T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-YL-032

NEUTRİX'İN BETA FONKSİYONUNA OLAN UYGULAMALARI

Burçin YAMEN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. İnci EGE

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Tez çalışmasında hazırlanan bütün bilgilerin, tarafımdan elde edildiğini, tezde şahsıma ait olmayan bütün fikir, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralları doğrultusunda eksiksiz ve uygun bir şekilde atıf yaptığımı bildiririm.

18.06.2020

Burçin YAMEN

ÖZET

NEUTRİX'İN BETA FONKSİYONUNA OLAN UYGULAMALARI

Burçin YAMEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. İnci EGE
2020, 35 sayfa

Bu tezin amacı beta fonksiyonu ve kısmi türevlerinin tanım kümelerini tüm gerçel sayılar kümesine genişletmek ve bu fonksiyonlar üzerinde bazı sonuçlar elde etmektir. Bunlar için Van der Carput tarafından geliştirilen neutrix kalkülüs kullanılmıştır.
Tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünün ardından ikinci bölümde, gama fonksiyonu, beta fonksiyonu ve kısmi türevleri, bazı özellikleri ile verilmiştir. Ayrıca neutrix ve neutrix limit kavramları örnekleriyle verilmiştir.
Üçüncü bölümde, beta fonksiyonu $B(\eta,\theta)$'nin ve kısmi türevlerinin tanımı tüm η,θ gerçel değerleri için neutrix kavramı kullanılarak verilmiştir.
Son bölümde ise, η ve θ'nın negatif tamsayı olması durumunda beta fonksiyonu $B(\eta,\theta)$ ve kısmi türevleri için elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler
Neutrix, neutrix limit, beta fonksiyonu, gama fonksiyonu

ABSTRACT

APPLICATIONS OF NEUTRIX TO THE BETA FUNCTION

Burçin YAMEN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. İnci EGE
2020, 35 pages

The objective of this thesis is to extend the domains of the beta function and its partial derivatives for all real numbers to get some results on these functions. For these purpose, neutrix calculus developed by Van der Carput, have been used.
The thesis consist of four chapters. In the second section after introduction, gamma function, beta function and its partial derivatives are given with some properties. Also, the concepts of neutrix and neutrix limit are given with examples.
In the third chapter, the definition of the beta function $B(\eta,\theta)$ and its partial derivatives have been given for all real values of η and θ, by using the concept of neutrix and neutrix limit.
In the last section, some results are given for the beta function $B(\eta,\theta)$ and its partial derivatives for negative integer values of η and θ.

Key Words
Neutrix, neutrix limit, beta function, gamma function

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen, sadece akademik anlamda değil, hayatımın en önemli ve zor zamanlarında bile bana hep destek olup bu çalışmada başarılı olabileceğime inanarak beni cesaretlendiren, beni sadece bir öğrenci olarak değil aynı zamanda ailesinin bir parçası gibi görüp bana her zaman destek olan danışman hocam sayın Prof. Dr. İnci EGE'ye en içten ve yürekten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca benden yardımlarını esirgemeyen sayın Dr. Emrah YILDIRIM'a,

Eğitimim boyunca her zaman ve her koşulda benim yanımda olan ve benden yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sevgili arkadaşım Emine ÇAKMAKÇI ve eşi Fatih ÇAKMAKÇI'ya,

Bütün hayatım boyunca maddi, manevi beni hep destekleyen, aldığım kararlara her zaman saygı duyan ve yalnızca arkamda değil aynı zamanda hep yanımda olarak bana güç veren canım ailem Ekrem ŞAHİN, Tennur ŞAHİN VE Burak ŞAHİN'e,

Çalışma süresince bana karşı göstermiş olduğu sevgi, saygı, sabır ve anlayıştan ötürü sevgili eşim Uğur YAMEN ve Ailesi'ne,
Hayatıma girdikleri andan itibaren bana çok güzel duygular yaşatan, çalışma azmi vererek beni güçlendiren canım oğullarım BİLGE ALP ve UMUT YAMEN'e kalpten teşekkür ederim.

Burçin YAMEN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathscr{N}$	Neutrix
$\Gamma(\eta)$	Gamma fonksiyonu
$B(\eta,\theta)$	Beta fonksiyonu
$B_{a,b}(\eta,\theta)$	Beta fonksiyonunun kısmi türevleri
$\zeta(\eta)$	Zeta fonksiyonu
$\phi(\eta)$	Phi fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\square$	İspatın bittiğini gösteren simge

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonlar arasında oldukça geniş bir yere sahip olan ve

$$\int_0^1 t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}dt$$

integrali ile tanımlanan beta fonksiyonu $B(\eta,\theta)$ ilk olarak Euler ve Legendre tarafından çalışılmış ve adı Jacgues Binot tarafından verilmiştir [3,4,5,15,17].

I. tip Euler integrali olarak da bilinen beta fonksiyonu, k!=1.2...k faktoriyel fonksiyonunun tanım kümesini tüm gerçel sayılara genişletebilme çalışmalarının bir sonucu olarak elde edilen ve

$$\int_0^\infty t^{\eta-1}e^{-t}dt$$

integrali ile tanımlanan gama fonksiyonu $\Gamma(\eta)$ ile ilişkisi nedeniyle de analizde oldukça önemlidir [1,3,4]. Gama fonksiyonunun özel bir kombinasyonu olması sebebiyle, gama fonksiyonu için geçerli uygulamaların pek çoğu beta fonksiyonu için de geçerlidir.

Bu tezde $B(\eta,\theta)$ fonksiyonunun ve kısmi türevlerinin tanımı tüm η,θ gerçel değerleri için neutrix kavramı kullanılarak verilecek ve ardından η ve θ'nin negatif tamsayı olması durumunda elde edilen bazı sonuçlar incelenecektir.

Değeri sonsuz olan bir integralden uygun bir biçimde tanımlanan ıraksak parçanın ihmal edilerek sonlu bir parça elde edilmesi metodu ilk olarak J. Hadamard tarafından verilmiştir [14]. Bu yöntem Van der Carput tarafından geliştirilen neutrix kalkülüs'ün bir uygulaması olarak düşünülebilir [6]. Fisher, neutrix kavramını kullanarak bazı özel fonksiyonların daha geniş bir küme üzerinde nasıl tanımlanabileceğini vermiştir [7,8,9,10,11,12].

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

2.1. Gama Fonksiyonu $\Gamma(\eta)$

Gama fonksiyonu $\Gamma(\eta)$, $\eta > 0$ gerçel değerleri için

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty t^{\eta-1} e^{-t} dt \tag{2.1.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlıdır [1,2,3,4,17].

(2.1.1) eşitliğinde kısmi integral kullanılarak

$$\Gamma(\eta+1) = \eta\Gamma(\eta) \tag{2.1.2}$$

eşitliği elde edilir. $\Gamma(1) = 1$ olduğundan $\eta = k \in \mathbb{Z}^+$ alınırsa $\Gamma(k+1) = k!$ olur.

(2.1.2) eşitliği $\Gamma(\eta)$ fonksiyonunu η'nın negatif tamsayı olmayan değerlerinde tanımlamak için de kullanılmıştır.

Böylece $k = 1, 2, ...$ olmak üzere $-k < \eta < -k+1$ değerleri için

$$\Gamma(\eta) = \frac{\Gamma(\eta+k)}{\Gamma(\eta+1)\Gamma(\eta+2)...\Gamma(\eta+k-1)}$$

eşitliği yazılabilir [4,5,15].

2.2. Beta Fonksiyonu $B(\eta,\theta)$

Beta fonksiyonu $B(\eta,\theta)$, $\eta,\theta > 0$ gerçel değerleri için

$$B(\eta,\theta) = \int_0^1 t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1} dt \tag{2.2.3}$$

integrali ile tanımlıdır [3,4,15].

(2.2.3) eşitliğinde $t = 1-u$ dönüşümü yapılırsa

$$B(\eta,\theta) = B(\theta,\eta)$$

eşitliği yani beta fonksiyonunun simetri özelliği elde edilir.

Beta fonksiyonunun gama fonksiyonu ile ifadesi

$$B(\eta,\theta) = \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\theta)}{\Gamma(\eta+\theta)} \tag{2.2.4}$$

biçimindedir. Beta fonksiyonunun tanımını kullanarak örneğin $B(8,9)$ değeri hesaplanmak istenirse

$$B(8,9)=\int_0^1 t^7(1-t)^8dt$$

integralini çözmemiz gerekir. Bu son integral yerine (2.2.4) eşitliği kullanılarak kolaylıkla

$$B(8,9)=\frac{7!8!}{15!}=0,0001554001554$$

elde edilir.

Gel'fand ve Shilov integralin düzenlenmesi (regülarizasyon) tekniğini kullanarak $B(\eta,\theta)$ fonksiyonunu $\eta>-p$, $\theta>-q$, $\eta\neq 0,-1,...,-p+1$ ve $\theta\neq 0,-1,...,-q+1$ gerçel değerleri için

$$\begin{aligned}
B(\eta,\theta) &= \int_0^{1/2} t^{\eta-1}\left[(1-t)^{\theta-1}-\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^m\Gamma(\theta)}{m!\Gamma(\theta-m)}t^m\right]dt\\
&+ \sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^m\Gamma(\theta)}{m!2^{\eta+m}\Gamma(\theta-m)(\eta+m)}\\
&+ \int_{1/2}^{1}(1-t)^{\theta-1}\left[t^{\eta-1}-\sum_{m=0}^{q-1}\frac{(-1)^m\Gamma(\eta)}{m!\Gamma(\eta-m)}(1-t)^m\right]dt\\
&+ \sum_{m=0}^{q-1}\frac{(-1)^m\Gamma(\eta)}{m!2^{\theta+m}\Gamma(\eta-m)(\theta+m)}
\end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlamışlardır [13].

2.3. Neutrix ve Neutrix Limit

Bu bölümde Van der Carput tarafından geliştirilen neutrix ve neutrix limit tanımları örnekleriyle birlikte verilmiştir.

Tanım 2.1. [6] $T\neq\emptyset$ bir küme ve D toplamsal değişmeli grubu olmak üzere $g: T\to D$ biçiminde tanımlı fonksiyonlardan oluşan toplamsal değişmeli grup $\mathcal{N}$ olsun. $\mathcal{N}$'deki tek sabit fonksiyon sıfır ise, $\mathcal{N}$ kümesi "*neutrix*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{N}$ içindeki fonksiyonlara "*ihmal edilebilir fonksiyonlar*" denir.

Böylece $g\in N$ ve $\forall\xi\in T$ için $g(\xi)=\upsilon$ sabit ise $\upsilon=0$'dır.

Örnek 2.2. Tanım kümesi $T = [0,1]$ kapalı aralığı ve $\mathcal{N}$ kümesi, α keyfi sabit olmak üzere T üzerinde tanımlı $\alpha \cos 2\pi\xi$ biçimindeki fonksiyonlardan oluşan toplamsal değişmeli bir grup olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir. Çünkü;
$\alpha \cos 2\pi\xi = \upsilon$ (sabit) ise $\alpha = 0$ ve böylece $\upsilon = 0$ olur.

Tanım 2.3. [6] T, X topolojik uzayının bir alt uzayı ve $a \notin T$ bu kümenin bir limit noktası olsun. D gerçel (veya kompleks) sayılar kümesi ve $\mathcal{N}$ kümesi, $g : T \to D$ olan ve $\lim_{\xi \to a} g(\xi) = l$ iken $l = 0$ şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli bir grup olsun. O halde $\mathcal{N}$ kümesi bir neutrixtir.
$g(\xi)$ fonksiyonu, T üzerinde tanımlanan gerçel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $g(\xi) - c$, $\mathcal{N}$ nin elemanı olacak şekilde bir c gerçel sayısı bulunabiliyorsa c sayısına $g(\xi)$ fonksiyonunun "*neutrix limiti*" denir ve

$$\mathcal{N} - \lim_{\xi \to b} g(\xi) = c$$

şeklinde yazılır.

Not 2.4. i) Eğer c neutrix limiti varsa tektir. Gerçekten; eğer $g(\xi) - c_1 \in \mathcal{N}$ ve $g(\xi) - c_2 \in \mathcal{N}$ ise $\mathcal{N}$ toplamsal değişmeli grup olduğundan $c_1 - c_2 \in \mathcal{N}$ ve böylece $c_1 = c_2$ bulunur.

ii) $\mathcal{N}$ neutrixi $\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = 0$ koşulunu sağlayan g fonksiyonlarını içersin. O zaman, g fonksiyonunun normal limiti varsa neutrix limiti de vardır ve bu iki değer aynıdır.

iii) Neutrix limit eğer düzgün bir şekilde tanımlanırsa her zaman vardır.

iv) Neutrix limit seçilen neutrixe bağlıdır.

Örnek 2.5. $\mathcal{N}$, tanım kümesi $T = (0,1)$ açık aralığı, değer kümesi $D = \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha \log^2 \frac{1}{\xi} + \beta \log \frac{1}{\xi} + o(\xi)$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonların oluşturduğu neutrix olsun. (Burada, $\xi \to 0$ için $o(\xi)$ sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.)

$$g(\xi) = \xi + \left(\log \frac{1}{\xi} + 1\right)^2$$

fonksiyonu için

$$\mathscr{N}-\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = 1$$

olur. Gerçekten;

$$g(\xi) - 1 = \xi + \log^2 \frac{1}{\xi} + 2\log \frac{1}{\xi}$$

fonksiyonu ihmal edilebilirdir.

$\mathscr{P}$, tanım kümesi $T = (0,1)$, $D = \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha \log^3 \frac{1}{\xi} + \beta \log^2 \frac{1}{\xi} + o(\xi)$$

şeklinde tanımlanmış ihmal edilebilir fonksiyonlardan oluşan bir neutrix ise o zaman;

$$g(\xi) = \xi + \left(\log \frac{1}{\xi} + 1\right)^2$$

fonksiyonu için

$$\mathscr{P}-\lim_{\xi \to 0} g(\xi)$$

neutrix limiti yoktur.

3. BETA FONKSİYONU ve KISMİ TÜREVLERİNİN BİR GENİŞLEMESİ

Bu bölümde neutrix kalkülüs kullanılarak, beta fonksiyonu ve kısmi türevlerinin tanım kümeleri tüm gerçel sayılar kümesine genişletilecektir [7,16].
Bu ve daha sonraki bölümde $\mathcal{N}$ neutrixi olarak, tanım kümesi $T = (0, 1/2)$ açık aralığı, değer kümesi $D = \mathbb{R}$ olan ve

$$\xi^{\eta} \ln^{m-1} \xi, \quad \ln^{m} \xi, \quad o(\xi) \quad (\eta < 0, \quad m = 1, 2, ...)$$

biçiminde tanımlanmış ihmal edilebilir fonksiyonların sonlu doğrusal toplamlarından oluşan küme alınacaktır. (Burada $o(\xi) \to 0$, $\xi \to 0$ için sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.)

3.1. Neutrixler ve Beta Fonksiyonu

Fisher ve Kuribayashi'nin beta fonksiyonu $B(\eta, \theta)$'nın tanım kümesini nasıl genişlettiğini inceleyelim. Bunun için

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}\,dt$$

integrali $\eta > -k$, $\theta > -l$ ve $\eta \neq 0, -1, ..., -k+1$, $\theta \neq 0, -1, ..., -l+1$ değerleri için göz önüne alınırsa

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}\,dt$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \int_{\xi}^{1/2} t^{\eta-1}\left[(1-t)^{\theta-1} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m\Gamma(\theta)}{m!\Gamma(\theta-m)} t^m\right] dt \qquad (3.1.1)\\
+ \quad & \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m\Gamma(\theta)}{m!2^{\eta+m}\Gamma(\theta-m)(\eta+m)} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m\Gamma(\theta)}{m!\Gamma(\theta-m)(\eta+m)} \xi^{\eta+m}\\
+ \quad & \int_{1/2}^{1-\xi} (1-t)^{\theta-1}\left[t^{\eta-1} - \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(-1)^m\Gamma(\eta)}{m!\Gamma(\eta-m)} (1-t)^m\right] dt\\
+ \quad & \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(-1)^m\Gamma(\eta-1)}{m!2^{\theta+m}\Gamma(\eta-m)(\theta+m)} - \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(-1)^m\Gamma(\eta)}{m!\Gamma(\eta-m)(\theta+m)} \xi^{\theta+m}
\end{aligned}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limitine geçilirse

$$B(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}dt \tag{3.1.2}$$

eşitliği elde edilir [7]. Ayrıca bu integral $\eta > 0$ için $t = 0$ noktasının komşuluğunda yakınsak olacağından

$$B(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{0}^{1-\xi} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}dt$$

ve integral $\theta > 0$ için $t = 1$ noktasının komşuluğunda yakınsak olacağından

$$B(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}dt$$

biçiminde yazılır [7]. (3.1.1) eşitliğinin η'ya göre kısmi türevini alırsak eşitliğin sağ tarafı $\xi^{\eta}\ln\xi$ şeklinde terimler içerdiğinden $\eta,\theta \neq 0,-1,-2,...$ değerleri için

$$\frac{\partial}{\partial\eta}B(\eta,\theta) = B_{\eta}(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}\ln t\,dt \tag{3.1.3}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{\partial}{\partial\theta}B(\eta,\theta) = B_{\theta}(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}(1-t)^{\theta-1}\ln(1-t)dt \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Genel olarak $\eta,\theta \neq 0,-1,-2,...$ ve $a,b = 1,2,...$ değerleri için

$$\frac{\partial^{a+b}}{\partial\eta^{a}\partial\theta^{b}}B(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}\ln^{a}t(1-t)^{\theta-1}\ln^{b}(1-t)dt \tag{3.1.5}$$

biçimindedir [7]. (3.1.2) eşitliği $B(\eta,\theta)$ fonksiyonunun η ve θ'nın tüm gerçel değerleri için benzer şekilde tanımlanabileceği fikrini vermiştir [7].

Öncelikle $\theta \neq 0,-1,-2,...$ değerleri için $B(0,\theta)$'nın nasıl tanımlandığına bakalım.

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1}(1-t)^{\theta-1}dt = \int_{\xi}^{1-\xi}(1-t)^{\theta-1}d\ln t$$

integralinde kısmi integrasyon ile $u = (1-t)^{\theta-1}$ ve $d\ln t = dv$ alınırsa

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1}(1-t)^{\theta-1}dt = \ln(1-\xi)\xi^{\theta-1} - (1-\xi)^{\theta-1}\ln\xi + (\theta-1)\int_{\xi}^{1-\xi}\ln t(1-t)^{\theta-2}dt \qquad (3.1.6)$$

elde edilir.

$$\ln(1-\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n}$$

$$(1-\xi)^{\theta-1} = \sum_{n=0}^{\theta-1}\binom{\theta-1}{n}(-1)^n\xi^n$$

eşitlikleri (3.1.6) eşitliğinde yazılırsa

$$\ln(1-\xi)\xi^{\theta-1} - (1-\xi)^{\theta-1}\ln\xi = -\sum_{n=1}^{l+1}\frac{1}{n}\xi^{\theta+n-1} - \ln\xi + o(1)$$

eşitliği elde edilir. Buradan neutrix limit kullanıldığında $\theta \neq 0, -1, \ldots$ değerleri için

$$\begin{aligned}\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1}(1-t)^{\theta-1}dt &= B(0,\theta) \\ &= (\theta-1)\frac{\partial}{\partial\eta}B(1,\theta-1)\end{aligned}$$

olur. Böylece $B(0,\theta)$'nin varlığı elde edilir.

Şimdi

$$B(\eta,\theta) = \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\theta)}{\Gamma(\eta+\theta)}$$

eşitliğinin η'ya göre kısmi türevini alalım. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}B(1,\theta-1) &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{\Gamma(1)\Gamma(\theta-1)}{\Gamma(\theta)}\right\} \\ &= \Gamma(\theta-1)\left[\frac{\Gamma'(1)\Gamma(\theta)-\Gamma'(\theta)\Gamma(1)}{\Gamma^2(\theta)}\right] \\ &= \Gamma(\theta-1)\left[\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(\theta)} - \frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma^2(\theta)}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğinin her iki tarafı $(\theta-1)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}(\theta-1)\frac{\partial}{\partial\eta}B(1,\theta-1) &= (\theta-1)\Gamma(\theta-1)\left[\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(\theta)}-\frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma^2(\theta)}\right]\\ &= \Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma(\theta)}=-\gamma-\frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma(\theta)}\end{aligned}$$

olur. Burada γ bilinen Euler Mascheroni sabitidir [19]. Böylece $\theta\neq 0,-1,...$ değerleri için

$$B(0,\theta)=B(\theta,0)=(\theta-1)\frac{\partial}{\partial\eta}B(1,\theta-1)=-\gamma-\frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma(\theta)} \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Özel olarak $k=1,2,...$ için

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\xi}t^{k-1}(1-t)^{-1}dt &= \int_\xi^{1-\xi}\left[(1-t)^{-1}-\sum_{n=0}^{k-2}t^n\right]dt\\ &= \left[\ln(1-t)-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{t^n}{n}\right]_0^{1-\xi}=-\ln\xi-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{(1-\xi)^n}{n}\end{aligned}$$

olur. Buradan, $k=1,2,...$ için $\phi(k)$ fonksiyonu

$$\phi(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \sum\limits_{n=0}^{k}\frac{1}{n}, & k=1,2,...\end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$B(k,0)=B(0,k)=\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_0^{1-\xi}t^{k-1}(1-t)^{-1}dt=-\phi(k-1) \tag{3.1.8}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, $B(0,0)$ değerini bulalım. Bunun için

$$\begin{aligned}\int_\xi^{1-\xi}t^{-1}(1-t)^{-1}dt &= \int_\xi^{1-\xi}[t^{-1}+(1-t)^{-1}]dt\\ &= [\ln t-\ln(1-t)]_\xi^{1-\xi}\\ &= 2[\ln(1-\xi)-\ln\xi]\end{aligned}$$

yazılır ve neutrix limite geçilirse

$$\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_\xi^{1-\xi}t^{-1}(1-t)^{-1}dt=0$$

ve böylece

$$B(0,0)=0$$

elde edilir.

Daha genel olarak

$$\begin{aligned}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-1}(1-t)^{-1}dt &= \int_{\xi}^{1-\xi}[(1-t)^{-1}+\sum_{n=1}^{k+1}t^{-n}]dt \\ &= 2[\ln(1-\xi)-\ln\xi]+\sum_{n=1}^{k}\frac{\xi^{-n}}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{(1-\xi)^{-n}}{n}\end{aligned}$$

yazılırsa $k=1,2,...$ için

$$B(-k,0)=B(0,-k)=\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{0}^{1-\xi} t^{k-1}(1-t)^{-1}dt=-\phi(k) \qquad (3.1.9)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylelikle her θ gerçel değeri için $B(\theta,0)=B(0,\theta)$ fonksiyonun nasıl tanımlanabileceğini göstermiş olduk.

Pozitif k tamsayı değerleri için $B(-k+1,\theta)$ değeri var olsun. $k=1$ için bu doğrudur. Öyleyse

$$\begin{aligned}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-1}(1-t)^{\theta-1}dt &= -\frac{1}{k}\int_{\xi}^{1-\xi}(1-t)^{\theta-1}dt^{-k} \\ &- \frac{1}{k}(1-\xi)^{-k}\xi^{\theta-1}+\frac{1}{k}\xi^{-k}(1-\xi)^{\theta-1} \\ &- \frac{\theta-1}{k}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k}(1-t)^{\theta-2}dt\end{aligned}$$

olur. $\theta>-l$ ve ve θ tamsayı olmasın. Bu durumda $(1-\xi)^{-k}$ ve $(1-\xi)^{\theta-1}$ için Taylor seri açılımına bakılırsa

$$(1-\xi)^{-k}=\sum_{n=0}^{l}\frac{\Gamma(k+n)}{n!\Gamma(k)}\xi^{n}+o(1)$$

$$(1-\xi)^{\theta-1}=\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n}\Gamma(\theta)}{n!\Gamma(\theta-n)}\xi^{n}+o(1)$$

eşitliklerinden

$$\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-1}(1-t)^{\theta-1}dt=\frac{(-1)^{k}\Gamma(\theta)}{k.k!\Gamma(\theta-k)}-\frac{(\theta-1)}{k}B(-k+1,\theta-1)$$

ve böylece tümevarımla

$$B(-k,\theta)=\frac{(-1)^k\Gamma(\theta)}{k.k!\Gamma(\theta-k)}-\frac{(\theta-1)}{k}B(-k+1,\theta-1) \tag{3.1.10}$$

elde edilir. $k=1,2,...$ ve $\theta\neq 0,\mp 1,\mp 2,...$ değerleri (3.1.10) eşitliğinden

$$B(-1,\theta-k+1)=-(\theta-k)[1+B(0,\theta-k)]$$

ve böylece

$$B(-k,\theta)=\frac{(-1)^k\Gamma(\theta)}{k!\Gamma(\theta-k)}[\phi(k)+B(0,\theta-k)]$$

ya da (3.1.7) eşitliği kullanılarak

$$B(-k,\theta)=\frac{(-1)^k\Gamma(\theta)}{k!\Gamma(\theta-k)}[\phi(k)-\gamma-\frac{\Gamma'(\theta-k)}{\Gamma(\theta-k)}]$$

elde edilir. Şimdi $\theta>0$ ve $k=1,2,...$ için beta fonksiyonunun varlığını inceleyelim. Bunun için

$$\int_\xi^1 t^{-k-1}dt \quad = \quad -\frac{1}{k}(1-\xi^{-k})$$

yazar ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$B(-k,1)=-\frac{1}{k} \tag{3.1.11}$$

olur. $l=1,2,...$ ve k herhangi bir tamsayı olsun.

$k=1$ için (3.1.7) eşitliğinden kabulümüz doğrudur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\int_\xi^1 t^{-k-1}(1-t)^{l-1}dt &= -\frac{1}{k}\int_\xi^1(1-t)^{l-1}dt^{-k} \\ &= -\frac{1}{k}\Big[t^{-k}(1-t)^{l-1}\Big]_\xi^1-\frac{l-1}{k}\int_\xi^1 t^{-k}(1-t)^{l-2}dt \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}(-1)^i\xi^{i-k}-\frac{l-1}{k}\int_\xi^1 t^{-k}(1-t)^{l-2}dt\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

olur. Böylece $l=1,2,...,k$ ve $l<k$ için tümevarımla

$$\mathcal{N}\text{-}\lim_{\xi\to 0}\int_\xi^1 t^{-k-1}(1-t)^{l-1}dt=-\frac{l-1}{k}B(-k+1,l-1)$$

elde edilir.

Böylece $k<l$ değerleri için

$$B(-k,l)=\frac{(-1)^l(l-1)!(k-l)!}{k!}=(-1)^lB(k-l+1,l)$$

olur. $k>l$ alınırsa kabulümüzden ve (3.1.12) eşitliğinden

$$\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi}t^{-k-1}(1-t)^{l-1}dt=\frac{(-1)^k(l-1)!}{kk!(l-k-1)!}-\frac{l-1}{k}B(-k+1,l-1)$$

ve böylece $l=k+1,k+2,\ldots$ ve $k=1,2,\ldots$ değerleri için

$$B(-k,l)=\frac{(-1)^k(l-1)!}{kk!(l-k-1)!}-\frac{l-1}{k}B(-k+1,l-1) \qquad (3.1.13)$$

elde edilir. (3.1.13) eşitliğinden

$$B(-1,l-k+1)=-(l-k)[1+B(0,l-k)]$$

ve böylece

$$B(-k,l) = \frac{(-1)^k(l-1)!}{k!(l-k-1)!}[\phi(k)-B(0,l-k)]$$

veya (3.1.8) eşitliğinden $l=k+1,k+2,\ldots$ ve $k=1,2,\ldots$ değerleri için

$$B(-k,l) = \frac{(-1)^k(l-1)!}{k!(l-k-1)!}[\phi(k)-\phi(l-k-1)]$$

eşitlikleri elde edilir.

Son olarak k herhangi pozitif tamsayı ve $l=1,2,\ldots$ olmak üzere $B(-k+1,-l)$ değeri var olsun. $k=1$ değeri için (3.1.9) eşitliğinden kabulümüz doğrudur.

O zaman

$$\begin{aligned}\int_{\xi}^{1-\xi}t^{-k-1}(1-t)^{-l-1}dt &= -\frac{1}{k}\int_{\xi}^{1-\xi}(1-t)^{-l-1}dt^{-k}\\ &- \frac{1}{k}[t^{-k}(1-t)^{-l-1}\Big|_{\xi}^{1-\xi}+\frac{l+1}{k}\int_{\xi}^{1-\xi}t^{-k}(1-t)^{-l-2}dt\\ &= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k}\frac{(l+n)!}{n!l!}\xi^{n-k}-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{l+1}\frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!}\xi^{n-l-1}\\ &+ \frac{l+1}{k}\int_{\xi}^{1-\xi}t^{-k}(1-t)^{-l-2}dt+o(\xi)\end{aligned}$$

yazar ve neutrixten yararlanırsak

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-1}(1-t)^{-l-1}dt \\
&= \frac{1}{k}\left[\frac{(l+k)!}{k!l!}-\frac{(k+l)!}{(l+1)!(k-1)!}\right]+\frac{l+1}{k}B(-k+1,-l-1) \\
&= \frac{(l+k)!}{k!l!}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{l+1}\right]+\frac{l+1}{k}B(-k+1,-l-1)
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$
B(-k,-l)=\frac{(l+k)!}{k!l!}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{l+1}\right]+\frac{l+1}{k}B(-k+1,-l-1)
$$

elde edilir ve böylece

$$
B(-k,-l)=\frac{(l+k)!}{k!l!}[\phi(k)+\phi(l)-\phi(l+k)+B(0,-l-k)]
$$

veya (3.1.9) eşitliğinden yararlanarak

$$
B(-k,-l)=\frac{(l+k)!}{k!l!}[\phi(k)+\phi(l)-2\phi(l+k)] \tag{3.1.14}
$$

elde edilir.

3.2. Neutrixler ve Beta Fonksiyonunun Kısmi Türevleri

Beta fonksiyonu $B(\eta,\theta)$'nın η ve θ'ya göre her mertebeden kısmi türevlerinin η,θ'nın tüm gerçel değerleri için var olduğu Özçağ ve Fisher tarafından neutrix kavramı kullanılarak gösterilmiştir.

$$
B_{a,b}(\eta,\theta)=\frac{\partial^{a+b}}{\partial^a\eta\partial^b\theta}B(\eta,\theta)
$$

gösterimini kullanalım.

Tanım 3.1. [16] $B_{a,b}(\eta,\theta)$ fonksiyonu her η,θ gerçel değerleri ve $a,b=0,1,...$ için

$$
B_{a,b}(\eta,\theta)=\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}\ln^a t(1-t)^{\theta-1}\ln^b(1-t)dt
$$

ile tanımlanır.

3.1.bölümde Tanım 3.1'daki neutrix limitin $a = b = 0$ için var olduğu gösterilmişti. Şimdi ise Tanım 3.1'de verilen neutrix limitin $a,b = 0,1,...$ ve bütün η,θ gerçel değerleri için var olduğunu göstereceğiz. Bunun için işe aşağıdaki lemmayı vererek başlayalım.

Lemma 3.2. *[16] $a,b = 0,1,...$ ve tüm η gerçel değerleri için*

$$\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta} \ln^{a} t \ln^{b}(1-t)dt \tag{3.2.15}$$

ve

$$\int_{1/2}^{1-\xi} (1-t)^{\eta} \ln^{a} t \ln^{b}(1-t)dt \tag{3.2.16}$$

integrallerinin neutrix limiti $\xi \to 0$ için vardır.

İspat. İlk olarak $a = b = 0$ alalım.

$$\int_{\xi}^{1/2} t^{-1}dt = \ln t\Big|_{\xi}^{1/2} = -\ln 2 - \ln\xi$$

$$\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\,dt = \frac{t^{\eta+1}}{\eta+1}\Big|_{\xi}^{1/2} = \frac{(1/2)^{\eta+1}}{\eta+1} - \frac{\xi^{\eta+1}}{\eta+1}$$

olacağından tüm η gerçel değerleri için

$$\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\,dt$$

neutrix limiti vardır.

Şimdi $b = 0$ olmak üzere $a = 0,1,...$ ve tüm η değerleri için

$$\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\ln^{a} t\,dt$$

değeri var olsun. O zaman

$$\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\ln^{a+1} t\,dt = \begin{cases} \frac{-2^{-\eta-1}\ln 2 - \xi^{\eta+1}\ln\xi}{\eta+1} - \frac{a+1}{\eta+1}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\ln^{a} t\,dt, & \eta \neq -1, \\ \frac{(-1)^{a}\ln^{a+2} 2 - \ln^{a+2}\xi}{a+2}, & \eta = -1 \end{cases} \tag{3.2.17}$$

olur. Böylece tümevarımla

$$\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\ln^{a} t\,dt$$

integralinin neutrix limiti $a = 0, 1, ...$ ve bütün η gerçel değerleri için mevcuttur.

Son olarak $b = 1, 2, ...$ ve $|t| < 1$ için

$$\ln^{b}(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kb}t^{k}$$

Taylor açılımı kullanılır ve n pozitif tamsayısı $\eta + n > -1$ olacak şekilde seçilirse

$$\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta}\ln^{a} t\ln^{b}(1-t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} a_{kb}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta+k}\ln^{a} t\,dt + \sum_{k=n}^{\infty} a_{kb}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta+k}\ln^{a} t\,dt$$

olur.

Böylece

$$\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\sum_{k=1}^{n-1}\eta_{ka}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta+k}\ln^{a} t\,dt$$

değeri vardır ve

$$\begin{aligned}\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\sum_{k=n}^{\infty}\eta_{kb}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta+k}\ln^{a} t\,dt \\ = \lim_{\xi\to 0}\sum_{k=n}^{\infty}\eta_{kb}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta+k}\ln^{a} t\,dt \\ = \sum_{k=n}^{\infty}\eta_{kb}\int_{0}^{1/2} t^{\eta+k}\ln^{a} t\,dt\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $a, b = 0, 1, 2, ...$ ve tüm η gerçel değerleri için

$$\int_{0}^{1/2} t^{\eta}\ln^{a} t\ln^{b}(1-t)dt$$

integralinin neutrix limiti $\xi \to 0$ için vardır.

Benzer şekilde $u = 1-t$ dönüşümü yapıldığında $a, b = 0, 1, ...$ ve tüm η gerçel değerleri için

$$\mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{1/2}^{1-\xi}(1-t)^{\eta}\ln^{a} t\ln^{b}(1-t)dt$$

değeri vardır. $\square$

Teorem 3.3. *[16] $B_{a,b}(\eta,\theta)$ fonksiyonu $a,b=0,1,2,...$ ve tüm η,θ gerçel değerleri için vardır.*

İspat. $\eta>-c$ ve $\theta>-d$ olacak şekilde pozitif c ve d tamsayılarını seçilirse

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1}\ln^a t(1-t)^{\theta-1}\ln^b(1-t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\xi}^{1/2} t^{\eta-1}\ln^a t\ln^b(1-t)\left[(1-t)^{\theta-1}-\sum_{n=0}^{d}\frac{(-1)^n\Gamma(\theta+n-1)}{n!\Gamma(\theta-1)}t^n\right]dt\\
&+ \sum_{n=0}^{c}\frac{(-1)^n\Gamma(\theta+n-1)}{n!\Gamma(\theta-1)}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta+n-1}\ln^a t\ln^b(1-t)dt\\
&+ \int_{1/2}^{1-\xi}(1-t)^{\theta-1}\ln^a t\ln^b(1-t)\left[t^{\eta-1}-\sum_{n=0}^{d}\frac{(-1)^n\Gamma(\eta+n-1)}{n!\Gamma(\eta-1)}(1-t)^n\right]dt\\
&+ \sum_{n=0}^{d}\frac{(-1)^n\Gamma(\eta+n-1)}{\Gamma(\eta-1)n!}\int_{1/2}^{1-\xi}(1-t)^{\theta+n-1}\ln^a t\ln^b(1-t)dt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1/2} t^{\eta-1}\ln^a t\ln^b(1-t)\left[(1-t)^{\theta-1}-\sum_{n=0}^{c}\frac{(-1)^n\Gamma(\theta+n-1)}{n!\Gamma(\theta-1)}t^n\right]dt$$

$$=\int_{0}^{1/2} t^{\eta-1}\ln^a t\ln^b(1-t)\left[(1-t)^{\theta-1}-\sum_{n=0}^{c}\frac{(-1)^n\Gamma(\theta+n-1)}{n!\Gamma(\theta-1)}t^n\right]dt$$

ve

$$\lim_{\xi\to 0}\int_{1/2}^{1-\xi}(1-t)^{\theta-1}\ln^a t\ln^b(1-t)\left[t^{\eta-1}-\sum_{n=0}^{d}\frac{(-1)^n\Gamma(\eta+n-1)}{n!\Gamma(\eta-1)}(1-t)^n\right]dt$$

$$=\int_{1/2}^{1}(1-t)^{\theta-1}\ln^a t\ln^b(1-t)\left[t^{\eta-1}-\sum_{n=0}^{d}\frac{(-1)^n\Gamma(\eta+n-1)}{n!\Gamma(\eta-1)}(1-t)^n\right]dt$$

integralleri yakınsaktır. Diğer yandan $a,b=0,1,2,...$ ve tüm η,θ gerçel değerleri için Lemma 3.1.'den

$$\sum_{n=0}^{c}\frac{(-1)^n(\theta-1)_n}{n!}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta+n-1}\ln^a t\ln^b(1-t)dt$$

ve

$$+\quad \sum_{n=0}^{d} \frac{(-1)^n(\eta-1)_n}{n!} \int_{1/2}^{1-\xi} (1-t)^{\theta+n-1} \ln^a t \ln^b(1-t)dt$$

integrallerinin neutrix limiti vardır.

Böylece

$$B_{a,b}(\eta,\theta) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0} \int_{\xi}^{1-\xi} t^{\eta-1} \ln^a t(1-t)^{\theta-1} \ln^b(1-t)dt$$

değeri vardır. Bu ise $B_{a,b}(\eta,\theta)$ fonksiyonunun varlığını $a,b=1,2,...$ ve tüm η,θ gerçel değerleri için verir.

□

$B_{a,b}(\eta,\theta)$ fonksiyonunun tanımından aşağıdaki teoremi kolayca ispatlayabiliriz.

Teorem 3.4. *[16] $a,b=0,1,2,...$ ve tüm η,θ gerçel değerleri için*

$$B_{a,b}(\eta,\theta) = B_{b,a}(\theta,\eta)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.5. *[16] $a=1,2,...$ olmak üzere*

$$B_{a,0}(0,1) = 0 \tag{3.2.18}$$

şeklindedir.

İspat.

$$\begin{aligned}\int_{\xi}^{1} t^{-1} \ln^a t\,dt &= \frac{1}{a+1}\int_{\xi}^{1} d\ln^{a+1} t \\ &= -\frac{\ln^{a+1}\xi}{a+1}\end{aligned}$$

olduğundan

$$B_{a,0}(0,1) = \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0} \int_{\xi}^{1} t^{-1} \ln^a t\,dt = 0$$

elde edilir. □

Teorem 3.6. *[16] $a,d=1,2,...$ değerleri için*

$$B_{a,0}(0,d+1)=\sum_{n=1}^{d}\binom{d}{n}\frac{(-1)^{a+n}a!}{n^{a+1}} \tag{3.2.19}$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat.

$$(1-t)^d=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{d}{n}t^n$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\int_{\xi}^{1}t^{-1}\ln^a t(1-t)^d dt &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{d}{n}\int_{\xi}^{1}t^{n-1}\ln^a t\,dt\\ &= \int_{\xi}^{1}t^{-1}\ln^a t\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{d}{n}\int_{\xi}^{1}t^{n-1}\ln^a t\,dt\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}B_{a,0}(0,d+1) &= \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1}t^{-1}\ln^a t(1-t)^d dt\\ &= B_{a,0}(0,1)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{d}{n}\int_{0}^{1}t^{n-1}\ln^a t\,dt \qquad (3.2.20)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{d}{n}\int_{0}^{1}t^{n-1}\ln^a t\,dt\end{aligned}$$

yazılır. $\ln^a t=u$ ve $t^{n-1}dt=dv$ kısmi integrasyonu $(a+1)$ defa uygulanırsa $n=0,1,2,...$ için

$$\int_{0}^{1}t^n\ln^a t\,dt=\frac{(-1)^a a!}{(n+1)^{a+1}} \tag{3.2.21}$$

elde edilir. (3.2.21) denklemi (3.2.20) eşitliğinde yazılarak istenen elde edilir.

□

Teorem 3.7. *[16] $a,c=1,2,...$ değerleri için*

$$B_{a,0}(-c,1)=-\frac{a!}{c^{a+1}} \tag{3.2.22}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Tümevarım yardımıyla (3.1.22) eşitliğini gösterelim. Kısmi integral alınırsa

$$\int_{\xi}^{1} t^{-c-1} \ln t \, dt = \xi^{-c} c^{-1} \ln \xi + \frac{1}{c} \int_{\xi}^{1} t^{-c-1} dt$$

olur. Buradan

$$B_{1,0}(-c,1) = \mathcal{N}-\lim_{\xi \to 0} \int_{\xi}^{1} t^{-c-1} \ln t \, dt = -c^{-2}$$

elde edilir. Böylece (3.2.22) eşitliği $a = 1$ ve $c = 1,2,...$ için geçerlidir.
$a = 1,2,...$ için (3.2.22) eşitliği doğru olsun. O zaman

$$\begin{aligned} B_{a+1,0}(-c,1) &= \mathcal{N}-\lim_{\xi \to 0} \int_{\xi}^{1} t^{-c-1} \ln^{a+1} t \, dt \\ &= \mathcal{N}-\lim_{\xi \to 0} \left[\frac{\xi^{-c}}{c} \ln^{a+1} \xi + \frac{a+1}{c} \int_{\xi}^{1} t^{-c-1} \ln^{a} t \, dt \right] \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} B_{a+1,0}(-c,1) &= \frac{a+1}{c} B_{a,0}(-c,1) \\ &= -\frac{(a+1)a!}{cc^{a}} = \frac{(a+1)!}{c^{a+1}} \end{aligned}$$

eşitliği (3.2.22) eşitliğinin $a+1$ için doğru olduğunu verir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.8. *[16] $a, c = 1,2,...$ ve $d = 0,1,...,c$ değerleri için*

$$B_{a,0}(-c, d+1) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{d} \binom{d}{n} \frac{(-1)^{n+1} a!}{(c-n)^{a+1}}, & d < c, \\ \sum_{n=0}^{c-1} \binom{d}{n} \frac{(-1)^{n+1} a!}{(c-n)^{a+1}}, & d = c, \end{cases} \tag{3.2.23}$$

ve $a, c = 1,2,...,$ $d = c+1, c+2,...$ için

$$B_{a,0}(-c, d+1) = \sum_{n=0, n \neq d}^{d} \binom{d}{n} \frac{(-1)^{n+1} a!}{(c-n)^{a+1}} \tag{3.2.24}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. Öncelikle (3.2.23) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\int_{\xi}^{1} t^{-c-1} \ln^a t (1-t)^d dt = \sum_{n=0}^{d} \binom{d}{n} (-1)^n \int_{\xi}^{1} t^{n-c-1} \ln^a t dt \tag{3.2.25}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının $\xi \to 0$ için neutrix limiti alınırsa $d = 0, 1, ..., c$ değerleri için

$$\begin{aligned} B_{a,0}(-c, d+1) &= \sum_{n=0}^{d} \binom{d}{n} (-1)^n \mathcal{N}-\lim_{\xi \to 0} \int_{\xi}^{1} t^{n-c-1} \ln^a t dt \\ &= \sum_{n=0}^{d} \binom{d}{n} (-1)^n B_{a,0}(n-c, 1) \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.5 ve Teorem 3.7'dan (3.2.23) eşitliği gerçeklenir.
$d \geq c$ olduğunda (3.2.25) eşitliğinden

$$B_{a,0}(-c, d+1) = \sum_{n=0}^{c} \binom{d}{n} (-1)^n B_{a,0}(n-c, 1) + \sum_{n=c+1}^{d} \binom{d}{n} (-1)^n B_{a,0}(n-c, 1)$$

yazılır. Teorem 3.5, Teorem 3.7 ve (3.2.21) eşitliği kullanılırsa (3.2.24) eşitliği elde edilir. □

Teorem 3.9. *[16] $a = 1, 2, ...$ değerleri için*

$$B_{a,0}(0,0) = B_{a,0}(1,0) = (-1)^a a! \zeta(a+1) \tag{3.2.26}$$

$$B_{a,0}(-1,0) = -a! + (-1)^a a! \zeta(a+1) \tag{3.2.27}$$

şeklinde tanımlıdır, burada

$$\zeta(a) = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{c^a}$$

biçimindedir [18].

İspat. (3.2.26) eşitliği için

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1} \ln^a t (1-t)^{-1} dt = \int_{\xi}^{1-\xi} [t^{-1} + (1-t)^{-1}] \ln^a t dt$$

yazılırsa

$$B_{a,0}(0,0)=B_{a,0}(0,1)+B_{a,0}(1,0)=B_{a,0}(1,0)$$

elde edilir. Ayrıca

$$B_{a,0}(1,0)=\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_0^{1-\xi}(1-t)^{-1}\ln^a t\,dt$$

ve

$$\int_0^1(1-t)^{-1}\ln^a t\,dt \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^n\ln^a t\,dt$$

olduğundan (3.2.21) eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^a a!}{(n+1)^{a+1}}=(-1)^a a!\zeta(a+1)$$

elde edilir.

Şimdi (3.2.27) eşitliği için

$$\begin{aligned} B_{a,0}(-1,0) &= \mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-2}(1-t)^{-1}\ln^a t\,dt \\ &= B_{a,0}(-1,1)+B_{a,0}(1,0)+B_{a,0}(0,1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.2.18) ve (3.2.22) eşitlikleri kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 3.10. *[16] $c=1,2,...$ ve $d=0,1,...,c$ değerleri için*

$$B_{0,1}(-c,d+1)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}\frac{(-1)^n}{(c-n)}\left[\phi(c-n)-\frac{2}{c-n}\right], & d<c, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\binom{d}{n}\frac{(-1)^n a!}{(c-n)}\left[\phi(c-n)-\frac{2}{c-n}\right]-(-1)^c\zeta(2), & d=c, \end{cases} \tag{3.2.28}$$

ve $c=1,2,...,$ $d=c+1,c+2,...,$ değerleri için

$$\begin{aligned} B_{0,1}(-c,d+1) &= \sum_{n=0}^{c-1}\binom{d}{n}\frac{(-1)^n a!}{(c-n)}\left[\phi(c-n)-\frac{2}{c-n}\right]-(-1)^c\binom{d}{c}\zeta(2) \\ &- \sum_{n=c+1}^{d}\binom{d}{n}\frac{(-1)^n a!}{(c-n)}\phi(c-n) \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

biçiminde tanımlıdır, burada

$$\phi(c)=\begin{cases} 0, & c=0, \\ \sum_{n=1}^{c}\frac{1}{n}, & c\geq 1, \end{cases}$$

biçimindedir.

İspat.

$$\int_{\xi}^{1} t^{-c-1}\ln(1-t)dt=-\frac{1}{c}\xi^{-c}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{\xi^{c}}{c}-\frac{1}{c}\int_{\xi}^{1} t^{-c}(1-t)^{-1}dt$$

yazılırsa

$$B_{0,1}(-c,1) = -\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c}B(-c+1,0)$$

elde edilir.

(3.1.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} B_{0,1}(-c,1) &= -\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c}\phi(c-1) \\ &= \frac{1}{c}[\phi(c)-\frac{2}{c}] \end{aligned}$$

yazılırsa (3.1.14) eşitliğinden $c=0,1,...$ ve $d=0$ için (3.2.28) eşitliği ispatlanmış olur. Daha genel olarak $d<c$ için

$$\int_{\xi}^{1} t^{-c-1}(1-t)^{d}\ln(1-t)dt = \sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}(-1)^{n}\int_{\xi}^{1} t^{n-c-1}\ln(1-t)dt$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B_{0,1}(-c,d+1) &= \sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}(-1)^{n}B_{0,1}(-c+n,1) \qquad (3.2.30) \\ &= \sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}(-1)^{n}(-c+n)^{-1}[\phi(c-n)-2(c-n)^{-1}] \end{aligned}$$

elde eilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} B_{0,1}(-c,c+1) &= \binom{c}{c}(-1)^{c}B_{0,1}(-c+c,1) \\ &= (-1)^{c}B_{0,1}(0,1) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden (3.2.26) eşitliğinden istenen sonuç elde edilir. Şimdi de $d > c$ durumunu inceleyelim.

$$\begin{aligned} B_{0,1}(m,1) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\Gamma(m)\Gamma(1)}{\Gamma(m+1)} \\ &= \Gamma(m)\Big[\frac{\Gamma'(1)\Gamma(m+1)-\Gamma'(m+1)}{\Gamma^2(m+1)}\Big] \\ &= \frac{\Gamma'(1)}{m}-\frac{\Gamma'(m+1)}{mm!} \end{aligned}$$

eşitliğinde $\Gamma'(m+1) = m\Gamma'(m)+\Gamma(m)$ yazarsak

$$\begin{aligned} B_{0,1}(m,1) &= \frac{1}{m}\Big[\Gamma'(1)-\frac{m\Gamma'(m)+\Gamma(m)}{m!}\Big] \\ &= \frac{1}{m}\Big[\Gamma'(1)-\frac{m((m-1)\Gamma'(m-1)+\Gamma(m-1))}{m!}-\frac{1}{m}\Big] \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{m}\Big[\Gamma'(1)-\Gamma'(1)-\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1}-...-1\Big] \\ &= -\frac{1}{m}\phi(m) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$B_{0,1}(-c+n,1) = -\frac{1}{-c+n}\phi(-c+n)$$

eşitliği (3.2.30) eşitliğinde yerine yazılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 3.11. *[16] $c = 1,2,...$ değerleri için*

$$B_{1,0}(-c,0) = -\sum_{n=1}^{c} n^{-2}-\zeta(2) \tag{3.2.31}$$

ve

$$B_{1,0}(-c+1,-1) = -c\sum_{n=1}^{c} n^{-2}-c\zeta(2)-1+\phi(c) \tag{3.2.32}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. Öncelikle (3.2.31) eşitliğinin doğruluğunu tümevarım yöntemi ile gösterelim

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-2}\ln t(1-t)^{-1}dt = \int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1}\ln t[t^{-1}+(1-t)^{-1}]dt$$

olduğundan Teorem 3.7 ve (3.2.26) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} B_{1,0}(-1,0) &= B_{1,0}(-1,1)+B_{1,0}(0,0) \\ &= -1-\zeta(2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $c=1$ için (3.2.31) eşitliği doğrudur.

Şimdi $c \in \mathbb{Z}^{+}$ için (3.2.31) eşitliği doğru olsun. O zaman,

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-c-2}\ln t(1-t)^{-1}dt = \int_{\xi}^{1-\xi} t^{-c-1}\ln t[t^{-1}+(1-t)^{-1}]dt$$

yazılırsa (3.2.22) eşitliği ve kabulümüzden

$$\begin{aligned} B_{1,0}(-c-1,0) &= B_{1,0}(-c-1,1)+B_{1,0}(-c,0) \\ &= \sum_{n=1}^{c+1} n^{-2}-\zeta(2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de (3.2.32) eşitliğinin doğruluğunu görelim. Bunun için

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{1-\xi} t^{-c-1}\ln t(1-t)^{-1}dt &= -c^{-1}\int_{\xi}^{1-\xi} \ln t(1-t)^{-1}dt^{-c} \\ &= -c^{-1}[(1-\xi)^{-c}\ln 1-\xi\xi^{-1}-\xi^{-c}\ln\xi 1-\xi^{-1} \\ &- \int_{\xi}^{1-\xi}[t^{-1}(1-t)^{-1}+\ln t(1-t)^{-2}]t^{-c}dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (3.1.14), (3.2.31) eşitlikleri ve neutrix limit kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_{1,0}(-c,0) &= c^{-1}[1+B(-c,0)+B_{1,0}(-c+1,-1)] \\ &= c^{-1}[1-\phi(c)+B_{1,0}(-c+1,-1)] \end{aligned}$$

olur. □

Teorem 3.12. *[16] $c,d = 1,2,\ldots$ değerleri için*

$$\begin{aligned} B_{1,0}(-c,-d) &= -\frac{1}{c!d!}\sum_{n=0}^{d-1}\sum_{c=0}^{n}\frac{(c+d+c-n-1)!n!}{(n-c+1)c!} \\ &- \frac{(c+d)!}{c!d!}\Big[\sum_{c=c+1}^{c+d}\frac{\phi(c)}{c}+\sum_{c=0}^{d-1}\frac{\phi(c)}{c+d-c}-2\phi(c+d)[\phi(c+d)-\phi(c)]\Big] \\ &+ \frac{(c+d)!}{c!d!}[\sum_{c=1}^{d+c}c^{-2}+\zeta(2)] \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat. Tümevarım metodu ile (3.2.33) eşitliğinin doğru olduğunu görelim. (3.2.32) eşitliğinden $d=1$ ve $c=1,2,\ldots$ değerleri için (3.2.33) eşitliği doğrudur. Kısmi integral yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{1-\xi} t^{-c-1}\ln t(1-t)^{-d-1}dt &= d^{-1}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-c-1}\ln t d(1-t)^{-d} \\ &= d^{-1}[(1-\xi)^{-c-1}\ln(1-\xi)\xi^{-d}-\xi^{-c-1}\ln\xi(1-\xi)^{-d} \\ &- d^{-1}\int_{\xi}^{1-\xi}[t^{-c-2}-(c+1)t^{-c-2}\ln t](1-t)^{-d}dt \end{aligned}$$

yazılır ve

$$(1-\xi)^{-c-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c+n)!}{n!.c!}\xi^{n}$$

,

$$\ln(1-\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{n}}{n}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}(1-\xi)^{-c-1}\ln(1-\xi)\xi^{-d} = -\sum_{n=0}^{d-1}\frac{(c+n)!}{(d-n)n!c!}$$

ve

$$\mathscr{N}-\lim_{\xi\to 0}\xi^{-c-1}\ln\xi(1-\xi)^{-d} = 0$$

olur. Böylece

$$B_{1,0}(-c,-d) = -\sum_{n=0}^{d-1}\frac{(c+n)!}{(d-n)n!c!}-d^{-1}B(-c-1,-d+1)+\frac{c+1}{d}B_{1,0}(-c-1,-d+1)$$

eşitliği ve Teorem 3.10 kullanılırsa (3.2.33) eşitliği $d=2,3,\ldots$ için doğru olur. Böylece istenilen elde edilir. □

4. BETA FONKSİYONU ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde beta fonksiyonu $B(\eta,\theta)$'nın kısmi türevleri ile ilgili 3. bölümde verilen bazı sonuçlar genelleştirilmiştir [12].
işe (3.2.27) eşitliği ile başlayalım.

Teorem 4.1. *[12] $a,k=1,2,...$ değerleri için*

$$B_{a,0}(-k,0)=-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a!}{(k-m)^{a+1}}+(-1)^a a!\zeta(a+1) \tag{4.0.1}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. Tümevarım yardımıyla (4.0.1) eşitliğinin doğru olduğunu görelim.
$k=1$ için (3.2.27) eşitliğinden doğrudur. $k=1,2,...$ için (4.0.1) eşitliği doğru olsun.

$$\begin{aligned}B_{a,0}(-k,0) &= \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-1}\ln^a t(1-t)^{-1}dt\\ &= \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k}\ln^a t[t^{-1}+(1-t)^{-1}]dt\\ &= B_{a,0}(-k,1)+B_{a,0}(-k+1,0)\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik (3.2.22) kullanılarak

$$B_{a,0}(-k,0)=-\frac{a!}{k^{a+1}}+B_{a,0}(-k+1,0) \tag{4.0.2}$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned}B_{a,0}(-k-1,0) &= \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-2}\ln^a t(1-t)^{-1}dt\\ &= \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-k-1}\ln^a t[t^{-1}+(1-t)^{-1}]dt\\ &= B_{a,0}(-k-1,1)+B_{a,0}(-k,0)\end{aligned}$$

olur ve (4.0.2) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}B_{a,0}(-k-1,0) &= -\frac{a!}{(k+1)^{a+1}}-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a!}{(k-m)^{a+1}}+(-1)^a a!\zeta(a+1)\\ &= -\sum_{m=0}^{k}\frac{a!}{(k-m)^{a+1}}+(-1)^a a!\zeta(a+1)\end{aligned}$$

eşitliği (4.0.1) eşitliğinin $k+1$ için doğru olduğunu verir. Böylece istenen elde edilir. □

Teorem 4.2. *[12] $a = 1,2,...$ değerleri için*

$$B_{a+1,0}(2,-1) = (-1)^{a+1}(a+1)![\zeta(a+2) - \zeta(a+1)] \tag{4.0.3}$$

ve

$$B_{1,0}(2,-1) = \zeta(2) - 1 \tag{4.0.4}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat. Öncelikle (4.0.3) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\int_{\xi}^{1-\xi} \ln^a t(1-t)^{-1}dt = \frac{1}{a+1}\int_{\xi}^{1-\xi} t(1-t)^{-1}d\ln^{a+1} t$$

yazar ve kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{1-\xi} \ln^a t(1-t)^{-1}dt &= \frac{1}{a+1}\left\{t(1-t)^{-1}\ln^{a+1} t\Big|_{\xi}^{1-\xi}\right\} \\
&- \frac{1}{a+1}\int_{\xi}^{1-\xi}[(1-t)^{-1} + t(1-t)^{-2}]\ln^{a+1} t\,dt \\
&= \frac{1}{a+1}[(1-\xi)\xi^{-1}\ln^{a+1}(1-\xi) - \xi(1-\xi)^{-1}\ln^{a+1}\xi] \\
&- \frac{1}{a+1}\int_{\xi}^{1-\xi}[(1-t)^{-1} + t(1-t)^{-2}]\ln^{a+1} t\,dt
\end{aligned}$$

olur. Buradan $a = 1,2,...$ değerleri için neutrix limit alınırsa

$$\begin{aligned}
B_{a,0}(1,0) &= \mathcal{N}\text{-}\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} \ln^a t(1-t)^{-1}dt \\
&= \frac{1}{a+1}\mathcal{N}\text{-}\lim_{\xi\to 0}[(1-\xi)\xi^{-1}\ln^{a+1}(1-\xi)\xi(1-\xi)^{-1}\ln^{a+1}\xi] \\
&- \frac{1}{a+1}\mathcal{N}\text{-}\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi}((1-t)^{-1} + t(1-t)^{-2})\ln^{a+1} t\,dt \\
&= -\frac{1}{a+1}[B_{a+1,0}(1,0) + B_{a+1,0}(2,-1)]
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.2.26) eşitliği kullanılırsa

$$(-1)^a a!\zeta(a+1) = (-1)^a a!\zeta(a+2) - \frac{1}{a+1}B_{a+1,0}(2,-1)$$

elde edilir.

Özel olarak $a = 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{1-\xi}(1-t)^{-1}dt &= \int_{\xi}^{1-\xi} t(1-t)^{-1}d\ln t \\
&= [(1-\xi)\xi^{-1}\ln(1-\xi) - \xi(1-\xi)^{-1}\ln\xi] \\
&- \int_{\xi}^{1-\xi}[(1-t)^{-1} + t(1-t)^{-2}]\ln t\,dt
\end{aligned}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa (3.2.18) ve (3.2.26) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
B(1,0) &= \mathcal{N}\!-\!\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t(1-t)^{-1}d\ln t \\
&= \mathcal{N}\!-\!\lim_{\xi\to 0}[(1-\xi)\xi^{-1}\ln(1-\xi) - \xi(1-\xi)^{-1}\ln\xi] \\
&- \mathcal{N}\!-\!\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi}[(1-t)^{-1} + t(1-t)^{-2}]\ln t\,dt \\
&= -1 - [B_{1,0}(1,0) + B_{1,0}(2,-1)] \\
&= -1 + \zeta(2) - B_{1,0}(2,-1) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.0.4) eşitliği ispatlanmış olur. □

Teorem 4.3. *[12] $a = 1,2,\ldots$ ve $k = 2,3,\ldots$ değerleri için*

$$B_{a,0}(k,0) = (k-1)B_{a,1}(k-1,1) + aB_{a-1,1}(k-1,1) \tag{4.0.5}$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat. $B_{a,1}(k-1,1)$ ve $B_{a-1,1}(k-1,1)$ fonksiyonlarının $k = 2,3,\ldots$ değerleri için standart formunda olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^a t(1-t)^{-1}dt &= \int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^a t\,d\ln(1-t) \\
&= -(1-\xi)^{k-1}\ln^a(1-\xi)\ln\xi + \xi^{k-1}\ln^a\xi\ln(1-\xi) \\
&+ \int_{\xi}^{1-\xi}[(k-1)t^{k-2}\ln^a t + at^{k-2}\ln^{a-1}t]\ln(1-t)\,dt
\end{aligned}$$

yazar ve neutrix limitten yararlanılırsa

$$\begin{aligned} B_{a,0}(k,0) &= \mathcal{N}-\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^{a} t(1-t)^{-1}dt \\ &= (k-1)B_{a,1}(k-1,1)+aB_{a-1,1}(k-1,1) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonra ki teoremde $s_{a,k}(m)$ sabitleri, $a,k=1,2,...$ değerleri için

$$(1-\xi)^{k-1}\ln^{a}(1-\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}s_{a,k}(m)\xi^{m}$$

açılımıyla tanımlanır. Özel olarak,

$$s_{a,k}(l)=\begin{cases} 0, & l<a, \\ (-1)^{l}, & l=a, \\ k-l, & l=a+1 \end{cases} \tag{4.0.6}$$

yazılır.

Teorem 4.4. *[12] $a,l=1,2,...$ ve $k=2,3,...$ değerleri için*

$$B_{a,0}(k,-l)=(k-1)B_{a,0}(k-1,-l+1)+aB_{a-1,0}(k-1,-l+1)+\frac{s_{a,k}(l)}{l}, \tag{4.0.7}$$

ve özel olarak $a=1,2,...a-1$, $a,k=2,3,...$ değerleri için

$$B_{a,0}(k,-l)=(k-1)B_{a,0}(k-1,-l+1)+aB_{a-1,0}(k-1,-l+1), \tag{4.0.8}$$

$l=1,2,...$ ve $k=2,3,...$ değerleri için

$$B_{l,0}(k,-l)=(k-1)B_{l,0}(k-1,-l+1)+lB_{l-1,0}(k-1,-l+1)+\frac{(-1)^{l}}{l}, \tag{4.0.9}$$

ve $l=2,3,...,$ $k=2,3,...$ değerleri için de

$$B_{l-1,0}(k,-l)=(k-1)B_{l-1,0}(k-1,-l+1)+(l-1)B_{l-2,0}(k-1,-l+1)-\frac{(-1)^{l}(k-l)}{l} \tag{4.0.10}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

$$\int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^a t(1-t)^{-l-1}dt = \frac{1}{l}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^a t d(1-t)^{-l}$$

integralinde $u = t^{k-1}\ln^a t$ ve $dv = l(1-t)^{-l}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^a t(1-t)^{-l-1}dt &= \frac{1}{l}\left\{(1-\xi)^{k-1}\ln^a(1-\xi)\xi^{-l} - \xi^{k-1}\ln^a\xi(1-\xi)^{-l}\right\} \\
&- \frac{1}{l}\int_{\xi}^{1-\xi}[(k-1)t^{k-2}\ln^a t + pt^{k-2}\ln^{a-1}t](1-t)^{-l}dt \\
&= \left\{\frac{(1-\xi)^{k-1}\ln^a(1-\xi)}{l\xi^l} - \frac{\xi^{k-1}\ln^a\xi}{l(1-\xi)^l}\right\} \\
&+ \frac{1}{l}\int_{\xi}^{1-\xi}[(k-1)t^{k-2}\ln^a t + pt^{k-2}\ln^{a-1}t](1-t)^{-l}dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$\begin{aligned}
B_{a,0}(k,-l) &= \mathop{\mathcal{N}-\lim}_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{1-\xi} t^{k-1}\ln^a t(1-t)^{-l-1}dt \\
&= \frac{s_{a,k}(l)}{l} + 0 + (k-1)B_{a,0}(k-1,-l+1) + pB_{a-1,0}(k-1,-l+1)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.0.7) eşitliği ispatlanmış olur. Ayrıca (4.0.6) eşitliği kullanıldığında,

- $l < a$ için $s_{a,k}(l) = 0$ olduğundan (4.0.8) eşitliği,
- $l = a$ için $s_{a,k}(l) = (-1)^l$ olduğundan (4.0.9) eşitliği,
- $l = a+1$ için de $s_{a,k}(l) = k-l$ olduğundan (4.0.10) eşitliği

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.5. *[12] $B_{a,0}(k,-l)$ fonksiyonu, $l = 1,2,\ldots$ ve $a,k = l+2, l+3,\ldots$ değerleri için standart formdaki $B_{i,0}(j,1)$ fonksiyonlarının doğrusal toplamları şeklinde yazılır. Özel olarak $l = 1$ için*

$$\begin{aligned}
B_{a,0}(k,-1) &= (k-1)(k-2)B_{a,0}(k-2,1) \\
&+a(2k-3)B_{a-1,0}(k-2,1) + a(a-1)B_{a-2,0}(k-2,1)
\end{aligned} \tag{4.0.11}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. (3.2.22) eşitliği, Sonuç 4.6'nın $l=0$ için doğru olduğunu gösterir. Tümevarım yöntemini kullanılırsa $l=1$ ve $a,k=l+2,l+3,...$ değerleri için

$$\begin{aligned}
B_{a,0}(k,-1) &= (k-1)B_{a,0}(k-1,0)+pB_{a-1,0}(k-1,0)\\
&= (k-1)[(k-2)B_{a,0}(k-2,1)+pB_{a-1,0}(k-2,1)]\\
&+ a[(k-2)B_{a-1,0}(k-2,1)+(a-1)B_{a-2,0}(k-2,1)]\\
&= (k-1)(k-2)B_{a,0}(k-2,1)\\
&+ a(2k-3)B_{a-1,0}(k-2,1)+a(a-1)B_{a-2,0}(k-2,1)
\end{aligned}$$

doğru olur. Şimdi $l=1,2,...$ için (4.0.11) eşitliği doğru olsun. O zaman (4.0.7) eşitliğinde $a>l$ için $s_{a,k}(l)=0$ olur.
$l+1$ için

$$\begin{aligned}
B_{a,0}(k,-l-1) &= (k-1)B_{a,0}(k-1,-l)+pB_{a-1,0}(k-1,-l)\\
&= (k-1)[(k-2)B_{a,0}(k-2,-l+1)+pB_{a-1,0}(k-2,-l+1)]\\
&+ a[(k-2)B_{a-1,0}(k-2,-l+1)+(a-1)B_{a-2,0}(k-2,-l+1)]\\
&= (k-1)(k-2)B_{a,0}(k-2,-l+1)\\
&+ a(2k-3)B_{a-1,0}(k-2,-l+1)+a(a-1)B_{a-2,0}(k-2,-l+1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.6. *[12] $a=1,2,...$ değerleri için*

$$B_{a,1}(0,1)=(-1)^{a+1}a!\zeta(a+2) \tag{4.0.12}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. Kısmi integral yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1}\ln^a t\ln(1-t)dt &= \frac{1}{a+1}\int_{\xi}^{1-\xi}\ln(1-t)l\ln^{a+1}t\\
&= \frac{1}{a+1}[\ln\xi\ln^{a+1}(1-\xi)-\ln^{a+1}\xi\ln(1-\xi)]\\
&+ \frac{1}{a+1}\int_{\xi}^{1-\xi}(1-t)^{-1}\ln^{a+1}t\,dt
\end{aligned}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının $\xi \to 0$ için neutrix limiti alınırsa

$$\begin{aligned} B_{a,1}(0,1) &= \mathcal{N}-\lim_{\xi \to 0} \int_{\xi}^{1-\xi} t^{-1} \ln^a t \ln(1-t)dt \\ &= \frac{1}{a+1} B_{a+1,0}(1,0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.2.26) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} B_{a,1}(0,1) &= \frac{1}{a+1}(-1)^{a+1}(a+1)!\zeta(a+2) \\ &= (-1)^{a+1}a!\zeta(a+2) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Abromowitz M., Stegun I. A., Editors, 1992, Handbook of Mathematical Functions with Formulas , Graphs and Mathematical Tables, Reprint of the 1972 Editon, Dover, New York.

[2] Al-Sirely, F., Fisher, B. 2013. Evaluation of the Beta Function. **International Journal of Applied Mathematics,** Vol. 26, 1 : 59-70.

[3] Andrews, L.C., Special Functions for Engineers and Applied Mathematics, New York, 1985.

[4] Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. 1999. Special Functions. Vol 71. Cambridge University Press.

[5] Bell, W. W., 1968. Special Functions for Scients and Engineers. Dover Puclications, Inc.

[6] Van der Corput, J. G. 1959. Introduction to the Neutrix Calculus. **J.Analyse Math.,** 7 : 291-398.

[7] Fisher, B., Kuribayashi, Y. 1987. Neutrices and the Beta Function. **Rostock Math. Kolloq.,** 32: 56-66.

[8] Fisher, B., Kuribayashi, 1987. Neutrices and the Gamma Function. **The Journal of the Faculty of Education Tottori University,** 36 : 1-2.

[9] Fisher, B., Kuribayashi, 1988. Some Results on the Gamma Function. **The Journal of the Faculty of Education Tottori,** 37 : 2.

[10] Fisher, B. 1989. A Result on the Beta Function. **Rostock Math. Kolloq.,** 36 : 65-72.

[11] Fisher, B., Kılıcman, A., 2012. Some Results on the Gamma Function for Negative Integers. **Applied Mathematics and Information Sciences an International Journal** 2 : 173 - 176.

[12] Fisher, B. 2013. Results on the Beta Function. **Sorajevo Journal of Matematics,** 9 (21) :101-108.

[13] Gel’fand, I. M., Shilov, G. E. 1964. Generalized Functions, Vol. I. Academic Press.

[14] Hadamard, J. 1952. Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differntial Equations. Dover Publications, Inc., New York.

[15] Lebedev, N., N., 1972. Special Functions and Their Applications. Dover Puclications, Inc.

[16] Ozcag, E., Fisher, B. 1991. On Partical Derivatives of the Beta Function. **Rostock Math. Kolloq.,** 45 : 43-56.

[17] Rradshhteyn I. S., Ryzhik, 2000, **Tables of Integrals, Series and Products**, Academic Press, San Diego.

[18] Srivastava, H., M., Choi, Junesang, 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions. **Kluwer Academic Publishers**, London.

[19] Wang, Z.X.; Guo, D.R.; Special Functions, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Burçin YAMEN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Aydın, 05.05.1990

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	burcinyamen@gmail.com