II)(X,Z) \end{aligned}$$

dir.

İspat: $\forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(U_r),\ \ \partial_r \in \mathfrak{X}(U_r)^{\perp}$ için

$$\nabla^r_X Y = tan(\nabla_X Y) = \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, \partial_r)\partial_r$$

dir. Ayrıca $\partial_r \perp Y$ için

$$\nabla_X g(\partial_r, Y) = 0$$

olduğundan

$$g(\nabla_X \partial_r, Y) = -g(\partial_r, \nabla_X Y)$$

eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \nabla^r_X Y &= \nabla_X Y + g(\nabla_X \partial_r, Y) = \nabla_X Y + g(S(X), Y) \\ &= \nabla_X Y + II(X,Y)\partial_r \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlikle elde edilen ∇^r nin, (U_r, g_r) level hiperyüzeyi için Riemann konneksiyonu olduğu açıktır. Ayrıca

$$\nabla_X Y = \nabla^r_X Y - g(S(X),Y)\partial_r$$

eşitliğinden yararlanarak $R(X,Y)Z$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\big(\nabla^r_Y Z - g(S(Y),Z)\partial_r) - \nabla_Y(\nabla^r_X Z - g(S(X),Z)\partial_r\big) \\
&\quad -\nabla^r_{[X,Y]}Z + g(S([X,Y]),Z)\partial_r \\
&= \nabla_X\nabla^r_Y Z - \nabla_Y\nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]}Z \\
&\quad -\nabla_X(g(S(Y),Z)\partial_r) + \nabla_Y(g(S(X),Z)\partial_r) \\
&\quad +g(S([X,Y]),Z)\partial_r \\
&= R^r(X,Y)Z - g(S(X),\nabla_Y Z).\partial_r + g(S(Y),\nabla_X Z).\partial_r \\
&\quad -g(S(Y),\nabla_X Z).\partial_r + g(S(X),\nabla_Y Z).\partial_r \\
&\quad -g(\nabla_X S(Y),Z).\partial_r + g(\nabla_Y S(X),Z).\partial_r + g(S([X,Y]),Z).\partial_r \\
&\quad -g(S(Y),Z)S(X) + g(S(X),Z)S(Y) \\
&= R^r(X,Y)Z - (S(X)\wedge S(Y))(Z) \\
&\quad +g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X),Z).\partial_r
\end{aligned}$$

□

M, 1-boyutlu manifold olsun. Bu durumda $R \equiv 0$ dır ve U_r kümesi noktalardan oluşan kümedir.

2-boyutlu bir M manifoldu için herhangi bir $r : U \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonunun 1-boyutlu seviye yüzeyleri vardır. $R^r \equiv 0$ olduğundan bu durumda radyal eğrilik denklemi

$$\partial_r(\Delta r) + (\Delta r)^2 = -sec(Tp(M))$$

biçimindedir. Gerçekten U_r seviye yüzeyi 1-boyutlu ve $S(\partial_r) = 0$ olduğundan S şekil operatörü yalnızca v birim vektörüne bağlıdır ve $S(v)$ vektörü v vektörünün bir katıdır.

$S(v) = \alpha v$ olsun. Buna göre,

$$\alpha = trS = trHessr = \Delta r$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $S(v) = (\Delta r)v$ eşitliğinden 1-boyutlu U_r seviye yüzeyinin şekil operatörü Δr fonksiyonudur.

Ayrıca, U_r üzerindeki metrik tensör g_r olmak üzere $g_r = \varphi^2(r,\theta)d\theta^2$ olarak yazılabilir. Buradan,

$$g = dr^2 + g_r = dr^2 + \varphi^2(r,\theta)d\theta^2$$

dir. Diğer yandan $g_{rr} = 1,\ g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0,\ g_{\theta\theta} = \varphi^2(r,\theta)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi^2(r,\theta) = g(\partial_\theta, \partial_\theta) \quad &\Rightarrow \quad 2\varphi(r,\theta)\partial_r\theta = \partial_r g(\partial_\theta, \partial_\theta) \\
&\Rightarrow \quad \varphi(r,\theta)\partial_r\theta = \frac{1}{2}\partial_r g(\partial_\theta, \partial_\theta) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = g(\nabla_{\partial_r}\partial\theta, \partial\theta) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = g(S(\partial\theta), \partial\theta) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \alpha|\partial\theta|^2 = \alpha\varphi^2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$trS = \frac{\partial_r\varphi}{\varphi}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $-sec(Tp(M)) = \frac{\partial_r^2\varphi}{\varphi}$ dır. $M = \mathbb{R}^3$ özel durumu için $R = 0$ olduğundan tanjant eğrilik denklemi

$$\begin{aligned}
sec(Tp(U_r)) &= R^r(X,Y,Y,X) \\
&= g(S(X),X)g(S(Y),Y) - g(S(X),Y)g(S(X),Y) \\
&= detS
\end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.4.8. *[2] $r : (\mathrm{U}, g) \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu ve $\nabla r = \partial_r$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(1) $L_{\partial_r} g = 2Hess\ r$

(2) $(\nabla_{\partial_r} Hess\ r)(Z,W) + Hess^2\ r(Z,W) = -R(Z,\partial_r,\partial_r,W)$

(3) $(L_{\partial_r} Hess\ r)(Z,W) - Hess^2\ r(Z,W) = -R(Z,\partial_r,\partial_r,W)$

İspat: Her $Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ için, $S(Z) = \nabla_W \partial_r$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(L_{\partial_r} g)(Z,W) &= \partial_r(g(Z,W)) - g(L_{\partial_r} Z,W) - g(Z,L_{\partial_r} W) \\
&= g(\nabla_{\partial_r} Z,W) + g(Z,\nabla_{\partial_r} W) - g([\partial_r,Z],W) - g(Z,[\partial_r,W]) \\
&= g(\nabla_Z \partial_r,W) + g(Z,\nabla_W \partial_r) \\
&= g(S(Z),W) + g(Z,S(W)) \\
&= Hess\ r(Z,W) + Hess\ r(W,Z) \\
&= 2Hess\ r(Z,W)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$L_{\partial_r} g = 2Hess\ r$$

eşitliği sağlanır.

(2) ve (3) eşitliklerinin ispatı için $\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$ olduğu ve $g(S(Z),W) = g(Z,S(W))$ eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_r} Hess\ r)(Z,W) &= \partial_r Hess\ r(Z,W) - Hess\ r(\nabla_{\partial_r} Z,W) - Hess\ r(Z,\nabla_{\partial_r} W) \\
&= \partial_r g(\nabla_Z \partial_r,W) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r,W) - g(\nabla_Z \partial_r,\nabla_{\partial_r} W) \\
&= g(\nabla_{\partial_r} \nabla_Z \partial_r,W) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r,W) \\
&= g(R(\partial_r,Z)\partial_r,W) + g(\nabla_Z \nabla_{\partial_r} \partial_r,W) + g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r,W) \\
&\quad - g(\nabla_{\nabla_Z \partial_r} \partial_r,W) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r,W) \\
&= g(R(\partial_r,Z)\partial_r,W) - g(\nabla_{\nabla_Z \partial_r} \partial_r,W) \\
&= -R(Z,\partial_r,\partial_r,W) - g(S(W),\nabla_Z \partial_r) \\
&= -R(Z,\partial_r,\partial_r,W) - g(\nabla_W \partial_r,\nabla_Z \partial_r) \\
&= -R(Z,\partial_r,\partial_r,W) - Hess^2\ r(Z,W)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

(3) eşitliğinin ispatı için benzer olarak,

$$\begin{aligned}
(L_{\partial_r} Hess\ r)(Z,W) &= \partial_r Hess\ r(Z,W) - Hess\ r([\partial_r, Z], W) - Hess\ r(Z, [\partial_r, W]) \\
&= \partial_r g(\nabla_Z \partial_r, W) - g(\nabla_{[\partial_r, Z]} \partial_r, W) - g(\nabla_Z \partial_r, [\partial_r, W]) \\
&= g(\nabla_{\partial_r} \nabla_Z \partial_r, W) + g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_{\partial_r} W) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r, W) \\
&\quad + g(\nabla_{\nabla_Z \partial_r} \partial_r, W) - g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_{\partial_r} W) + g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_W \partial_r) \\
&= g(R(\partial_r, Z)\partial_r, W) + g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r, W) - g(\nabla_{\nabla_Z \partial_r} \partial_r, W) + g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_{\partial_r} W) \\
&\quad - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} Z} \partial_r, W) + g(\nabla_{\nabla_Z \partial_r} \partial_r, W) - g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_{\partial_r} W) + g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_W \partial_r) \\
&= g(R(\partial_r, Z)\partial_r, W) + g(\nabla_Z \partial_r, \nabla_W \partial_r) \\
&= -R(Z, \partial_r, \partial_r, W) + Hess^2\ r(Z,W)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. □

2.5. Warped Çarpım Manifoldları

Tanım 2.5.1. [1] (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları olmak üzere, $g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$ metrik tensörü ile verilen $M \times N$ manifolduna, M ve N manifoldlarının "Riemann çarpım manifoldu" denir. Burada $(r,s) \in M \times N$ için,

$$\begin{aligned}
\pi &: M \times N \to M, \ \ \pi(r,s) = r, \\
\sigma &: M \times N \to N, \ \ \sigma(r,s) = s
\end{aligned}$$

düzgün izdüşüm fonksiyonlarıdır.

$r \times N = \pi^{-1}(r) = \{(r,t) \mid t \in N\}$ ve $M \times s = \{(k,s) \mid k \in M\}$ kümeleri, $M \times N$ çarpım manifoldunun alt manifoldlarıdır.

Tanım 2.5.2. [1] (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları olmak üzere, $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f > 0$ fonksiyonu verilsin. $g = \pi^*(g_M) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_N)$ metrik tensörü ile verilen $M \times N$ çarpım manifolduna $M \times N$ manifoldlarının "warped çarpım manifoldu" denir. $M \times_f N$ ile gösterilir.

2.5.1. Küre

$\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde uzaklık fonksiyonları $r(x) = \mid x \mid$ olmak üzere kutupsal koordinat gösterimine göre $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerindeki metrik

$$g = dr^2 + g_r = dr^2 + r^2 ds_{n-1}^2$$

dir. Burada ds_{n-1}^2, $S^{n-1}(1)$ küresi üzerindeki standart metriktir. $U_r = S^{n-1}(r)$ seviye yüzeyleri üzerindeki indirgenmiş metrik $g = r^2 ds_{n-1}^2$ dir.
r uzaklık fonksiyonunun diferensiyeli ve gradiyenti sırasıyla $dr = \sum \frac{x_i}{r} dx^i$ ve $\partial_r = \frac{1}{r} x^i \partial_i$ olmak üzere, $L_{\partial_r}(g_r)(\partial_r, \partial_r) = 2\langle \nabla_{\partial_r} \partial_r, \partial_r \rangle = 0$ ve $dr(\partial_r) = 2\langle \nabla r, \nabla r \rangle = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2Hess\ r &= L_{\partial_r} g = L_{\partial_r}(dr^2) + L_{\partial_r}(r^2 ds_{n-1}^2) \\ &= L_{\partial_r}(dr)dr + dr L_{\partial_r}(dr) + \partial_r(r^2) ds_{n-1}^2 + r^2 L_{\partial_r}(ds_{n-1}^2) \\ &= 2r ds_{n-1}^2 \\ &= 2\frac{1}{r} g_r \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$Hess\ r = \frac{1}{r} g_r$$

Yani

$$II(X,Y) = g_r(SX,Y) = g_r\left(\frac{1}{r}X, Y\right) = \frac{1}{r} g_r(X,Y)$$

dir.
$\mathbb{R}^n$ uzayının eğriliği 0 olduğundan Teorem 2.4.6 daki tanjant eğrilik denklemlerine göre

$$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} g_r(R^r(X,Y)Z,W) &= II(Y,Z)II(X,W) + II(X,Z)II(Y,W) \\ &= \frac{1}{r^2}\left[g_r(X,Z)g_r(X,W) - g_r(X,Z)g_r(Y,W)\right] \end{aligned}$$

eşitliğine göre

$$R^r(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}\big(g_r(Y,Z)X - g_r(X,Z)Y\big)$$

bulunur. Buna göre

$$R^r(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}\big((X \wedge Y)Z\big)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre $S^{n-1}(r)$ küresi $\mathbb{R}^n$ uzayındaki standart metriğe göre $k = \frac{1}{r^2} = sec\pi$ sabit eğriliğine sahiptir.

$\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında $S^n(r)$ orijin merkezli r yarıçaplı küredir. $S^n(r)$, kesitsel eğriliği $k = \frac{1}{r^2}$ olmak üzere sabit eğrilikli manifolddur. Şimdi $S^n(r)$ küresi üzerindeki rotasyonel simetrik metriğin

$$g = dr^2 + sn_k^2(r)ds_{n-1}^2$$

olarak yazılabileceği gösterilecektir.

$$G(r,q) = (t, p_2, ..., p_n) = (\cos r, (\sin r)q_1, ..., (\sin r)q_n)$$

eşitliğiyle verilen

$$G : (0,\pi) \times S^{n-1}(1) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

dönüşümü bir izometridir. $G(r,q) = (p_1, ..., p_{n+1})$ için,

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \cos r \\ p_2 = \sin(r)q_1 \\ p_3 = \sin(r)q_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ p_n = \sin(r)q_n \end{array}\right\} \qquad (2.5.6)$$

ve

$$q_1^2 + ... + q_n^2 = 1 \tag{2.5.7}$$

olduğundan (2.5.6) ve (2.5.7) eşitlikleri kullanılarak

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{n+1}^2 = 1 \tag{2.5.8}$$

olarak bulunur. (2.5.8) eşitliğine göre G fonksiyonu $(0,\pi) \times S^{n-1}$ çarpım manifoldunun her noktasını $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında birim kürenin noktalarına dönüştürür. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ Öklid uzayı üzerindeki standart(kanonik) metrik

$$can = dt^2 + \sum_{i,j} \delta_{ij} dx_i dx_j$$

olmak üzere bu metrik $G(r,q)$ noktasının $(\cos r, \sin(r)x_1, ..., \sin(r)x_n)$ koordinatlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}
1 &= x_1^2 + ... + x_n^2 \\
0 &= d\big((x_1)^2 + ... + (x_n)^2\big) = 2(x_1 dx^1 + ... + x_n dx^n)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
can &= dt^2 + \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j \\
&= \big[d\cos(r)^2 + \sum_{i,j} \delta_{ij} d\big(\sin(r)x^i\big) d\big(\sin(r)x^j\big)\big] \\
&= \sin(r)^2 dr^2 + \sum_{i,j} \delta_{ij} \big[\big(x^i \cos(r)dr + \sin(r)dx^i\big).\cdot\big(x^j \cos(r)dr + \sin(r)dx^j\big)\big] \\
&= \sin^2(r)dr^2 + \sum_{i,j} \delta_{ij} x^i x^j \cos^2(r)dr^2 + \sum_{i,j} \delta_{ij} x^i \cos(r)\sin(r)drdx^j \\
&\quad + \sum_{i,j} \delta_{ij} x^j \cos(r)\sin(r)dx^i dr + \sum_{i,j} \sin^2(r)dx^i dx^j \\
&= \sin^2(r)dr^2 + \cos^2(r)dr^2 \sum \delta_{ij} x^i x^j + \sin^2(r) \sum \delta_{ij} dx^i dx^j \\
&\quad + \cos(r)\sin(r)dr \sum x^i dx^i + \cos(r)\sin(r)\big(\sum x^i dx^i\big)dr \\
&= dr^2 + \sin^2(r)\big((dx^1)^2 + ... + (dx^n)^2\big) \qquad (2.5.9)
\end{aligned}$$

dır. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerindeki $(dx^1)^2+...+(dx^n)^2$ metrik tensörünün $S^{n-1}(r)$ küresine kısıtlanmışı $(dx^1)^2+...+(dx^n)^2$ olmak üzere,

$$ds^2_{n-1} = (dx_1)^2+...+(dx_n)^2 \tag{2.5.10}$$

dir.

(2.5.9) ve (2.5.10) eşitliklerine göre $S^n(r)$ küresi üzerindeki rotasyonel simetrik metrik

$$can = dr^2+\sin^2(r)ds^2_{n-1} \tag{2.5.11}$$

olarak bulunur.

2.5.2. Rotasyonel Simetrik Metrikler

$(a,b)\times_\varphi S^{n-1}$ warped çarpım manifoldu üzerinde $g = dr^2+\varphi^2 ds^2_{n-1}$ eşitliğiyle verilen rotasyonel simetrik metrik tensörü verilsin. $g_r = \varphi^2 ds^2_{n-1}$ olmak üzere ve ds^2_{n-1}, r değerine bağlı olmadığından,

$$\begin{aligned} 2Hess\, r &= L_{\partial_r} g \\ &= L_{\partial_r}(\varphi^2 ds^2_{n-1}) \\ &= \partial_r(\varphi^2)ds^2_{n-1}+\varphi^2 L_{\partial_r}(ds^2_{n-1}) \\ &= 2\varphi(\partial_r\varphi)ds^2_{n-1} \\ &= 2\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}g_r \end{aligned}$$

olduğundan

$$Hessr = \frac{\partial_r\varphi}{\varphi}g_r$$

dir. Önerme 2.4.8 deki (2) ve (3) eşitliklerine göre

$$\begin{aligned}
L_{\partial_r} Hess\ r &= L_{\partial_r}\left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi} g_r\right) \\
&= \partial_r\left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi} g_r\right) + \frac{\partial_r \varphi}{\varphi} L_{\partial_r}(g_r) \\
&= \frac{(\partial_r^2 \varphi)\varphi - (\partial_r \varphi)^2}{\varphi^2} g_r + 2\left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi}\right)^2 g_r \\
&= \frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r + \left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi}\right)^2 g_r \qquad (2.5.12) \\
&= \frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r + Hess^2 r
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_r} Hess\ r &= \nabla_{\partial_r}\left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi} g_r\right) \\
&= \partial_r\left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi}\right) g_r + \frac{\partial_r \varphi}{\varphi} \nabla_{\partial_r}(g_r) \\
&= \frac{(\partial_r^2 \varphi)\varphi - (\partial_r \varphi)^2}{\varphi^2} g_r \\
&= \frac{\partial_r^2 \varphi}{\phi} g_r - \left(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi}\right)^2 g_r \qquad (2.5.13) \\
&= \frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r - Hess^2 r
\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$Hess\ r = \frac{\partial_r \varphi}{\varphi} g_r$$

ve

$$R(\cdot, \partial_r, \partial_r, \cdot) = -\frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r$$

olarak bulunur.

$$II(X,Y) = g(S(X),Y) = g(Hess\ rX, Y) = g(\nabla_X \partial_r, Y)$$

olmak üzere,

$$\nabla_X \partial_r = \begin{cases} \frac{\partial_r \varphi}{\varphi} X & ; \quad X \in X(S^{n-1}) \\ 0 & ; \quad X = \partial_r \end{cases}$$

$$R(X,\partial_r)\partial_r = \begin{cases} -\frac{\partial_r^2\varphi}{\varphi}X & ; \quad X \in \mathfrak{X}(S^{n-1}) \\ 0 & ; \quad X = \partial_r \end{cases}$$

dır.

Buna göre, $g = dr^2 + \varphi^2(r)ds^2_{n-1}$ metrik tensörü ile verilen bir $M = I \times_\varphi S^{n-1}$ warped çarpım manifoldu üzerindeki Ricci ve Skaler eğrilik aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

g_r, S^{n-1} küresi üzerindeki eğriliği $\frac{1}{\varphi^2}$ olan metrik tensör alanı olmak üzere Teorem 2.4.6 ve Teorem 2.4.7 deki Tanjant ve Normal eğrilik denklemlerine göre,

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)V,W) &= g_r(R^r(X,Y)V,W) - II(Y,V)II(X,W) + II(X,V)II(Y,W) \\ &= \frac{1}{\varphi^2}g_r(X\wedge Y, W\wedge V) - \frac{(\partial_r\varphi)^2}{\varphi^2}g_r(X\wedge Y, W\wedge V) \\ &= \frac{1-(\partial_r\varphi)^2}{\varphi^2}g_r(X\wedge Y, W\wedge V) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_X II &= \nabla_X\left(\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}g_r\right) \\ &= D_X\left(\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}\right)g_r + \frac{\partial_r\varphi}{\varphi}\nabla_X g_r \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(X\wedge Y), V\wedge W) &= R(X\wedge Y, V\wedge W) = R(X,Y,V,W) = g(R(X,Y)V,W) \\ &= \frac{1-(\partial_r\varphi)^2}{\varphi}g_r(X\wedge Y, V\wedge W) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathcal{R}(X\wedge Y) = \frac{1-(\partial_r\varphi)^2}{\varphi^2}X\wedge Y \tag{2.5.14}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca normal eğrilik denklemine göre

$$R(\cdot,\partial_r,\partial_r,\cdot) = -\frac{\partial^2\varphi}{\varphi}g_r$$

olduğundan

$$\mathcal{R}(X\wedge\partial_r)=-\frac{\partial_r^2\phi}{\varphi}(X\wedge\partial_r)=-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}X\wedge\partial_r$$

dir. Buna göre $M=I\times_{\varphi}S^{n-1}$ manifoldunun bütün kesitsel eğrilikleri $\mathcal{R}$ nin köşegenleştirilmesinden dolayı $-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$ ve $\frac{1-\ddot{\varphi}}{\varphi}$ değerleri arasındadır.

Ayrıca $M=I\times_{\varphi}S^{n-1}$ warped çarpım manifoldu ve $E_1=\partial_r$ olacak şekildeki ortonormal $\{E_i\}$ tabanı için Ricci tensörü ve skaler eğriliği aşağıdaki gibi elde edilir. Burada

$$Ricci(X,X)=g(Ricci\,X,X)=\sum_{i=1}g(R(X,E_i,E_i,X))$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
Ricci(X,X) &= \sum_{i=1}^{n}g(R(X,E_i)E_i,X)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}g(R(X,E_i)E_i+R(X,\partial_r)\partial_r,X)\\
&= \frac{1-(\partial_r\varphi)^2}{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left[g_r(X,X)g_r(E_i,E_i)-g_r(E_i,X)g_r(X,E_i)\right]\right)-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}g_r(X,X)\\
&= \frac{1-(\varphi)^2}{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n-1}g_r(X,X)-g_r(X,X)\right)-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}g_r(X,X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$Ricci(X)=\left((n-2)\frac{1-(\partial_r\varphi)^2}{\varphi}-\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}\right)X$$

elde edilir. Ayrıca

$$Ricci(\partial_r,\partial_r)=g(Ricci(\partial_r),\partial_r)=\sum_{i=1}g(R(\partial_r,E_i)E_i,\partial_r)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
Ricci(\partial_r,\partial_r) &= \underbrace{g(R(\partial_r,\partial_r)\partial_r,\partial_r)}_{0}+\sum_{i=1}^{n-1}g(R(\partial_r,E_i)E_i,\partial_r)\\
&= -(n-1)\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}g(\partial_r,\partial_r)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$Ricci(\partial_r) = -(n-1)\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}\partial_r$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} scal &= tr(Ricci) = \sum_{i=1}^{n} g(Ricci(E_i), E_i) \\ &= -(n-1)\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + (n-1)\left((n-2)\frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}\right) \\ &= -2(n-1)\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + (n-1)(n-2)\frac{1-\ddot{\varphi}^2}{\varphi^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.5.3. $g = dr^2 + sn_k^2(r)ds_{n-1}^2$ metrik tensörüyle verilen S_k^n küresi için $\varphi = sn_k = \frac{\sin\sqrt{k}r}{\sqrt{k}}$ fonksiyonu $\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Buna göre $k = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$ dir. Ayrıca $\mathcal{R}(X \wedge \partial_r) = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} X \wedge \partial_r$ eşitliği göz önüne alındığında Lemma 2.3.12 (4) eşitliğine göre $sec(X, \partial_r) = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} = k$ dır.

(2.5.14) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} sec(X,Y) &= g(\mathcal{R}(X \wedge Y), X \wedge Y) \\ &= g\big(\frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} X \wedge Y, X \wedge Y\big) \end{aligned}$$

olduğu biliniyor. Buna göre $k = \frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}$ dir.

$\varphi(r) = sn_k(r) = \frac{\sin\sqrt{k}r}{\sqrt{k}}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \cos(\sqrt{k}r) \\ 1 - \dot{\varphi}^2 &= \sin^2(\sqrt{k}r) = k\varphi^2 \end{aligned}$$

olduğundan $k = \frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}$ olarak bulunur. Yani S_k^n küresi $k = \frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}$ sabit kesitsel eğriliğine sahiptir.

3. MYERS ÇAP TEOREMİ

Synge ve Bonnet sırasıyla 1926 ve 1955 yıllarında complete bir (M,g) Riemann manifoldunun çapıyla ilgili olarak klasik diferensiyel geometrinin en eski teoremlerinden birisi sayılabilecek sonucu elde etmiştir. Buna göre (M,g) complete Riemann manifoldu için $sec \geq k > 0$ olduğunda uzunluğu $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ dan büyük jeodezikler minimize edilemez. Bu teoremin bir sonucu olarak Hopft-Rinow ve Myers sırasıyla 1931 ve 1932 yıllarında, (M,g) tam manifoldu için $sec \geq k > 0$ olduğunda M manifoldunun kompakt olduğunu göstermişlerdir. Bu teoremlerin bir sonucu, Ricci eğrilik tensörünün pozitif olması durumunda 1941 yılında Myers tarafından verilmiştir.

Teorem 3.0.1. *[6] (Myers Çap Teoremi)* (M,g), *Ricci* $\geq (n-1)k > 0$ *olacak şekilde complete Riemann manifoldu olsun. Bu durumda diam* $M \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ *dır.*

Myers çap teoreminin ardından manifoldun çapı maksimum değerine ulaştığında M manifoldu için ne söylenebilir sorusunun bir cevabı olarak 1975 yılında Cheng aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.0.2. *[5]* (M,g) *complete Riemann manifoldu olsun. Ricci* $\geq (n-1)k > 0$ *ve diam* $M = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ *ise M manifoldu* S_k^n *küresine izometriktir.*

Bu teoremin ispatından önce aşağıdaki temel eşitsizlik ispatlanacaktır.

Lemma 3.0.3. *[2]* $\partial_r \Delta r + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq \partial_r \Delta r + |Hessr|^2 = -Ric(\partial_r, \partial_r)$

İspat: $\tilde{e}_i$, M manifoldu üzerinde ortonormal çatı alanı ve $\nabla_{\partial_r} \tilde{e}_i = 0$ olsun. Bu durumda (2.4.8) önermedeki (2) eşitliğinin her iki yanının izi alındığında

$$\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{\partial_r} Hess\ r)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) + \sum_{i=1}^{n} Hess^2\ r(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = -\sum_{i=1}^{n} R(\tilde{e}_i, \partial_r, \partial_r, \tilde{e}_i)$$

olarak elde edilir.

Burada,

$$\sum_{i=1}^{n} R(\tilde{e}_i, \partial_r, \partial_r, \tilde{e}_i) = R(\partial_r, \partial_r)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{\partial_r} Hess\ r)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) &= \sum_{i=1}^{n} \big(\partial_r (Hess\ r(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) - Hess\ r(\nabla_{\partial_r} \tilde{e}_i, \tilde{e}_i) - Hess\ r(\tilde{e}_i, \nabla_{\partial_r} \tilde{e}_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_r (D(D(r))(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_r (D_{\tilde{e}_i}(Dr))(\tilde{e}_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_r \big(D_{\tilde{e}_i}(Dr(\tilde{e}_i)) - (Dr)(D_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_i)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_r (D_{\tilde{e}_i}(dr)\tilde{e}_i))\\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_r (Ddr)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i))\\
&= \partial_r (\Delta r)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Hess^2\ r(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) &= \sum_{i=1} g(Hess\ r^2(\tilde{e}_i), \tilde{e}_i)\\
&= \sum_{i=1} g(Hess\ r(\tilde{e}_i), Hess\ r(\tilde{e}_i))\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\tilde{e}_i} \partial_r, \nabla_{\tilde{e}_i} \partial_r)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g(\nabla_{\tilde{e}_i} \partial_r, \tilde{e}_j) g(\nabla_{\tilde{e}_i} \partial_r, \tilde{e}_j)\\
&= \sum_{i,j=1} Hess\ r(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) Hess\ r(\tilde{e}_j, \tilde{e}_i)\\
&= |\ Hess\ r\ |^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\partial_r \Delta_r + |Hess\ r|^2 = -Ricci(\partial_r, \partial_r) \tag{3.0.1}$$

dir. Buna göre Lemma 3.0.3 deki eşitsizliğin ispatı için

$$\frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq \mid Hess\ r \mid^2$$

olduğu gösterilmelidir. $(0,2)$ tipinde simetrik $Hess\ r$ tensör alanına karşılık gelen matris, $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki A matrisi olmak üzere Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre,

$$\mid \langle A, I_{n-1} \rangle \mid^2 \leq \parallel A \parallel^2 \parallel I_{n-1} \parallel^2 = \parallel A \parallel^2 (n-1)$$

yazılabilir. Buna göre, $\tilde{e_1} = \partial_r$ için

$$\begin{aligned} |Hess\ r|^2 &= \sum_{i,j=1} (g(\nabla_{\tilde{e_i}} \partial_r, \tilde{e_j}))^2 \\ &= \sum_{i,j=2} (g(\nabla_{\tilde{e_i}} \partial_r, \tilde{e_j}))^2 \\ &\geq \frac{1}{n-1} \big(\sum_{i=2} g(\nabla_{\tilde{e_i}} \partial_r, \tilde{e_j}) \big)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} (\Delta r)^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Lemma 3.0.4. *[2] (M,g), n-boyutlu Ricci $\geq (n-1)k$ olacak şekilde Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $v(n,k,r)$ sayısı sabit eğrilikli S_k^n uzay formunda, r yarıçaplı yuvarın hacmi olmak üzere*

$$volB(p,r) \leq v(n,k,r)$$

dir.

Lemma 3.0.5. *[2] (M,g), n-boyutlu Riemann manifoldu için*
Ricci $\geq (n-1)k$ olsun. Bu durumda

$$\Delta r \leq (n-1) \frac{\sin_k'(r)}{\sin_k(r)}$$

dir.

3.1. Teorem 3.0.2'nin İspatı

İspat: $diamM = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğundan M manifoldu üzerinde aralarındaki uzaklık maksimum olacak şekilde p ve q noktaları göz önüne alınsın. Bu p ve q noktaları için,

$$r : \mathrm{U} \to \mathbb{R},\ \ r(a) = d(a,s)\ \ ve\ \ \tilde{r} : \mathrm{V} \to \mathbb{R},\ \ \tilde{r}(a) = d(a,t)$$

eşitlikleriyle verilen diferensiyellenebilir uzaklık fonksiyonları tanımlansın.
(M,g) manifoldunun S_k^n küresine izometrik olması için $d(s,t)$ sayısı çap olduğundan,

$$r + \tilde{r} = d(a,s) + d(a,t) = d(s,t) = \frac{\pi}{\sqrt{k}},\ \ x \in M \tag{3.1.2}$$

ve $g = dr^2 + sn_k^2(r)ds_{n-1}^2$ olmak üzere $Hess\ r = \frac{\sin_k'(r)}{\sin_k(r)} g_r$ olduğu gösterilmelidir.

$$r(a) + \tilde{r}(a) = d(a,s) + d(a,t) \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda

$$d(a,s) + d(a,t) = 2\varepsilon + \frac{\pi}{\sqrt{k}} = 2\varepsilon + d(s,t)$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ reel sayısı vardır.
$r_1 \leq d(s,a),\ \ r_2 \leq (t,a)$ ve $r_1 + r_2 = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğundan $B(s,r_1),\ \ B(t,r_2)$ ve $B(a,\varepsilon)$ yuvarları ayrıktırlar. Buna göre $v(n,k,r)$ sayısı r yarıçaplı yuvarın S_k^n küresindeki ve Lemma 3.0.4 deki eşitsizlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} 1 = \frac{volM}{volM} \ &\geq\ \frac{volB(a,\varepsilon) + volB(s,r_1) + volB(t,r_2)}{volM} \\ &\geq\ \frac{v(n,k,\varepsilon)}{v(n,k,\frac{\pi}{\sqrt{k}})} + \frac{v(n,k,r_1)}{v(n,k,\frac{\pi}{\sqrt{k}})} + \frac{v(v,k,r_2)}{v(n,k,\frac{\pi}{\sqrt{k}})} \\ &=\ \frac{v(n,k,\varepsilon)}{v(n,k,\frac{\pi}{\sqrt{k}})} + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani
$r(a) + \tilde{r}(a) = d(s,a) + d(t,a) = d(s,t) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olmalıdır.

$r(a) + \tilde{r}(a) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğundan $\Delta r = -\Delta\tilde{r}$ dır. Lemma 3.0.5 deki eşitsizlik kullanıldığında

$$\begin{aligned}
(n-1)\frac{\sin_k'\left(r(a)\right)}{\sin_k\left(r(a)\right)} &\geq \Delta r(a) \\
&= -\Delta\tilde{r}(a) \\
&\geq -(n-1)\frac{\sin_k'\left(\tilde{r}(a)\right)}{\sin_k\left(\tilde{r}(a)\right)} \\
&= -(n-1)\frac{\sin_k'\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - r(a)\right)}{\sin_k\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - r(a)\right)} \\
&= (n-1)\frac{\sin_k'\left(r(a)\right)}{\sin_k\left(r(a)\right)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Delta r = (n-1)\frac{\sin_k' r}{\sin_k r}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\partial_r(\Delta r) &= (n-1)\partial_r\left(\frac{\sin_k'}{\sin_k}\right) = (n-1)\partial_r\left(\frac{\sqrt{k}\cos\sqrt{k}r}{\sin\sqrt{k}r}\right) \\
&= (n-1)\sqrt{k}\left(\frac{-\sqrt{k}\sin^2\sqrt{k}r - \cos^2\sqrt{k}r}{\sin^2\sqrt{k}r}\right) \\
&= -k(n-1)\frac{1}{\sin^2\sqrt{k}r} \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

$$(\Delta r)^2 = (n-1)^2\left(\frac{\sin_k' r}{\sin_k r}\right)^2 = (n-1)^2\left(\frac{\cos^2\sqrt{k}r}{\sin^2\sqrt{k}r}\right)\cdot k \qquad (3.1.4)$$

(3.1.3) ve (3.1.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\partial_r(\Delta r) + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} &= -k(n-1)\frac{1}{\sin^2\sqrt{k}r} + (n-1)k\frac{\cos^2\sqrt{k}r}{\sin^2\sqrt{k}r} \\
&= -(n-1)k
\end{aligned}$$

olduğundan

$$-(n-1)k = \partial_r(\Delta r) + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \qquad (3.1.5)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ve lemma 3.0.3 deki eşitsizlik kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
-(n-1)k &= \partial_r(\Delta r) + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \\
&\leq \partial_r \Delta r + |Hess\ r|^2 \\
&\leq -Ricci(\partial_r, \partial_r) \\
&\leq -(n-1)k
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buna göre yukarıdaki eşitsizliklerin hepsi eşitliktir. Yani,

$$(\Delta r)^2 = (n-1)|Hess\ r|^2 \tag{3.1.6}$$

dir. Bu eşitlik Cauchy-Schwarz eşitsizliğindeki eşitlik durumuna göre yazıldığında A simetrik $(0,2)$ tipinde tensör alanı olmak üzere aynı zamanda $|\,A\,|^2 \leq k(trA)^2$ dir. Buradan $A = \frac{trA}{k} I_k$ olduğu görülebilir. $A = Hess\ r$ için,

$$Hess\ r = \frac{\Delta r}{n-1} g_r = \frac{\sin_k' r}{\sin_k r} g_r$$

olarak elde edilir. □

4. BARKY-EMERY RİCCİ EĞRİLİK TENSÖRÜ İLE VERİLEN BİR M MANİFOLDU ÜZERİNDE RİGİDİTİ TEOREMİ

D.Bakry-M. Ledoux [7] 1996 yılında ve Z.Qian 1997 [8] yılında birbirlerinden bağımsız olarak Myers teoremindeki Ric tensörü yerine $h : M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $m \geq n,\ n \geq 2$ olmak üzere,

$$\widetilde{Ricci} = Ricci - \nabla\nabla h - \frac{1}{m-n}\nabla h \otimes \nabla h$$

eşitliğiyle verilen ve kendi isimleriyle anılan Bakry-Emery $\widetilde{Ricci}$ tensörü için (M,g) tam, bağlantılı Riemann manifoldu $\widetilde{Ricci} \geq (m-n)kg,\ \ k > 0$ olduğundan (M,g) manifoldunun kompakt ve $diam\ M = D \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğunu ispatlamıştır.

Bu bölümde öncelikle Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörünün warped çarpım manifoldlarıyla ilgisi verilerek temel tanım ve teoremlerden sonra 2009 yılında Qi-Hua Ruan [3] tarafından verilen "Bakry-Emery Ricci tensörü ile verilen Riemann manifoldları için Rigiditi Teoremleri" isimli çalışmasında yer alan aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.0.1. *[3] (M,g), $n \geq 2$ boyutlu tam,bağlantılı Riemann manifoldu olmak üzere $m \geq n,\ \ k > 0$*

$$\widetilde{Ricci} = Ricci - \nabla\nabla h - \frac{1}{m-n}\nabla h \otimes \nabla h \geq (m-1)kg > 0$$

ve $D = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ ise (M,g) manifoldu S_k^n küresine izometriktir. Ayrıca r, S_k^n küresi üzerindeki uzaklık fonksiyonu olmak üzere, $a \in M$ için

$$h(a) = (m-n)\ln\frac{\sin(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}}$$

dır.

Tanım 4.0.2. (M,g), $n \geq 2$ boyutlu Riemann manifoldu $h : M \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyon $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\widetilde{Ricci} = Ricci - \nabla^2 h - \frac{1}{m-n} dh \otimes dh = \lambda g \tag{4.0.1}$$

ise (M,g) manifolduna "$(m-n)$ quasi Einstein manifoldu" denir.

(M^n, g_N) ve (F^{m-n}, g_F) Riemann manifoldları $h : M \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon, $u = e^{\frac{h}{m-n}}$ fonksiyonu için warped çarpım metriği

$$g = g_M + u^2 g_F$$

olmak üzere $N = M^n \times_u F^{m-n}$ warped çarpım manifoldu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} u = e^{\frac{h}{m-n}} \quad & \Rightarrow \quad \ln u = \frac{h}{m-n} \\ & \Rightarrow \quad \frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla h}{m-n} \\ & \Rightarrow \quad \nabla u = \frac{u}{m-n} \nabla h \end{aligned}$$

dır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{m-n} \left(\nabla u \otimes \nabla h + u \nabla^2 h \right) \\ &= \frac{1}{m-n} \left(\frac{u}{m-n} \nabla h \otimes \nabla h + u \nabla^2 h \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla^2 u = \frac{u}{(m-n)^2} \nabla h \otimes \nabla h + \frac{u}{m-n} \nabla^2 h$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $-\frac{(m-n)}{u}$ ile çarpıldığında

$$-\frac{(m-n)}{u} \nabla^2 u = -\frac{1}{(m-n)} \nabla h \otimes \nabla h - \nabla^2 h \tag{4.0.2}$$

eşitliği elde edilir. (4.0.2) eşitliği (4.0.1) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$Ricci_M - \frac{m-n}{u} \nabla^2 u = \lambda g_M \tag{4.0.3}$$

olarak bulunur.

Önerme 4.0.3. *[1] boy$M=n$, boy$F=m-n$ olacak şekilde (M,g_M) ve (F,g_F) Riemann manifoldları ve $N=M^n\times_u F^{m-n}$, $g=g_M+u^2g_F$ metrik tensörü ile verilen warped çarpım manifoldu olsun. Her $X,Y\in L(M)$ ve her $V,W\in L(F)$ için aşağıdaki önermeler sağlanır.*

1) $Ricci_F(X,Y)=Ricci_M(X,Y)-\frac{m-n}{u}\nabla^2u(X,Y)$

2) $Ricci_F(X,V)=0$

3) $Ricci_F(V,W)=Ricci_F(V,W)-g_F(V,W)\left(-\frac{\Delta u}{u}+\frac{m-n-1}{u^2}g_M(\nabla u,\nabla u)\right)$

Sonuç 4.0.4. *[4] $N=M^n\times_u F^{m-n}$ warped çarpım manifoldunun $Ricci_N=\lambda g_N$ olması için gerek ve yeter koşul*

1) $Ricci_M=\lambda g_M+\frac{m-n}{u}\nabla^2u$

2) (F^{m-n},g_F) *manifoldu* $Ricci_F=\mu g_F$ *olacak şekilde Einstein manifoldudur.*

3) $-u\Delta u+(m-n-1)\mid\nabla u\mid^2+\lambda u^2=\mu$

Bu sonuçtan yararlanarak $(m-n)$ quasi Einstein manifoldunun $N=M^n\times_u F^{m-n}$ warped çarpım manifoldunun taban manifoldu olduğu görülür.

4.0.1 Teoreminin warped çarpımıyla ilgisini veren sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.0.5. *[3] (M,g), $n\geq 2$ boyutlu tam,bağlantılı Riemann manifoldu için Bakry-Emery Ricci eğrilik tensörü $\widetilde{Ricci}\geq(m-1)kg>0$, $m\geq n$ ve $D=\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğunda $N=M^n\times_{e^{\frac{h}{m-n}}}S_k^{m-n}$ olduğunda $N=S_k^n\times_{\frac{1}{\sqrt{k}}(\sin\sqrt{k}r)}S_k^{m-n}$ dır.*

M manifoldunda p merkezli r yarıçaplı yuvarın hacmi ve $v(m,k,r)$, k sabit eğrilikli M_k^m uzay formunda r yarıçaplı k merkezli yuvarın hacmini ve w_{n-1}, $k>0$ için $sn_k(r)=\frac{\sin\sqrt{k}r}{\sqrt{k}}$, $k=0$, $sn_k(r)=r$ ve $k<0$ için $sn_k(r)=\frac{\sin\sqrt{k}r}{\sqrt{k}}$ olsun. Bu durumda 4.0.1 teoreminin ispatına geçmeden önce son olarak aşağıdaki lemmalar verilmiştir.

Lemma 4.0.6. *[8] (M,g), $n\geq 2$ boyutlu tam,bağlantılı Riemann manifoldu, $h:M\to\mathbb{R}$ düzgün fonksiyon $m\geq n$ olmak üzere Bakr-Emery Ricci eğrilik tensörü* *için* $\widetilde{Ricci} \geq (m-1)kg$ *olsun. Bu durumda,* $L = \Delta + \langle \nabla h, \nabla \rangle$, $r(x)$ *M manifoldu üzerinde sabit bir p ve q noktasındaki uzaklık fonksiyonu olmak üzere,*

$$Lr(x) \leq (m-1)\frac{\sin_k'}{\sin_k}$$

dır.

Lemma 4.0.7. *[8]* (M,g), *n boyutlu tam,bağlantılı Riemann manifoldu* $m \geq n$, $\widetilde{Ricci} \geq (m-1)kg$ *olsun. Bu durumda*

$$r \to \frac{vol_h(B(p,r))}{v(m,k,r)}$$

artmayan fonksiyondur. Eğer $\lim_{r\to 0} \frac{e^{h(x)}}{e^{m-n}} = 1$ *ise bu durumda,*

$$\lim_{r\to 0} \frac{vol_h(B(p,r))}{v(m,k,r)} = \frac{w_{n-1}}{w_{m-1}} \tag{4.0.4}$$

dir.

4.1. Teorem 4.0.1'in İspatı

İspat: $d(s,t) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olacak şekilde M manifoldu üzerinde sabit s ve t noktaları verilsin. $a \in M$ noktası için düzgün $r(a) = d(a,s)$ ve $\tilde{r}(a) = d(a,t)$ olmak üzere

$$r(a) + \tilde{r}(a) = d(s,t) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \ \forall a \in M \tag{4.1.5}$$

eşitliği sağlanmaktadır. 4.1.5 eşitliğinin doğru olduğunu göstermek için olmayana ergi yöntemi kullanıldığında yani $d(a,s) + d(a,t) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğunda

$$d(a,s) + d(a,t) = \frac{\pi}{\sqrt{k}} + 2\varepsilon = d(s,t) + 2\varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $r_1 \leq d(a,s)$, $r_2 \leq d(a,t)$ ve $r_1 + r_2 = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olacak şekilde elde edilir. r_1 ve r_2 sayıları için elde edilen

$B(s,r_1)$, $B(t,r_2)$ ve $B(a,\varepsilon)$ yuvarlarının merkezleri aynı doğru üzerinde değildir. Buradan Lemma 4.0.7 den

$$\begin{aligned}
1=\frac{vol_h(M)}{vol_h(M)} &\geq \frac{vol_h(B(a,\varepsilon))+vol_h(B(s,r_1))+vol_h(B(t,r_2))}{vol_h(M)}\\
&\geq \frac{v(m,k,\varepsilon)+v(m,k,r_1)+v(m,k,r_2)}{v(m,k,\frac{\pi}{\sqrt{k}})}\\
&= \frac{v(m,k,\varepsilon)}{v(m,k,\frac{\pi}{\sqrt{k}})}+1
\end{aligned}$$

olduğundan $r(a)+\tilde{r}(a)=d(a,s)+d(a,t)\geq\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ eşitliğinin kabulü ile bir çelişkidir. Buna göre

$$r(a)+\tilde{r}(a)=\frac{\pi}{\sqrt{k}} \tag{4.1.6}$$

olmalıdır. İkinci olarak (4.1.6) eşitliği ve Lemma 4.0.6 kullanılarak

$$Hess\ r=\frac{\sin_k^{'}(r)}{\sin_k(r)}ds_{n-1}^2 \tag{4.1.7}$$

eşitliğini sağlandığı gösterilebilir. Bunun için (4.1.6) eşitliğinden $r(a)+\tilde{r}(a)=\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ olduğundan $Lr=-L\tilde{r}$ dir. Lemma 4.0.6 dan

$$\begin{aligned}
(m-1)\frac{\sin_k^{'}(r(a))}{\sin_k(r(a))}\geq Lr(a)=-L\tilde{r}(a) &\geq -(m-1)\frac{\sin_k^{'}(\tilde{r}(a))}{\sin_k(\tilde{r}(a))}\\
&= -(m-1)\frac{\sin_k^{'}\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}-r(a)\right)}{\sin_k\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}-r(a)\right)}\\
&= (m-1)\frac{\sin_k^{'}(r(a))}{\sin_k(r(a))}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$Lr=(m-1)\frac{\sin_k^{'}(r)}{\sin_k(r)} \tag{4.1.8}$$

olarak elde edilir. (3.0.1) eşitliğine göre

$$\partial_r\Delta r+\mid Hess\ r\mid^2=-Ricci(\partial_r,\partial_r)$$

olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
-(m-1)k &= \partial_r Lr + \frac{1}{m-1}(Lr)^2 \\
&= \partial_r(\Delta r + \langle \nabla h, \nabla r\rangle) + \frac{1}{m-1}\big(\Delta r + \langle \nabla h, \nabla r\rangle\big)^2 \\
&= \partial_r \Delta r + \partial_r\big(\partial_r(h)\big) + \frac{1}{m-1}\big(\Delta r + \partial_r h\big)^2 \\
&\leq \partial_r \Delta r + \partial_r^2 h + \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2 + \frac{1}{m-n}(\partial_r h)^2 \\
&\leq \partial_r \Delta r + \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2 + \partial_r^2 h + \frac{1}{m-n}(\partial_r h)^2 \\
&\leq \partial_r \Delta_r + |Hess\ r|^2 + \partial_r^2 h + \frac{1}{m-n}(\partial_r h)^2 \\
&= -Ricci(\partial_r, \partial_r) + \partial_r^2 h + \frac{1}{m-n}(\partial_r h)^2 \\
&= -\widetilde{Ricci}(\partial_r, \partial_r) \\
&\leq -(m-1)k
\end{aligned}$$

dır. Buna göre yukarıdaki eşitsizliklerin hepsi eşitliktir.

$$\frac{1}{m-1}(Lr)^2 = \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2 + \frac{1}{m-n}(\partial_r h)^2$$

ve

$$|\ Hess\ r\ |^2 = \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre,

$$\frac{\Delta r}{n-1} = \frac{\partial_r h}{m-n} = \frac{Lr}{m-1} \tag{4.1.9}$$

ve

$$\begin{aligned}
Hess\ r = \frac{\Delta r}{n-1} g_r &= \frac{Lr}{m-1} g_r \\
&= \frac{\sin_k'(r)}{\sin_k(r)} ds_{n-1}^2
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olarak bulunur.

X_i, $\ i = 1, \ldots, n-1$ $\ Hess\ r$ nin r ye göre ortonormal öz vektörleri olsun. Yani

(4.1.10) eşitliğine göre

$$\nabla_{X_i}\frac{\partial}{\partial_r} = \sqrt{k}\cot\sqrt{k}r \cdot X_i$$

olarak bulunur. X_i ortonormal vektörleri $\left[X_i, \frac{\partial}{\partial_r}\right] = 0$ olacak şekilde genişletildiğinde, M manifoldunun kesitsel eğriliği

$$\begin{aligned}
Sec\left(X_i, \frac{\partial}{\partial_r}\right) &= -\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial_r}} \nabla_{X_i}\frac{\partial}{\partial_r}, X_i\rangle \\
&= -\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial_r}} (\sqrt{k}\cot\sqrt{k}r) X_i, X_i\rangle \\
&= k\csc^2\sqrt{k}r - \sqrt{k}\cot\sqrt{k}r\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial_r}} X_i, X_i\rangle \\
&= k\csc^2\sqrt{k}r - \sqrt{k}\cot\sqrt{k}r\langle \nabla_{X_i}\frac{\partial}{\partial_r}, X_i\rangle \\
&= k\csc^2\sqrt{k}r - (\sqrt{k}\cot\sqrt{k}r)^2 = k
\end{aligned}$$

dır. (4.1.8) ve (4.1.9) eşitliklerinden

$$h(a) = (m-n)\ln\frac{\sin(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}}$$

olarak bulunur. $\square$

KAYNAKLAR

[1] O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Application to Relativity. Academic Press, London.

[2] Petersen, P. 1998. Riemannian Geometry. Springer, 401, New York.

[3] Ruan, Qi-Hua. 2009. Two Rigidity theorems on manifolds with Bakry-Emery Ricci curvature. Proc. Japan Academy 85, Ser A, 71-74, China.

[4] Dong-Soo, K. and Young-Ho, K. 2003. Y.H. Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature. Proceedings Of The American Mathematical Society 131, 2573-2576, Korea.

[5] Cheng, S.Y. 1975. Eigenvalue comparision theorems and its geometric applications. Math Z.**143**, 289-297.

[6] Myers, S.B. 1935. Connections between differential geometry and topology I.Simply connected surfaces National Academy of Sciences, 225-227, United States of America.

[7] Bakry, D. and Ledoux, M. 1996. Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator. Duke Mathematical Journal, 253-270, France.

[8] Qian, Z. 1997. Estimates for weighted volumes and applications. J. Math. Oxford Ser. (2), 235-242, China.

[9] Boothby, William M., 1986 An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Second edition.Pure and Applied Mathematics, 120. Academic Press, Inc., 199-205, Orlando.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Çağrı ÜSTEK
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Turgutlu 05.06.1995

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI :

-Diğer :

b) Bildiriler

-Uluslararası :

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	cagri.ustek@outlook.com
Tarih	:	07.02.2020