T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
2020-YL-037

ÜSTÜN YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Duygu DİNAMİT

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Serhan ULUSAN

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencisi Duygu DİNAMİT tarafından hazırlanan Üstün Yetenekli Öğrencilerin Matematiksel İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi başlıklı tez, 02/07/2020 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Işıkhan UĞUREL	Dokuz Eylül Üniversitesi	
Üye :	Doç. Dr. Ahmet BİLDİREN	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Serhan ULUSAN	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu (tezin türü) tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ………Sayılı kararıyla ………………..(tarih) tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

04/08/2020

Duygu Dinamit

ÖZET

ÜSTÜN YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Duygu DİNAMİT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Serhan ULUSAN

2020, 134 sayfa

Bu araştırmada, 2019-2020 eğitim öğretim yılında Gaziantep ilindeki bir Bilim ve Sanat Merkezine (BİLSEM'e) devam eden üstün yetenekli 11. sınıf öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Araştırma ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenen öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Çalışma grubuna katılım ölçütü olarak; öğrencilerin BİLSEM'e devam süreleri, İspat Görüşme Formundan ve İspat Tutum Ölçeğinden elde edilen veriler, matematik öğretmenlerinin öğrencilerin başarılarına yönelik görüşleri esas alınmıştır. Araştırmanın örneklemini belirlemek için yirmi beş öğrenciye 'İspat Görüşme Formu' ve 'İspat Tutum Ölçeği' uygulanmıştır. Görüşme formundan ve tutum ölçeğinden elde edilen veriler ve öğretmenlerinin görüşleri göz önünde bulundurularak klinik görüşme için beş öğrenci seçilmiştir. Öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelenmesi için araştırmacı tarafından hazırlanan 'İspat Klinik Görüşme Formu' uygulanmıştır. Klinik görüşmelerden elde edilen veriler, betimsel analiz tekniği ile Polat'ın (2018) analiz süreci aşamalarına göre analiz edilmiştir. Öğrenciler genel olarak ispatı anlayabilmiş ancak ispata yönelik yanlış ya da eksik yaklaşımlarda bulunmuş, uygun strateji geliştirmekte zorlanarak ispat sürecine dair açıklamalar yapamamışlardır. Elde edilen bulgulara göre üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma yeterlikleri bazında ispata yönelik bilgi/görüş ve tutuma sahip oldukları ancak ispat yapma sürecine dair becerilerinin/davranışlarının yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel İspat, İspat Yapma, İspat Süreci, Üstün Yetenekli Öğrenci

ABSTRACT

THE INVESTIGATION OF MATHEMATICAL PROVING PROCESSES OF GIFTED STUDENTS

Duygu DİNAMİT

Master Thesis, Department of Mathematics and Science Education

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Serhan ULUSAN

2020, 134 pages

In this study, it is aimed to investigate the mathematical proving processes of gifted students of 11th grade who attend a Science and Art Center (BILSEM) in Gaziantep in 2019-2020 academic year. In the research, case study, one of the qualitative research methods, was used. The research was carried out with students who determined by criterion sampling method. As a criterion for participation in the study group; the students 'attendance time to BILSEM, data obtained from the Proof Interview Form and the Proof Attitude Scale, the opinions of mathematics teachers about the students' achievements were taken as basis. In order to determine the sample of the research, 'The Proof Interview Form' and 'The Proof Attitude Scale' were applied to twenty-five students. Five students were selected for the clinical interview considering the data obtained from the interview form and attitude scale and the opinions of their teachers. 'The Proof Clinical Interview Form' which is prepared by the researcher was applied to examine proving processes of the students. The data which obtained from the clinical interviews were analyzed by using the descriptive analysis technique according to Polat's (2018) analysis process stages. The students were able to understand the proof in general, but made wrong or incomplete approaches to the proof, unable to make explanations about the proof process with having difficulty in developing the appropriate strategy. According to the findings, it has been concluded that gifted students have knowledge/opinion and attitude on proof, but their skills/behaviors for regarding the proving process are insufficient.

Key Words: Mathematical Proof, Prove, Proving Processes, Gifted Student

ÖNSÖZ

Çalışmaya başladığım günden bugüne kadar üzerimde büyük emeği olan, engin bilgisinden faydalandığım, her konuda ve her zaman bana yardımcı olan, herhangi bir sorun yaşadığımda fikirleriyle bana yol gösteren, tezimin her aşamasında bana zaman ayırıp görüş ve katkılarını esirgemeyen, bana her zaman güvenen, çok kıymetli tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Serhan ULUSAN'a gönülden teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli zamanlarını bana ayırarak yardımlarını esirgemeyen değerli bilgilerini benimle paylaşan hocalarım Doç. Dr. Ersen YAZICI ve Dr. Öğr. Üyesi Deniz ÖZEN ÜNAL'a çok teşekkür ederim. Tezimin savunulması esnasında jürilerim olan Prof. Dr. Işıkhan UĞUREL ve Doç. Dr. Ahmet BİLDİREN'e çalışmamla ilgili vermiş oldukları geri bildirimler için teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her daim yanımda olan, maddi manevi desteğini esirgemeyen, bana güvenen, tecrübelerini, fikirlerini paylaşan, tez yazım aşamasında beni bir an bile yalnız bırakmayan, bana hep mükemmel bir ailenin ferdi olduğumu hatırlatan, eğitim hayatımın en büyük destekçileri babam Ali DİNAMİT, annem Gülserin DİNAMİT ve kardeşlerim Ülkü DİNAMİT ve Kâmil DİNAMİT'e çok teşekkür ederim.

Duygu DİNAMİT

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR DİZİNİ

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

BİLSEM: Bilim ve Sanat Merkezi

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi)

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

EKLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumu, amacı, önemi, problem cümlesi, alt problemleri, sayıtlıları, sınırlılıkları ve araştırmadaki tanımlar, kısaltmalar verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Matematik; önceki bilgiler ile birlikte yeni öğrenilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe geçtiği bilim dalıdır (Moralı vd., 2006). Bir düşünme biçimi olan matematik (Baki vd., 2002), sayılarla işlemler öğretmekten ziyade sorgulayabilen, düşünebilen, neden-sonuç ilişkilerini analiz ederek çıkarımlar yapabilen, tahminlerde bulunabilen, kavramlar arasında ilişkilendirme yapabilen bireyler yetiştirmeyi amaçlar. Matematikte kavramları anlama, nedenleri açıklama ve var olan ilişkileri ortaya koyma sadece ispat ile mümkündür. İspat matematiği matematik yapan şeylerin en önemli bölümünü oluşturmaktadır (Padula, 2006). Bu yüzden ispatsız matematik olamayacağından matematiğin temelinin ispat olduğu söylenebilir. Tall (2014) ispatın matematiksel olarak gelişiminin çok erken yaşlarda başladığını ve bu gelişimin zamanla ardışık düzeylerde devam ederek ilerleyeceğini söylemiştir (Akt: Çontay, 2017). Buradan hareketle ispatın matematiğin önemli bir bileşeni olduğu (Hanna, 2000) ve her sınıf düzeyinde yer alması gerektiği söylenebilir.

Matematikte bir teorem, önerme ya da ifade ile ilgili olarak yapılan ispatlar, bilginin ortaya çıkış noktasını öğrenmede, ispat sürecindeki işlemler arası ilişkileri kavramada ve sonucu anlamlandırmada önemli bir role sahiptir. Neden sonuç ilişkisini analiz ederek kavramları temellere oturtmayı sağladığından ezberciliği azaltmada da önemli bir yöntemdir (Pekşen Sağır, 2013). Bu yüzden matematik eğitimi araştırmalarında son yıllarda, akıl yürütme, ispat ve muhakeme etme gibi konular, ön plana çıkmaktadır (Heinze ve Reiss, 2003). Öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ile ilgili görüşlerini, inançlarını, ispat yapma süreçlerini, ispatla ilgili öğrenme güçlüklerini ve ispat şemalarını belirlemeye yönelik çok sayıda araştırma yapılmıştır (Recio ve Godino, 2001; Knuth, 2002; Almeida, 2003; Raman, 2003; Harel ve Sowder, 2007; Keçeli Bozdağ, 2012; Güler, 2013; Karahan, 2013; Yılmaz, 2015; Çontay, 2017; Barak, 2018; Polat, 2018; Yıldız, 2019).

Matematikte ispatın yeri ve öneminin artmasıyla birlikte, farklı yaş seviyesindeki öğrencilerin ispat yapma süreçleri, ispat ile ilgili görüşleri ve ispat sürecinde karşılaştıkları güçlükler matematik eğitimi alanında araştırma konusu olmuştur. Ancak araştırmaların sonucunda ispat yapmanın ilköğretim, ortaöğretim ve yüksek öğretim olmak üzere eğitimin hangi aşamasında olursa olsun öğrencilerin ispat konusundaki bilgi eksiklikleri, süreçte yaşadıkları güçlükler, başarılı olamadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, korktukları, genellikle sevilmeyen bir süreç olarak yapılandığı ortaya çıkmıştır (Özer ve Arıkan, 2002; Almedia, 2003; Moralı vd., 2006; Uğurel ve Moralı, 2010). Arslan ve Yıldız (2010) lise öğrencilerinin ispatlama ile ilgili sorulara cevap veremediğini, matematiksel becerilerden biri olan ispatlamada diğer becerilerden daha çok sıkıntı çektiklerini belirtmiştir. Ayrıca yaptıkları çalışmalarda öğrencilerin bu konudaki başarısızlığının da ezbere dayalı verilen eğitim sonucu öğrencilerin muhakeme etme ve ispat yapma fırsatlarının kısıtlandığını öne sürmüşler bu konuda gerekli düzenlemelerin yapılması gerektiğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin ispatlamada karşılaştıkları güçlüklerin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmalar, lise ve üniversite seviyesindeki öğrencilerin sadece ispat yapmada değil ispatın ne olduğunu hatırlamada, ispatı tanımlamada bile zorluk yaşadığını ortaya koymaktadır (Moore, 1994'den Akt: Raman, 2003). Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini konu alan araştırmaların yanında ispat algısının ne olduğu ve nasıl şekillendiği de önemli görülmekte bu yönde araştırmalarda bulunmaktadır (Uğurel, 2012).

Matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olan ispat konusunda; alan yazına bakıldığında öğrenciler, öğretmen adayları veya öğretmenlerle yapılan çalışmalar yer almaktadır. Bunun yanı sıra yurt dışında üstün yetenekli öğrencilerle ilgili matematiksel ispat çalışmaları olsa da ispat sürecinin incelendiği Sriraman, 2005; Lee, 2005; Yim, Song ve Kim, 2008; Lee, Park ve Jung, 2009 gibi az sayıda da olsa çalışma bulunmaktadır. Yurt içinde ise üstün yetenekli öğrencilerle ilgili ispat konusunda Uğurel vd., 2016; Öztürk vd., 2017 gibi çalışmalar bulunmakta fakat ispat yapma sürecinin incelendiği bir çalışmanın henüz olmadığı görülmektedir. Buradan hareketle çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca bu araştırma sonuçlarının bu alanda çalışma yapacak diğer araştırmacılara yarar sağlayacağı ve yeni tartışma olanakları oluşturacağı da düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, matematik alanında üstün yetenekli olan lise öğrencilerinin matematiksel ispat yapabilme süreçlerinin incelenmesi olarak belirlenmiştir. Bu sayede öğrencilerin ispat yapmadaki görüşlerinin ve ispat yapma sürecindeki bilgilerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ayrıca çalışmanın bir diğer amacı, öğrencilerin; akıl yürütme, ilişkilendirme, tahminler yapma ve bilgilerini yeniden yapılandırmalarını sağlayarak öğrenmelerinin yanı sıra keşfederek sonuçlara ulaşmalarını ve yeni problem durumlarına çözümler üretmelerine katkıda bulunmaktır.

1.3. Araştırmanın Önemi

Matematiksel ispat, matematikte önemli bir yere sahip olmakla birlikte matematik biliminin merkezi, matematiğin temelidir (Knuth, 2002; Almeida, 2003). Çünkü matematiksel ispat; tahminler yapma, kavramları ilişkilendirme, kavramlar ve konular arası ilişkileri ortaya çıkarma, matematiksel ifadeleri doğrulama ve yeni bilgileri genellemeyi içerir (Schabel, 2005). Bu sayede matematiksel ispatın, öğrencilerin matematikte öğrendiği bilgileri yeniden yapılandırmalarına olanak sağlayacağı söylenebilir. Bu sebeple matematik eğitiminde ispat öğretimine artan bir ilgi vardır. Bu ilgi matematiğin içindeki onaylamanın temel rolü tarafından ve matematiksel ispatın anlaşılmasında ve yapılandırılmasında öğrencilerin düşük seviyede olduğundan kaynaklanmaktadır (Recio ve Godino, 2001). Çünkü öğrenciler, genelde ispat yapmaktan kaçınmaktadır. Bu da öğrencilerin ispat yapma ihtiyacına gerek duymadıkları anlamına gelmekte (Schabel, 2005) ve ispat yapma düzeylerinin düşük seviyede kalmasına neden olmaktadır.

İspatlar yoluyla, öğrencilerin öğrenmeleri beklenen matematiksel bilgilerin, dayanaklarını anlamaları ve öğrenmenin kalıcı olması sağlanacaktır. Ayrıca, karşılaştıkları bir problem için oluşturdukları çözüm sürecini matematiksel cümlelerle ifade etmelerine de katkıda bulunacaktır. Çünkü ispat, öğrencilerin matematikte karşılaştıkları problem durumlarını çözebilmeleri için gerekli olan matematiksel bilgileri ilişkilendirme, strateji geliştirme ve bir araç olarak kullanılabilme özelliklerine sahiptir (Mariotti ve Balacheff, 2008). Ayrıca yapılan araştırmalarda ispatın öğrencilerin matematiksel bilgileri öğrenmelerinde; doğrulama, anlamlandırma, açıklama, sistematikleştirme, keşfetme, iletişim, deneysel bir teori oluşturma, bir tanımın anlamını ya da bir varsayımın sonuçlarını keşfetme, bilinen gerçeklerin yeni bir çerçeve içine dahil edilmesi ve böylece yeni bir bakış açısı oluşturma gibi becerileri kazanması şeklinde ifade edilmiştir (Hanna, 2000). Ayrıca matematiksel ispat öğrencilerin kendilerine verilen bir problem için düşünmelerini, farklı stratejiler üretmelerini, neden-sonuç ilişkisi kurmalarını, geliştirdikleri çözüm yolu üzerinde tartışarak matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacaktır.

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM, 2000) tarafından, öğrencilerin öğrenim hayatlarının ilk yıllarından itibaren ispat yapmaya başlamaları önerilmektedir. Ayrıca NCTM (2000) dokümanında oluşturulan Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlarda, Beş Süreç Standardı içerisinde yer alan "Akıl yürütme ve ispat standardı" çerçevesinde anaokulu öncesi dönemden 12. sınıfa kadar hazırlanan öğretim programları bütün öğrenciler için; akıl yürütme ve ispatı, matematiğin temel bileşenleri olarak görme, matematiksel varsayımları oluşturma ve inceleme, matematiksel iddiaları ve ispatları geliştirme ve değerlendirme, ispat yöntemleri ve akıl yürütmenin çeşitli tiplerini seçme ve kullanma kazanımlarını sağlamalıdır (Dede, 2012) ifadesi yer almaktadır.

Matematiğin kavranmasında, gelişmesinde ve anlamlı hale gelmesinde bu kadar önemli rolü olan ispatın ve ispat yapma süreçlerinin kapsamlı bir şekilde ele alınarak incelenmesi öğrencilerdeki anlama ve düşünme yollarının keşfedilmesi, bu süreçlerin geliştirilmesi, öğrencilerin ispatı anlaması ve ispat yapması için uygun ortamların oluşturulması ve eğitim kalitesinin artması açısından faydalı olacaktır. Öğrencilerin çoğu nasıl ispatlayacağını, ispatlamaya nereden başlayacağını, ispatlama sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanacağını bilmemektedir (Öztürk, 2017). Öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları sorunların nedenini anlamak için öğrencilerin ispatlama süreçlerini incelemek gerekmektedir (Öztürk vd., 2017).

Literatürde karşılaşılan çalışmaların bütününde ispat, matematiğin ayrılmaz bir bileşeni olarak karşımıza çıkmaktadır (Hanna, 2000; NCTM, 2000). Bu nedenle ilköğretim ve ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerin matematik öğretiminde matematiksel ispat yapma üzerinde durulması, öğrencilerin ispatla karşı karşıya getirilmesi, öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin gelişmesi yönünden önemli olacaktır (Moralı vd., 2006).

Matematiksel ispatla ilgili birçok araştırma bulunmaktadır. Bu araştırmalardan bazılarında; öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri (Moralı vd, 2006; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler vd., 2012; Kayagil, 2012; Turğut vd., 2013; Özdemir ve Kaplan, 2014) matematiksel ispat yapma süreci (İpek, 2010; Güler, 2013; Karahan, 2013; Pekşen Sağır, 2013; Polat ve Akgün, 2016; Şahin, 2016; Barak, 2018; Polat, 2018), ve öğrencilerin ispat yapmada yaşadıkları güçlükleri belirlemeye çalışılmıştır (Polat ve Akgün, 2016; Yıldız, 2019). Yapılan araştırmalara bakıldığında, öğretmenler (Knuth, 2002), öğretmen adayları (Moralı vd., 2006; Ünveren, 2010; Öçal ve Güler, 2010; Gökkurt vd., 2014) ve öğrenciler (Özer ve Arıkan, 2002; Uğurel ve Moralı, 2010; Urhan ve Bülbül, 2016) ispat yapmada zorluk yaşamaktadırlar. Öğrencilerin ispat yapmayı öğrenmede veya ispat yapmada karşılaştıkları güçlük, istisnasız ispatın öğretimi konusunda gerçekleştirilen bütün matematik eğitimi araştırmalarında çözümlenmeye çalışılan temel sorulardan biri olmuştur. "Neden bunu ispatlamak zorundayız?" sorusu, öğrencilerce en çok sorulan sorudur (De Villiers, 1999). Öğrenciler ispat yapmanın gerekliliğini, öğretmenin beklentisini yerine getirmek ve sınavları geçmenin ötesinde görememektedirler (Almeida, 2003).

İlgili alan yazın incelendiğinde; yurt içinde ispat konusunda öğrenciler, öğretmen adayları veya öğretmenlerle yapılan çalışmalar bulunmakla birlikte üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelendiği bir çalışma henüz bulunmamaktadır. Üstün yetenekli öğrenciler zihinsel, fiziksel, öğrenme ve yaratıcılık özellikleri bakımından yaşıtlarına göre öğrenmeye açık, gözlem yapmada dikkatli ve başarılı, karşılaştıkları birçok problem karşısında çözüm üretebilen, gördükleri, okudukları, algıladıkları ve öğrendikleri arasında ilişki kurup genellemeler yapan, keşfeden, farklı düşünen, çözüm arayan, ilişki kurabilen, kolay öğrenen, soyut düşünen, eleştirel düşünen, fikirler tasarlayan ve üreten kişilerdir (Davis ve Rimm, 2004; Clark, 2013; Sak, 2013; Yılmaz, 2015; Tortop, 2018). Bu özelliklerinin yanında rutin ders içeriklerinden sıkılan, rutin ders içeriklerini kolay bulan, emsallerinden ileride oldukları için müfredat dışı konulara yönelen öğrenciler olduklarından ve uğraştıkları soruların görsel, yaratıcı, rutin dışı, üretkenlik isteyen sorular olması ve ispatında bu özellikleri barındırmasından dolayı bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi tercih edilmiştir. Üstün yetenekli öğrenciler ispatı anlayabilecek ve temel düzeyde ispatları yapabilecek bireylerdir (Öztürk vd., 2017). İspat öğrencilerin; ilişkileri açığa çıkarma, tahminler yapma, kavramları ilişkilendirme, ifadeleri doğrulama, yeni bilgileri genelleme ve öğrendikleri bilgileri yeniden yapılandırmalarına olanak sağlar. Üstün yetenekli öğrencilerin de özellikleri dikkate alındığında matematiksel ispat yapmada başarılı olacakları beklenmektedir. Dolayısıyla bu araştırma sonuçlarının bu alanda çalışma yapacak diğer araştırmacılara, ispat yapma süreci hakkında yarar sağlayacağı ve yeni tartışma olanakları oluşturacağı düşünülmektedir. Araştırma sonucunda ortaya çıkan bulgulara göre, öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçleri konusunda değerlendirmeleri yapılacak, gerekli olan iyileştirmeler için fırsat ortaya çıkacaktır. Ayrıca bu araştırmanın, konuyla ilgili alana ışık tutacağı da düşünülmektedir.

1.4. Problem Cümlesi

Bu araştırmada "Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma yeterlikleri nasıldır?" sorusuna cevap aranmaktadır.

1.4.1. Alt Problemler

Yukarıda belirlenen ana problemin çözümüne katkıda bulunmak ve çalışmanın amacını gerçekleştirmek için aşağıdaki alt problemler belirlenmiş ve bunlara yanıt aranmaya çalışılmıştır.

- Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmaya yönelik görüşleri nasıldır?
- Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmaya yönelik tutumları nasıldır?
- Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma yeterlik göstergeleri nasıldır?

1.5. Sayıltılar

- Araştırmada üstün yetenek tanısı almış öğrencilerin matematikte üstün yetenekli olduğu varsayılmaktadır.
- Araştırma süresince, öğrencilerin görüşmelerde kendilerini doğru biçimde ifade ettikleri düşünülmektedir.
- Gerek araştırmacının sormuş olduğu sorular gerekse öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar karşılıklı olarak doğru biçimde anlaşılmıştır.
- Öğrencilerin gerçekleştirilen görüşmelerde içtenlikle ve gerçek görüşlerini yansıtacak biçimde cevap verdikleri varsayılmaktadır.
- Öğrencilerin çalışma esnasında herhangi bir dış etkiye maruz kalmadıkları varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

- Araştırma Gaziantep ilinde, lise 11. sınıf düzeyinde; zekâ testi sonuçlarına göre üstün yetenekli tanısı almış, BİLSEM'e kabul edilmiş öğrencilerle sınırlıdır.
- Araştırma grubundaki üstün yetenek tanısı almış öğrencilerin matematik alanında üstün yetenekli oldukları BİLSEM öğretmenlerinin değerlendirmesi ile sınırlıdır.
- Araştırma üstün yetenekli öğrencilere uygulanan ispat görüşme formu, ispat tutum ölçeği ve ispat klinik görüşme formundan elde edilen verilerle sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Üstün Yetenekli Birey: Yaşıtlarına göre daha hızlı öğrenen; yaratıcılık, sanat, liderliğe ilişkin kapasitede önde olan, özel akademik yeteneğe sahip, soyut fikirleri anlayabilen, ilgi alanlarında bağımsız hareket etmeyi seven ve yüksek düzeyde performans gösteren bireyi ifade eder (Bilim ve Sanat Merkezi Yönergesi, 2019).

Matematiksel İspat: İddia edilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır. Bu, her durumda ve her koşulda iddianın doğru olduğunun gösterilmesidir. Başka bir deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesidir (Baki, 2008: 37).

Önerme: Doğru veya yanlış olduğu ispatlanabilen ifadelere önerme denir (Kuşlu, 2016).

Aksiyom: Matematiksel olarak ispat gerektirmeyen, doğruluğu kabul edilen ifadelere aksiyom denir (Gerstein, 2012).

Teorem: Doğruluğu varsayılan veya verilen bir takım önermenin, başka bir önermenin doğruluğunu gerektirdiğini öne süren ifadeye teorem denir (Kandamar, 2000).

Hipotez: Bir teoremde doğruluğu varsayılan veya verilen önermelerin tümüne varsayım (hipotez) denir (Kandamar, 2000).

Hüküm: Bir teoremde doğru olması gereken önermeye de sonuç (hüküm) denir (Kandamar, 2000).

1.8. Teorik Çerçeve

1.8.1. Üstün Yeteneklilik

1.8.1.1. Zekâ Kavramı

Zekâ üzerine çok sayıda araştırma yapılırken zekâ kavramı ile ilgili birçok görüş ve tanım ortaya çıkmıştır. Kimi çalışmalar zekâyı adaptasyon ile ilişkilendirirken kimi çalışmalar, öğrenip kavrayabilme yeteneği ile ilişkilendirmiştir. Bazı çalışmalarda ise zekâ, soyut kavramlar ve semboller üzerine düşünebilme yetisi ile ilişkilendirilmiştir. Araştırmacıların yaptığı tanımlardaki en yaygın unsurlar; daha yüksek düzeyde beceriler, soyut akıl yürütme, problem çözme ve karar verme gibi, öğrenme yeteneği ve çevrenin isteklerini etkili bir şekilde karşılamak için adaptasyondur (Sternberg, 1997).

Üstün yeteneğin ilk olarak Eski Sparta'da ortaya çıktığı görülmektedir. (M.Ö. 6. yy) O dönemde üstün yetenekliliği liderlik ve savaş becerileriyle ilişkilendirmişler ve 7 yaşına gelen erkek çocuklarını dövüş ve savaş sanatıyla eğitmişlerdir. M.S. 618-907 yıllarında ise Çin'de üstün yetenekli çocuklar eğitimleri için imparatorluk sarayına alınmışlardır. Osmanlı'da ise 15. yy. ortalarında II. Murat'ın başlatmış olduğu Fatih Sultan Mehmet tarafından düzenlenerek devam ettirilen, devletin üst düzey yönetimi ve idari mekanizmanın yürütülmesini sağlayan kadroların eğitilmesi için Enderun Mektebi kurulmuştur. Osmanlı sultanlarının amacı ülkenin yönetiminde görev alabilecek üstün ve özel yeteneklerin bu mektepte yetiştirilmesiydi. Bu yönleriyle ele alındığında üstün yetenek tarihi gelişim içerisinde askeri beceriler, liderlik ve soyluluk kavramlarıyla ilişkilendirilmiştir (Bildiren, 2018).

On dokuzuncu yüzyılda ise Sir Francis Galton bu konuda araştırmalarda bulunmuş ve zekâyı, bilgiyi yapılandırma ve kullanma olarak tanımlamıştır. Galton yüksek başarıyı elde etmedeki temel bileşenleri kapasite ya da yetenek, çaba ya da istek ve uğraştırıcı bir işi yapabilme gücü olarak ifade etmiştir. Ayrıca Galton bilim adamlarını, devlet adamlarını, güreşçileri, şairleri, müzisyenleri, kürekçileri de üstün yetenekliler sınıfına almıştır (Bildiren, 2018). Galton aynı zamanda bireyin yeteneklerini test edebilecek çalışmaları da ilk deneyen kişidir. Galton, zekânın kalıtımın etkisi sonucu oluştuğunu çevrenin ise zekâ üzerindeki etkisinin yok denecek kadar az olduğunu ifade etmiştir. Galton'a göre zekâ çevrenin doğru bir biçimde algılanması ve duyuların iyi çalışması ile ilgilidir. Ayrıca bu beceriler kuşaklar arası aktarım ile yeni fertlere geçirilmektedir. Bu yüzden kimi bireylerin aileleri diğerlerinden daha zeki ve güçlüdür. Aynı zamanda beyin büyüklüğü ve zekâ arasındaki ilişkiyi ilk defa ele alan kişi de Galton olmuştur (Sak, 2010).

Alfred Binet, zekâya bakış açısı ve zekâyı ölçme yöntemi yönünde Galton'dan farklı düşünerek onun görüşlerini doğru bulmamıştır. Binet zekânın yapısının karmaşık zihinsel işlevlerin çalışılması ile ortaya çıkabileceğini ifade etmiştir. Çünkü bireysel farklılıkların, basit zihinsel işlevlerin yanında karmaşık işlevlerde daha çok değişkenlik ortaya çıkarabileceğini belirtmiştir. Ayrıca Binet 1905 yılında ilk zekâ testini geliştirmiştir. Bütün çağdaş zekâ testleri arasında Binet, zekâ testlerinin babası olarak kabul edilmiştir. Lewis Terman ise Binet'in geliştirdiği testi revize ederek William Stern'in formüle ettiği IQ kavramını da kullanarak Stanford-Binet Zekâ Testi olarak bilinen zekâ testini geliştirmiştir. Terman IQ puanı 140'ın üstünde olan çocukları dahi grubuna almış ve IQ'sü yüksek üstün yetenekli öğrencileri tanılayarak çocukların gelişimini çok yönlü araştırmıştır (Sak, 2013).

Piaget ise zekâyı adaptasyon kavramıyla ilişkilendirmiştir. Ona göre zekâ, bireyin davranışlarını belirlerken çevreden aldığı iletileri kendince asimile etmesi ve buna entegre olup aradaki dengeyi kurabilmesidir. Asimile etmeden kasıt, özümlemedir. Özümleme dışarıdan gelen yeni durumları kendinde var olan şemaya yerleştirmektir. Entegre olmaktan kasıt ise çevre ile uyum sağlamaktır. Bu sayede birey çevre ile uyumunu sürdürürken, düşünsel şemasını da muhafaza etmektedir (Nicolopoulou, 2004).

Sternberg ise zekâ tanımını başarılı zekâ kuramı ile ifade etmiştir. Sternberg'e göre; bireyin kuvvetli yönlerine odaklanıp zayıf yönlerini geliştirmesi ve bir amaç belirleyerek bu amaca yönelik ilerleyebilme becerisine zekâ denilmektedir (Duman, 2013).

Gardner ise zekâyı problem çözme ve herhangi bir esere biçim verme becerisi olarak görmektedir. Ayrıca zekâ ile ilgili çoklu zekâ kuramını da geliştirmiştir. Bu kurama göre zekâyı, matematik, müzik, dil, beden, sosyal, mekân, kişisel ve doğal olarak sekiz ayrı sınıfta incelemiştir. Gardner'a göre standart ölçütlerin öğrencinin kapasitesini kesin olarak belirlemesi mümkün olmamaktadır. Birey herhangi bir eylemde bulunurken, zekânın farklı türlerini aynı anda kullanmaktadır. Bireyin bazı alanlarda yeterli başarıyı gösterememiş olması diğer alanlarda da başarısız olacağını göstermemektedir (Başaran, 2004).

1.8.1.2. Üstün Yetenek Kavramları

Zekâ, beynin bütün işlevlerinin etkili, uyumlu ve verimli bir şekilde çalışmalarının davranış üzerinde gözlemlenmesidir. Ancak üstün zekâlı kişiler zihinsel farklılıkları nedeniyle her zaman toplum içinde fark edilemeyebilir hatta üstün zekâlı kişilerin sahip oldukları sıra dışılıkları kimse fark etmeyebilir. Ne zaman ki zihinsel farklılık bireyin sosyal ve duygusal özelliklerini de etkilemeye başlar birey o zaman toplum tarafından bir kişilik kazanır. Ancak toplum bu durumu sindiremediği gibi üstün zekâlı kişileri anormal sınıfına koyar (Sak, 2013).

Zekâ kavramını tarihsel bir gelişim içinde inceleyecek olursak; zekâ kavramı ile ilgili ilk düşünceler, insan zekâsının bölümlerinin basit duygusal, algısal ve motor süreçlerinin olduğunu düşünen Sir Francis Galton'a aittir. Galton problem çözme, öğrenme gibi bilişsel işlemlerin de zekâ ürünü olduğunu ve zekânın sosyal ve aileler arasında farklılaştığını ve kalıtımsal olduğunu savunmuştur (Bildiren, 2018).

Fransız psikoloğu Alfred Binet (1908) zekânın; bir yönergeyi akılda tutabilme ve anlama yeteneği, karşılaşılan bir duruma uyum sağlama veya istenildiği gibi davranışta bulunma yeteneği, bireyin özeleştiri yaparak kendini denetleyebilme yeteneğinin bir arada bulunması ile açıklanabileceğini savunmuştur. Terman (1925) zekâyı "yeni bir kavram üretme ve kavramların önemli noktalarını oluşturabilme yeteneği" olarak ifade etmiştir. Thorndike (1927) zekâyı "doğru ya da gerçek şeklinde inceleyerek uygun ve gerekli olan yanıtlara ulaşma gücü" Thurstone (1941) ise "içgüdüsel davranışları dizginlemek, farklı anlamların olabileceğine dair değişebilen bir hayal gücü geliştirmek ve iç güdüsel davranışları somut davranışlara dönüştürebilme yeteneği" olarak ifade etmiştir. Stordart (1943) zekâyı "Bireyin soyut, zor, karmaşık, üretkenlik isteyen, amaca uygun, özgün özellikler taşıyan zihinsel davranışları yapabilme ve bu şartlarda bireyin enerjisini davranışları üzerinde toplayarak heyecanını kontrol edebilme yeteneği şeklinde Piaget (1970) ise zekâyı organizmanın çevreyle uyumu şeklinde açıklamıştır. Young ve Tyre (1992) göre zekâ yeni bir duruma uyum, kavramlar arasındaki ilişkiyi anlayabilme yeteneği, yeni durumlara çözüm bulma becerisi ve tecrübeleri doğrultusunda iç güdüsel tepkilere ket vurma ve aktif bir birey olma yeteneği olarak tanımlanmıştır. Stenberg (1997) analitik, sentezci ve pratik olmak üzere üç tür zekâdan bahsetmiştir. Mantıksal düşünmeyi ve akıl yürütmeyi sağlayan analitik, yaratıcılığı ve yeni durumlara çözümler bulmayı ele alan sentezci, analitik ve sentezci zekâyı bir arada kullanarak sorunları çözmeyi hedef alan zekâ türünü ise pratik zekâ olarak tanımlamıştır (Akt: Bildiren, 2018).

Gardner insanların bireysel farklılıklarından hareketle benzer ve farklı yönlerinin, sahip oldukları yetenek ve potansiyellerinin zekâ alanlarını oluşturduğunu savunmuştur. Bu farklılıklardan hareketle Gardner bireylerin bedensel/kinestetik, dilsel/sözel, müziksel/ritmik, mantıksal/matematiksel, sosyal/kişiler arası, kişisel/içsel, görsel/mekânsal doğacı ve varoluşçu olmak üzere 9 farklı zekâ alanına sahip olduğunu savunmuştur (Bildiren, 2018).

Ancak son zamanlarda üstün yetenekli olduğu düşünülen kişilerin, zekâlarının sadece belirli sınav ve testlerden elde ettiği puanlarla ölçülüp ölçülemeyeceği tartışılmaktadır. Buna örnek olarak Marland Raporu’na göre; genel zihinsel ve özel akademik yetenek, yaratıcılık, liderlik, sanat ve spor alanlarında gösterilen üstün başarı ve performanstır. Colombus grubuna göre; üstün zihinsel yetenekler ile beraber yoğun duyguların birleşimiyle sıra dışı tecrübelerin oluşturduğu paralel olmayan gelişimidir (Tortop, 2018).

Marland Raporu’nda, “Üstün zekâlı ve yetenekli çocuklar, bu konuda uzman kişiler tarafından profesyonel bir şekilde tanılanmış ve herhangi bir alanında üst düzey kapasiteye sahip olan bireylerdir. Bu çocuklar akranlarına göre normal sınıf ortamlarında verilen eğitimden farklı bir eğitime ihtiyaç duyarlar ve ancak kendileri için oluşturulmuş özel bir eğitimle topluma ve kendilerine faydalı bireyler olabilirler. Bu çocuklar genel zihinsel, özel akademik, yaratıcı-üretken, liderlik, sanat veya psikomotor alanlardan en az birinde üstün yeteneğe sahip olan veya bu alanlardan en az birinde üstün başarı gösteren çocuklardır” (Marland, 1972: 8) ifadesi kullanılmaktadır. Ülkemizde ise üstün yetenekli birey “Yaşıtlarına göre daha hızlı öğrenen; yaratıcılık, sanat, liderliğe ilişkin kapasitede önde olan, özel akademik yeteneğe sahip, soyut fikirleri anlayabilen, ilgi alanlarında bağımsız hareket etmeyi seven ve yüksek düzeyde performans gösteren birey” olarak tanımlanmıştır (BİLSEM Yönergesi, 2019: 2).

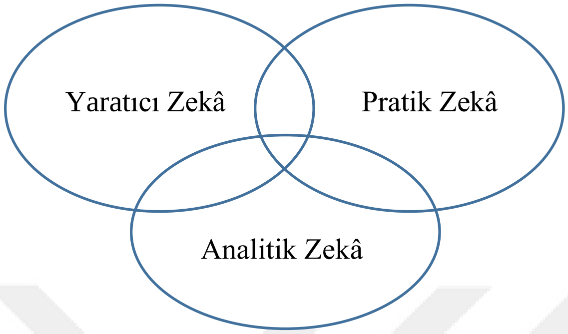
Üstün yetenekli bireyler düşünme, sorgulama, çıkarımda bulunma gibi becerilerin yanında hipotez oluşturma, deneyleri tasarlama, modeller oluşturarak çözümleme gibi bilimsel araştırma yapma becerilerini de kazanabileceklerinden (Tortop, 2016) üstün yetenekli bireylere geleceğin matematikçileri gözüyle bakmak mümkündür (Sriraman, 2005). Alan yazında üstün yetenekliliği açıklamak amaçlı birçok tanım yapılmış ve bu tanımlar eğitim uygulamalarını da etkilemiştir. Bu çalışmada ise BİLSEM'e göre üstün yetenekli olarak tanılanmış, yaşıtlarına göre hızlı öğrenen, yaratıcı-üretken, özel akademik yeteneğe sahip, soyut fikirleri anlayabilen, matematikte yüksek düzeyde performans gösteren bireyler olarak tanımlanan öğrenciler üstün yetenekli olarak kabul edilmiştir.

1.8.1.3. Üstün Yeteneklilik Kuramları

Yaşanılan bir yerin kültürü ve değerleri üstün yeteneklilik konusunda farklı kuramların ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Sternberg'in Üstün Yeteneklilik Kuramı, Renzulli'nin Üç Halka Kuramı, Beşgen Kuramı, Abraham Tannenbaum'un Üstün Yetenek Kuramı, Taylor'un Çoklu Yetenek Kuramı oluşturulan bu kuramlar arasındadır.

Sternberg'in Üstün Yeteneklilik Kuramı

Sternberg insanları üç farklı beceri ile üstün yetenekli olup olmadığı konusunda sınıflandırmıştır. Bu beceriler yaratıcı zekâ, pratik zekâ ve analitik zekâdır (Sak, 2013). Sternberg'e göre bu üç beceriye de sahip olan kişiler üstün yetenekli kişilerdir. Analitik zekâ becerileri; bireyin bir durumu içselleştirmesinde, karşılaştırma yapabilmesinde, bir sorunu çözümlemesinde, ölçme ve hüküm vermesinde etken olan becerilerdir. Bu beceriler; dilsel benzerliklere, eş anlamlı ya da zıt anlamlı sorunlara, sayı dizilerine ve benzer işlemlere yönelik yetenekleri belirtmektedir. Bu becerileri WISC, Stanford-Binet gibi zekâ testleri ile belirlemek olasıdır ancak bu testlerle yapılan belirleme, doğrudan bu becerilere yönelik bir ölçüm olmayacaktır. Yaratıcı zekâ, senteze dayalı orijinal ve kaliteli düşünceler oluşturulmasını sağlayan becerilerdir. Sanatsal ya da bilimsel işlerde bu becerilere sahip kişiler, diğer insanlara göre daha verimli olmaktadır. Bu beceriler Torrance'ın Yaratıcı Düşünce Testi, Sözel, Şekilli testleri ile ölçülebilmektedir. Pratik zekâ da bireyin yaşantısında, bulunduğu ortamda başarılı olmasında etken olan becerilerdir. Eğitim sistemlerinde de içerik uygulamalı becerilerden yararlanılmaktadır. Ayrıca mesleki yaşantıda da başarılı olmanın yolu bu becerilerden geçmektedir (Agaoğlu, 2016).

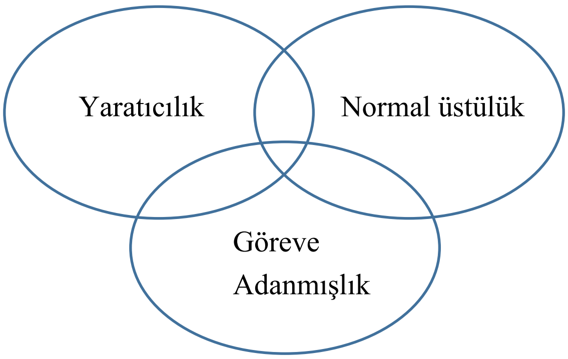


Şekil 1.1: Sternberg'in üç element üstün yeteneklilik modeli

Renzulli Üç Halka Kuramı

Renzulli üstün yetenekliliği tek boyutlu yapıdan çıkararak üç alanda insan davranışları arasındaki kombinasyonla ortaya çıkan bir durum olarak ifade etmiştir. Bu kuramda üstün yetenekliler için belirlenmiş olan normalin üstü zekâ, yaratıcılık ve göreve adanmışlık kavramları vardır. Renzulli çok eleştiri alan bu kuramını, tarihteki birçok üstün yetenekli kişinin özelliklerini göz önünde bulundurarak yapmıştır (Tortop, 2018).

Üç halka kuramı, yaratıcılık için insan potansiyelinin ana boyutlarını tasvir etmeye çalışan bir teoridir. 'Üç Halka Kuramı' ismi teorinin kavramsal çerçevesinden yani, bu üç kavramın etkileşimi sonucu oluşan özelliklerin kümesi (Normal üstülük, Göreve adanmışlık ve Yaratıcılık) ve bunların insan performansının genel ve özel alanları arasındaki ilişkileri ile ilgilidir. Üç halka, üç halkaya neden olan kişilik ve çevresel faktörler arasındaki etkileşime dayalıdır (Renzulli, 2009'dan Akt: Sak, 2013).



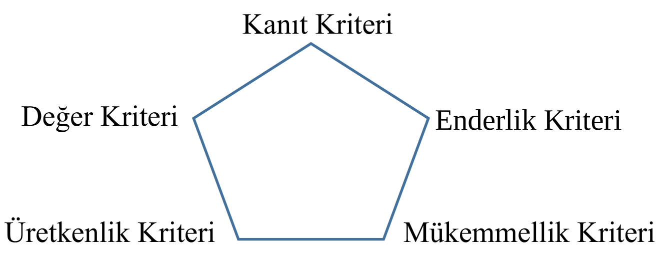
Şekil 1.2: Renzulli'nin üçlü halka kuramı

Yukarıda gösterilen şekilde de olduğu gibi, üstün yetenek için normalüstü bir beceriye de sahip olunmalıdır. Sözel ve sayısal yeteneklerin yanı sıra, çabuk ve zorlanmadan öğrenme kapasitesi de üstün yeteneklilerin başarıları açısından önemlidir. Ayrıca sorumluluk hissi de kişinin becerilerini gerçekleştirme ve geliştirme açısından önemlidir. Örneğin kişi karşılaştığı sorunları çözmekle ilgili bir istekte bulunmadığı durumda, bu sorunun çözümüne ulaşması da pek olası değildir. Ancak bu sorunun çözümü ile ilgili kendisinde bir sorumluluk hissettiğinde çözüme kavuşturması ve soruna odaklanması daha mümkün olacaktır. Bu kuram yaratıcılığı da üstün yetenekliliğin önemli bir unsuru olarak görmektedir.

Beşgen Kuramı

Stenberg, (2004) ortaya attığı kuramında bir kişinin üstün yetenekli olarak tanımlanabilmesi için değer kriteri, kanıt kriteri, üretkenlik, mükemmellik, enderlik kriteri şeklinde beş kritere sahip olması gerektiğini belirtmiştir (Akt: Sak, 2013).

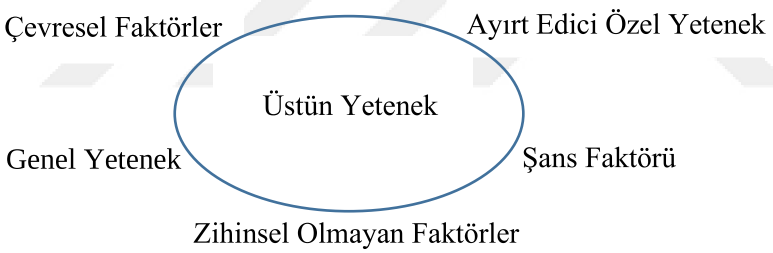
Mükemmellik kriteri; bireyin bir veya daha fazla alanda özgün, olağan üstü performans göstermesi gerektiği, enderlik kriteri; bireyin üstün olduğu yetenek alanında nadir rastlanır düzeyde performans sergilemesi gerektiği, kanıt kriteri; bireyin zekâ testlerinde üstün tanısı alabilmesi ve belli bir alanda üstünlüğünü göstermesi gerektiği, üretkenlik kriteri; bir ürün ortaya koymayı ve bunun tekrarlanır, üretime açık olması gerektiği, değer kriterinde ise bireyin toplumda değer gören bir alanda performans göstermesi gerektiğini, sıra dışı olan şeylerin toplum açısından bir değeri, faydası yoksa değerli bulunmadığı ve bununda yetenek olmadığı gerçeğini ileri sürmüş ve bu anlamda gösterilen performanslarda değer kriterinin önemine işaret etmiştir.



Şekil 1.3: Stenberg'in beşgen kuramı modeli

Abraham Tannenbaum’un Üstün Yetenek Kuramı

Abraham Tannenbaum’un kuramına göre, bireyin genel yetenek, ayırt edici özel yetenek, zihinsel olmayan faktörler, çevresel faktörler ve şans faktörüne bir arada sahip olması onun üstün yetenekli olması anlamına gelir (Sak, 2013). Bu kurama göre genel yetenek belli bir seviyenin üzerinde olması gereken IQ puanını ifade eder. Ayırt edici yetenek bireyin belli bir alanda belirgin bir performans göstererek kendi yeteneğini ortaya koymasıdır. Zihinsel olmayan faktörler başarılı olma arzusu, benlik kontrolü, sorumluluk gibi psikolojik etmenleri içerir. Çevresel faktörler bireyin doğumdan sonra karşılaştığı tüm uyaranları içerir. Bireyin yeteneği karşılaştığı uyaran sayısıyla orantılı olarak gelişecektir. Kişilerin bazı yeteneklerinin ortaya çıkması için tesadüfî bir durumda karşılaşması gerekebilir (Bozgeyikli vd., 2010).

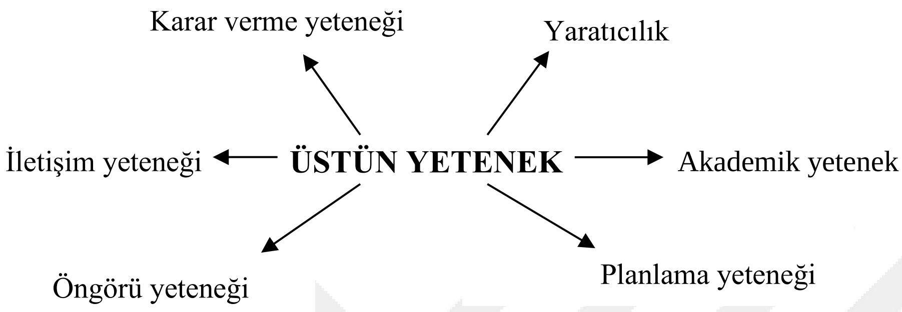


Şekil 1.4: Abraham Tannenbaum'un üstün yetenek kuramı modeli

Taylor’un Çoklu Yetenek Kuramı

Taylor üstün yetenekli tanısı koymak için çocukların sadece IQ seviyelerine bakmanın yeterli olmadığını belirtmiştir. Bununla birlikte üstün yetenekli tanısı koymak için altı farklı yeteneğin incelenmesi gerektiğini savunmuştur. Bunlar şu şekilde açıklanabilir (Sak, 2013).

- Akademik yetenek (karmaşık fikirleri anlama, tekrar hatırlama)
- Yaratıcılık (sıra dışı düşünceler)
- Planlama (işleri organize etme, sistematik yaklaşım)
- İletişim yeteneği (dili etkili ve düzgün kullanma)
- Öngörü yeteneği (olaylarla ilgili yüksek ihtimalli tahminlerde bulunma)
- Karar verme yeteneği (genellemeler yapma ve doğru yarıda bulunma)



Şekil 1.5: Taylor'un çoklu yetenek yaklaşımı kuramı modeli

Yapılan kuramları değerlendirdiğimizde üstün yetenekli birey; içgüdüsel tepkilere karşı, onların yerine hayatında somut olgular geliştirebilen, çevresindeki değişimlere karşı algısı açık, kolay uyum sağlayan, eski ve yeni bilgileri ilişkilendirebilen, yeni kavramlar oluşturmada yapıcı ve yaratıcı alt yapıya doğuştan sahip olan, doğa, güzel sanatlar, fen, matematik ve teknik bilgi isteyen alanların herhangi birinde, yaşıtlarına göre üstünlük gösteren bireylerdir.

1.8.1.4. Üstün Yetenekli Bireylerin Eğitimi

Üstün yetenekli çocukların ihtiyaç duyduğu eğitimin yaşıtlarına göre farklılık göstermesi eğitim ahlakı açısından önemli sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Üstün yetenekli çocukların eğitimine yönelik farklı düşünceler mevcutken genel olarak belirlenen ortak düşünce bu çocukların özel bir programa ihtiyaç duyduklarıdır (Levent, 2014). Bu çocukların özellikleri doğrultusunda çocuklara yönelik uygun eğitim ortamları sağlanamazsa bu durum öğretmen ve öğrenci için sıkıcı bir ortam haline gelerek hiçbir başarı sağlanamayabilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin gelişimlerini sağlamak ve desteklemek için öğrencilere uygun eğitim ortamları ve eğitim programları hazırlamak, bu öğrencilerin farklı gelişim özellikleri olduğunu göz önünde bulundurmak gerekir. Ülkemizde hazırlanan ve okullarımızda kullanılan eğitim programları normal çocuklara yönelik hazırlandığı için bu programlar üstün yetenekli çocukların ihtiyaçlarını karşılayamamakta, çocuklar için yetersiz kalmaktadır. Üstün yetenekli çocuklar okulda ve evde fark edilip desteklenmezse, öğrencilere uygun öğrenme ortamları sağlanmazsa; öğrencinin sahip olduğu özellik öğrenciye ağır gelebilir, öğrenci kendini ifade edemeyip ortamdan uzaklaşabilir, uyum sıkıntısı çekerek ilişki kurduğu her yerde sorun yaşayabilir. Mesela; öğretmenin sınıfta bu öğrencilere normal öğrenciler gibi etkinlikler yaptırması, ödevler ve çalışmalar vermesi; okulun öğrenciler için çekilmez hale gelmesine, öğrencilerin ortamdan uzaklaşmasına sebep olabileceği gibi öğrencilerin hiçbir uğraş içinde olmadan sürekli not alarak ders işlemeleri onların etkili çalışmalarını engelleyerek başarısız olmalarına da neden olabilir (Eripek vd., 2001). Ayrıca üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerine uygun hazırlanan programların yanında BİLSEM'de farklılaştırılmış öğretim programları hazırlanarak ispat çalışmalarına da yer verilebilir. Çünkü üstün yetenekli öğrenciler BİLSEM'de araştırma yapma ve proje hazırlamaya yönelik eğitimler almaktadır. Öğrencilerin daha önce yapılmış matematik projelerini anlayabilmeleri ve kendilerinin matematik projeleri hazırlayabilmeleri için ispatla ilgili temel kavramları ve kavramlar arasındaki farkındalıkları bilmeleri, ispat yapabilmeleri önemlidir (Öztürk vd., 2017).

Farklılaştırılmış öğretim Şaldırak (2012)'a göre; öğrencilerin hazırbulunuşluk, ilgi ve öğrenme biçimlerini göz önünde bulundurarak farklı öğrenme imkanlarının sağlandığı, öğrencilerin genel ve konuya özel ilgilerinin üzerinde çalışılan konuyla bütünleştirilmesine dayanan öğrencilerin kendilerini rahat hissedebilecekleri şekilde öğrenmelerine fırsat veren düşünme yolu, Tomlinson (1999)'a göre; öğrencilerin programın içeriğini keşfetmeleri için, farklı yöntemlerin kullanıldığı, süreçteki çalışmaların öğrencilerin anlamlı öğrenmelerine, kendi bilgi ve fikirlerine ulaşabilecekleri şekilde düzenlendiği ve öğrencilerin öğrendiklerini göstermek ve sergilemek için seçimlerini yapabildikleri bir öğrenme yaşantısı (Akt: Akkaş ve Tortop, 2015), Akkaş ve Tortop (2015)'a göre; öğretim sürecinde yer alan öğrencilerin ilgi, öğrenme ihtiyaçları ve öğrenme biçimlerine göre her öğrencinin öğrenme hızının dikkate alınarak düzenlenmesi şeklinde tanımlanmaktadır. Farklılaştırma her öğrencinin öğrenme sürecinde hangi noktada olduğuna, ne bildiğine ve neyi öğrenmeye ihtiyacı olduğuna duyarlıdır ve öğretimin buna göre düzenlenmesine odaklanır (Akkaş ve Tortop, 2015). Öğretimde farklılaştırma; öğrencilerin bilgiyi alma, anlamlandırma ve öğrendiklerini ifade etme aşamasında farklı imkanlar sağlayarak öğrencilerin nasıl öğreneceklerine ve öğrendiklerini nasıl kullanacaklarına kendi özelliklerine göre karar vermeleri için önemlidir. Ward (1961) "farklılaştırılmış öğretimi, ilk olarak üstün yetenekli öğrencilerin öğrenme ihtiyaçlarını karşılamak için kullanmıştır" (Akt: Bloom, 2009). Farklılaştırma kavramı üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerine göre programlarında değişiklikler meydana getirilmesini içerir. Üstün yetenekli öğrencilerin daha hızlı öğrenme, daha iyi problem çözme, soyut düşünme, kavramlar arası ilişki kurma gibi özelliklerine uygun olarak programın yeniden planlanması farklılaştırma eğitimi ile gerçekleştirilir. (Akkaş ve Tortop, 2015). Bu açıdan üstün yeteneklilerin eğitiminde farklılaştırma; zenginleştirme ve hızlandırma stratejileri kullanılarak yapılmalıdır. Tüm öğrencilerin konuya ilişkin ilgilerinin aynı olmasını beklememek gerekir. İlgi alanları farklı olan öğrencilere öğretim süreçleri boyunca çalışma ortamları sağlanmalı ve öğrencilerin hazırbulunuşluk ve ihtiyaçlarına göre hazırlanan programlar öğrenciler için ilgi çekici hale getirilmelidir (Tomlinson ve Strickland, 2005). Ayrıca üstün yetenekli öğrencilerin eğitim stratejisi veya eğitim modeli olarak Zenginleştirme, Hızlandırma, Gruplama, Mentörlük başlıklarından da bahsedilir. (Sak, 2012).

Zenginleştirme

Zenginleştirme modeli, üstün yetenekli öğrencilerin yaşıtlarıyla aynı sınıf ortamında aynı müfredata tabi tutulurken bu öğrenme ortamının etkinliklerle, çalışmalarla zenginleştirilmesini ifade eder. (Daştan, 2016). Zenginleştirme yöntemleri arasında projeler, bireysel çalışmalar, geziler yer alabilir. Üstün yetenekli öğrenciler için eğitim programının kapsamı zenginleştirme yöntemi ile genişletilebilir. Ders konularının öğretiminde yapılan çalışmalar, değişiklikler ve etkinlikler içeriğe yönelik zenginleştirme; şiir, öykü, proje gibi somut çıktılar da ürüne yönelik zenginleştirme; yaratıcı düşünme ve kritik düşünme gibi düşünme becerileri ise sürece yönelik zenginleştirme yöntemine yarar sağlayan hedeflerdir (Sak, 2012).

Hızlandırma

Bir sınıftaki bütün öğrencilerin bir konuyu öğrenmesinin ardından yeni konuya geçmek yani herkesin aynı anda ve aynı hızda öğrenmesini beklemek üstün yetenekli öğrencilerin gelişmesini olumsuz yönde etkilemektedir. Yaşıtlarına göre daha hızlı öğrenen üstün yetenekli öğrenciler diğer öğrencilerin öğrenmesini beklerken sınıfta sıkıldıklarından sınıfta uyumsuzluk oluşturmakta ve diğer öğrencileri de rahatsız edici davranışlar sergilemektedirler. Bu yüzden hızlandırma yönteminin en önemli amacı öğrencilerin sıkılmasını engellemek ve farklı bir problemin oluşmaması için önlem almaktır (Levent, 2014). Hızlandırma yöntemi farklı şekillerde yapılabilir. Bunlar; okula erken başlama, sınıf atlama, ders atlama şeklindedir (Davaslıgil, 2004). Van Tassel ve Baska (2005)'da hızlandırma yönteminin üstün yetenekli öğrencilerin sınıf içerisinde sıkılmalarını engellemenin yanında öğrencilerin yaşça kendilerinden büyük bireylerle eğitime devam etmelerinin onları duygusal ve sosyal açıdan olumsuz etkileyeceğini belirtmiştir (Akt: Bütün, 2017). Ancak Steenbergen-Hu ve Moon (2011)'da yaptıkları çalışmada üstün yetenekli bireylerde hızlandırma yönteminin öğrencilerin duygusal ve sosyal gelişimlerini olumsuz yönde etkilemediğini ortaya koymuşlardır (Akt: Sak, 2012).

Gruplama

Gruplama, birçok kaynakta aynı yeteneğe sahip olan üstün yetenekli öğrencilerin bir araya getirilerek normal eğitimlerinin dışında ayrı eğitimin verilmesi olarak ifade edilmektedir. Üstün yeteneklilerin bir arada bulunduğu gruplama eğitimin yapılacağı sınıfta öğrenciler için hazırlanmış olan özel araçların ve özel programların yer alması gerekmektedir. Bu öğrencilerin akranlarıyla ilişkiler kurabilmesi ve ortamdan uzaklaşmaması için ders dışı zamanlarda öğrencilerin normal öğrencilerle etkileşim içinde olduğu etkinlikler ve çalışmalar yapılması onların sosyalleşmesini sağlayacaktır (Tekbaş, 2004). Üstün yetenekliler için uygun sınıf ortamlarının oluşturulması, öğrencilerin hızlarına göre eğitimin sağlanması ve özel programların uygulanmasında önemli bir yere sahiptir (Bagav, 2015). Bununla birlikte Sak (2012)'da üstün yetenekli çocuklara uygulanan gruplama yönteminin yanında bu öğrencilerin gelişimlerinin dikkate alındığı özel programların uygulanmasının önemine vurgu yapmıştır. Yani gruplama yöntemi için sadece öğrencilerin bir araya getirilmesinin bir anlamı olmadığını, bu gruplama yönteminin işe yarar anlamlı hale gelmesi için özel programların uygulanmasının önemli olduğunu belirtmiştir.

Mentörlük

Goff ve Torrance (1999)'da mentörlük; bilgi ve deneyim bakımından yeterli düzeyde olmayan bireylerin, bilgi ve deneyimleri açısından kendilerinden daha iyi düzeyde olan bireylerden destek alarak hedeflerini gerçekleştirmek için iş birliği sağladığı, birlikte çalıştığı kişi olarak tanımlanmaktadır (Akt: Bütün, 2017). Torrance (1984)'a göre mentörü ya da koçu bulunan üstün yetenekli bireyler ile mentörü bulunmayan üstün yetenekli bireylerin okul başarıları arasında fark vardır (Akt: Bütün, 2017). Mentörü olan bireylerin okul başarılarının, özgüvenlerinin daha yüksek olduğu belirlenmiştir (Sak, 2012). Mentörler üstün yetenekli bireylerin zamanlarını verimli ve etkili bir şekilde kullanmaları için onlarla birlikte planlama yapar ve yapacakları çalışmalar için bir program geliştirerek zaman oluşturabilirler (Ogurlu, 2015).

1.8.1.5. Matematikte Üstün Yeteneklilik

Matematikte üstün yeteneklilik uzun yıllardan beri birçok araştırmanın yapıldığı önemli bir kavramdır. Ancak yapılan araştırmaların sonucunda matematikte üstün yetenek kavramına yönelik bir görüş birliğine varılamamış sabit bir tanım ya da açıklama yapılamamıştır. Matematiksel üstün yeteneklilik kavramı ile genel anlamda kullanılan üstün yeteneklilik kavramı birbirinden bağımsız kavramlar değildir. Genel anlamda üstün yetenekli olan birey matematikte üstün yetenekli olmayabilir ya da matematikte üstün yetenekli olan birey genel anlamda üstün yetenekli olmayabilir (Sheffield, 1999). Matematikte üstün yetenekli bireyde rastlanan cebir konusundaki işlem yapma becerisine, genel anlamda üstün yetenekli bireyde rastlanamayabilir.

Rus psikolog Krutetskii (1976)'ye göre matematiksel üstün yetenekli birey "matematiksel düşünüş" olarak isimlendirilen özel zihinsel bir organizasyona sahiptir. Krutetskii üstün yetenekli öğrenciler arasında matematik alanında 'çok iyi yapanlar' diye belirlenen öğrencilerin matematiksel düşünüş şekline sahip olduğunu belirtmektedir. Matematiksel düşünüş bireyin; dünyayı, matematiksel olmayan birçok olayı, olguyu matematiksel açıdan bakarak görmesi eğilimidir. Krutetskii "matematiksel düşünüşün" özellikle matematikte üstün yetenekli olan öğrencilerde açıkça gözlemlenebileceğini, bu tür eğilimlerin doğumdan itibaren var olabileceğini, genellikle 7 veya 8 yaşlarına kadar temel formlarda ortaya çıktığını ve daha sonra çok geniş bir karakter kazandığını ifade etmektedir (Akt: Arıkan, 2019).

Matematik alanında üstün yetenek; matematiksel açıdan akıl yürütme, tahminlerde bulunma ve matematiksel düşünceleri olağanüstü bir tarzda kavrama yeteneğidir. Matematiksel yetenek kavramını birçok kişi hızlı hesap yapabilme gücü veya düşünülmüş, oluşturulmuş matematiksel işlemleri başarılı bir şekilde aynen kullanma yeteneğine sahip olma olarak belirtmektedir. Ancak hızlı hesap yapabilme ve matematiksel işlem yeteneği kullanma gücü ne kadar iyi olursa olsun matematiksel yeteneğin tanımı iyice kavranmadığı sürece asıl yeteneğin var olduğunu gösteren davranışlar önemsenmezken, çok az öneme sahip olanlar önemliymiş gibi algılanır. Bu durumdan hareketle testlerde en yüksek netleri yapan ya da matematik derslerinin yazılı sınavlarında çok iyi notlar alan öğrencilerin matematik alanında üstün yetenekli olduğu düşüncesi doğru değildir (Niederer vd., 2003).

Wagner ve Zimmermann (1986), matematiksel üstün yetenekliliği bireyin ölçülebilir bazı yeteneklerinin bütünü olarak ifade etmektedir. Birey sahip olduğu bu yeteneklerin hemen hemen hepsinde başarılı ise bu birey matematik alanında ya da matematiğe yakın bir alanda da başarılı demektir. Ayrıca bu alanlarda yaratıcı çalışmalar oluşturma ihtimali yüksektir (Akt: Türk, 2018).

Rogers (1918) matematiksel üstün yeteneği, hafıza fonksiyonu ile ilişkili olan yeniden üretici kavramı ve düşüncenin işlevi ile ilişkili olan üretici kavramı olarak iki yönlü ele alırken, Betz (1923) matematiksel üstün yeteneği, matematiksel ilişkilerde içsel bağlantılar üzerinde açık ve net bir farkındalığa sahip olma ve matematiksel kavramlar arasında düşünebilme yeteneği olarak tanımlamıştır. Wenzl (1934) matematiksel yeteneği materyalde anlamlı bağlantılar kurma yeteneği olarak tanımlarken, Finli psikolog Meinander (1958), matematiksel yetenekleri zekâyı, hafızayı, ilgiyi ve istemli faktörleri içeren karmaşık bir yetenek olarak ifade etmiştir. Blackwell (1940) matematiksel yeteneklerin sayısal ilişkiler alanında ve tümdengelimli akıl yürütme için seçici düşünme yeteneği olarak ve sayılar, semboller ve geometrik formlar alanında belirli durumlara genel ilkeleri uygulama yeteneği olarak yorumlanabileceğini belirtmiştir. Lietzmann (1941) matematiksel üstün yeteneği, matematiksel semboller aracılığıyla akıl yürütme yeteneği olarak tanımlamıştır. Revesz (1952) ise matematiksel üstün yeteneği, hızlı bir şekilde matematiksel ilişki kurarak uygun bilgiyi uygun örneklerde uygulama becerisi ve mevcut bilgilerden hareketle ilişkileri ortaya çıkarma yani üretken olma yeteneği olmak üzere iki formda incelemiştir (Krutetskii, 1976'dan Akt: Arıkan, 2019).

Budak (2007)'a göre; mantığını çok iyi kullanan, matematiksel sezgide üst düzey performans gösteren, geometrik olarak düşünmede iyi olan, ileri düzey sembolik ifade etme gücüne sahip olan ve genellemede başarılı olan öğrenciler için matematikte üstün yeteneklilikten söz edilebilir. House (1987) ise üstün yetenekli olarak belirlenen öğrencilerin, matematiksel üstün yetenekli öğrencilerle benzer karakterlere sahip olduğunu ifade etmektedir (Akt: Budak, 2007).

Miller (1990), matematiksel üstün yeteneği, matematiği en üst düzeyde kullanabilme ve sadece aritmetik hesaplamalar yapmaktan ziyade matematiksel düşünceleri anlamada ve matematiksel olarak muhakeme etmede üst düzey yetenek olarak ifade eder (Akt: Türk, 2018).

Villani (1998), matematikte üstün yetenekli olan çocuklara hem analitik hem kavramsal yetenekleri içeren zor görevler verilmesi gerektiğini, problem çözmede ısrarcı olmaları için cesaretlendirilmeleri gerektiğini ve sadece soruları cevaplamaları değil kendi sorularını da oluşturmalarının sağlanması gerektiğini belirtmiştir (Akt: Karaduman, 2010).

Matematikte Üstün Yetenekli Öğrenci Karakterleri

Herhangi iki çocuğun birbirinden farklı özelliklere sahip olduğu bilinmektedir. Bu iki çocuğun üstün yetenekli olması durumunda ise sahip olunan farklı özellikler iyice artmaktadır. Çünkü üstün yetenekli çocukların, kendilerine ait bireysel dünyalarını oluşturma davranışı daha güçlüdür. Ancak üstün yetenekli öğrencilerin birbirleri arasındaki benzer özellikleri normal öğrencilerin birbirleri ile olan benzer özelliklerinden daha fazladır. Ayrıca üstün yetenekli öğrenciler ile normal öğrenciler arasındaki bireysel farklılıklar oldukça belirgindir. Üstün yetenekli öğrencilerin belirlenmesi, öğrencilerin sahip olduğu programlarını amacından uzaklaştırmamak, içeriğini kolaylaştırmamak ve işlevini azaltmamak açısından önemli bir yere sahiptir (Greenes,1981).

Bu yüzden matematikte iyi bir problem çözücü olan kişinin, potansiyel matematik teorisyeni adayı olduğu söylenebilir. Problem çözme becerisine sahip olan birey muhakeme gücüyle var olan bilgilerinden hareketle hükme, genellemelere ulaşma yeteneğini kullanmaktadır. Matematiğin asıl amaçlarından biri de genellemelere ulaşmaktır. Genelleme yeteneğinin her alanda yapılabilen bir özellik olduğu bilinmesine rağmen matematiksel genelleme yapma özelliğinin tarih, coğrafya ve edebiyat gibi alanlarda kullanılamayacağı unutulmamalıdır (Krutetskii, 1976'dan Akt: Arıkan, 2019). Şöyle ki; edebiyat, coğrafya alanında genelleme yapabilen birisi bu yeteneğini matematik alanında gösteremeyebilir. Sonuç olarak matematiksel üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerinin sadece matematiğe özgü olduğu söylenebilir.

Matematikte üstün yetenekli öğrenciler tekrarlardan, alışa gelmiş anlatımlardan, rutin problemlerden, öğrenilen bilgilerin yeniden gözden geçirilmesinden sıkılırlar. Bu öğrencilerin mükemmel hafızaya, keskin gözlem yeteneğine, öğrenme hızına, işlem çabukluğuna, olağan muhakeme kapasitesine sahip oldukları bilinmektedir (Greenes, 1981). Öğrenciler var olan gelişmiş soyutlama yetenekleriyle bir sonraki adımı sezebilir hatta somut bir gösterimle ifade etmeden zihnen o noktaya ulaşabilirler. Bu öğrenciler yeni fikirleri üretmeye ve denemeye meraklı, risk alma konusunda isteklidirler. Ayrıca Sheffield (2003), bir matematik dersi için formülleri, bilgiyi, konuya ait özellikleri ezberlemenin, işlem hatası yapmamanın, hesap yapmada hızlı olmanın, üç boyutlu düşünebilme yeteneğinin faydalı olabileceğini ancak matematikte başarılı bir öğrenci olmak için olmazsa olmaz karakterler ya da şart koşulan davranışlar olmadıklarını belirtmektedir.

Sriraman (2003)'a göre; matematikte üstün yetenekli öğrenciler, kendilerine güvenme, kararlılık ve matematiksel düşünüş gibi özelliklerinin yanında problem çözme konusunda meraklıdırlar ve karşılaştıkları bir problem durumunda çözüme ulaşmak için uzun süre çalışabilme özelliğine de sahiptirler (Akt: Yavuz Açıl, 2018).

Wagner ve Zimmermann (1986)'a göre; matematikte üstün yetenekli öğrenciler materyalleri organize etme, matematiksel ilişkilerin ve kuralların farkına varma, problemin sunumunu değiştirme, matematiksel ilişkileri görme, çok karmaşık yapıları anlama, farklı şekilde bakma, süreci tersine döndürebilme, ilişkili problemler bulma gibi özelliklere sahiptirler (Akt: Türk, 2018).

Budak (2007)'a göre; matematikte üstün yetenekli öğrenciler muhakeme yapma, matematiği fark etme, matematiksel esneklik, matematiği kullanma, dünyaya matematiksel gözle bakma ve matematiksel duygu özelliklerine sahiptirler.

Uzun (2004), matematikte üstün yetenekli olan çocukların akranlarından daha üst düzeyde kavrama yeteneğine, üstün genelleme yeteneğine, zihinsel çevikliğe, özgün yorumlama yeteneğine, sıra dışı matematiksel işlem yeteneğine sahip olduklarını, yaşıtlarının çözemediği zor problemleri çözebildiklerini, matematiği diğer disiplinlerle ilişkilendirebildiklerini, problemleri çok çabuk çözebildiklerini, çözümlerde farklı çözüm stratejileri ile uygulama, analiz, sentez ve değerlendirme basamaklarına odaklandıklarını, çözümü zor ve gayret gerektiren sıra dışı problemler sorduklarını belirtmiştir.

Matematikte üstün yetenekli öğrenciler matematiğe ileri düzeyde ilgi duyarlar, dünyaya matematiksel bir bakış açısı ile yaklaşırlar (Karaduman, 2010). Matematikte sürekli aritmetik hesaplamalar gerektiren işlemler yapmaktansa düşünebildikleri ve anlamaya çalıştıkları sorularla uğraşırlar (Deringöl, 2017). Erken yaşlarda matematiksel kavramları kavrayarak konular arasındaki bağlantıları daha kolay kurarlar (Özmantar, 2013).

1.8.2. İspat

1.8.2.1. İspat Kavramı

İspat kavramı, temeli aksiyomlara dayandırılan teoremlerin doğruluğunun gösterilmesinde kullanılmaktadır (Bloch, 2011). Teorem matematiksel yollardan doğruluğu ispatlanabilen ifadeler olarak (Taylor ve Garnier, 2014) önerme ise doğru veya yanlış olduğu ispatlanabilen ifadeler olarak tanımlanmaktadır (Kuşlu, 2016). Aksiyom ispatlanmadan doğruluğu kabul edilen ifadelere denir (Gerstein, 2012). Postulat kavramı ise aksiyom kavramı ile aynı anlamda kullanılmasına rağmen aksiyom kavramının cebirsel ifadelerde, postulat kavramının ise geometri ifadelerinde kullanılmasının daha uygun olacağı belirtilmektedir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2016). İspatı uzun olan teoremlerin ispatlanmasında kullanılan lemma, daha önceden ispatı yapılmış ve bilinen yardımcı teoremlerdir (Taylor ve Garnier, 2014).

İspat içeriklerle ilişkilendirilmiş, bir sonuca ulaşan ve başlangıcında verinin içinde kabul edilmiş olan yönlendirmelerden oluşan ifadeler kümesidir (Bell, 1976). De Villiers (1999), ispattan yeni sonuçlar keşfetme, analiz etme, bulmanın bir yolu olarak bahsederken, Stylianides (2007) ispatın, bir grup kabul edilmiş duruma, tartışma biçimlerine ve tartışma görsellerinin biçimlerine dair önemli fikirleri birleştirme özelliğine sahip olduğundan bahseder. Hemmi (2010)'ye göre ispat, bir düşünceler sistemidir ve düşünceleri ilişkilendirmede kullanılır. Ko ve Knuth (2009)'a göre ispat, bir sonuca ulaşma için bir grup aksiyomla başlayan ve mantıksal basamaklarla devam eden, formal ve mantıksal bir fikir zinciridir. Gerstein (2012) ispatı bir durumun doğruluğunun değerlendirmesinde kullanılan kurallar bütünü olarak tanımlamıştır.

İspat sistematikleştirmeye ya da sonuçları ilişkilendirmeye veya matematiksel bilginin formüle edilmesine katkıda bulunur (Hanna, 2000). Bu katkısından dolayı, ispat çıkarımsal aksiyom sistemleri, tanımlar ve teoremler içinde bilinen çeşitli sonuçları sistematikleştirme için olmazsa olmaz bir araçtır (De Villiers, 1999).

Genel olarak ispat matematiksel ifadelerin doğruluğunu teyit etmek şeklinde algılanır (De Villiers, 1999). Bu nedenle ispatın matematikteki en önemli rolünün, bir ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemek olduğu ifade edilir (Ko, 2010). Ancak, bazı araştırmacılar ispatların matematiksel durumların doğruluğunu ifade etmekten daha fazlası olduğunu belirtmişlerdir. İspatın asıl görevi matematiksel tahminlerin doğruluğunu gerçeklemek olmasına rağmen, ispat "açıklama, sistematikleştirme, buluş, iletişim, deneysel teoriler kurma, tanımların ve varsayımların sonuçlarını keşfetme ve bilinen gerçekleri yeni bir çerçevede birleştirme" gibi farklı roller de üstlenir (Yackel ve Hanna, 2003'den Akt: Ko, 2010). Çünkü ispat, ispat edilecek olan teoremin sadece doğru yanlış olmasıyla ilgili değil, neden doğru ya da neden yanlış olduğunu da görmeye ve teoremi kavramaya yardımcı olur (Öztürk, 2017).

Matematiksel ispatın genel amacı, matematiğin temel parçalarından biri olan bilginin yapısını oluşturur (Hemmi, 2010). İspat, bütün matematikçilerin önemi konusunda hem fikir olduğu kavramlardan biridir (Tall, 2002).

İspat ve ispat yapma hem matematiksel düşünmenin (ve tabi ileri matematiksel düşünmenin) geliştirilmesinde hem de matematik yapmada, matematiksel bilginin yapısını, doğasını, tarihsel gelişimini kavramada, bireyler ve toplumlarca ne şekilde paylaşıldığını algılamada merkezi bir öneme sahiptir (Uğurel ve Moralı, 2010).

Hemmi (2010), farklı çalışmaları kaynak alarak, matematik uygulamalarında ispatın öne çıkan özellikleri ve fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde belirtmiştir. Aşağıda verilen fonksiyonlar, kavramsal çerçevede yer almaktadır:

- Sağlama/ İkna (durumun doğruluğu anlama)
- Açıklama (neden doğru olduğunu anlamayı sağlama)
- Sistematikleştirme (aksiyomlar, temel kavram ve teoremlerden oluşan çıkarımsal bir sistemin içinde birçok sonucu organize etme)
- İletişim (matematiksel bilginin anlamında ve aktarılmasında uzlaşma)
- Estetik
- Zihinsel meydan okuma/ zorlama

- Transfer etme (İspat, diğer problemlerle uğraşmak için teknikler ya da orijinal içerikten farklı olan durumların anlaşılmasını sağlayabilir.)

Hanna (2000)'da benzer şekilde öne çıkan çalışmaları temel alarak (Bell, 1976; De Villiers, 1999), ispat ve ispatlamanın fonksiyonlarını aşağıdaki gibi listelemiştir.

- Doğrulama (ifadenin doğruluğuyla ilgili merak)
- Açıklama (neden doğru olduğuna dair iç görü sağlamak)
- Sistematikleştirme (tümevarımsal bir sistemdeki aksiyom, temel kavram ve teoremlerin çok çeşitli sonuçlarının organizasyonu)
- Keşfetme (yeni sonuçlan keşfetme ya da türetme)
- İlişkilendirme (matematiksel bilginin iletilmesi)
- Deneysel bir teori oluşturma
- İfadelerin anlamlarını ya da bir tahminin sonuçlarını açıklama

Matematiksel ispat; matematiğin önemli bir parçası olduğu gibi matematiğin her alanında yer alması gereken bir düşünce sistemidir. Çünkü ispat yapmak sadece matematiğin içinde değil bireyin karşılaşacağı her durumda çözüm bulacağı bir uğraştır. Bu çalışmada ise ispat, bir teoremin sonucuna ulaşmak için keşfetme, analiz etme, ilişkilendirme yapabilme, transfer etme, açıklama gibi birçok becerinin birlikte incelendiği ve doğru ya da yanlış olduğunun belirlenmeye çalışıldığı süreç olarak kabul edilmiştir.

1.8.2.2. Matematiksel İspat

Dünyada çocuklara yeni fikirler ve kavramlar farklı yollarla kazandırılmaya çalışılmakta ve pek çok eğitimci farklı öğretim yöntemlerini savunmaktadır. Farklı öğretim yöntemlerini savunan eğitimciler her konunun farklı yöntem ve materyallerle kazandırılması gerektiğini belirtirler. Bu nedenle de öğretmenlerin öğretim yöntemlerine karşı bilgili ve yöntemleri kullanabilir olması gerekir. Ancak bu durum düşünüldüğünden daha zordur. Çünkü kimi öğrenci görsellerle daha iyi öğrenirken kimi öğrenci sözlü olarak daha iyi öğrenmektedir. Bu durumla karşı karşıya kalan öğretmenler ve araştırmacılar tüm öğrencilerin ihtiyaçlarına ve yeteneklerine uygun öğretim yöntemini bulmaya çalışmaktadırlar. Ancak bütün öğrenciler için kullanılabilir bir yöntem olsaydı araştırmacılar farklı öğretim yöntemleri üzerine çalışmazlardı. Nitekim günümüzde bu konu halen araştırılmaktadır (Lane, 2004). Belki de matematik eğitiminde en zor ve en ilginç araştırma alanlarından biri, öğrencilerin matematiksel ispatı daha derin anlamalarını nasıl sağlayacağımız ve ispat tekniklerini nasıl geliştireceğimiz ile ilgilidir (Marrades ve Gutierrez, 2000).

Cebir; nicelik, ölçme, sayısal değişkenler ve sayısal işlemlerle ilgili bir alan iken, geometri; uzay, uzaysal ölçme ve uzaysal nesne özellikleri ile ilgili bir alandır. Tümdengelimsel ispat fikri ise geçmişte sadece geometri öğretimi için kullanılırken matematiğin diğer alanlarında kullanılmamıştır. Günümüzde ise bu durum değişmiş ve ispat öğretimi matematik öğretim programının ana hedefi haline getirilerek tüm matematik derslerinde ve tüm öğrencilere öğretilmesi gereken bir kazanım olmuştur (Coe ve Ruthven, 1994).

Akıl yürütme, doğrulama ve matematiksel ispat matematiğin bir parçası olarak düşünülmektedir (Strausova ve Hasek, 2012). Nitekim gerek NCTM gerekse MEB öğretim programında matematiksel akıl yürütme ve ispat okul matematiğinin temel unsurları arasında gösterilmektedir (NCTM, 2000; MEB, 2013).

En genel anlamıyla matematiksel ispat, bir önermenin mutlak doğru olduğunun gösterimidir (Hilbert vd., 2008). Düşüncelerin ortak bir yolla paylaşılması için ispata ihtiyaç duyulmaktadır ve ispatlar, matematiksel bilgi üretiminin hedef ürünü ve matematiksel düşüncenin gruplandırılmış şeklidirler. İspat, matematik uygulamalarının en üst seviyesi olarak görülmekte ve çoğu matematikçi tarafından okullarda yapılan ispat öğretimi çalışmaları eleştirilmekte ve ispat öğretimi ve öğrenimi için yeni yollar araştırmalarla ortaya çıkarılmaya çalışılmaktadır (Hanna, 2000). Matematiğin temel araştırma konularından birisi de tümdengelimsel matematiksel ispatın öğrenciler tarafından matematiksel önermeleri gerekçelendirme için kullanıp kullanılmadığı ya da kullanılıyorsa ne ölçüde kullanıldığının ortaya çıkarılmasıdır (Rodd, 2000).

Alibert (1988)'in matematik, fizik ve kimya öğrencileriyle yapmış olduğu çalışmasında, öğrencilerin ispat hakkındaki genel fikirleri, ispatın öğretmen tarafından yapılan formal bir uygulama olduğu yönündedir. Bu görüş, ispatın öğrenci tarafından anlaşılmasını engellemektedir. Ayrıca matematiksel sonuçların matematikçiler tarafından formal ispatlar olarak sunulması yanlış bir şekilde ispatın özel bir eğitime gereksinim olduğunu düşündürmektedir. Bu durum ise öğrencide zihinsel aktiviteyi azaltmaktadır (Battista ve Clement, 1995).

Birçok öğrenci için ispat anlamaksızın yapılan bir ritüeldir ve araştırmalar öğrencilerin basit ispatlarda dahi başarılı olamadıklarını göstermektedir (Harel ve Sowder, 2007). İspatın asıl amacı, matematiksel anlamayı artırma olmasına rağmen asıl zor olan, bu amaç için ispat kullanımının en etkili yollarını bulmaktır. Bunun için ilk olarak öğrencilerle ispatın fonksiyonlarını tartışmak, ispatın önemine ve sınırlarına dikkat çekmek gerekir. Ayrıca öğrencinin ispat yapabilmesi için motive olması, açıklamanın ve keşfetmenin eğlencesi ve coşkusundan faydalanması gerekmektedir ki bu öğretmen için oldukça zordur (Hanna, 2000). Öğrencilere ispatı, matematiksel ifadelerin doğruluğunu diğer insanlara göstermenin ve teoremin niçin doğru olduğunu anlamaları için onlara yardımcı olmanın bir yolu olarak göstermek, ispatın öğrenciler tarafından anlaşılması ve öneminin kavranması açısından önemlidir (Alibert ve Thomas, 1991).

Farklı seviyelerdeki öğrencilerin ispat kavramı birbirinden farklıdır (Harel ve Sowder, 2007). Örneğin ortaokuldaki bir öğrenci Pascal üçgeninin her satırının ikinin kuvvetine eşit olduğunu birkaç satırdaki sayıları toplayarak ispatlayabilirken; lise öğrencisi tamsayılar için olan binom açılımını uyarlayarak rasyonel ve irrasyonel sayılar için ispatlayabilir. Her iki durumda da öğrenen kendisi ikna olduğu için ilgili durumun ispatlandığını düşünmektedir (Almeida, 1996). Bu nedenle farklı seviyelerdeki öğrenciler için ispat yeteneğini geliştirmeye yönelik öğrenme ortamları oluşturarak etkili öğretim stratejileri kullanmak bir gerekliliktir (Aylar, 2014).

Coe ve Ruthven (1994)'in yapmış oldukları çalışmada; öğrencilerin önermeleri test edebildikleri, fakat önermeyi neden yaptıklarına dair açıklama ve gerekçelendirme yapamadıkları, matematiksel sisteme yerleştiremedikleri, sadece iki tane öğrencinin tümdengelimli ispat yapabildiği, geriye kalanların deneysel ispat yapabildikleri görülmüştür. Yani; öğrencilerin çoğu bir kuralı ya da örneği test ederek doğrulamaya çalışmışlardır. Nitekim incelenen çalışmalarda öğrencilerin deneysel ispata yönelik çalıştıklarını göstermektedir. Fakat kimi araştırmacılara göre, bu durum herhangi bir olumsuzluk oluşturmaz; çünkü matematiksel düşünme teorisine göre her öğrenci tümdengelimli akıl yürütmeyi çalışmalarında gösteremeyebilir (Almeida, 1996; Harel ve Sowder, 2007).

Öğrencilerin karşılaştıkları çalışmalarda deneysel argümanları daha çok tercih ettikleri görülmektedir. Bu durumda öğrencileri deneysel akıl yürütmenin ötesine taşımada öğretmenlere büyük rol düşmektedir (Boero, 1999). Tartışma, yargılama ve anlamlandırmanın teşvik edildiği ortamda yetişen bireylerin, böyle bir ortamda yetişmeyen bireylere göre tümdengelimsel düşünmeye geçebilmesi daha olasıdır. Ancak erken yaşlardan itibaren deneysel düşünmeye teşvik edilen bireylerin daha ileriki yaşlarda da deneysel düşünmeye başvurması kaçınılmazdır. Bu durum bireylerdeki deneysel ispat şemasının değişmeyeceği anlamına gelmemektedir (Güner, 2012). Öğrencilerin birden fazla ispat şemasına sahip olabileceği (Harel ve Sowder, 2007) gibi geçirdiği deneyimlerle ispat şemalarının değişmesi de muhtemeldir.

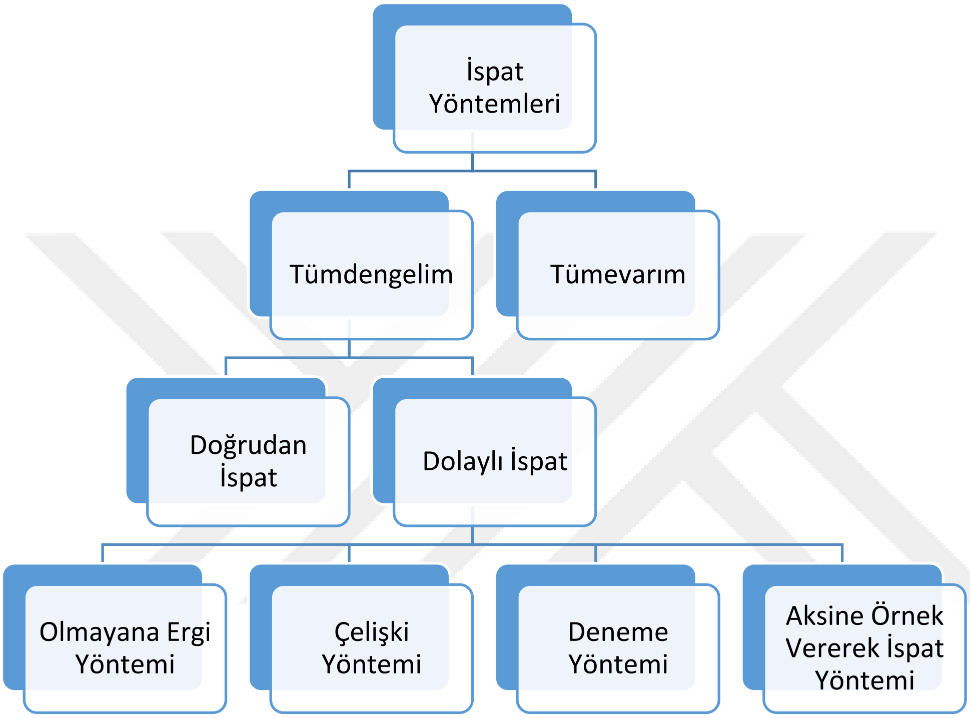
İspat şemaları öğrencilerin matematikteki bilişsel düzeylerini ve zihinsel yeteneklerini yansıtmaktadır. İspat şeması, bir kişinin ispat kavramını tanımlamasıdır ve bir şeyin aslını anlaması, ikna olabilmesi ve başkalarını ikna etmesi gibi eylemlerin tamamı kişinin ispat şemalarını oluşturmaktadır (Harel ve Sowder, 2007). İspatlama sürecini ve ispat şemalarını öğrenci merkezli olarak nitelendiren Harel ve Sowder (2007) ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç başlık altında ele almışlardır. Dışşal ispat şemaları; otoriter ispat şeması, alışkanlık edinilmiş ispat şeması ve sembolik ispat şeması olmak üzere üç alt şemaya ayrılmıştır. Bu şemaya sahip bireyler problemleri çözmek için sadece formülleri kullanmaktadırlar. Yaratıcılıktan ve keşiften ziyade ezberlemenin başarıyı getireceğine inanmaktadırlar. Deneysel ispat şeması; örneğe dayalı ispat şeması ve algısal ispat şeması olmak üzere iki alt şemaya ayrılmıştır. Bu ispat şemasına sahip bireyler varsayımları test etmek veya çürütmek için fiziksel gerçekleri veya duyusal deneyimleri kullanmaktadırlar. İspat, genellikle örneklere dayandırılmaktadır. Analitik ispat şeması; dönüşümsel ve aksiyomatik ispat şemaları olarak alt başlıklara ayrılmış olan bu şemaya sahip bireyler mantıksal çıkarımlar aracılığıyla varsayımlarını doğrulamaktadır.

Öğrencilerin öğretmenler tarafından yapılan ispatları defterlerine geçirmesi, öğrenciye ispatı derinlemesine anlama yerine bir ispatı izleme becerisi kazandırır ve öğrencilerin ispatı sorgulayıp içselleştirmeden ezbere yönelmesine sebep olur. Oysaki öğrencilerin ispat problemlerinde matematiksel düşünme ile problemle uğraşmaları, ispat üzerine tartışmaları, argüman üretmeleri ve kendi düşüncelerini ortaya koyarak bir sonuca ulaşmaları sağlanmalıdır (Altun, 2014).

Öğrenciler genellikle öğretmenlerinin söylediğine kolayca ikna olur ve bu durumu sorgulamaz, doğrulamaya çalışmaz olduğu gibi kabul ederler. Öğrencilerin çoğunun matematiksel ispatları sevmedikleri, ispatı zor ve kullanışsız buldukları ve teoremlerin kökenine veya ispatlarına dair herhangi bir meraklarının olmadığı bu durumun sebebi olarak bilinmektedir (Battista ve Clements, 1995; Strausova ve Hasek, 2012).

Akıl yürütme ve matematiği anlamanın bir parçası olarak öğrencilerin ispat yapabilmesinin bir gereklilik olduğunun belirtildiği NCTM (2000)'de tüm öğrencilerin akıl yürütmeyi ve ispatı matematiğin zorunlu ve güçlü bir parçası olarak tanımasını, matematiksel varsayımları araştırarak varsayımda bulunmasını, matematiksel argümanı ve ispatı geliştirebilme ve değerlendirebilme, uygun akıl yürütme ve ispat çeşidini seçme ve kullanma becerisine sahip olması gerektiği belirtilmektedir.

1.8.2.3. Matematiksel İspat Yöntemleri



Şekil 1.6: Matematiksel İspat Yöntemleri

İspat yapma süreci evrensel olarak kabul edilmiş olan yöntemleri içermekte ve temel anlamda tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki yolla yapılmaktadır (Çallıalp, 1999). Tümdengelim ispat yöntemi de kendi içinde doğrudan ispat ve dolaylı ispat (olmayana ergi, çelişki bulma, aksine örnek verme ve deneme yöntemiyle ispat) olmak üzere iki başlık altında ele alınmaktadır. Bu ispat yöntemleri aşağıda ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Tümevarım Yöntemiyle İspat

$S \subset \mathbb{N}$ ve $1 \in S$ olsun. $n \in S \Longrightarrow n+1 \in S$ gerektirmesi doğru ise $S = \mathbb{N}$ dir.

Pozitif tamsayılar hakkında bir $P(n)$ önermesi göz önüne alalım.

1) n=1 için P (1) önermesi doğru ise

2) Önermenin n için doğruluğu n+1 doğruluğunu gösteriyorsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

Örneğin; Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in P$, $x \neq 1$ için

$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilebilir.

1) n=1 için

$1 = \frac{1-x^1}{1-x} = 1$ olduğu gösterilir.

2) $n \in \mathbb{N}^+$ için

$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ doğru olduğu kabul edilir.

3) n+1 $\in \mathbb{N}^+$ doğruluğunu göstermek için 2'deki eşitliğin iki tarafınax^n ilave edelim:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^n}{1-x} + x^n$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^n + x^n - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

olur. Böylece n+1 $\in \mathbb{N}^+$ içinde ifadenin doğruluğu gösterildi.

Doğrudan İspat Yöntemi

Tümdengelim ispat yöntemlerinden biri olan doğrudan ispat yönteminde, $p \Longrightarrow q$ şeklindeki bir teoremin ispatı için, p önermesi doğru kabul edilir ve diğer bilgileri de kullanarak q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır.

Örneğin; "Bir tek ve bir çift tamsayının toplamı tektir." önermesini $p \Longrightarrow q$ şeklinde yazarsak, "Sayılardan biri tek diğeri çift ise, toplamları da tektir." önermesi elde edilir. Buna göre; Önce m ve n gibi iki tamsayı alalım. m, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x=2m+1 tek tamsayı ve y=2n çift tamsayı olsun. Buradan x+y=2m+1+2n

=2(m+n) +1 (m+n=$k \in \mathbb{N}$) =2k+1 eşitliği elde edilir.

Olmayana Ergi Yöntemi ile İspat

Dolaylı ispat yöntemlerinden biri olan olmayana ergi yönteminde $p \Longrightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Longrightarrow p')$ denkliğinden yararlanılır. Başka bir deyişle teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanmasıdır.

Örneğin; $x \neq 6$ iken $5x+33 \neq 33$ olduğunu olmayana ergi yöntemiyle gösterelim.

p:"$x \neq 6$" (Hipotez)

q:"$5x+3 \neq 33$" (Hüküm)

önermeleri için, $(p \Rightarrow q)$ yu ispatlamak yerine $(q' \Longrightarrow p')$ yü ispatlamak yeterli olacaktır. Buna göre;

q:"$5x+3=33$" (Hipotez)

p:"$x=6$" (Hüküm)

olduğundan;

$5x+3=33$

$5x=30$

$x=6$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Çelişki Yöntemi ile İspat

Teoremin kendisi yerine hipotezini ve hükmünün değilini doğru varsayıp bunun bir çelişki olduğunun gösterildiği ispat yöntemidir. Yani bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ yu ispatlamak için $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q')'$ denkliğinden yararlanılır ve $(p \wedge q') \equiv 0$ olduğu gösterilir.

Örneğin, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x+3=5$ ise $x+1 \neq 3$ önermesini ispatlayalım.

$x \in \mathbb{R}$ olsun. p: $2x+3=5$ ve q: $x+1 \neq 3$ önermelerinden; $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q')'$ iken $(p \wedge q')$ $\equiv 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$p \wedge q$'≡[($2x$+3=5) ∧(x+1=3)] önermesinin bir çelişki olduğunu göstermeliyiz.

($p \wedge q$') ≡[($2x$+3=5) ∧ (x+1=3)] ⟹(x=1∧x=2)

olup bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla ($pveq$') ≡0 yani ($pveq$')' ≡1. O halde

$p \Rightarrow q$ ≡1 dir.

Deneme Yöntemi ile İspat

Deneme ispat yönteminde, farklı değerlerin değişkene ayrı ayrı yazılmasıyla, önermenin doğruluğu kontrol edilir. Örneğin; $\forall x \in \{3,4,6\}$ için $5x$+28<74 eşitsizliğinin doğruluğunu veya yanlışlığını deneme yöntemi ile gösterebiliriz.

$5x$+28<74 $5x$<46

Eşitsizliği x=3, x=4 ve x=6 için sağlanıyor. Demek ki $5x$+28<74 eşitsizliği $\forall x \in \{3,4,6\}$ için doğrudur.

Aksine Örnek Vererek İspat

Bu yöntem iki şekilde uygulanabilir. Verilen bileşik önermenin hipotezini kabul ederek hükmüyle çelişkili bir sonuca varmamıza yarayacak en az bir örnek bulmak ya da aynı mantığı içeren $(p \Rightarrow q') \equiv 1$ olacak şekildeki bir örnek verme şeklindedir. Örneğin; $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

p:(5|m∧ 7|n) ve q:(5+7) |(m+n)

Önermeleri için ($p \Rightarrow q$) ≡1 olup olmadığını araştıralım. Bunun için p≡1 iken q≡0 olacak şekilde en az birere tane m, $n \in \mathbb{N}$ sayılarını bulmamız yeterli olacaktır. Buna göre, m=15 ∧ n=14 için p önermesi doğrudur. Ama (5+7) | (15+14) önermesi yanlıştır. O halde ($p \Rightarrow q$) ≡0 olur.

1.8.2.4. Matematikte İspatın Önemi

Matematiği anlamanın ve matematik yapabilmenin en önemli bileşeni ispattır. İspat matematiksel bilgiyi, kavramları, ilişkileri nedenleri ile öğrenmeye yardımcı olurken öğrenmelerin anlamlı hale gelmesine de katkıda bulunur (Güler, 2013). Ayrıca NCTM (2000) raporunda matematiksel ispatın küçük yaşlardan itibaren öğrenilmesi yani eğitimin her seviyesinde matematik öğretim programlarında bulunması gerektiği ifade edilmiştir. Buradan hareketle matematiksel ispatın ne olduğu ne anlama geldiği, nasıl ve hangi şartlarda kullanılması gerektiğinin bilinmesi önemlidir. Bu yüzden araştırmacılar matematiksel ispatın ne anlama geldiği, matematik öğretiminde hangi işlevlere sahip olduğu ve ispata dair çalışmaların ne olduğu hakkında bilgi sahibi olmak adına bu alanda araştırmalar yapmaya başlamışlardır (Almeida, 2003). İspatın matematik eğitimindeki önemi araştırmacılar tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

- Doğrulama ya da gerekçe sunma: Bir ifadenin doğruluğunu değerlendirme
- Açıklama ya da aydınlatma: Bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklama
- İnanma: Şüpheleri ortadan kaldırma
- Sistematikleştirme: Sonuçların temel kavramlar, teoremler ve aksiyomların tümdengelim sistemi içerisinde organizasyonu
- İletişim: Matematiksel bilgi ve akıl yürütmenin başkalarına aktarımı
- Keşif ya da inşa etme: Yeni sonuçlar keşfetme
- Haz: Sorunların entelektüel bir bakış açısıyla zarifçe karşılanması

Araştırmacılar; ispatın önemi ve işlevleri konusunda yaptıkları çalışmalarda, ispatın sınıf içi matematik öğretimi etkinlikleri ile birlikte kullanılarak öğrencilerin ispat yapabileceği ortamların oluşturulması durumunda öğrencilerin matematiksel düşünme yeteneklerinin gelişmesine katkı sağlayacağını savunmuşlardır (Rav, 1999).

1.8.2.5. Öğretim Programlarında İspatın Rolü ve Önemi

Matematik ispatlama bilimi olarak kabul edilmesine rağmen öğretim programlarında ispata yeterince önem verilmemiştir (Reiss vd., 2002). 1960'lı ve 1970'li yılların başlarında ele alınan matematik alanındaki yenilik çalışmaları ile birlikte, matematiksel uygulamaların en önemli kavramı olarak bilinen ispata dair çalışmalar daha da artmıştır (Barnard ve Tall, 1997; Hanna, 2000; Bedros, 2003). 1970 ve 1980'li yıllarda ise lise matematik öğretim programlarında ispatın yer alması gerektiği matematik eğitimcilerinin tartışma konusu olmuştur (Hanna 1983'den Akt. Reiss vd, 2002).

Yapılan yenilik çalışmaları sonucunda birçok matematik eğitimcisi lise öğretim programında, matematiksel ispatın doğasını yeniden ele almış ve matematik sınıflarında muhakeme ve ispat öğretimi önemli bir değişikliğe uğramıştır (Reiss vd., 2002). Amerika'da ele alınan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim

Programına göre, tüm öğrencilere lise matematik eğitimleri boyunca ispatla karşılaşacakları ortamlar oluşturulmalı ve tüm öğrencilerin ispatla deneyim yaşamaları sağlanmalıdır (Knuth, 2002).

NCTM (2000) raporunda, öğrencilerin eğitim öğretime başladıkları anaokul yaşlarından lise sona gelene kadar öğrencilerin zihinsel gelişimleri için "muhakeme ve ispat" hakkında çalışmalarının önemli olduğu belirtilmiştir. NCTM'nin 2000 yılındaki "Muhakeme ve İspat" hakkındaki standartları aşağıda verilmiştir. Bu standartlara göre öğrenciler;

- matematiğin temel kavramı olarak muhakeme ve ispatı fark etmelidir,
- matematiksel tahminler yapmalı ve araştırmalıdır,
- matematiksel ifadeleri ve ispatları değerlendirmeli ve geliştirmelidir,
- çeşitli muhakeme şekillerini ve ispat yöntemlerini seçmeli ve kullanmalıdır.

Ülkemiz matematik programları incelendiğinde İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programında ispattan bahsedilmediği görülmektedir. Çünkü bu programda ispat, teorem, aksiyom gibi kavramlara yer verilmemiştir. Oysaki bu kavramlar bu seviyedeki öğrencilerin belli boyutlarda kazanabilecekleri yapıdadır. Çünkü Piaget'in bilişsel gelişim kuramına göre öğrenciler soyut işlemler döneminde yer almaktadır. Senemoğlu (2005)'na göre; ilköğretim 6., 7., 8. sınıflarındaki öğrenciler ile lise öğrencilerinin matematik derslerinde ispatla ilgili etkinliklere yer verilerek bu konuyla ilgili öğrenmelerin gerçekleşmesini sağlayacak uygun ortamların oluşturulması; öğrencilerin analiz etme, karşılaştırma, soyut ilişkileri bulma, özgün bir şey üretme, eleştirel düşünme gibi özelliklerini geliştirmelerine katkıda bulunacaktır. Buna dayalı olarak ilköğretim seviyesindeki öğrencilere formal bir şekilde olmasa da ispat öğretimi yapılabilir. Çünkü Altıparmak ve Öziş (2005)'e göre; 6-8. sınıflar için akıl yürütme ve ispat seviyelerinde öğrencilerden öğrendikleri bilgilerden hareketle genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri beklenir. Bu sınıf seviyelerindeki öğrenciler ulaştıkları varsayımları ve iddaları değerlendirerek matematiksel olarak ifade edebilmeli ve tümdengelimli, tümevarımsal akıl yürütmeyi kullanabilmeli, akıl yürütme becerilerini geliştirebilmelidir.

MEB'in 2005 yılında yenilenen Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında matematik derslerinin anlatımı: "Tanım, Teorem, İspat, Uygulamalar" şeklinden "Problem, Keşfetme, Hipotez Kurma, Doğrulama, Genelleme, İlişkilendirme" şekline dönüşmüştür (MEB, 2005). Bu sayede öğrencilere ispat yapma sürecinin neden önemli ve gerekli olduğunun vurgulandığı görülmektedir. Dolayısıyla bu programı uygulamakla yükümlü olan (bugünün ve yakın geleceğin) matematik öğretmenlerinin sınıflarında matematiksel ispatları kullanabilmesi yönünde eğitilmesi bir gereklilik oluşturmaktadır. Ayrıca matematik öğretmenleri ve adaylarının ispata yönelik tutumları ve görüşlerinin, onların derslerinde ispat kullanımını ve öğretim şeklini etkileyeceği düşünülmektedir. Çünkü gerek öğretmenler gerekse öğrenciler matematiksel iddiaların doğruluğunu oluşturmak için kullandıkları yöntemlere yönelik tutumlarını yansıtırlar (Nyaumwe ve Buzuzi, 2007).

Yenilenen öğretim programları incelendiğinde, matematiksel ispat yöntemlerinin önceki yıllarda 11. sınıfta “Mantık” öğrenme alanı başlığı altında öğretimi yapılan bir konu olduğu 2017 yılında yapılan program değişikliği ile yalnızca fen lisesi 9. sınıf öğretim programında “Mantık” öğrenme alanında bulunan “Açık Önermeler ve İspat Teknikleri Alt Öğrenme Alanı” içerisinde yer aldığı görülmüştür. 2018’de yapılan son öğretim programı değişikliği ile “Açık Önerme ve İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı” programda yer almakta ancak ispat yöntemlerine ait kazanım bulunmamaktadır (Yıldız, 2019).

Bu çalışmanın örneklemini oluşturan üstün yetenekli öğrenciler doğdukları andan itibaren yaşıtlarından farklı özellikler gösteren bireylerdir. Zihinsel, fiziksel, güdüsel, öğrenme ve yaratıcılık özellikleri bakımından akranlarından ayrılırlar. Yaşıtlarına göre öğrenmeye açık, gözlem yapmada dikkatli ve başarılı, karşılaştıkları birçok problem karşısında çözüm üretebilen, gördükleri, okudukları, algıladıkları ve öğrendikleri arasında ilişki kurup genellemeler yapan, keşfeden, farklı düşünen, çözüm arayan, ilişki kurabilen, fikirler tasarlayan ve üreten kişilerdir (Davis ve Rimm, 2004; Clark, 2013; Sak, 2013; Yılmaz, 2015; Tortop, 2018). Üstün yetenekli öğrencilerin eğitimi normal öğrencilerin eğitiminden farklı olduğundan üstün yetenekli öğrencilerin eğitimi için özel programlar ve ortamlar oluşturulmalıdır. Üstün yetenekli öğrencilerin hem bulundukları çevreden tamamıyla dışlanmaması hem de sadece akranlarıyla aynı programa tabi tutulmaması gerekir. Üstün yetenekli bireylere hazırlanacak farklı programlar onların eğitimine katkı sağlarken eğitimlerinin daha da ileri seviyede olmasını sağlayacaktır. Üstün yetenekli öğrenciler rutin ders içeriklerinden sıkılan, rutin ders içeriklerini kolay bulan, öğrenme özellikleri açısından emsallerinden ileride oldukları için müfredat dışı konulara yönelen öğrenciler olduklarından ve uğraştıkları soruların görsel, yaratıcı, rutin dışı, üretkenlik isteyen sorular olması ve ispatında bu özellikleri barındırmasından dolayı bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi tercih edilmiştir. İspat öğrencilerin; ilişkileri açığa çıkarma, tahminler yapma, kavramları ilişkilendirme, ifadeleri doğrulama, yeni bilgileri genelleme ve öğrendikleri bilgileri yeniden yapılandırmalarına olanak sağlar. Üstün yetenekli öğrencilerin de özellikleri dikkate alındığında ispat yapmada başarılı olacakları beklenmektedir.

1.9. Kuramsal Çerçeve

Öğrencilere bir ispatın tamamlanmış şeklinin sunulması, ispat sürecinde öğrencinin aktif olmaması sadece bilginin pasif bir alıcısı olması ispatın anlaşılmasını engellemekte ve öğrencilerin ispatın önemi hakkında yetersiz değerlendirme yapmalarına sebep olmaktadır (Harel ve Sowder, 2007). İspat süreci ve sürecin çıktısı olan ispat birbirinden farklı şeylerdir. Bir teoremin ispat süreci bazen yılları almakta ve bu süreçte ele alınan becerilerin hiçbiri ispat çıktısında görülmemektedir. Bu yüzden ispat öğrenimde ve öğretiminde sadece bir teoremi ispatlamaktan ziyade ispat sürecinin vurgusunu yapmak daha önemlidir. Başarılı bir ispat öğretimi ise tüm ispat sürecini kapsamalıdır. Öğrenci ilk aşamadan son aşama olan ispatın tamamlanması sürecine kadar aktif olmalıdır. İspatın yapılmasını gözlemlemek ya da ispatta yapılanların aynısını yapmak öğrenme süreci için faydalı değildir (Heinze ve Reiss, 2004).

İspat öğrenimini desteklemek için öğrencilerin ispat aşamalarına ve ispat sürecine karşı farkındalıklarını arttırmak önemlidir. Bu yüzden ispat problemlerinde öğrencinin ispat sürecinde açıklamaya teşvik edilmesi gerekir (Reiss vd., 2008). Nitekim öğrencilerin, ispatın hangi aşamalarda gerçekleştiğini bilmemeleri ve ispatın alışılmışın dışında bir tarzda sorulduğunda yanlış olduğunu düşünerek ispatta zorlanmalarına sebep olmaktadır (Çalışkan, 2012). İspat var olan kuralları kullanarak yeni bir bilgi elde etme süreci olarak ele alınırsa; ispatta sonuçtan ziyade süreçte yapılanlar önemli olur (Cheng ve Lin, 2006). Öğrenciler, ispatın birbirini takip eden adımlardan hareketle verilenlerden istenene ulaşma işlemi olduğunu kavrayamamakta ve bunu ispat sürecine yansıtamamaktadırlar (Uğurel ve Moralı, 2010).

Boero (1999) çalışmasında matematikçilerin ispat sürecinin safhalarını belirlemiştir. Heinze ve Reiss (2004) ise bu safhaların matematikçilere ait olduğunu belirterek öğrencilerin ispat sürecinin belirlenmesindeki aşamaları Boero (1999)'nun modelini yeniden uyarlayarak belirlemeye çalışmıştır. Polat (2018) ise çalışmasında öğrencilerin ispat süreci için hazırlanmış olan Heinze ve Reiss (2004)'in modelinden hareketle sözsüz ispat süreci aşamalarını oluşturmuştur. Bu çalışmada ise; Polat (2018)'ın sözsüz ispat süreci aşamaları dikkate alınarak üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerindeki aşamalar incelenmiştir. Ancak Polat (2018)'ın çalışmasında 9. sınıf öğrencilerinin geometri soruları üzerindeki sözsüz ispat süreci, bu çalışmada ise üstün yetenekli 11. sınıf öğrencilerinin matematik ve geometri soruları üzerindeki ispat süreçleri incelenmiştir. Polat (2018)'ın çalışma grubundan farklı bir öğrenci grubu ile çalışıldığı ve incelenen ispat sürecindeki konular farklı olduğu için veri analizinde kullanılan sözsüz ispat süreci aşamaları düzenlenerek görüşmeler analiz edilmiştir.

1.9.1. Boero'nun Modeli

Boero (1999) ispat süreci ve ispat çıktısını farklılaştırmak için bir model tanımlamıştır. Bu modeli farklı aşamalara bölmüş ve bu aşamaları da varsayım üretme, metinsel paylaşımlara göre önermenin ifadesi, varsayımın esaslarının araştırılması, tümdengelimsel zincir içinde teorik argümanların seçimi ve tutarlı biçimde birbirine bağlanması, geçerli matematiksel standartlara göre kabul edilmiş argümanları ispata bağlama ve formal ispata yaklaşma olmak üzere altıya ayırmıştır (Boero, 1999).

1. Varsayım üretme: Bu safha; problem durumunun açıklanması, kuralın hangi şartlarda geçerli olduğunun belirlenmesi, üretilen varsayımın akla yatkınlığı ve gerekli argümanların tespitini ifade etmektedir. Bu safha matematikçilerin yaptığı iştir (Boero, 1999).

2. Metinsel paylaşımlara göre önermenin ifadesi: Bu safha daha sonraki yapılacakların tamamı için temel olacak varsayımın ifade edilmesidir. Sonraki süreçlerde belirlenen varsayım revize de edilebilir (Reiss vd., 2008).

3. Varsayımın esaslarının araştırılması: Bu safha hipotez ve tez arasındaki sezgisel ve anlamsal detaylar, teori ile ilişkili uygun argümanların belirlenmesi ve bu argümanlar arasındaki olası ilişkilerin önceden düşünülmesini içermektedir (Boero, 1999). Bu safha da birinci safha gibi matematikçilerin yaptığı iştir (Reiss vd., 2008).

4. Tümdengelimsel zincir içinde teorik argümanların seçimi ve tutarlı biçimde birbirine bağlanması: Bu safha genellikle matematikçilerin yapmış oldukları çalışmayı diğer matematikçilere informal yollarla özetledikleri safhadır.

5. Geçerli matematiksel standartlara göre kabul edilmiş argümanların ispata bağlanması: Bu safha, yayım için yazılı metnin oluşturulduğu safhadır. Bu safha için matematiksel standartların mutlak olmadığı ifade edilebilir. Örneğin

günümüzdeki bir makale ile 18. yy da yazılmış makale karşılaştırıldığında veya lise öğretim programındaki bir bölüm ile üniversitedeki bir bölüm karşılaştırıldığında farklı olabildiklerini görebiliriz.

6. Formal ispata yaklaşma: Bu safha, matematikçilerin teoremlerinde bazen eksik bazen de yalnızca ispatın belli kısımları ile ilgili olabilmektedir.

Bu safhalar belli bir sırayla ele alınmalarına rağmen, doğrusal olma şartı içermemektedir. Örneğin beşinci safha olan yani argümanların ispata bağlanması safhasında sıkıntı çıktığı takdirde problem durumunun yeniden açıklanması ve yeni bir ifade ile hipotezin desteklenmesi gerekebilmektedir (Boero, 1999).

1.9.2. Heinze ve Reiss'in Modeli

Matematikçilerin ve öğrencilerin ispat süreci birbirinden farklıdır. Çünkü matematikçiler zengin ve serbest biçimde argümantasyon yapabilirken; öğrenciler için bu durum söz konusu değildir (Boero, 1999). Boero modeli, matematikçilerin ispat sürecine yönelik olması sebebiyle; Heinze ve Reiss (2004), Boero modelini öğrencilerin ispat sürecine uyarlamak için değişiklikler yapmışlardır. Heinze ve Reiss (2004) uyarladıkları modele göre, ispat öğretimi için ispat sürecinin öneminden hareketle öğrencilerin ispat sürecinde ihmal edilen veya edilmeyen evreleri belirlemeye çalışmışlardır. Çalışmada öğrencilerin ispat sürecinde kontrolü kaybettikleri bu yüzden öğrenciler için ispatın küçük parçalara bölünerek ele alınması gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Heinze ve Reiss (2004) Boero'un altı safha olarak ifade ettiği ispat sürecini öğrenciler için beş evre olarak ifade etmişlerdir.

1. Evre: Bu evre problem durumunun açıklanması ve varsayımı destekleyecek iddiaların tanımlanmasıdır. Geometri derslerinde bir çizimin araştırılması da bu evrede incelenmektedir.

2. Evre: Bu evre metinsel kurallara göre varsayımın ifade edilmesidir. Öğrenci bu evrede varsayımı açık ve net biçimde ifade edebiliyorsa bu evre başarılı biçimde geçilmiş anlamına gelmektedir.

3. Evre: Bu evrenin amacı varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenerek olası ispat stratejilerinin kabaca planlanmasıdır. Bu evre "varsayıma referans, varsayımın araştırılması, daha fazla bilgi toplanması ve bir ispat fikri oluşturma"

olmak üzere dört alt kategoriye ayrılmıştır. Bu alt kategorilerden en az üç tanesinin gözlenmesi bu evrenin başarılı biçimde geçtiğini göstermektedir.

4. Evre: Bu evre bir önceki evrenin unsurlarını kapsamaktadır. Üçüncü evre iddiaların belirlenerek ispatın kabaca planlanmasıyla sona ermektedir. Bu evrede ise taslaktaki varsayımlar tümdengelimsel zincir içinde birleştirilmek durumundadır. Bu evrede hem öğretmen hem de öğrenci sürece katkıda bulunuyorsa, evrenin başarılı biçimde geçtiği söylenebilir.

5. Evre: Bu evre okul matematiğindeki ispat sürecinin son evresidir. Bu evrede geçmişe dönük genel değerlendirme bulunmaktadır. Eğer bütün adımlar ifade edilmiş ve sürece dönük özet mevcutsa bu evrenin başarılı biçimde geçtiği söylenebilir.

Polat (2018) ise yaptığı çalışmasında öğrencilerin sözsüz ispat süreçlerini incelemiştir. Çalışmanın analizinde ise daha önceden Boero'nun modelinden uyarlanmış olan öğrencilerin ispat sürecinin incelendiği Heinze ve Reiss'in modelini esas almıştır. Bu modelin süreçlerinden hareketle içerik analiziyle yeni kategorilere ulaşmış ve sözsüz ispat sürecinin aşamalarını oluşturmuştur. Polat (2018) çalışmasında öğrencilerin geometri soruları üzerindeki sözsüz ispat sürecini incelediği için sorularda şekil ve metinsel paylaşımları göz önünde bulundurarak kullanılan modele uygun olarak beş aşama belirlemiştir.

1. Aşama: Şeklin incelenmesi; şeklin doğru biçimde açıklanması, şekil ve metinsel paylaşımların beraber açıklanması ve metinsel paylaşıma odaklanma ve şekle dair yeterli olmayan açıklama ifadeleri ise bu aşamanın alt aşamalarıdır.

2. Aşama: Varsayımın açık ve net şekilde ifade edilmesi; varsayımı fark etme, varsayımı fark etmeme ifadeleri ise bu aşamanın alt aşamalarıdır.

3. Aşama: Varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi; yapılanları gerekçelendirme bu aşamanın alt aşamasıdır.

4. Aşama: Gerekli işlemlerin yapılması; işlemi tamamlama, işlemi eksik yapma ve işlemi tamamlayamama ifadeleri ise bu aşamanın alt aşamalarıdır.

<u>5. Aşama:</u> Yapılanların özetlenmesi; hangi teoremin niçin doğru olduğunu anlama, şekil ve metinsel paylaşımların bütüncül olarak açıklanması ifadeleri ise bu aşamanın alt aşamalarıdır.

Bu çalışmada ise, Polat (2018)'ın analiz süreci aşamaları göz önünde bulundurularak klinik görüşmeler analiz edilmiştir. Ancak ele alınan analiz süreci aşamaları sözsüz ispat sürecine ait olduğu için aşamalarda ve alt aşamalarda bazı değişiklikler yapılmıştır. Polat (2018)'ın sözsüz ispat sürecindeki ilk aşama "Şeklin incelenmesi" olarak belirlenmiştir. Bu çalışmada ise geometri sorularını içeren sözsüz ispat süreci değil de matematik ve geometri derslerine ait konuları içeren kısmen teorik çözümü bulunan ispat soruları ele alındığı için ilk aşama "Problemin incelenmesi" bu aşamanın alt aşamaları da "problem durumunun açıklanması ve problem durumunun açıklanamaması" olarak belirlenmiştir. Polat (2018)'ın ispat sürecindeki ikinci aşama "Varsayımın açık ve net bir şekilde ifade edilmesi" olarak belirlenmiştir. Fakat bu çalışmada varsayım kavramı matematik literatüründe hipotez kavramına karşılık geldiğinden varsayım kelimesi yerine teorem kelimesi kullanılmıştır. Dolayısıyla ikinci aşama "Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi" bu aşamanın alt aşamaları da "teoremi açıklama ve teoremi açıklayamama" olarak belirlenmiştir. Çünkü verilen ispat sorularında öğrencilerden hipotez ve hükmü belirlemeleri dolayısıyla teoremin ispatı için kullanılacak önermeleri açık ve net bir şekilde ifade etmeleri beklenmektedir. Örneğin; öğrencilerden ardışık sayıların toplamı formülünün ispatında $n \geq 2$ ifadesini hipotez $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ ifadesini hüküm şeklinde belirleyerek teoremi ifade etmeleri istenmektedir. Üçüncü aşamada da ikinci aşamada olduğu gibi varsayım kelimesi yerine teorem kelimesi kullanılarak "Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi" şeklinde düzenlenmiştir. Dördüncü aşama "Gerekli işlemlerin yapılması" bu aşamanın alt aşamaları da "işlemi tamamlama, işlemi eksik yapma, işlemi tamamlayamama" beşinci aşama ise "Yapılanların özetlenmesi" bu aşamanın alt aşaması da "yapılan işlemlerin ifade edilmesi" şeklinde düzenlenmiştir.

Bu çalışmada, problemin incelenmesi olarak belirlenen birinci aşamada öğrencilerden problem durumunun açıklanması beklenmektedir. Çünkü problem durumunu anlayan ve açıklayabilen öğrenci ispat sürecinin devamındaki diğer aşamada teoremi daha kolay fark ederek sonraki işlemleri rahat bir şekilde tamamlayabilecektir. İspat yapmaya başlamanın en önemli olduğu aşamanın birinci aşama olduğu söylenebilir. Çünkü bütün aşamaların temelinde problem durumunun anlaşılması yer almaktadır.

İkinci aşama, teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi olarak belirlenmiştir. Bu aşamada öğrencilerden hipotez ve hükmü belirleyerek teoremi oluşturan önermeleri fark ederek açıklamaları beklenmektedir. Teoremin açıklanamaması, hipotez ve hükmün ne olduğuna dair herhangi bir bilginin olmaması öğrencilerin sadece yaptıkları işlemlere odaklanmalarına sebep olmaktadır. Bu durumda öğrenci neyi ispatlaması gerektiğini fark etmemektedir. Polat (2018)'a göre, özellikle bu aşamanın tamamlanmasının ispat sürecinin son aşaması olan yapılanların özetlenmesi aşaması için önemli olduğu düşünülmektedir.

Üçüncü aşama, teoremin geçerliliğini göstermek için uygun stratejilerin geliştirilmesi olarak belirlenmiştir. Bu aşamada öğrencilerden sonuca ulaşmak için yapılması gereken işlemlere uygun stratejiler geliştirmeleri ve hangi işlemi yapacaklarına karar vermeleri beklenir. Bir önceki aşamada hipotez ve hükmü belirleyebilen öğrenci ispat sürecine dair uygun bir strateji belirleyebileceğinden (doğrudan ya da dolaylı ispat yöntemi) ikinci aşamanın doğru bir şekilde tamamlanması gerekir. Polat (2018)'a göre, bu aşama öğrencinin teoremin ne olduğunu anlamasının yanında neden doğru olduğunu anlaması için de önemlidir. Çünkü öğrenci ispatın her aşamasında neyin niçin yapıldığını açıklayarak, yapmış olduğu her işlemi neden yaptığını düşünmek zorunda kalmaktadır. Bu aşamayı tamamlayan öğrencilerden özellikle bundan sonraki aşamalarda işlemleri doğru yaptıkları takdirde ispat sürecini tamamlamaları beklenir.

Dördüncü aşama, gerekli işlemlerin yapılması olarak belirlenmiştir. Bu aşamada öğrencilerden önceki aşamada belirledikleri stratejiden hareketle gerekli işlemleri yapmaları beklenir. Öğrencilerin hangi işlemi yapacaklarını doğru biçimde belirlemelerine rağmen, bu aşamada gerçekleştirilen işlem hataları sonuca ulaşmalarını engelleyebilir. O yüzden belirlenen stratejiye uygun işlemlerin tamamlanması ispat sürecinin tamamlanması için önemlidir.

Beşinci aşama, yapılanların özetlenmesi olarak belirlenmiştir. Bu aşamada öğrencilerden yapılan işlemleri inceleyerek özetlemeleri beklenmektedir. Öğrencinin ispat sürecinde değerlendirme yaparak; yapılanları özetlemesi, öğrencinin hangi teoremin niçin doğru olduğuna dair farkındalığı için önemlidir

(Polat, 2018). Ayrıca öğrencilerin yaptıkları işlemleri özetlemesi onların ispat sürecinde fark edemedikleri ayrıntıları görmelerini de sağlayabilir.

Bu çalışmada ele alınan aşamalar belli bir sıraya göre verilmelerine rağmen, aşamalar arasında doğrusal olma şartı bulunmamaktadır. Örneğin; dördüncü aşama olan işlemlerin yapılması aşamasında işlem hatasından kaynaklanan bir sıkıntıyla karşılaşan öğrenci, istediği aşamadan tekrardan süreci kontrol ederek ispatını tamamlayabilmektedir. İspat süreci aşamalarının öğrenci tarafından geçirilmesinin sağlanması, ispat öğretimi üzerinde olumlu etkiye sahiptir (Öztürk, 2016). Bu yüzden ispat sürecinin incelenmesi, öğrencilerin ispat konusundaki başarısızlıklarının belirlenmesinde ve gerekli çalışmaların yapılmasında önemlidir. Bu çalışmada klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizi için kullanılan aşamalar aşağıdaki Şekil 1.7'de gösterilmiştir.

Şekil 1.7: İspat süreci aşamaları

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde literatürde yer alan; lise öğrencilerinin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelendiği, ispat hakkındaki görüşlerinin ve ispat ile ilgili öğrenme güçlüklerinin tespit edilmeye çalışıldığı araştırmalarla ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Sriraman (2004) çalışmasında; üstün yetenekli 9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat süreçlerindeki tanımlarını ve yorumlarını inceleyerek öğrencilerin süreçteki yaptıkları işlemlerle profesyonel matematikçiler tarafından yapılan işlemleri karşılaştırmayı amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda daha önce geometri derslerinde ispat çalışmaları yapmayan dört öğrenci araştırmanın çalışma grubunu oluşturmuştur. Öğrencilere bu süreçte rutin olmayan bir geometri sorusunun ispatı sorulmuştur. Elde edilen veriler araştırmacı tarafından transkript edilerek gerekli kodlamalar sonucu analizler yapılmıştır. Bulgular zihinsel süreçler açısından incelenerek dört öğrencinin de zihinsel bir sürecin tersine çevirme ve doğru sonuca ulaşma becerilerinden hareketle ispatı düşündükleri görülmüştür. Bu çalışma, Krutetskiian'ın zihinsel süreçlerinin esneklik ve tersine çevrilebilir yapılarının matematiksel alanda üstün yetenekli öğrencilerin özellikleri olduğunu doğrulamıştır.

Lee (2005) çalışmasında; üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapılarını incelemeyi ve öğrencilerin matematiksel düşünceleri hakkındaki teorik bilgi birikimlerine katkıda bulunmayı amaçlamıştır. Araştırmanın çalışma grubunu altıncı sınıf öğrencilerinin oluşturduğu iki gruptan oluşan toplam 32 öğrenci oluşturmuştur. Çalışmada öğrencilerin küçük grupta geometrik akıl yürütme ve doğrulamayı teşvik etmek için tasarlanan öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışma boyunca iki grupla her gün üç saat boyunca geometri üzerine çalışmalar yapılmış sonrasında öğrencilerin bireysel ispat çalışmaları yazılı olarak toplanmıştır. Yazılı olarak toplanan verilere göre belirlenen üç öğrenciyle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen verilerin analizinde pragmatik, anlamsal, entelektüel olmak üzere üç tür akıl yürütme ve yaratıcı, özgün ispatlar tespit edilmiştir. Çalışma sonucunda matematiksel üstün yetenekli öğrencilerin ispatlama yeteneklerini geliştirebilmeleri için öğretmenlerinin öğrencilerin oluşturduğu yaratıcı ispatlarını önemsemeleri gerektiği belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin geometrik akıl yürütme becerilerini geliştirebilmeleri için tahmin etme, kontrol etme ve matematiksel olarak ispatlama konusunda çok fazla çalışmaya ihtiyaçları olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Uğurel vd. (2016) çalışmalarında; üstün yetenekli öğrencilerle sözsüz ispat çalışmaları yaptıktan belli bir süre sonra öğrencilerden kendi sözsüz ispatlarını oluşturmalarını istemişler ve öğrencilerin sözsüz ispatlarla ilgili yaklaşımlarını incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırmanın çalışma grubunu fen lisesinde okuyan 9. sınıf üç öğrenci oluşturmuştur. Çalışmada hem öğrencilerin oluşturduğu sözsüz ispatlardan hem de öğrencilerle yapılan görüşme formlarından veriler elde edilmiştir. Elde edilen verilerin analizinde "temel modifikasyon, ileri modifikasyon ve tümevarımsal temel çizim" olmak üzere üç kategori oluşturulmuş ve bu kategorilerin sözsüz ispat analizlerinde kullanılabileceği belirtilmiştir. Ayrıca çalışmada öğrenciler sözsüz ispatları "eğlenceli, zevkli, pratik, entelektüel, orijinal, şık" bulduklarını ifade ederek sözsüz ispatlarla ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir. Geometri ve matematiği birlikte kullandıklarını fark eden öğrenciler problem çözme, yaratıcılık ve görselleştirme becerilerinin geliştiğini ve sözsüz ispatların geniş uygulama alanlarına sahip olduğunu gördüklerini ifade etmişlerdir.

Öztürk vd. (2017) yaptıkları çalışmalarında, üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavram bilgilerini ve kavramlar arasındaki farkındalıklarını belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu amaç doğrultusunda nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yöntemini kullanarak 14 üstün yetenekli lise öğrencisi ile çalışmışlardır. Çalışmanın verilerini yarı yapılandırılmış görüşme formu ile toplayarak elde edilen verileri içerik analizi yöntemiyle analiz etmişlerdir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin genel olarak ispat kavramları hakkında bilgi sahibi oldukları ancak kavramların arasındaki ayrımların farkında olmadıkları sonucuna ulaşmışlardır.

Polat (2018) çalışmasında; lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçlerini inceleyerek, sözsüz ispatların lise öğrencilerinin matematiksel ispat becerileri üzerine etkisini, lise matematik öğretmeninin ve lise öğrencilerinin sözsüz ispatlara ilişkin görüşlerini belirlemeyi amaçlamıştır. Bir devlet okulunda 9. sınıfta okuyan 25 öğrenci araştırmanın çalışma grubunu oluşturmuştur. Çalışmanın yöntemini karma araştırma yöntemi olarak belirlemiştir. Uygulama öncesi öğrencilerin ispat becerilerini belirleyebilmek için hazırladığı ispat beceri testini kullanmıştır. Uygulama sonrası ispat beceri testini tüm sınıfa uygulamış ve sürecin ayrıntılarını belirleyebilmek için seçilen dört öğrenci ile bireysel sözsüz ispat etkinliklerini yürütmüş ve öğrencilerden sözsüz ispatlarla ilgili görüş almıştır. Ayrıca sürece ilişkin öğretmen ile de görüşme yapmıştır. Verilerin tamamı elde edildikten sonra nicel verileri SPSS programını kullanarak, nitel verileri ise içerik analiz tekniği ile analiz etmiştir. Çalışmanın sonucunda sözsüz ispatların, öğrencilere formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, öğrencilerin daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma ve matematiksel kavramları anlama gibi katkılar sağladığı sonucuna ulaşmıştır. Uygulama öncesi ve uygulama sonrası yapılan ispat beceri testinden alınan puanlar bağımlı örneklemler t-testi ile analizi edilmiş ve sözsüz ispatların ispat becerisi üzerinde olumlu etkisi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca sözsüz ispatların sınıfta uygulanabilirliği açısından gerek öğretmen gerekse öğrencilerin olumlu görüş bildirdiklerini tespit etmiştir.

Yıldız (2019) çalışmasında; 9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın çalışma grubunu Mersin ilinde bulunan Yahya Akel Fen Lisesinde öğrenim görmekte olan 12 öğrenci oluşturmuştur. Araştırmacı çalışma deseni olarak durum çalışması desenini kullanmıştır. Verilerini Matematiksel İspat Bilgi Testi ve bu testin uygulanmasının devamında öğrencilerin matematiksel ispatla ilgili tespit edilen öğrenme güçlüklerinin ayrıntılı olarak belirlenmesi amacıyla 5 öğrenci ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış mülakatlar ile toplamıştır. Araştırmacı mülakatlar sonucu elde edilen verileri betimsel analiz tekniği ile analiz ederek yorumlamıştır. Araştırma sürecinde elde ettiği verilerin analizi sonucunda öğrencilerin matematiksel ispat yaparken ispat yöntemlerini ezbere kullanmaya çalıştıkları, ispat yapmaya karşı ön yargılı oldukları, ispatı zaman kaybı olarak düşündükleri ve ispat yapmayı sevmedikleri sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca, ispat sürecine tam olarak hâkim olmadıkları, ispat sürecinde doğru matematiksel dil ve notasyonları kullanamadıkları, ispata başlamakta güçlük çektikleri, yöntemlere dair bilgilerinin yanlış ve eksik olduğu, işlemsel ve kavramsal hatalardan dolayı ispatı tamamlayamadıklarını tespit etmiştir.

Lise öğrencileri ile yapılmış ispat çalışmalarının yanında öğretmen adayları ile yapılan birçok çalışma da yer almaktadır (Moralı vd., 2006; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Keçeli Bozdağ, 2012; Pekşen Sağır, 2013; Güler, 2013; Karahan, 2013; Barak, 2018). Literatürde yer alan çalışmalardan hareketle ve ispatın da matematikteki önemi göz önünde bulundurularak bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu araştırma sonuçlarının bu alanda çalışma yapacak diğer araştırmacılara, ispat yapma süreci hakkında yarar sağlayacağı ve yeni tartışma olanakları oluşturacağı düşünülmektedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeline, araştırmanın çalışma grubuna, araştırmada kullanılan veri toplama araçlarına, uygulama sürecine ve veri analizinde kullanılan yöntem ve tekniklere yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada Bilim ve Sanat Merkezine devam eden 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlandığı için nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Belirlenen üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin derinlemesine incelenmesi, verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması kullanılmıştır.

3.2. Çalışma Grubu

Bu araştırma 2019-2020 eğitim-öğretim yılında Gaziantep ili merkez ilçesinde bir Bilim ve Sanat Merkezinde yürütülmüştür. Araştırmanın çalışma grubunu matematik alanında üstün yetenekli tanısı almış 11. sınıf seviyesinde öğrenim gören yirmi beş öğrenci arasından seçilen beş öğrenci oluşturmaktadır. Üstün yetenekli öğrenciler rutin ders içeriklerinden sıkılan, rutin ders içeriklerini kolay bulan, emsallerinden ileride oldukları için müfredat dışı konulara yönelen öğrenciler olduklarından ve uğraştıkları soruların görsel, yaratıcı, rutin dışı, üretkenlik isteyen sorular olması ve ispatın da bu özellikleri barındırmasından dolayı bu çalışmada üstün yetenekli öğrenciler çalışma grubu olarak seçilmiştir. İspat öğrencilerin; ilişkileri açığa çıkarma, tahminler yapma, kavramları ilişkilendirme, ifadeleri doğrulama, yeni bilgileri genelleme ve öğrendikleri bilgileri yeniden yapılandırmalarına olanak sağlar. Bu özelliklerin incelenmesini sağlayan sınıf seviyesi de 11. ve 12. sınıf olarak belirlenebilir. Çünkü bu sınıf seviyesindeki öğrencilerin bilgi birikimleri alt sınıf seviyesindeki öğrencilere göre daha fazladır. Ayrıca bu öğrencilerin kavramlar arasında ilişkilendirme becerileri, sebep sonuç ilişkisi kurma, hipotezler kurma, çözüm arama, öğrendikleri bilgiler arasında çıkarım yapma, keşfetme, problem çözme gibi özelliklerini alt sınıf seviyesindeki öğrencilere göre daha iyi kullanmaları beklenir. Çalışmada 11. sınıf seviyesinin tercih edilmesinin sebebi ise 12. sınıf öğrencilerin sınava hazırlanmaları ve bu yüzden BİLSEM'e devam etmemeleri ve görüşmelerin sağlanamamasıdır.

Çalışma grubunun belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Öğrencilerin BİLSEM'e devam süreleri, İspat Görüşme Formundan elde edilen veriler, İspat Tutum Ölçeğinden elde edilen veriler ve matematik öğretmenlerinin öğrencilerin ders içi çalışmalara katılımı ve matematikteki başarılarına yönelik görüşleri ölçüt örnekleme yönteminin kriterlerini oluşturmuştur.

Çalışmaya katılacak öğrencilerin seçiminde gönüllülük esasına dikkat edilerek velilerinden gerekli izinler alınmıştır (EK 4). Çalışmaya başlamadan önce öğrencilere hem araştırmanın amacı hakkında hem de elde edilen verilerin sadece araştırma kapsamında kullanılacağına dair bilgilendirme yapılmış ve öğrencilerden araştırmaya katılımlarına ilişkin gerekli izinler alınmıştır (EK 5). BİLSEM'e devam eden yirmi beş fen lisesi öğrencisinin görüşme formundaki açık uçlu sorulara verdikleri cevaplara göre; teorem ve ispat kelimelerinin tanımlarını doğru yapabilen, derslerinde ispat çalışmaları yapan, ispat çalışmalarının yapılması yönünde olumlu görüşe sahip olan ve ispat tutum ölçeğinden elde edilen verilere göre; ispat yapmaya yönelik olumlu tutuma sahip olan öğrenciler arasından matematik öğretmenlerinin görüşleri de dikkate alınarak klinik görüşmeye katılacak beş öğrenci belirlenmiştir. Bu öğrencilerin isimleri Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5 şeklinde kodlanarak gizli tutulmuştur.

Ö1 kodlu öğrenci ilkokul 2. sınıftan bu yana BİLSEM öğrencisidir. BİLSEM'e ilk başladığı zamanlarda matematik, müzik, tiyatro alanlarında çalışmış ve 7. sınıftan itibaren de matematik alanında çalışmaya devam etmiştir. Özel bir fen lisesinde öğrenimine devam eden öğrenci BİLSEM'e devam ettiği her yıl projeler üzerine çalışmıştır. 6. sınıfta öğrenimine devam ederken Türkiye Zekâ Vakfı'nın düzenlediği "Oyun 2016" projesine katılmıştır. Öğrenci matematiği çok sevdiğini ve matematikle uğraşmaktan zevk aldığını belirtmiştir. Ayrıca okulda ispat yapma üzerine çalışmalar yaptığını ancak BİLSEM'de ispat üzerine çalışmalar yapmadığını konulardan ziyade projeler üzerine çalıştıklarını ifade etmiştir.

Ö2 kodlu öğrenci ilkokul 5. sınıftan bu yana BİLSEM öğrencisidir. Özel bir fen lisesinde öğrenimine devam eden öğrenci projeler üzerine de çalışmıştır. İki yıldır da TÜBİTAK'a proje hazırladığını çok az puanla kaybettiğini ifade etmiştir.

Ayrıca ispat yapmayı çok sevdiğini ancak derslerde yapmadıklarını, kendisinin olimpiyatlara hazırlandığı için ispat üzerine çalıştığını ve yapabildiğini matematiğin onun için vazgeçilmez bir çalışma alanı olduğunu söylemiştir. Öğrencinin ispat üzerine sadece kendisinin çalışmasına rağmen klinik görüşmede bütün soruları ispatladığı görülmüştür.

Ö3 kodlu öğrenci ilkokul 2. sınıftan bu yana BİLSEM öğrencisidir. Ancak liseden itibaren düzenli bir şekilde BİLSEM'e devam etmiştir. Fen lisesinde öğrenimine devam eden öğrenci okulda ispat yaptıklarını ancak okulda ne kadar ispat yapılsa da öğretmenlerin sadece ispatı çözüp anlattığını sonrasında kendilerinin ispat üzerine çalışmadıklarını, uğraşmadıklarını ve hiç sorgulamadıklarını ifade etmiştir.

Ö4 kodlu öğrenci ilkokul 3. sınıftan bu yana BİLSEM öğrencisidir. Fen lisesinde öğrenimine devam eden öğrenci okulda ispat üzerine çalışmadıklarını sadece öğrencilerden soran olursa öğretmenlerinin anlattıkları konu üzerine ispat çalışması yaptığını ifade etmiştir. Ayrıca öğrenci bu çalışmanın sonunda öğrendikleri formülleri öylece sorgulamadan öğrendiğini kullandığı birçok formülü sadece ezbere bildiğini fark etmiştir. Bu süreçte yapamadığı soruların ispatını öğrenmiş ve bu çalışma sayesinde matematikte bu konuda eksik olduğunu fark etmiştir.

Ö5 kodlu öğrenci ilkokuldan bu yana düzenli olarak devamlılığını sağlayan BİLSEM öğrencisidir. Fen lisesinde öğrenimine devam eden öğrenci matematiği çok sevdiğini ve boş kaldığı her an bile matematikle uğraştığını belirtmiştir. Projelere katıldığını ancak projeler konusunda çalışmayı sevmediğini ifade eden öğrenci okulda da ispat konusu üzerine çalışmadıklarını bu durumun kendileri için bir eksiklik olduğunu bu çalışmayla fark ettiğini söylemiştir. Matematikteki her şeyi ezberleyip öğrendiğini düşünmüş ama asıl nedenlerini ve sebeplerini anladığında öğrendiklerinin daha anlamlı olduğunu dile getirmiş ayrıca bundan sonraki çalışmalarında ispat üzerine daha çok çalışmak istediğini belirtmiştir.

3.3 . Verilerin Toplanması

Araştırmada üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçleri derinlemesine incelenmek istendiğinden veri toplama yöntemi olarak klinik görüşme seçilmiştir. Klinik görüşmeler yapılmadan önce BİLSEM'e devam eden 11. sınıf öğrencilerinin ön öğrenmeleri ve ispata yönelik hazırbulunuşuklarına ilişkin görüşlerine başvurmak için görüşme formu, ispata yönelik tutumlarını ölçmek amacıyla da ispat tutum ölçeği uygulanmıştır. Elde edilen veriler sonucunda klinik görüşme için örneklem belirlenmiştir. Araştırmanın verilerinin toplanma süresi yaklaşık üç ay sürmüştür. Görüşmeler araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiş ve elde edilen veriler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Aşağıda Şekil 4.1'de araştırma sürecinde izlenen yol verilmiştir.

Katılımcıları Seçmek için Ölçütlerin Belirlenmesi
BİLSEM'e devam eden matematik alanında üstün yetenekli 11. sınıf öğrencilerin; ön öğrenmeleri ve ispata yönelik hazırbulunuşuklarına ilişkin görüşlerine, ispata yönelik tutumlarına ve matematik öğretmenlerinin görüşlerine başvurularak ölçüt örnekleme yöntemine göre katılımcılarının belirlenmesi

Pilot Görüşmelerin Yapılması
İspat Görüşme Formu ve İspat Tutum Ölçeği için 11. sınıftan toplamda 10 öğrenci ile İspat Klinik Görüşme Formu için ise bu öğrenciler arasından belirlenen 5 öğrenci ile pilot görüşmelerin yapılması

Görüşme Sürecine ilişkin Uzman Dönütü Alma
Matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesinden, yapılan görüşmeler ile ilgili olarak dönüt alınması

Katılımcıların Seçimi
BİLSEM'e devam eden 11. sınıf düzeyinde 25 öğrencinin ispat görüşme formuna ve ispat tutum ölçeğine verdikleri cevaplar ile öğrencilerin matematik öğretmenlerinin görüşü göz önünde bulundurularak bu öğrenciler arasından 5

Verilerin Toplanması
Katılımcılar ile klinik görüşmelerin gerçekleştirilmesi

Verilerin Analizi
Verilerin Polat'ın (2018) ispat süreci aşamaları dikkate alınarak analiz edilmesi

Raporlaştırma

Şekil 3.1: Veri toplama süreci

3.4 . Veri Toplama Araçları

Araştırmanın tasarlandığı nitel araştırma desenine bağlı olarak araştırmanın örnekleminin belirlenmesi için görüşme formu ve tutum ölçeği, ispat yapma sürecinin derinlemesine incelenmesi için ise ispat klinik görüşme formu kullanılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

3.4.1. İspat Görüşme Formu

Öğrencilerin ön öğrenmeleri ve ispata yönelik hazırbulunuşluklarına ilişkin görüşlerine başvurmak amacıyla araştırmacı tarafından hazırlanan açık uçlu üç sorudan oluşan görüşme formu öğrencilere yöneltilmiştir. Öğrencilerin ispat hakkındaki görüşlerinin alınmasının, onların ispat yapma süreçlerinin daha ayrıntılı ve doğru biçimde yorumlanmasına yön vereceği düşünülmüştür. Görüşme formunda öğrencilerin teorem ve ispat kavramları hakkındaki bilgileri, matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapıp yapmadıkları yapıyorlarsa hangi ispatları hatırladıkları ve derslerde ispat yapılıp yapılmaması konusundaki düşünceleri sorulmuştur. (EK 3)

Ayrıca görüşme formunun güvenirlik ve geçerlik çalışmaları için lise matematik öğretmenlerinden ve BİLSEM öğretmenlerinden uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşünden gelen dönütlere göre gerekli düzenlemeler yapılıp görüşme formu uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

3.4.2. İspat Tutum Ölçeği

Tutum ölçmede amaç, ölçme konusu olan tutum bakımından birey hakkında değerlendirme yapmak ve elde edilen değerlendirme sonuçlarına dayanarak belli kararlar vermektir (Bindak, 2005). Matematiksel alandaki üstün yetenekli öğrenciler, kendinden yaşça büyük öğrencilerin yapabildiği matematiksel becerileri sergileyebilmektedir (Sowell vd., 1990). Ölçülmek istenen tutumun uzun süre değişmeyeceği düşünüldüğünden çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin ispata yönelik tutumlarını ölçmek amacıyla Nizamoğlu ve Keçeli Bozdağ (2012) tarafından öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarını belirlemek için geliştirilen “İspat Tutum Ölçeği” gerekli resmi izin alındıktan sonra kullanılmıştır. Ölçek 3’lü likert tipi ölçektir. Tutum ölçeğindeki maddeler “Katılıyorum, Kararsızım/Bilmiyorum, Katılmıyorum” şeklinde derecelendirilmiştir. (EK 4)

Ölçeğin güvenirlik ve geçerlik çalışması araştırmacılar tarafından yapılmış olup güvenirliği (Cronbach Alpha katsayısı) 0,887 olarak belirlenmiştir. Ölçeğin yapı geçerliliğini belirlemek amacıyla araştırmacılar tarafından faktör analizi yapılmıştır. Ölçeğin alt boyutları yapılan faktör analizi sonucunda belirlenmiş ve tutumların dağılımının dört faktör altında gerçekleştiği gözlenmiştir. Bunlar; ispata bakış açısı/görüş, ispat yaparken sahip olunan duygu/his, olumsuz tutumlar ve olumsuz düşünceler olarak adlandırılmıştır.

İspat tutum ölçeği 18'i olumlu, 4'ü olumsuz olmak üzere 22 maddeden oluşmuştur. Öğrencilerden maddeleri en uygun cevabı işaretleyerek doldurmaları istenmiş ve ölçeğin başında uygulama amacının belirtildiği yönergeye yer verilmiştir. Ölçek ters puanlamaya göre puanlanmış ve puan değerleri 1-2-3 şeklinde kodlanarak en düşük puan 0 ve en yüksek puan 66 olarak belirlenmiştir. Ayrıca tutum ölçeğine katılan yirmi beş öğrencinin ölçekte belirttikleri tutumların kodlamaya göre puanları hesaplanmış ve ortalama puana göre değerlendirme yapılmıştır. Puanlardaki artış bireyin ispat ve ispatlamaya yönelik tutumunun olumlu olduğunu ifade ederken puanlardaki azalma ise bireylerin olumlu tutumlarının azaldığını ifade etmektedir.

Görüşme formundaki açık uçlu sorulara verilen cevaplara göre; teorem ve ispat kelimelerinin tanımlarını doğru yapabilen, derslerinde ispat çalışmaları yapan, ispat çalışmalarının yapılması yönünde olumlu görüşe sahip olan ve ispat tutum ölçeğine göre, ortalama puanın üzerinde puan alan öğrenciler göz önünde bulundurularak klinik görüşme yapılacak öğrenciler belirlenmiştir.

3.4.3. İspat Klinik Görüşme Formu

Klinik görüşme, matematik eğitimi çalışmalarında genellikle kullanılan veri toplama tekniklerinden biridir. Klinik görüşmede amaç, görüşülen bireyin bilgi yapılarını ve muhakeme süreçlerini ortaya çıkartmaktır (Clement, 2000'den Akt: Barak, 2018). Bu çalışmada da öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığından klinik görüşme veri toplama aracı olarak tercih edilmiştir. Klinik görüşmeler öğrencilerin doğal ortamları olan sınıf ortamlarında gerçekleştirilmiş ispat yapma süreçleri incelenmeye çalışılmıştır.

Klinik görüşme için hazırlanan İspat Klinik Görüşme Formundaki sorular hazırlanırken Millî Eğitim Bakanlığı'nın hazırlamış olduğu Ortaöğretim Fen Lisesi

Matematik Dersi 9-12. sınıflar Öğretim Programı ve ortaöğretim ders kitapları incelenmiştir. Bu inceleme doğrultusunda BİLSEM'de öğrencilerin birkaç dersi izlenerek BİLSEM öğretmenlerinin de görüşü alınarak belirlenen konularda ispat soruları hazırlanmıştır. Ancak öğretim programının kazanımları incelendiğinde ispat yapmaya dair bir kazanıma rastlanmadığı için öğrencilerin ders kitaplarından hareketle ispat yapmaya uygun sorular belirlenerek o sorular klinik görüşme formunda yer almıştır.

Matematiksel ispat yöntemleri daha önceki yıllarda 11. sınıfta "Mantık" öğrenme alanı başlığı altında öğretimi yapılan bir konu olup 2017 yılında yapılan son program değişikliği ile yalnız fen lisesi 9. sınıf öğretim programında "Mantık" öğrenme alanında bulunan "Açık Önermeler ve İspat Teknikleri Alt Öğrenme Alanı" içerisinde yer almıştır. 2018'de yapılan son öğretim programı değişikliği ile "Açık Önerme ve İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı" programda yer almakta ancak ispat yöntemlerine ait kazanım bulunmamaktadır (Yıldız, 2019).

Öğretim programında öğrencilerin ilişkilendirme, problem çözme, bilgilerini yapılandırma, üretebilme ve keşfedebilme gibi becerileri kazanması hedeflenirken bu becerilerin kazanılmasını sağlayan ispat yapmaya dair bir kazanımın olmaması durumunda hedefler ile mevcut öğretim programı kazanımlarının uyuşmadığı söylenebilir. Karakaya (2011)'ya göre, ders kitapları öğrencilerin öğrendikleri bilgileri pekiştirmelerine, sınavlara hazırlanmalarına ve öğrenme hızlarına uygun olarak çalışma olanağı bulmalarına yardımcı olmaları yönünde çok iyi hazırlanmış olsalar dahi ders programının genel yaklaşımıyla örtüşmüyorlarsa veya sahip olmaları gereken özellikleri taşımıyorlarsa eğitim ve öğretim programlarının başarısızlığında en önemli nedenlerden biri olabilir.

Eğitim ve öğretim sürecinde oldukça önemli bir yere sahip olan ders kitaplarında ispatın nasıl ve ne düzeyde ele alındığı sorusu cevaplanması gereken bir soru olmasına rağmen matematik eğitimi araştırmacıları, ispatın öğretimi ve öğreniminde ders kitaplarının rolüne çok az dikkat çekmişlerdir. Özellikle, matematik kitaplarındaki ispatlama durumları, ispat tartışmaları ya da ispat oluşturulmasına dair çalışmalar oldukça sınırlıdır (Hanna ve Bruyn, 1999'dan Akt: Taştepe vd., 2015). Bu yüzden 9-11. sınıf müfredatı incelenerek öğrencilerin ders kitaplarından hareketle farklı konularda farklı yöntemlerle ispatlanabilen, ispat yapma yeterliği için gerekli olan beceri ve davranışları belirlemeye yönelik olan sorular hazırlanmıştır. İlk durumda 11 ispat sorusu hazırlanmış ancak uzman görüşleri ve pilot çalışma sonuçları göz önünde bulundurularak çalışmanın amacına uygun olmayan, ispat yapma sürecinin incelenemeyeceği, benzer yöntemlerle çözülebilen 5 ispat sorusu klinik görüşme formundan çıkarılmış ve bu sayı 6'ya düşürülmüştür. İspat yapma hem matematik hem de geometri içerisinde önemli bir aktivite olarak kabul görmekte ve tüm matematikçilerin önemi konusunda hemfikir olduğu kavramlardan biri olarak kabul edilmektedir (Tall, 2002). İspatı anlamanın matematik ve geometri konularını anlama ve ilişkilendirmede etkin bir rolü olduğu bilinmektedir (Karahan, 2013). Buradan hareketle klinik görüşme formundaki 6 ispat sorusu 3'ü matematik 3'ü geometri ispat sorusu şeklinde düzenlenmiştir. Böylece öğrencilerin hem matematik sorularında hem de geometri sorularında ispat süreçlerinin incelenmesi hedeflenmiştir. (EK 5)

3.5. Uygulama Süreci

Araştırmanın uygulama süreci, pilot uygulama ve asıl uygulama olarak ele alınmış olup; araştırma sürecine dair ayrıntılar aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

3.5.1. Pilot Uygulama

Araştırmanın asıl uygulamasında karşılaşılabilecek olumsuzlukları önceden görebilmek, ortaya çıkan sorunları çözebilmek ve veri toplama aracındaki eksiklikleri fark ederek gerekli düzenlemeleri yapmak adına asıl uygulamaya başlamadan önce pilot uygulama yapılmıştır. Araştırmanın pilot uygulaması 2019-2020 eğitim-öğretim yılı birinci döneminde özel bir fen lisesinin 10. ve 11. sınıf öğrencileriyle yapılmıştır. Okulun matematik öğretmeninin yönlendirmesiyle belirlenen on beş öğrenci ile pilot çalışma yürütülmüştür. Pilot çalışmanın başında öğrencilere görüşme formu ve ispat tutum ölçeği uygulanmıştır. Görüşme formundan ve ispat tutum ölçeğinden elde edilen veriler dikkate alınarak gönüllü olarak belirlenen beş öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Araştırmacı, klinik görüşme yapmadan önce her öğrenciye görüşmeyi ses kayıt cihazına kaydetmek istediğini belirterek öğrencilerinde izni dahilinde görüşmeleri kayıt altına almıştır. Aynı zamanda öğrencilerin görüşlerini herhangi bir endişeye kapılmadan rahatça ifade edebilmeleri için görüşmeci tarafından, öğrencilere görüşme öncesi, araştırmanın içeriği ve sınav niteliği taşımadığı hakkında bilgiler verilmiştir. Böylece görüşme sürecinde sorulara içten cevaplar vermeleri sağlanmıştır. Yapılan klinik görüşmeler araştırmacı ve danışmanı ile birlikte değerlendirilerek gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Pilot çalışma sırasında uygulanan ispat görüşme formunun ve ispat tutum ölçeğinin asıl uygulamada kullanılabileceği gözlemlenmiştir. İspat klinik görüşmede ise yöneltilen 11 soru içerisinde benzer yöntemlerle çözülebilen, çalışmanın amacına uygun olmayan, ispat yapma sürecinin incelenemeyeceği 5 soru belirlenerek klinik görüşme formundan çıkarılmıştır. Klinik görüşme formundaki 6 ispat sorusu 3'ü cebirsel 3'ü geometrik ispat sorusu olmak üzere asıl uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

3.5.2. Asıl Uygulama

Araştırmanın asıl uygulaması 2019-2020 eğitim-öğretim döneminde Gaziantep ilindeki bir Bilim ve Sanat Merkezinin 11. sınıfına devam eden yirmi beş öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrencilere birinci dönemin sonunda Görüşme Formu ve İspat Tutum Ölçeği uygulanmıştır. Görüşme formundaki açık uçlu sorulara verilen cevaplar, ispat tutum ölçeğinden elde edilen veriler ve öğretmenlerin görüşleri göz önünde bulundurularak klinik görüşme için beş öğrenci seçilmiştir. Bu öğrenciler ile klinik görüşmeleri yapmak üzere tarih belirlenmiş ve ikinci dönemin başında BİLSEM'de kullanılmayan bir sınıfta görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler yaklaşık 60 dakika sürmüştür. Öğrencilerin izni dahilinde görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Görüşmeler her hafta yapılmamış olup bazen haftada bir bazen iki haftada bir yapılmıştır. Böylelikle araştırmacı her görüşmeden sonra ses kayıtlarını transkript edebilmiş ve bir sonraki görüşme için yapılacakları tekrardan gözden geçirme fırsatı bulabilmiştir. Görüşme sonunda öğrencilerin ispat yapma sürecindeki düşünceleri, ispat yapma sürecinde zorlandıkları veya zorlanmadıkları noktalar, okulda veya BİLSEM'de ispat üzerine çalışma yapıp yapmadıkları gibi konularda görüşleri alınmıştır.

3.6. Veri Analizi

Bu araştırmada, nitel çalışmalarda çok yaygın bir model olan durum çalışması kullanılmıştır. Araştırmada nitel veriler öğrencilerle yapılan klinik görüşmelerden elde edilmiştir. Klinik görüşme formları ve ses kayıtları ayrı ayrı metin belgeleri haline getirilerek araştırmanın nitel veri seti oluşturulmuştur. Bu nitel verilerin analizinde betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Çalışmada, Polat (2018)'ın analiz süreci aşamaları göz önünde bulundurularak klinik görüşmeler analiz edilmiştir. Ancak ele alınan analiz süreci aşamaları sözsüz ispat sürecine ait olduğu için aşamalarda ve alt aşamalarda bazı değişiklikler yapılmıştır. Çalışmada kullanılan analiz süreci aşamalarına ve aşamaların önemine giriş bölümünde kuramsal çerçeve başlığı altında yer verilmiştir. Aşağıda bu çalışmadaki uygulama sürecinde gerçekleştirilen klinik görüşmelere göre analiz sonucunda elde edilen verilerden hareketle doğrudan alıntılar yoluyla örnekler verilmiştir. Koyu yazılmış kısımlar öğrencilerin ispat yapma sürecine göre geçirmiş olduğu aşamaları ifade etmektedir.

- Soruda senden ne yapmanı istiyor?

- Bu ifadenin 2'ye eşit ya da 2'den büyük olduğunu göstermemi istiyor. **(bu cümle öğrencinin problemi anladığını ve birinci aşamayı tamamladığını gösterir)**

- Peki ne yapabilirsin?

- Her iki tarafın karesini alsam. **(bu cümle ispat sürecinin tamamlanabilmesi için üçüncü aşamaya uygun yöntemin belirlenmeye çalışıldığını gösterir)**

- Üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu göstermem gerek. **(bu cümle öğrencinin problemi anladığını ve birinci aşamayı tamamladığını gösterir)**

- Peki ne yapabilirsin?

- Çemberden yararlanarak ispatlarım. **(bu cümle ispat sürecinin tamamlanabilmesi için üçüncü aşamaya uygun yöntemin belirlenmeye çalışıldığını gösterir)** Üçgenin iç açılarının gördüğü yayın ölçüsü açının iki katına eşittir. Çemberin tamamının ölçüsü 360° olduğundan üçgenin iç açılar toplamı 180'dir. **(bu cümle öğrencinin sürece dair gerekli işlemleri yaptığını ve dördüncü aşamanın tamamlandığını gösterir)**

- Şimdi 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamının ispatını biliyorum. **(bu cümle öğrencinin problemi anladığını ve birinci aşamayı tamamladığını gösterir)**

- Peki ne yaparsın?

- Evet n sayısının 1'e eşit olması ya da 1'den büyük olması durumunda 1' den n' ye kadar olan sayıların toplamı. **(bu cümle öğrencinin teoremi anladığını, ulaşmak istediği sonucu ifade edebildiğini yani ikinci aşamayı tamamladığını gösterir)** Şöyle yaparız. $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ şeklinde sayıları yazalım. Bir de bu n' ye kadar olan sayıları tersten yazıp alt alta toplayalım. Her sıradaki iki terimin toplamı n+1 olur. n tane terim olduğu için toplam (n+1).n olur. Ama iki kez topladığım için toplamın yarısı olur. **(bu cümle öğrencinin sürece dair gerekli işlemleri yaptığını ve dördüncü aşamanın tamamlandığını gösterir)**

- Soruda ne istiyor ki benden anlayamadım. **(bu cümle öğrencinin problemi anlayamadığı için problem durumunu açıklayamadığını gösterir)** Neyi, nasıl göstereceğim. **(bu cümle öğrencinin teoremi anlamadığını, ulaşmak istediği sonucu ifade edemediğini yani ikinci aşamayı tamamlayamadığını gösterir)**

- Soruda a ve b değerlerinin 0'dan büyük olması durumunda $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ değerinin 2'ye eşit veya 2'den büyük olduğunu göstermeni istiyor.

- Paydaları eşitleyip denklemi çözmeye çalışsam. **(bu cümle ispat sürecinin tamamlanabilmesi için üçüncü aşamaya uygun yöntemin belirlenmeye çalışıldığını gösterir)**

- Soruda ne yapmanı istiyor?

- Toplamın 2'ye eşit ya da 2'den büyük olduğunu göstermemi istiyor. **(bu cümle öğrencinin problemi anladığını ve birinci aşamayı tamamladığını gösterir)**

- Ne yaparsın?

- Öncelikle ifadeyi genişletip bulmaya çalışayım. **(bu cümle ispat sürecinin tamamlanabilmesi için üçüncü aşamaya uygun yöntemin belirlenmeye çalışıldığını gösterir)** Topladığımda ulaşmaya çalıştığımda yine başa dönüyorum. Aynı şey oluyor. **(bu cümle öğrencinin sürece dair gerekli işlemleri yapmaya çalıştığını ancak sonuca ulaşamadığını, dördüncü aşamayı tamamlayamadığını yani eksik işlem yaptığını gösterir)**

- Soruda senden neyi ispatlamanı istiyor?

- Üçgende kenarortay uzunluklarının k' ya 2k oranında kestiğini göstermemi istiyor. **(bu cümle öğrencinin problemi anladığını ve birinci aşamayı tamamladığını gösterir)** Ağırlık merkezi üçgeni altı eş üçgene böler. Alan formülünden ispatlarım. **(bu cümle ispat sürecinin tamamlanabilmesi için üçüncü aşamaya uygun yöntemin belirlenmeye çalışıldığını gösterir)**

- Nasıl ulaştın bu sonuca?

- Ağırlık merkezi üçgende altı eş üçgen oluşturur. Aynı yüksekliğe sahip iki üçgen için alan formülü yazarsam istediği uzunlukların oranını bulurum. Bunu bütün üçgenlerde sağlayabilirim **(bu cümle öğrencinin sürece dair işlemleri tamamladığını ve yaptığı işlemleri özetlediğini gösterir)**

- Soruda senden neyi ispatlamanı istiyor?

- Bu soruda verilen 3 ile bölünme kuralını biliyorum ve kullanıyorum. Ama ispatını bilmiyorum. Hiçbir fikrim de yok. **(bu cümle öğrencinin problemi anlamadığını ve birinci aşamayı tamamlayamadığını, öğrencinin teoremi de anlayamadığı için ulaşmak istediği sonucu ifade edemediğini yani ikinci aşamayı da tamamlayamadığını gösterir)**

3.7. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Güvenirlik, nitel araştırmalarda yapılan ölçmelerin aynı kişiler üzerinde benzer durumlarda tekrarlanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Dış güvenirlik ölçülen olgunun değişen zaman diliminde aynı biçimde ölçülebilmesi anlamına gelirken, iç güvenirlik ise farklı gözlemciler tarafından bir olgunun ya da olayın aynı biçimde ölçülebilmesini ifade eder (Kirk ve Miller, 1986'dan aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Geçerlik, nitel araştırmalarda araştırmacının araştırdığı olguyu olduğu haliyle ve olabildiğince tarafsız gözlemesi anlamına gelmektedir (Kirk ve Miller, 1986'dan aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2016). Dış geçerlik örnek grup üzerinde ve araştırmada ulaşılan sonuçların gerçek yaşama genellenebilirliğini, iç geçerlik ise nedensel ilişkiler içinde elde edilen sonuçların açıklanabilirliğini ifade etmektedir (Karasar, 2008).

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelendiği bu çalışmada uygulanan klinik görüşme formu matematik eğitimi alan uzmanlarının ve lise matematik öğretmenlerinin görüşüne sunularak araştırmanın dış görünüş geçerliği sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca ispat sorularının matematiksel açıdan doğruluğu ve mantıksal olarak anlaşılıp anlaşılmadığı ile ilgili lise matematik öğretmenlerinden uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşünden gelen dönütlere göre gerekli düzenlemeler yapılıp klinik görüşme formu uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

Klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde kodlayıcı güvenirliğine bakılmıştır. Kodlama güvenirliğinin sağlanması amacıyla araştırmacı ve danışman öğretim üyesi kodlayıcı olarak belirlenmiştir. Kodlayıcılar araştırma verilerini birbirinden bağımsız biçimde kodlamışlardır. Ortaya çıkan kodlar 'benzeşen kodlar' ve 'ayrışan kodlar' şeklinde gruplandırılmıştır. Miles ve Huberman'a (1994) göre, kodlayıcı güvenirliği için "Uyuşma Yüzdesi = Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)" şeklinde hesaplanmaktadır. Bu araştırma kapsamında verilen formüle göre hesaplanan Miles ve Huberman uyum yüzdesi 0,88 olarak elde edilmiştir. Buna göre iki kodlayıcı arasındaki genel uyumun yüksek olduğu ortaya çıkarılmıştır. Bu sayede araştırmada kodlayıcı güvenirliği sağlanmıştır.

Klinik görüşmede ele alınan sorular farklı sınıf seviyelerinden ve öğrencilerin öğrendikleri kazanımlara uygun olarak belirlenmeye çalışılmıştır. Böylelikle kapsam geçerliği arttırılmaya çalışılmıştır. Mevcut klinik görüşme formunun yanında destekleyici veri toplama yöntemlerinden ses kayıt yöntemi ile veriler çeşitlendirilerek araştırmanın geçerliği ve güvenirliği arttırılmaya çalışılmıştır.

4. BULGULAR

Bu araştırmada üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçleri incelenmeye çalışılmıştır. Araştırmanın örnekleminin belirlenebilmesi için öncelikle BİLSEM'e devam eden 11. sınıf öğrencilerinin ön öğrenmeleri ve ispata yönelik hazırbulunuşluklarına ilişkin görüşlerine başvurmak için görüşme formu, ispata yönelik tutumlarını ölçmek amacıyla da ispat tutum ölçeği uygulanmıştır. Öğrencilerin BİLSEM'e devam süreleri, matematik öğretmenlerinin öğrencilerin ders içi çalışmalara katılımı ve matematikteki başarılarına yönelik görüşleri dikkate alınarak görüşme formundan ve tutum ölçeğinden elde edilen veriler de göz önünde bulundurularak klinik görüşme için beş öğrenci seçilmiştir. Klinik görüşmelerde ispat sürecinin incelenmesi aşamasında her bir öğrenciden ayrı ayrı görüş alınmıştır. Böylelikle süreç hakkında veriler elde edilmiş ve ispat sürecinde öğrencilerin geçirmiş olduğu aşamalar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu bölümde, araştırmanın alt problemlerine ait bulgular ayrı ayrı sunulmuştur.

4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular

Birinci alt problem, 'Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmaya yönelik görüşleri nasıldır?' şeklinde belirlenmiştir. Bu alt probleme yönelik bulgular, örneklem seçiminde kullanılan İspat Görüşme Formuna ilişkin bilgilerden yararlanılarak ortaya konulmuştur. Üstün yetenekli yirmi beş 11. sınıf öğrencisine uygulanan görüşme formunda; öğrencilere teorem ve ispat kavramları hakkındaki bilgileri, matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapıp yapmadıkları yapıyorlarsa hangi ispatları hatırladıkları ve derslerde ispat yapılıp yapılmaması konusundaki düşünceleri sorulmuştur. Görüşme formundan elde edilen verilere göre; teorem ve ispat kavramlarına dair iki kavramı da açıklayabilen üç öğrencinin, sadece teorem kavramını açıklayabilen iki öğrencinin ve sadece ispat kavramını açıklayabilen on üç öğrencinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Buradan hareketle genellikle bu öğrencilerin ispat kavramını açıklayabildiği, teorem kavramını açıklayamadığı söylenebilir. Görüşme formuna göre on beş öğrenci matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yaptıklarını belirtmişlerdir. Ancak bazı öğrenciler sadece öğretmenlerinin ispat yaptıklarını kendilerinin ise ispat yapmaktan ziyade derslerde sadece dinleyici olarak rol aldıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca öğrenciler trigonometrik özdeşliklerde, eşlik ve benzerlik kurallarında, açıortay teoremlerinde, analitik geometrideki kurallarda ve üçgenin yardımcı elemanları gibi konularda ispat yaptıklarını söylemişlerdir. Buradan hareketle de öğrencilerin genellikle geometri derslerinde ispat yaptıkları ya da geometri derslerinde yapılan ispatları hatırladıkları söylenebilir. Görüşme formuna göre yirmi bir öğrenci derslerde ispat yapılması gerektiğini belirtmiştir. Bu durumun nedenini belirten bazı öğrencilerin cevaplarına aşağıda doğrudan alıntılarla yer verilmiştir.

-Ben farklı bir diploma programında okuduğumdan ispatsız konu öğrenmiyoruz bu sayede de mantığıma uyuyor. Matematik formülleri aklıma yattıkça matematiğe olan sevgim, ilgim artıyor. Bence kesinlikle matematik dersleri ispatlarla işlenmeli ki matematiksel öğrenme becerisini öğrenciler kazanabilmeli.

-Yapılmasının daha iyi olduğunu düşünüyorum. Öğrenme aşamasında kalıcılık artıyor.

-Konunun anlaşılması için ispat yapılması gereklidir.

-İspatları görünce konu daha anlaşılır oluyor.

-İspat yapılması gerekir ama bazı konular ispatla açıklansa bile anlamıyoruz. Çünkü açıklamak için veya anlamak için bile bilgiye ihtiyacımız vardır.

-Yapılması temelinin öğrenilmesi için kesinlikle gerek ancak soru çözerken temelden çözmeye başladığım için uzun sürüyor.

-Bir konuda ispat yapılacaksa onun bizim seviyemize uygun olup olmadığı düşünülmeli. Aksi takdirde konuyu anlayabileceksem veya anladıysam bile o ispat kafamı karıştırabiliyor.

-İspatlarla kuralların nereden geldiğini öğreniyoruz.

-Yapılsın ya da yapılmasın sınav sistemi ile yetiştirilen bir ülkede önemi yok.

-Derslerimizde teoremlerin ispatlarının tüm konular için değilse bile bazı konularda yapılması gerektiğini düşünüyorum. Çünkü ispat konuyu anlamanın en güzel yolu.

-Yapılması beni mutlu ediyor. Çünkü formül akılda kalıcı oluyor.

Alıntılardan hareketle derslerde ispat çalışmalarının yapılması; bazı öğrenciler için sıkıcı olurken çoğu öğrenci için öğrenilen konunun daha iyi anlaşılması noktasında, bilgilerin kalıcılığının arttırması yönünde ve öğrenilen kuralların nedenleri ile birlikte öğrenebilme imkânı sağlaması açısından faydalı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Buradan hareketle öğrencilerin matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapmaları için uygun ortamların oluşturulması onların bu konudaki başarılarını arttırabilir.

4.2. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular

İkinci alt problem, 'Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmaya yönelik tutumları nasıldır?' şeklinde belirlenmiştir. Bu alt probleme yönelik bulgular, örneklem seçiminde kullanılan İspat Tutum Ölçeğine ilişkin bilgilerden yararlanılarak ortaya konulmuştur. Üstün yetenekli yirmi beş 11. sınıf öğrencisine uygulanan tutum ölçeğinde; öğrencilerin ispata yönelik bakış açıları/görüşleri, ispat yaparken sahip oldukları duygu/his, olumsuz tutumları ve olumsuz düşünceleri sorulmuştur. Öğrencilerin tutum ölçeğindeki maddelere verdikleri cevaplar ters puanlamaya göre puanlanmış ve puan değerleri 1-2-3 şeklinde kodlanarak en düşük puan 0 ve en yüksek puan 66 olarak belirlenmiştir. Puanlardaki artış bireyin ispat ve ispatlamaya yönelik tutumunun olumlu olduğunu ifade ederken puanlardaki azalma ise bireylerin olumlu tutumlarının azaldığını ifade etmektedir. Öğrencilerin ölçekte belirttikleri tutumların kodlamaya göre puanları hesaplanarak ortalama puana göre değerlendirme yapılmıştır. Buradan hareketle yirmi beş öğrencinin tutum ölçeğindeki puanlarının ortalaması 51 puan olarak bulunmuş ayrıca on iki öğrencinin puanı ortalamanın üzerinde belirlenerek bu öğrenciler klinik görüşme için değerlendirmeye alınmıştır. Tutum ölçeğinden elde edilen verilere göre ispat yapmaya yönelik yüksek puana yani olumlu tutuma sahip olan öğrencilerden bazılarının İspat Görüşme Formuna göre teorem ve ispat kelimelerini açıklayamadıkları, matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapmadıkları ya da tam tersi tutum ölçeğine göre düşük puana yani ispat yapmaya yönelik olumsuz tutuma sahip olan bazı öğrencilerin teorem ve ispat kelimelerini açıklayabildiği hatta derslerde ispat çalışmaları yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bunun yanında ispat yapmaya yönelik olumlu tutum geliştiren bazı öğrencilerin görüşme formuna göre de teorem ve ispat kavramlarını açıklayabildikleri, derslerde ya da bireysel olarak ispat çalışmaları yaptıkları görülmüştür. Buradan hareketle öğrencilerin tutumları göz önünde bulundurularak ispat çalışmalarına yön verilmesi ispat konusundaki eksiklerin giderilmesi için olumlu yönde katkı sağlayabilir.

Görüşme formundaki açık uçlu sorulara verilen cevaplara göre; teorem ve ispat kelimelerinin tanımlarını doğru yapabilen, derslerinde ispat çalışmaları yapan, ispat çalışmalarının yapılması yönünde olumlu görüşe sahip olan ve ispat tutum ölçeğine göre, ortalama puanın üzerinde puan alan öğrenciler göz önünde bulundurularak klinik görüşme yapılacak öğrenciler belirlenmiştir.

4.3. Üçüncü Alt Probleme Ait Bulgular

Üçüncü alt problem, 'Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma yeterlik göstergeleri nasıldır?' şeklinde belirlenmiştir. Bu alt probleme yönelik bulgular, beş öğrenciyle gerçekleştirilen İspat Klinik Görüşme Formuna ilişkin bilgilerden yararlanılarak ortaya konulmuştur. Bu probleme ait yeterlik göstergeleri; öğrencilerin ispatı anlayabilme, öğrencilerin ispat sürecine dair yaklaşımları, öğrencilerin kullandığı stratejiler ve öğrencilerin yapmış olduğu açıklamalar şeklinde belirlenmiştir. İspat yapma yeterlik göstergeleri de öğrencilerle gerçekleştirilen, klinik görüşmelerde yer alan ispat sorularının analizinde kullanılan aşamalarda incelenmiştir. Analizde kullanılan ispat sürecinin ilk aşaması 'Problemin incelenmesi' öğrencilerin ispatı anlayabilme, ikinci aşaması 'Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi' sürece dair yaklaşımları, üçüncü aşaması 'Uygun stratejilerin belirlenmesi' öğrencilerin kullandığı stratejileri ve süreç sonunda elde edilen veriler de öğrencilerin yapmış olduğu açıklamalar şeklinde belirlenen göstergeler kullanılan sürecin aşamalarında analiz edilmiştir. Bu probleme dair bulgular aşağıda her soru için ayrı ayrı ele alınmıştır.

Daha önceki materyal ve yöntem bölümünde bahsedildiği üzere, Polat (2018)'ın sözsüz ispat süreci aşamaları dikkate alınarak üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerindeki aşamalar incelenmiştir. Ancak Polat (2018)'ın çalışmasında 9. sınıf öğrencilerinin geometri soruları üzerindeki sözsüz ispat süreci, bu çalışmada ise üstün yetenekli 11. sınıf öğrencilerinin matematik ve geometri soruları üzerindeki ispat süreçleri incelenmiştir. Polat (2018)'ın çalışma grubundan farklı bir öğrenci grubu ile çalışıldığı ve incelenen ispat sürecindeki konular farklı olduğu için analizde kullanılan sözsüz ispat süreci aşamaları düzenlenerek görüşmeler analiz edilmiştir. Bunun için belirlenmiş olan beş öğrencinin, ispat yapma süreçleri ayrıntılı biçimde incelenmiş ve ispat yapma sürecinin aşamaları ortaya konulmuştur. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek her soru için ispat süreci açıklanmıştır. Öğrencilerin ispat yapma sürecine göre geçirmiş olduğu aşamalar her soru sonunda tabloda "✓" işareti ile gösterilmiştir. (A: Araştırmacı; Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5: Öğrenciler)

4.3.1. Birinci soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soruda öğrencilerden herhangi bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180˚ olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, iki öğrencinin modelin aşamalarının tamamını geçirebildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Ö1: Yani şöyle iç alanda kalanların, iki tane doğrunun arasında kalan alan, üç açının toplamının 180˚ olduğunu göstermem gerek.

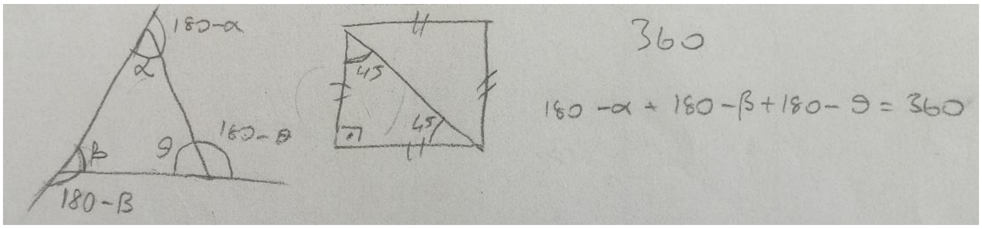
A: Peki nasıl gösterebilirsin?

Ö1: Dış açılardan kanıtlayabilirim. Yani şöyle bir kare düşünürsek köşegen aynı zamanda açıortay olacak. Açıortay olduğundan bu açılar 45˚ diğer açıda 90˚olur. Buradan hareketle üçgenin iç açılar toplamını ispatlayabilirim.

A: Her üçgende bu şekilde mi hesaplanır? Çeşitkenar bir üçgenin iç açılar toplamı da karenin iç açılar ölçümünden yararlanarak mı hesaplanır?

Ö1: Evet olabilir. Ama dediğim gibi dış açılar toplamından da ispatlanır diye düşünmüştüm. Bilmiyorum.

A: Peki dış açılardan ispatlanabilirse çizdiğin üçgen üzerinden açıları isimlendir, dış açıları bir göster istersen. (Öğrenci açıları isimlendirdi. İç ve dış açıları bütünler olacak şekilde belirtti)



Şekil 4.1: Ö1 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap

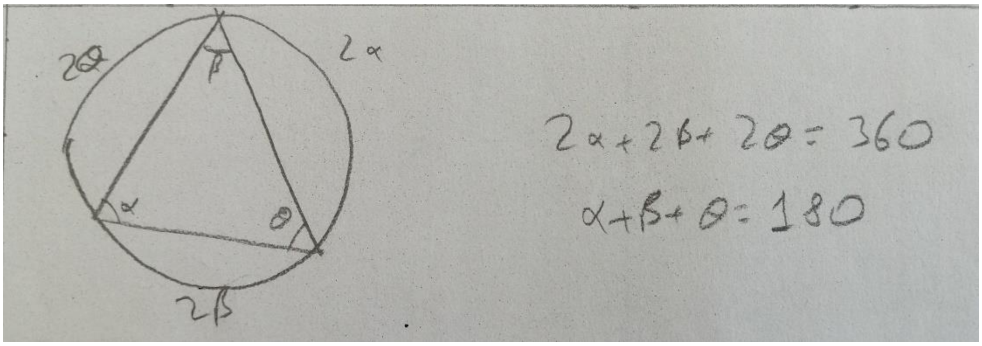
Ö1: Dış açılar toplamı her zaman 360˚ olur. Buradan yazıp eşitlersek iç açılar toplamı 180˚ olur her zaman.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problemi açıklamış ve çizdiği üçgen üzerinden kendisinden ne istendiğini ifade etmiştir. Sonuca ulaşmak için üçgenin dış açılarından yararlanabileceğini düşünmüş ama kareden üçgen oluşturarak özel üçgende açılar toplamına ulaşmıştır. Öğrenci her üçgen için bu ispatın doğru olup olmadığından emin olmamakla birlikte araştırmacının yönlendirmesiyle dış açılar toplamının 360˚ olması bilgisinden de yararlanarak üçgenin iç açılar toplamının ispatına ulaşmıştır. Araştırma öncesinde uzman görüşlerinden elde edilen bilgilere göre öğrencilerin bu soru için "paralel doğrular" ya da "doğruda açılar" bilgilerinden hareketle soruyu ispatlamaları beklenirken hiyerarşiye göre bu teoremin sonucu olan dış açıların ölçüleri toplamının 360° olduğu bilgisinden yararlanarak öğrenci teoremi ispatlamıştır. Buradan hareketle bu teoremin ispatında süreçte kullanılan bilgiler açısından hiyerarşinin göz önünde bulundurulmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Ö2: Tamam benden üçgenin iç açılarının toplamını göstermemi istiyor.

A: Peki nasıl gösterebilirsin?

Ö2: Bir üçgen çizeyim. Açılara α, β, θ dersem bunların toplamının 180˚ olduğunu göstermem lazım. Ben çemberden yararlanarak ispatlarım. Bu üçgeni çemberin içinde çizelim. Üçgenin içindeki açıların gördüğü yayların ölçüleri, o açıların iki katına eşit olur. Çemberin tamamı 360˚ olduğundan üçgenin iç açılar toplamı da 180˚ olur.



Şekil 4.2: Ö2 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problemi açıklamış. Sonuca ulaşmak için çizdiği üçgenden hareketle teoremini ifade etmiştir. Ayrıca çemberin özelliğinden yararlanarak sonuca ulaşabileceğini söylemiş ve işlemini tamamlayarak yaptığı işlemleri anlatıp bu durumun her zaman doğru olacağını söylemiştir. Öğrenci soruyu ispatlarken üçgenin iç açılar toplamı kazanımından sonra öğrendiği çemberin özellikleri bilgisinden yararlanarak sonuca ulaşmıştır. Bu durum öğrencinin süreçte kullanılan bilgiler açısından hiyerarşiyi göz önünde bulundurmadığını ancak öğrendiği bilgileriyle ilişkilendirme yapıp bilgilerini yeni karşılaştığı duruma uygulayabildiğini gösterir. Ayrıca öğrenci işlemlerini anlatarak yaptıklarını özetlemiştir.

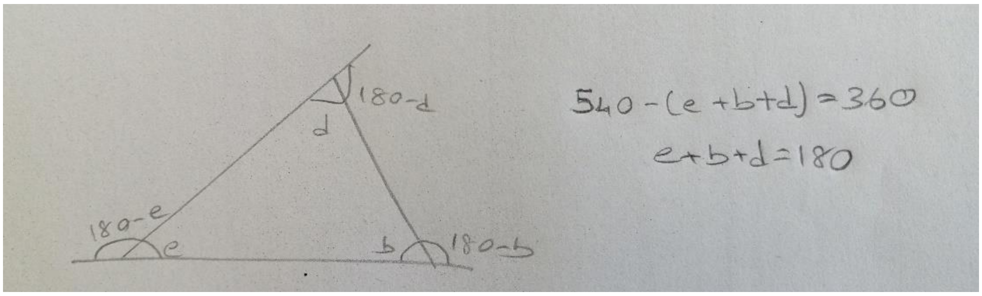
Ö3: (Öğrenci bir üçgen çizdi) İç açıların ölçülerinin toplamının 180˚ olduğunu gösterelim.

A: Peki nasıl gösterebilirsin?

Ö3: Dış açılardan hareketle ispatlayabilirim. Bu dış açıların ölçüleri toplamı 360˚ yarısı da iç açıların ölçüleri toplamına eşittir.

A: Neden yarısına eşit?

Ö3: Bu açının tümleyeni, diğer açının tümleyeni. (Şekil üzerinden gösterdi)



Şekil 4.3: Ö3 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap

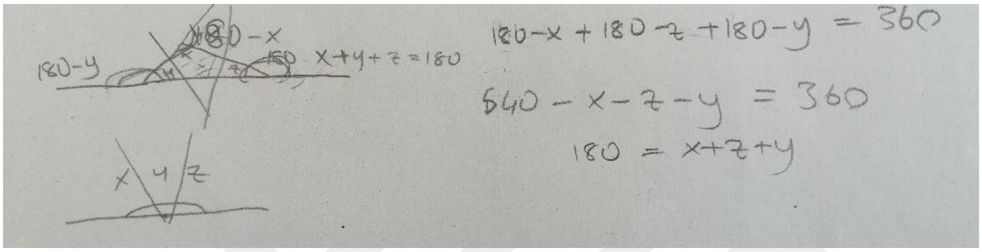
A: Tümleyen neydi?

Ö3: Tümleyen değil miydi? Yok, 180’ e tamamlama bütünleyendi. O zaman iç ve dış açıları yazalım. Dış açıların ölçüleri toplamından iç açıların toplamına ulaşırım.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problemi açıklamış. Bir üçgen çizip neyi göstermek istediğini söyleyerek teoremi açıklamıştır. Sonuca ulaşmak için de üçgenin dış açılarından yararlanacağını söyleyip işlemi yapmış ispatını tamamlamıştır.

Ö4: İlk aklıma gelen şu oldu. Üçgenin iç açılarını kesip birleştirdiğimizde toplamı 180˚ olurdu.

A: Peki, doğru diyorsun. Bunu farklı bir yoldan ispatlamak istesek ne yaparız. (Uzun süre düşündü. Bir üçgen çizip açılarını gösterdi)



Şekil 4.4: Ö4 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap

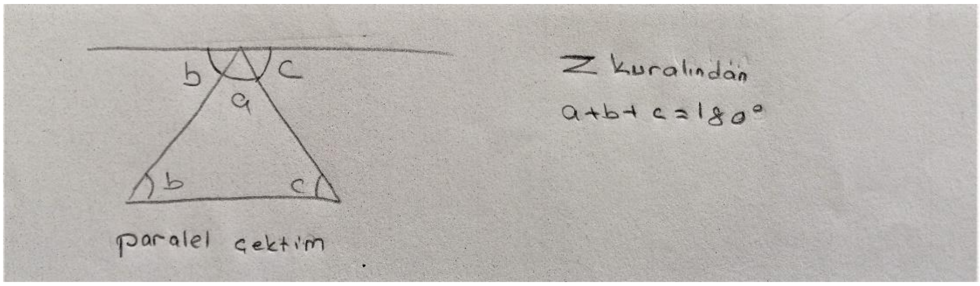
Ö4: Tamam üçgeni çizdim. Bütünleri olacak şekilde iç ve dış açıları yazdım. Evet doğru dış açılar toplamı 360˚ buradan hareketle üçgenin iç açılar toplamına ulaşabilirim.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problemi açıklamıştır. Aklına ilk gelen durum üçgenin iç açılarının birleşmesi ile oluşan açıların ölçüsüdür. Öğrenci bu duruma odaklandığı için farklı bir strateji düşünememiştir. Bu durumdan dolayı da verilen ispatta teoremi ifade edememiş ama araştırmacının yönlendirmesiyle çizdiği üçgende dış açılar toplamından iç açıların toplamının 180˚ olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Ö5: Soruda üçgenin iç açılarının toplamının 180˚ olduğunu göstermemi istiyor.

A: Peki nasıl gösterebilirsin?

Ö5: Bir üçgen çizeyim. (İç açıları a, b, c şeklinde isimlendirilmiş bir üçgen çizdi) Çizdiğim üçgende bir kenara paralel çizerim. Bu paralelde Z kuralları oluşur. Paralel üzerinde de doğru açı oluşmuş olur. Sonuç olarak a + b + c = 180˚ olur. Üçgenin iç açılar toplamını ispatlamış olurum.



Şekil 4.5: Ö5 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış. Probleme uygun teoremini de ifade etmiştir. Problemin çözümü için de çizdiği üçgende herhangi bir kenara paralel çizerek gerekli işlemleri yapmış. Yaptığı işlemleri özetlemiştir.

Tablo 1'de öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 4.1: Birinci soruya ait ispat süreci aşamaları

Ana Safhalar (aşama)	Alt Safhalar (aşama)	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problemin incelenmesi	Problem durumunun açıklanması	✓	✓	✓	✓	✓
	Problem durumunun açıklanamaması					
Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi	Teoremi açıklama	✓	✓	✓		✓
	Teoremi açıklayamama				✓	
Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi	Üçgenin dış açılarını kullanma	✓		✓	✓	
	Karenin iç açılarını kullanma	✓				
	Çemberin özelliğini kullanma		✓			
	Paralellik kavramını kullanma					✓
Gerekli işlemlerin yapılması	İşlemi tamamlama	✓	✓	✓	✓	✓
	İşlemi eksik yapma					
	İşlemi tamamlayamama					
Yapılanların özetlenmesi	Yapılan işlemlerin ifade edilmesi		✓			✓

Öğrencilerin birinci soruya ait çözümleri incelendiğinde; beş öğrencinin problem durumunu açıklayabildiği, bir öğrencinin probleme ait teoremi ifade edemediği, her öğrencinin ispatı yapmak için uygun stratejiler belirlediği ve gerekli işlemleri yaptığı görülmüştür. Bu soruda sadece Ö5 kodlu öğrenci hiyerarşiyi göz önünde bulundurarak sonuca ulaşmıştır. Diğer dört öğrenci öğrendiği bilgiler arasında ilişkilendirme yapıp bilgilerini yeni karşılaştığı duruma uygulayarak ispatı tamamlamıştır. Ancak sadece iki öğrencinin sorunun çözümü ile ilgili olarak özetleme yaptığı görülmüştür.

4.3.2. İkinci soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soruda öğrencilerden 1'den n'ye kadar olan ardışık sayıların toplamı formülünü ispatlamaları istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, iki öğrencinin modelin aşamalarının tamamını geçirebildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Ö1: Bu soru için tümevarım mı yapılıyordu. Küçük küçük şeyleri deneyip o şekilde küçük parçalardan sonuca ulaşmak oradan mı ispatlarım.

A: Peki, hiç bu şekilde ispatladığın bir soru oldu mu? Matematikte bu yöntemi kullandın mı?

Ö1: Hayır, olmadı. Tümevarımı felsefede gördük. Matematikte hiç kullanmadım.

A: Peki, bu formül neydi?

Ö1: Ardışık sayılar toplam formülüydü. Ama bu formül nerden geliyor bilmiyorum. Mantıken n tane sayı var o yüzden n ile çarpıyorum. n + 1 hep bir arttığı için ama bölü iki niye? Bu formülü kullanıyorum ama ispatını bilmiyorum.

Ö3: Son terim çarpı son terimin bir fazlasının yarısı.

A: Neydi bu formül?

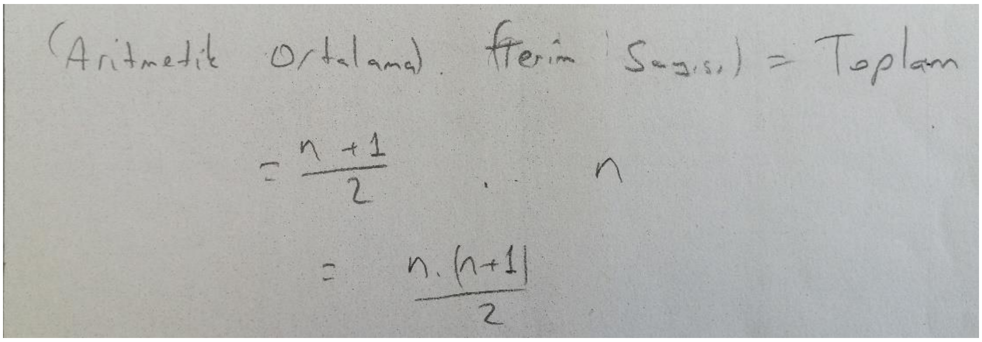
Ö3: Ardışık sayıların toplam formülü değil mi? Son terim – ilk terim / artış miktarı değil mi hepsinin toplamı? Hayır ya terim sayısı mıydı? Kafam karıştı, bu formülü kullanıyorum ama nasıl ispatlanır kuralı niye böyle bilmiyorum.

Alıntılardan görüldüğü üzere Ö1 ve Ö3 kodlu öğrenciler problem durumunu açıklayamamış, probleme uygun teoremi ifade edememiştir. Üstün yetenekli öğrencilerden karşılaştıkları bir teoremde hipotezi kabul edip hükme ulaşmaları beklenir. Ancak öğrencilerin teoremlerde hipotez ve hükmü bile ifade etmeden işlem yapmaya çalışmaları onların ispatı tamamlayamamalarına sebep olmuştur. Ayrıca öğrenciler ardışık sayıların toplamı formülünü soru çözümlerinde kullandıklarını fakat formülün ispatını bilmediklerini ifade etmişlerdir. Bu da öğrencilerin bu formülü hiç sorgulamadan ezbere kullandıklarını göstermektedir.

Ö2: Bu Gauss yöntemi değil miydi? Ardışık sayıların toplam formülü yani.

A: Aynen öyle ardışık sayıların toplam formülüydü. Gauss yöntemiyle ispatlanabilir.

Ö2: Bir sayı dizisinin toplamını bulmak için aritmetik ortalama ile terim sayısını çarparım. Bu dizinin terim sayısı n, aritmetik ortalaması da $\frac{n+1}{2}$ dir. Çarpıma da $\frac{n.(n+1)}{2}$ olur. $n \geq 1$ olmak üzere 1'den n' ye kadar olan sayıların toplamı kısa yoldan son terim çarpı son terimin bir fazlası bölü ikiden bulunur.



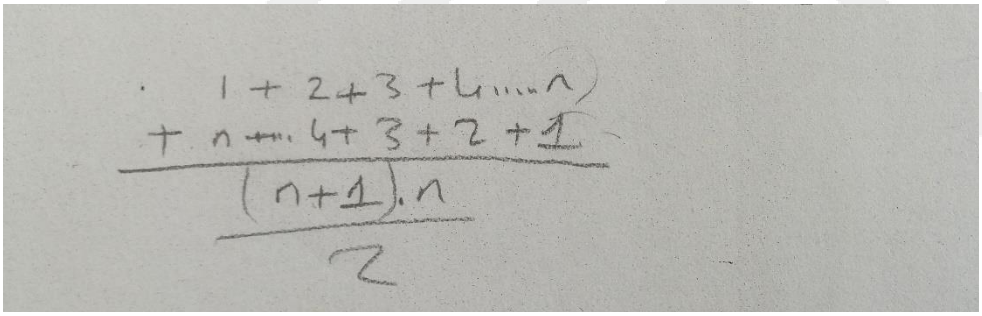
Şekil 4.6: Ö2 kodlu öğrencinin ikinci soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve n sayısının 1'e eşit ya da 1'den büyük olma durumunda ardışık sayıların toplamı formülünü ispatlayacağını ifade etmiştir. İlk olarak soruya Gauss yöntemi diyerek yaklaşmış ama sorunun ispatında farklı bir strateji kullanmıştır. Bunun için de bir sayı dizisinin toplamının terim sayısı ile aritmetik ortalamasının çarpımına eşit olacağını belirtip işlemleri yapmıştır. Ancak aritmetik ortalama yerine sayı dizisinin ortanca teriminin formülünü kullanarak sonuca ulaşmıştır. Bu durum öğrencinin sayı dizisinin toplamını hesaplarken terim sayısı ile ortanca teriminin çarpımına eşit olduğunu gösterdiği halde aritmetik ortalama ve ortanca terim kavramlarının tanımlarını karıştırdığı sonucuna ulaştırmıştır. Bu sonuç öğrencinin kullandığı stratejinin ezbere dayalı bilgi olduğunu da gösterir. Öğrenci hangi sayı dizisi olursa olsun bu şekilde sonuca ulaşabileceğini söyleyerek benzer örneklerle soruyu özetlemiştir. Sonuç olarak öğrenci ispatı tamamlamıştır.

Ö4: Bu soru ardışık sayıların toplamı formülüdür.

A: Peki nasıl ispatlarız bu formülü?

Ö4: n sayısının 1'e eşit olması ya da 1'den büyük olması durumunda 1' den n' ye kadar olan sayıların toplamının ispatını biliyorum. Şöyle yaparız. 1 + 2 + 3 + … + n şeklinde sayıları yazalım. Bir de bu n' ye kadar olan sayıları tersten yazıp alt alta toplayalım. Her sıradaki iki terimin toplamı n+1 olur. n tane terim olduğu için toplam (n+1).n olur. Ama iki kez topladığım için toplamın yarısı olur. Yani ispatlamış olurum.



Şekil 4.7: Ö4 kodlu öğrencinin ikinci soruya verdiği cevap

A: Peki bu kullandığın yöntemin bir ismi var mı?

Ö4: İsmi var mı? Evet, Gauss yöntemiydi dimi.

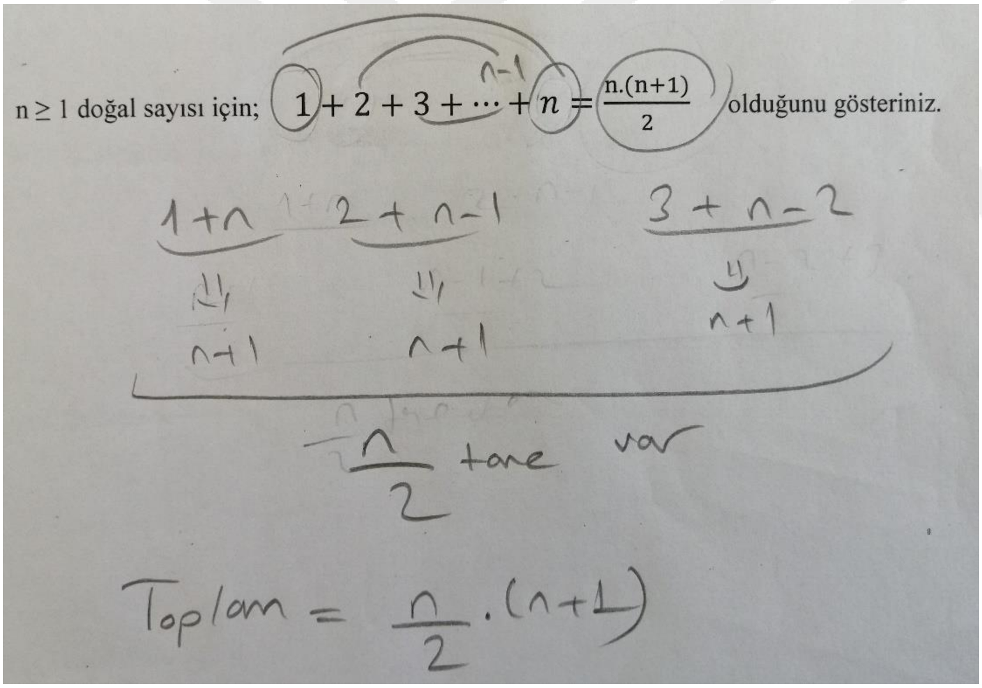
A: Evet, öyleydi.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci ispat sürecinin tüm basamaklarını tamamlamıştır. Öğrenci problem durumunu açıklamış, teoremi ifade etmiştir. Problemin ispatı için Gauss yöntemini kullanarak verilen ardışık sayı dizisini yazmış sonra aynı ardışık sayı dizisini tersten yazarak alt alta toplamıştır. Toplama işleminde her ikili terimin toplamının n + 1 'e eşit olduğunu ve n tane n + 1 toplamının sonucu oluşturduğunu belirterek aynı sayı dizisini iki kez topladığı için toplamın yarısının ardışık sayı dizisinin toplamına eşit olduğunu ifade etmiştir. Öğrenci gerekli işlemleri yapmış ve yaptığı adımları özetleyerek ispatını tamamlamıştır.

Ö5: Soruda ardışık sayıların toplamı formülünü göstermemi istiyor.

A: Peki nasıl gösterebilirsin?

Ö5: Şimdi şöyle düşünelim. Hangi sayı dizisi olursa olsun. İlk terim ile son terimi, ikinci terim ile sondan bir önceki terimi bu şekilde ikili terimleri topladığımda sonuç hep birbirine eşit olacak. Bu durumda ikişer ikişer gruplandırdığımdan terim sayısının yarısı kadar terimi toplamış olacağım. Yani $\frac{n}{2}$ ile n+1'in çarpımı formüle eşit olur.



Şekil 4.8: Ö5 kodlu öğrencinin ikinci soruya verdiği cevap

A: Peki, bu durum her sayı dizisinde aynı şekilde mi hesaplanır? Terim sayısı tek sayı olan bir sayı dizisi olsaydı ne yapardın?

Ö5: Olabilir. Ardışık tek veya çift sayılar olsa ya da farklı bir sayı dizisi bilmiyorum. Ama bu şekilde ardışık olunca hesaplandığını biliyorum.

A: Bu kullandığın yöntemin bir ismi var mı?

Ö5: (uzun süre düşündü) Bilmiyorum. Bu soru tiplerinde hep böyle yapıyorum.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve teoremi ifade ederek kendine uygun bir yöntem seçip işlemini yapmıştır. Aslında öğrenci Gauss yöntemini kullandığı halde bu yöntemin ismini bilmemektedir. Bu da öğrencinin bu soru ya da bu soruya benzer soru tiplerinde ezbere dayalı ispat yaptığını ve bu durumu genellediğini gösterir. Çünkü öğrenci terim sayısı tek sayı olan bir sayı dizisinde nasıl bir yol izleyeceğinden emin olamamış ve bu durumu ihmal ederek sonuca ulaşmıştır. Bu süreç bize öğrencinin bu soru için ispata ulaştığını gösterirken bu yöntemi ezbere kullandığı sonucuna da ulaştırmıştır.

Tablo 2'de öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 4.2: İkinci soruya ait ispat süreci aşamaları

Ana Safhalar (aşama)	Alt Safhalar (aşama)	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problemin incelenmesi	Problem durumunun açıklanması		✓		✓	✓
	Problem durumunun açıklanamaması	✓		✓		
Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi	Teoremi açıklama		✓		✓	✓
	Teoremi açıklayamama	✓		✓		
Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi	Gauss yöntemini kullanma				✓	✓
	Terim sayısı ve aritmetik ortalama kavramlarını kullanma		✓			
Gerekli işlemlerin yapılması	İşlemi tamamlama		✓		✓	✓
	İşlemi eksik yapma					
	İşlemi tamamlayamama					
Yapılanların özetlenmesi	Yapılan işlemlerin ifade edilmesi		✓		✓	

Öğrencilerin ikinci soruya ait çözümleri incelendiğinde; üç öğrencinin problem durumunu açıklayabildiği, probleme ait teoremi ifade edebildiği, ispatı yapmak için uygun stratejiler belirlediği ve gerekli işlemleri yaptığı görülmüştür. Ancak bu öğrencilerden iki öğrenci yaptığı işlemleri özetleyerek farklı bir soruda da aynı yolu kullanabileceğini ifade etmiştir. Buradan hareketle işlemini tamamlayan diğer öğrencinin bu soruda kullandığı yöntemi ezbere bildiği için formülün neden böyle ispatlandığını bilmediği sonucuna ulaşılmıştır. Ö1 ve Ö3 kodlu öğrenciler ise problem durumunu ve teoremi açıklayamamıştır. Bu öğrenciler verilen teoremde ifadelerin anlamını sorgulamadan yapmaları gereken işlemler için strateji üretmeye çalışmışlar ancak teoremi ispatlayamamışlardır. Bu soruda öğrenciler ardışık sayıların toplam formülünü çok kullandıklarını ama niye hiç sorgulamadıklarını da kendilerine sormuşlardır.

4.3.3 . Üçüncü soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soruda öğrencilerden herhangi bir tamsayının 3 ile bölünebilme kuralının sayının sayı değerleri toplamının 3 veya 3'ün tam katı olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, hiçbir öğrencinin modelin aşamalarının tamamını geçiremediği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Ö1: Bir sayının rakamları toplamı 3 ve 3'ün katıysa o sayı 3'e bölünür. Bu kuralı hep kullanıyorum.

A: Peki bu kuralı nasıl ispatlarsın?

Ö1: 3'ün katı olması için 3k dersek sayılar 3'ün katı olurdu hep.

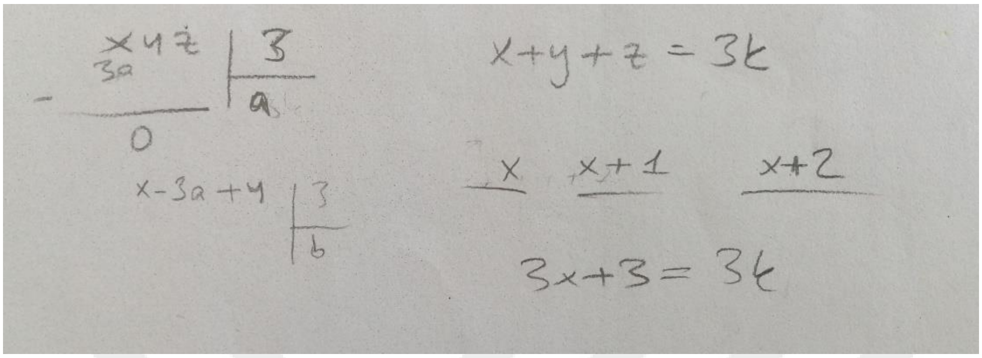
A: Sayın 3k değil de 3'ün katı olmayan bir sayı olsaydı ne yapardın?

Ö1: Şimdi abc sayısı olsun. (a + b +c) 3'ün katı mı? Bunu bulmam lazım. (Uzun süre düşündü ve işlemler yapmaya çalıştı) Bulamadım ya olmadı. Ben diğer soruya geçmek istiyorum.

Ö4: Bir sayının rakamları toplamının 3'ün katı olduğunu göstermemi istiyor.

A: Aynen öyle nasıl gösterirsin?

Ö4: Ben sayıları ardışık seçsem bu durum her zaman sağlanır. Örneğin; x, x+1, x+2 sayılarının toplamı 3x+3 olur. Bu sayıyı 3 parantezinde ifade etsem 3k olsa her durumda 3'e bölünür.



Şekil 4.9: Ö4 kodlu öğrencinin üçüncü soruya verdiği cevap

A: Seçtiğin sayı ardışık sayıların toplamı olmasaydı ne yapardın?

Ö4: Ama sayılar ardışık değil sayı xyz olsa x + y + z = 3k nasıl olur bunu göstermem lazım. (Öğrenci uzun süre düşündü işlemler yaptı) Ama genel olarak bu kural nerden ispatlanır. Bilmiyorum hâlbuki kuralı kullanıyorum.

Alıntılardan görüldüğü üzere Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler problem durumunu açıklamış ve probleme ait teoremi belirtmiştir. Öğrenciler ne istendiğini ve hangi sonuca ulaşmak istediklerini ifade etmiş ancak teoremin ispatı için bir strateji bulamamış bu yüzden ispatı tamamlayamamışlardır. Öğrenciler ispat sürecine nasıl ve nereden başlayacaklarını bilemedikleri ve matematiksel bilgi ve notasyonda sıkıntı yaşadıkları için süreci devam ettirememiş, sözel olarak ifade edebildikleri bu teoremi matematiksel olarak gösterememişlerdir. Fakat iki öğrenci de bu formülü kullandıklarını neden böyle bir formülün olduğunu ya da nerden geldiğini sorgulamadıklarını ifade etmişlerdir. Bu durum bu iki öğrencinin öğrendikleri bölünebilme kurallarını sadece ezbere bildikleri, kuralları sadece gerekli sorularda kullandıkları ama kuralların neden bu şekilde kullanıldığını bilmedikleri sonucuna ulaştırmıştır. Ancak görüşme sonunda Ö4 kodlu öğrenci bu kuralın niye böyle olduğunu çok merak ettiğini belirterek araştırmacıdan sorunun ispatını öğrenmiştir. Sonra da diğer bölünebilme kurallarını merak ettiğini onların da ispatlarını öğreneceğini söylemiştir. Ayrıca Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler ispat sürecinde özel örnekle sınırlı kalarak sadece üç basamaklı sayı için teoremi ispatlamaya çalışmışlardır.

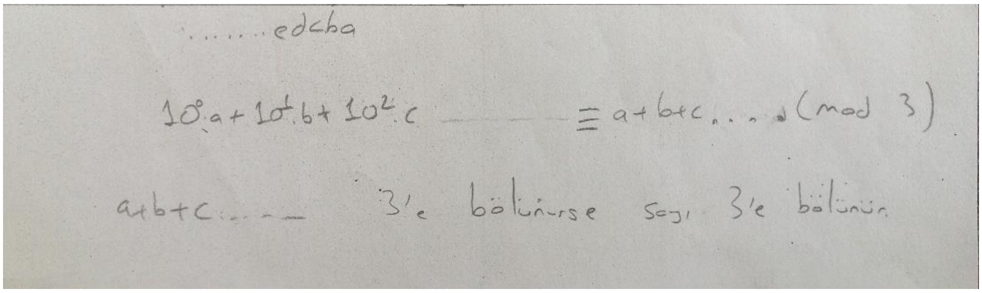
Ö3: Bu soruda bu kuralı biliyorum ve hep kullanıyorum ama ispatını hiç yapmadım. Hiç sorgulamadım da. Diğer soruya bakayım ben.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problemi açıklayamamış, teoremi ifade edememiş ve ispatı tamamlayamamıştır. Üstün yetenekli öğrenciler karşılaştıkları bir problem durumunda araştıran, sorgulayan, merak eden, sonuca ulaşmak için çözüm yolları üreten bireylerdir. Ancak bu öğrencinin bu soruda sonuca ulaşmak için uğraşmadığı, soru üzerinde düşünmeden farklı bir soruya devam etmek istediği görülmüştür. Bu durumun öğrencinin ispata nasıl ve nereden başlayacağını bilememesi ve teoremi ifade edememesinden kaynaklandığı söylenebilir. Ayrıca öğrencinin kuralı bildiği ve kullandığı halde niye böyle bir kuralın olduğunu sorgulamaması bu kuralı ezbere bildiğini gösterir.

Ö2: Bir sayının 3 ile bölünebilme kuralının ispatı.

A: Aynen, nasıl ispatlarsın?

Ö2: Modüler aritmetikten kalanlara bakarım. Sayımı …edcba seçersem. Bu sayının açılımı $\ldots 10^2.c + 10^1.b + 10^{\circ}.a \equiv \ldots c + b + a \pmod 3$ şeklinde devam eder. 3 modunda alırsam bu ifadeden ilk a gelir, sonra b, sonra c gelir. O yüzden rakamlar toplamı 3' e bölünürse sayı 3' e tam bölünür.



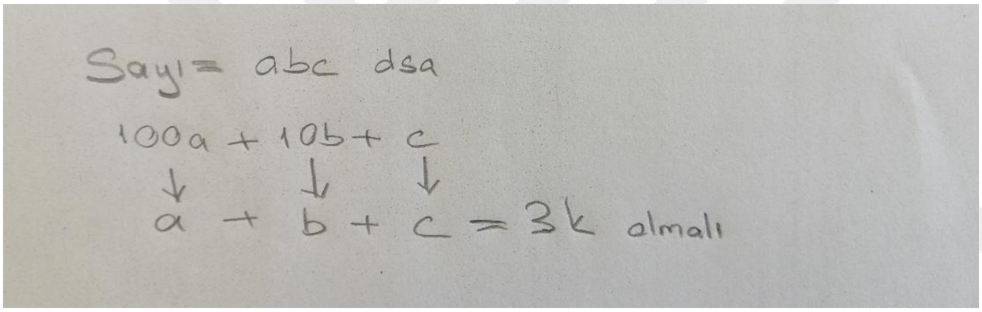
Şekil 4.10: Ö2 kodlu öğrencinin üçüncü soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve teoremi ifade etmiştir. Problemin ispatı için modüler aritmetiği kullanabileceğini söyleyerek 10'un kuvvetlerinin 3 modunda oluşturduğu ... $10^2 \equiv 1$, $10^1 \equiv 1$, $10^{\circ} \equiv 1$ denkliklerin, kalanlarının toplamının 3'ün katı olması durumunda sayının 3'e tam bölünebileceğini söylemiştir. Modüler aritmetiğin bir sayının kalanlarını ifade ettiğini ve bölünebilme kuralları ile ilişkili olduğunu düşündüğü için bu yöntemi kullandığını belirtmiştir. Öğrenci gerekli işlemleri yaparak ispatını tamamlamıştır. Ancak öğrenci ispat sürecinde sadece pozitif sayıları düşünerek işlemleri yapmıştır. Bu durumun öğrencinin dikkatsizliğinden kaynaklandığı söylenebilir. Sonuç olarak öğrenci ispatı göstermiş olsa da negatif sayıların 3 ile bölünebilme kuralını göz ardı ettiği için süreci eksik tamamlamıştır.

Ö5: Bir sayının 3 ile bölünebilmesi için rakamları toplamının 3 veya 3'ün katı olması gerekiyor. Bunu ispatlayabilirim.

A: Nasıl ispatlarsın?

Ö5: Bir sayı seçelim. Sayımız abc sayısı olsun. Bu sayının çözümlenmiş hali 100a + 10b + c şeklindedir. 100a sayısının içinde 3'ün katı olan 99a vardır, 10b'nin içinde 3'ün katı 9a vardır, c sayısının 3'e bölümü yine c olacağından kalanları toplamına bakmam gerekir. Bu durumda eğer (a + b + c) toplamı 3'e bölünürse sayı 3'e bölünmüş olur. Bu kural 9 ile bölünme kuralında da böyle olur.



Şekil 4.11: Ö5 kodlu öğrencinin üçüncü soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve teoremi ifade etmiştir. Teoremin ispatı için belirlediği sayıyı çözümleyerek sayının 3 ile bölümünden kalanını incelemiştir. Verilen sayının 3 ile tam bölünebilmesi için kalanlarında 3'ün katı olması gerektiğini ifade etmiştir. Öğrenci gerekli işlemleri yaparak ispatını tamamlamıştır. Ayrıca problem için yapılanları özetleyip 9 ile bölünebilme kuralı için de aynı yöntemin uygulanabileceğini bu sefer sayının 9 ile bölümünden kalanlarını inceleyeceğini söylemiştir. Ancak öğrenci ispat sürecinde özel örnekle sınırlı kalarak sadece üç basamaklı pozitif bir sayı için işlemlerini yapmıştır. Bu durum öğrencinin bu konudaki bilgi eksikliğinin sebebi olabileceği gibi dikkatsizliğinin sonucu da olabilir. Sonuç olarak öğrenci ispatı göstermiş olsa da eksik tamamladığı için süreci tamamlayamamıştır.

Tablo 3'te öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 4.3: Üçüncü soruya ait ispat süreci aşamaları

Ana Safhalar (aşama)	Alt Safhalar (aşama)	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problemin incelenmesi	Problem durumunun açıklanması	✓	✓		✓	✓
	Problem durumunun açıklanamaması					
Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi	Teoremi açıklama	✓	✓		✓	✓
	Teoremi açıklayamama					
Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi	Çözümleme yöntemini kullanma					✓
	Modüler aritmetik yöntemini kullanma		✓			
Gerekli işlemlerin yapılması	İşlemi tamamlama					
	İşlemi eksik yapma		✓			✓
	İşlemi tamamlayamama					
Yapılanların özetlenmesi	Yapılan işlemlerin ifade edilmesi					

Öğrencilerin üçüncü soruya ait çözümleri incelendiğinde; dört öğrencinin problem durumunu açıklayarak teoremi ifade edebildiği, ancak sadece iki öğrencinin ispatı yapmak için uygun stratejiler belirlediği ve gerekli işlemleri yaptığı görülmüştür. Bu iki öğrenci aynı zamanda kullandıkları yöntemleri farklı problem durumlarıyla da ilişkilendirerek yaptıklarını özetlemişlerdir. Ancak ispat sürecinde negatif sayıları düşünmeden işlemlerini yapmışlardır. Bu durum öğrencilerin bu konudaki bilgi eksikliklerinin sebebi olabileceği gibi dikkatsizliklerinin sonucu da olabilir. Ayrıca Ö1, Ö4 ve Ö5 kodlu öğrenciler süreçte özel örneklerle sınırlı kalarak sadece üç basamaklı sayılar üzerinden strateji üretmeye çalışmışlardır. Bu durum ispatı tamamlayamayan diğer üç öğrencinin öğrendiği bölünebilme kurallarını öğrenip sorgulamaktan ziyade sadece ezberleyip karşılaştıkları soru tiplerinde kullandıklarını göstermiştir. Bunun yanında görüşme sonunda verilen bölünebilme kuralının ispatını öğrenmek isteyen Ö4 kodlu öğrenci bundan sonra öğrendiği formülleri ezberlemeden önce sorgulayacağını söylemiştir. Sonuç olarak bu soruda hiçbir öğrencinin modelin aşamalarının tamamını geçiremediği görülmüştür.

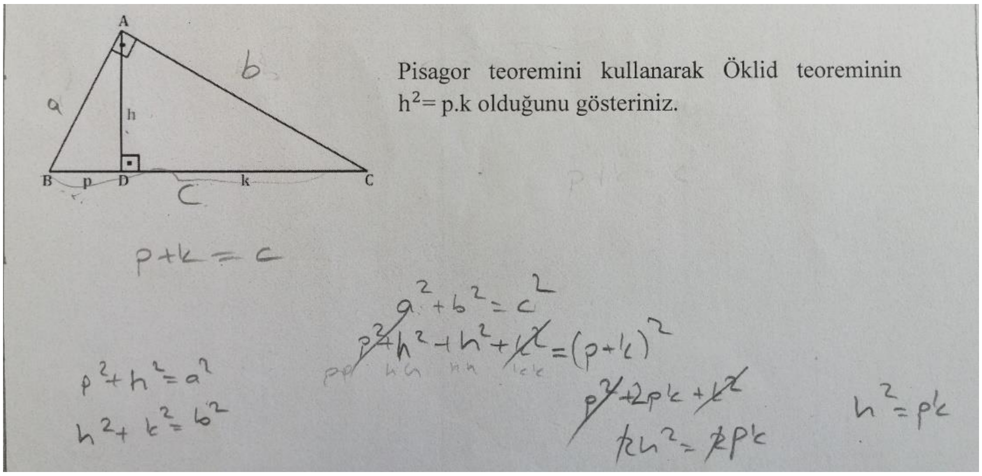
4.3.4 . Dördüncü soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soruda öğrencilerden verilen dik üçgenden hareketle; Pisagor teoremini kullanarak üçgenin yüksekliğinin karesinin, yüksekliğin tabanda oluşturduğu uzunlukların çarpımına eşit olduğunu göstermeleri istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, tüm öğrencilerin modelin aşamalarının tamamını geçirebildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Ö1: Soruda verilen teoremi ispatlamamı istiyor.

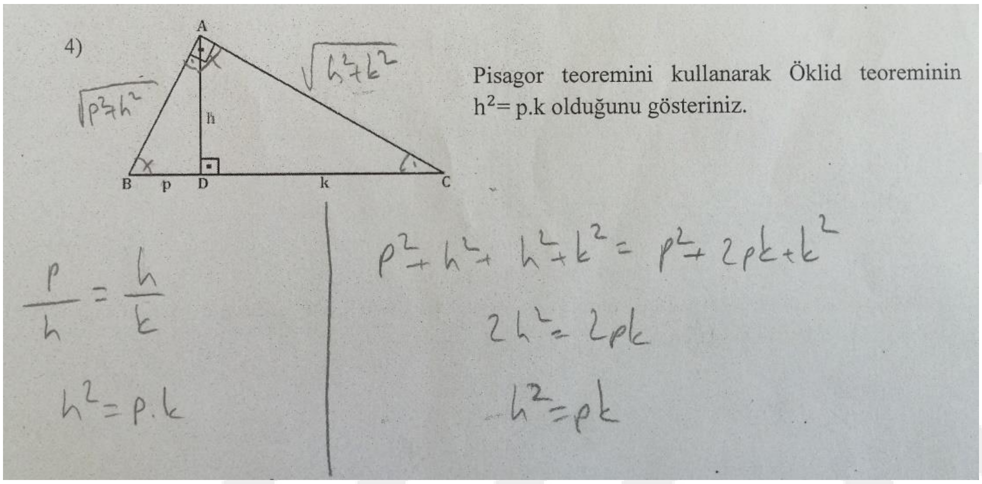
A: Peki nasıl ispatlarsın?

Ö1: (şekil üzerinden kenarları isimlendirdi) Dik üçgende kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşit. Buradan bu üçgende kenarlara isim vereyim. ABD üçgeni için Pisagor yazarım. ADC üçgeni için Pisagor yazarım. Sonra da büyük üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ yazarsak eşitlikte yerine yazdığımızda çıkar.



Şekil 4.12: Ö1 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevap

Ö2: Soruyu çözmek için benzerlik yaparım. Eş açıları gösteririm. Karşılarındaki kenar uzunlukları da birbiri ile orantılı olmalı. O yüzden benzerlikten direk içler ve dışlar çarpımından h^2 = p.k olmalı.



Şekil 4.13: Ö2 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevap

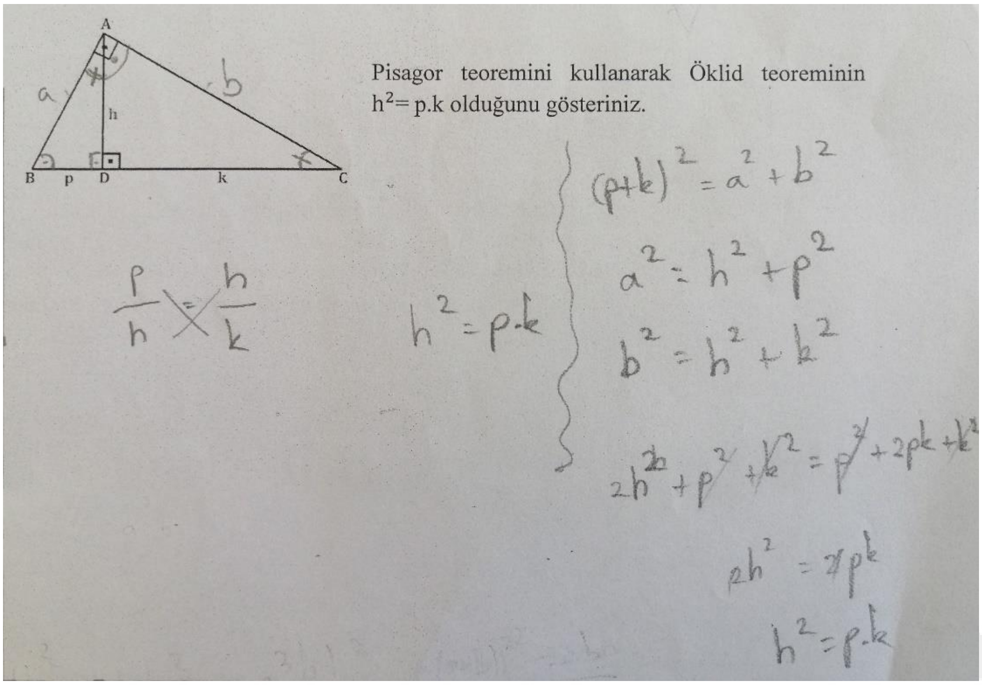
A: Ama senden Pisagor teoremini kullanarak ispatlamanı istiyor.

Ö2: O zaman şöyle. Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesidir. Pisagor'dan ispatlarsam kenar uzunluklarından hareketle verilmeyen kenarları yazıp eşitlikte yerine yazarım. İspatlamış olurum.

Ö3: Pisagor teoreminden yararlanarak Öklid'i ispatlamamı istemiş. Benzerlikten de yapabilirim. (Kenarları yazıp benzerlikten ispatladı)

A: Senden Pisagor teoremini kullanarak ispatlamanı istemiş. Pisagor teoremi neydi?

Ö3: Dik bir üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ 'ye eşitti. O zaman üçgenlerde Pisagor eşitliklerini yazarım. Yine de ispatlamış olurum. Bu kadar ama benzerlikle daha kolay ispatlanıyor neden Pisagor teoremini kullanayım.

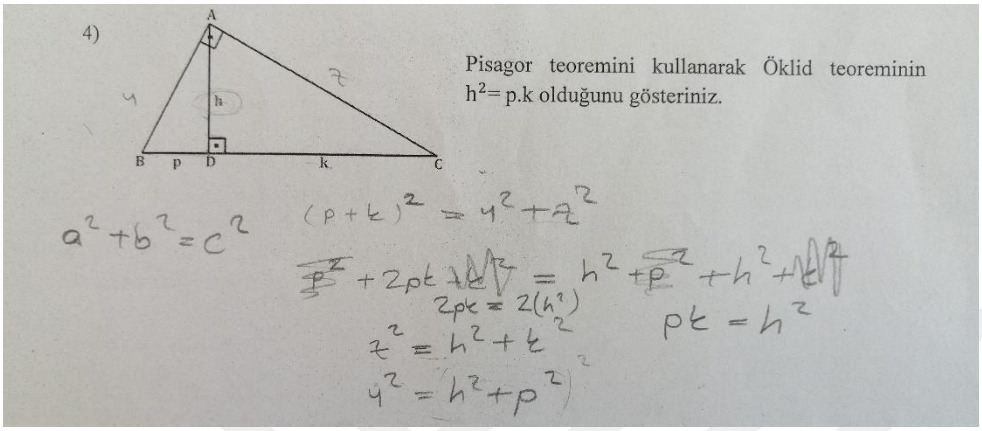


Şekil 4.14: Ö3 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevap

Ö4: Tamam bunu yapabilirim. Kenarları isimlendireyim ve Pisagor teoremlerini yazayım.

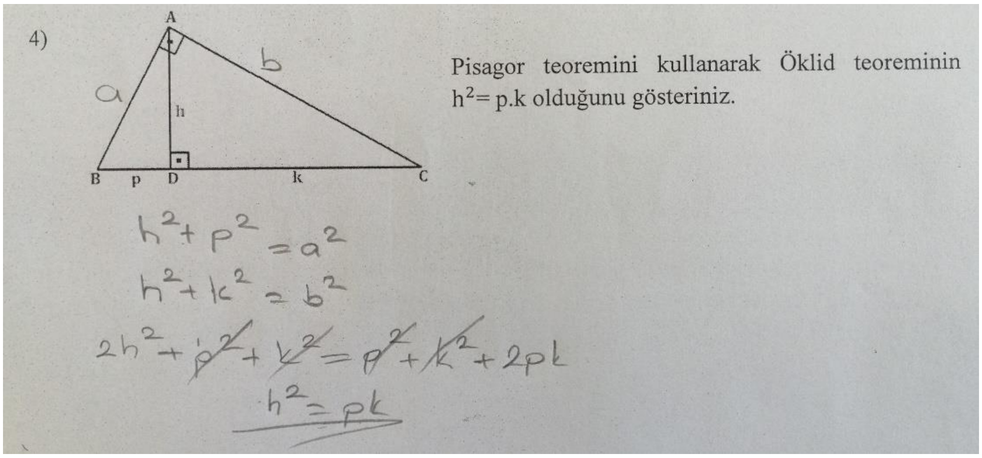
A: Pisagor teoremi neydi?

Ö4: Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir. Bütün üçgenlerde Pisagor yazıp yerine koyduğumda bulurum.



Şekil 4.15: Ö4 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevap

Ö5: Pisagor teoremi bir dik üçgendeki kenarların kareleriyle ilişkili bir kuraldı. Verilen üçgende verilmeyen kenarları isimlendirip yazarsam istenen teoremi ispatlamış olurum.



Şekil 4.16: Ö5 kodlu öğrencinin dördüncü soruya verdiği cevap

Tablo 4’te öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 4.4: Dördüncü soruya ait ispat süreci aşamaları

Ana Safhalar (aşama)	Alt Safhalar (aşama)	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problemin incelenmesi	Problem durumunun açıklanması	✓	✓	✓	✓	✓
	Problem durumunun açıklanamaması					
Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi	Teoremi açıklama	✓	✓	✓	✓	✓
	Teoremi açıklayamama					
Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi	Pisagor teoremini kullanma	✓	✓	✓	✓	✓
	Benzer üçgenleri kullanma		✓	✓		
Gerekli işlemlerin yapılması	İşlemi tamamlama	✓	✓	✓	✓	✓
	İşlemi eksik yapma					
	İşlemi tamamlayamama					
Yapılanların özetlenmesi	Yapılan işlemlerin ifade edilmesi	✓	✓	✓	✓	✓

Öğrencilerin dördüncü soruya ait çözümleri incelendiğinde; beş öğrencinin de problem durumunu açıklayarak teoremi ifade edebildiği, ispatı yapmak için uygun stratejiler belirlediği ve gerekli işlemleri yaptığı görülmüştür. Ayrıca iki öğrenci hem Pisagor teoremini hem de benzerlik teoremini kullanarak problemi iki farklı yoldan ispatlamıştır. Ancak Ö3 kodlu öğrenci Pisagor teoremini “$a^2 + b^2 = c^2$” şeklinde tanımlamıştır. Bu durum öğrencinin karşılaştığı tüm dik üçgenler için bu kenar uzunluklarını kabul ederek Pisagor teoreminin tanımını genelleştirdiğini gösterirken öğrencinin matematiksel dil ve notasyonda sıkıntı yaşadığı sonucuna da ulaştırabilir. Bu süreçte öğrencilerin Pisagor teoremini kullanarak Öklid teoremini ispatladığı konular arasında ilişkilendirmeyi yapabildiği görülmüştür. Öğrenciler yapılan işlemleri özetleyip ispatı tamamlamışlardır.

4.3.5 . Beşinci soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soruda öğrencilerden a ve b reel sayılarının değerlerinin 0'dan büyük olması durumunda $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ değerinin 2'ye eşit veya 2'den büyük olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, sadece bir öğrencinin modelin aşamalarının tamamını geçirebildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

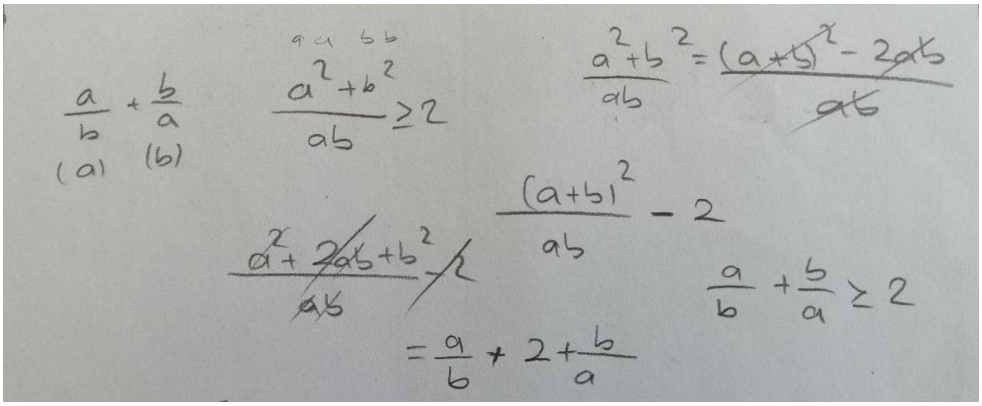
Ö1: Bu ifadenin 2'ye eşit ya da 2'den büyük olduğunu göstermemi istiyor.

A: Peki ne yapabilirsin?

Ö1: Her iki tarafın karesini alsam.

A: Ama senin yapman gereken o toplamın 2'ye eşit ya da 2'den büyük olduğunu göstermek değil miydi?

Ö1: Evet öyleydi o zaman değer versem. (Uzun süre düşündü ve değerler vererek eşitsizliği sağladı) O zaman payda eşitleyip bulmaya çalışayım. Bir sonuca ulaşamıyorum.



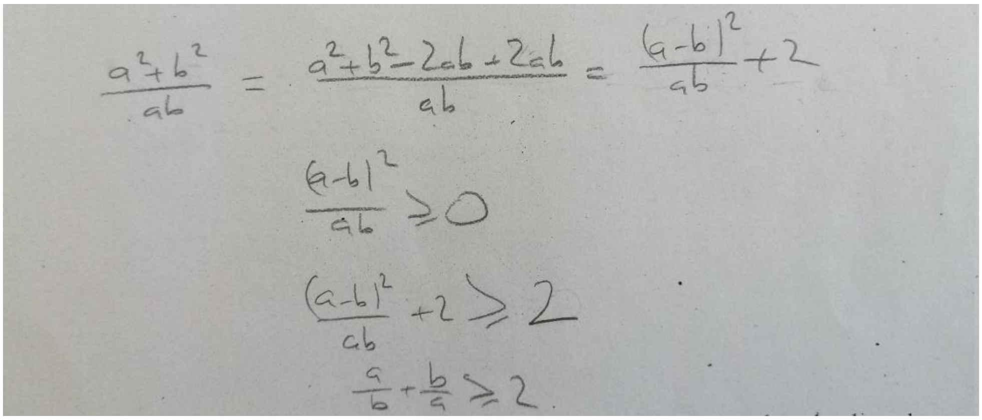
Şekil 4.17: Ö1 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamıştır ama sadece işlemlere odaklandığı için teoremi ifade edememiştir. Ayrıca karşılaştığı teoremde a ve b değerlerinin sıfırdan büyük olma durumlarından hareketle hükmü göstermeye çalıştığı düşüncesini unutup a ve b değerlerini bulmaya çalışmış soruyu eşitsizlik sorusu gibi düşünerek çözmeye odaklanmıştır. Göstermek istediği ifadeyle yaptığı işlemler arasında çeliştiğini fark edince a ve b için değer vermek istemiş bu durumda eşitliğin hep doğru olacağını ifade etmiştir. Ancak sonra yaptıklarının ispat olmayacağını düşünmüş bu sefer verilen $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ifadesinde payda eşitlemesine gitmiş 2'ye ulaşmaya çalışmış ancak sonuca ulaşamamıştır. İşlemleri eksik kalmış ve ispatını tamamlayamamıştır.

Ö2: Verilen a ve b değerlerine göre ifadenin ≥ 2 olduğunu göstermem gerek.

A: Peki nasıl gösterebilirsin?

Ö2: Bu soruda öncelikle $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ifadesinde payda eşitlemesi yaparım. Bulduğum $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ifadesine 2ab terimini ekleyip çıkarırım. Buradan payı $(a\text{-}b)^2 + 2ab$'ye eşit olur. Payı paydaya bölerim. $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ olmak zorunda çünkü a ve b sıfırdan büyük olmalı. Payı da her zaman pozitiftir çünkü bir sayının karesi. Bu durumda verilen ifade 2'ye eşit veya 2'den büyük olur.



Şekil 4.18: Ö2 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamıştır. Ayrıca a ve b değerlerinin sıfırdan büyük olduğunu kabul ederek hükmü ispatlamaya çalışmış yani teoremini ifade etmiştir. Problem durumunun ispatı için sol taraftaki ifadede payda eşitlemesi yapmış ve ekleme çıkarma kuralını kullanarak ifadenin ≥ 2 olduğunu göstermeye çalışmıştır. İşlemleri yaparken a ve b sayılarının pozitif olma durumunu da göz önünde bulundurarak işlemini tamamlamış ve $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

olduğunu ispatlamıştır. Öğrenci a ve b sayılarının sıfırdan büyük olduğunu kabul ederek yaptığı işlemleri anlatmış ve sürecini özetlemiştir.

Ö3: İfadenin toplamının 2’den büyük olduğunu göstermemi istiyor.

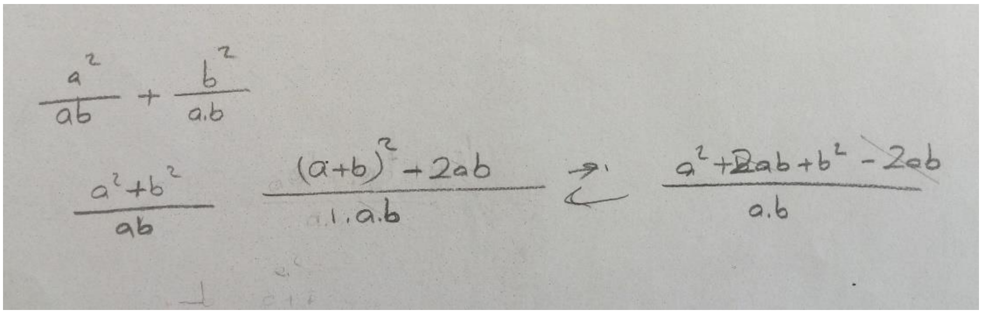
A: Nasıl gösterirsin 2’den büyük olduğunu?

Ö3: Paydaları eşitlesem. (Öğrenci sol taraftaki ifadenin paydalarını eşitleyip 2’ ye ulaşmaya çalıştı ama sonuca ulaşamadı) Buradan bir şey çıkmadı. O zaman değer versem yerine koyduğumda bu eşitliği sağlar. Bütün sayıları denesem hep doğru olur.

Ö4: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ‘nın toplamının 2’ ye eşit ya da 2’ den büyük olduğunu göstermemi istiyor.

A: Nasıl gösterebilirsin?

Ö4: Öncelikle ifadeyi genişletip bulmaya çalışayım. Topladığımda 2’ ye ulaşmaya çalıştığımda yine başa dönüyorum. Aynı şey oluyor ve sonuca ulaşamıyorum.



Şekil 4.19: Ö4 kodlu öğrencinin beşinci soruya verdiği cevap

Alıntılardan görüldüğü üzere öğrenciler neye ulaşmak istediklerinin farkındadırlar. Bu da öğrencilerin problemi anladığını gösterir. Ama iki öğrenci de işlem yapmaya odaklandığı için teoremi ifade edememiştir. Buradan hareketle $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ifadesinde payda eşitleyip işlemleri yaparak ≥ 2’ye ulaşmaya çalışmışlardır. Ancak a ve b değerlerinin sıfırdan büyük olma durumunu göz önünde bulundurmadıkları için yaptıkları işlemleri tamamlayamamış bir sonuca ulaşamamışlardır. Ö3 kodlu öğrenci soruyu tekrar incelediğinde a ve b’ ye değer verebileceğini düşünmüş ve hangi değeri verirse versin sonucun doğru olacağını yani değerler verip teoremi ispatlayabileceğini söylemiştir. Öğrenci ispatı genelleştirmekten ziyade özel bir örnekle sonuca ulaşabileceğini düşünmüştür. Bu durum öğrencinin sonuca ulaşmak için stratejiler geliştirdiğini gösterirken ispatı tamamlayamadığını gösterir.

Ö5: Soruda ne yapmamı istiyor ki benden. Böyle bir eşitlik mi varmış. Anlayamadım.

A: a ve b değerlerinin 0'dan büyük olması durumunda $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ değerinin 2'ye eşit veya 2'den büyük olduğunu göstermeni istiyor.

Ö5: Paydaları eşitleyip denklemi çözmeye çalışsam. 2' yi eşitliğin diğer tarafına göndersem?

A: Senin 2'ye eşit ya da 2'den büyük olduğunu göstermen gerekiyor. 2' yi diğer tarafa gönderirsen ≥ 2 olduğunu kabul etmiş olmaz mısın?
Ö5: Yapsam da bir şeye ulaşamadım. Çok ilginç. Ama şöyle ki a ve b sayılarını eşit seçsem her zaman 2'ye eşit olur. (Uzun süre düşündü) Her tarafı a' ya mı bölsem? Bilemedim.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklayamamış ve teoremi ifade edememiştir. Araştırmacı bu durum üzerine problemi ve ne yapması gerektiğini öğrenciye anlatmıştır. Öğrenci bu aşamadan sonra kendisini sonuca ulaştıracak çözüm yolları üretmeye başlamıştır. Ancak Ö1 kodlu öğrencinin yaptığı gibi ≥ 2 'ye ulaşmaktan ziyade o da eşitsizliği çözmeye çalışmıştır. Sonuca ulaşamayan öğrenci sorunun çok ilginç olduğunu ifade ederek a ve b değerlerinin eşit olması durumunda sonucun her zaman 2 olacağını ancak 2'den büyük olduğu durumda bir sonuca ulaşamadığını belirtmiştir. Öğrenci işlemleri yapamamış ve ispatı tamamlayamamıştır.

Tablo 5'te öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 4.5: Beşinci soruya ait ispat süreci aşamaları

Ana Safhalar (aşama)	Alt Safhalar (aşama)	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problemin incelenmesi	Problem durumunun açıklanması	✓	✓	✓	✓	
	Problem durumunun açıklanamaması					✓
Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi	Teoremi açıklama		✓			
	Teoremi açıklayamama	✓		✓	✓	✓
Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi	Deneme yöntemini kullanma	✓		✓		
	Payda eşitleme yöntemini kullanma		✓	✓	✓	✓
	Kare alma yöntemini kullanma	✓				
Gerekli işlemlerin yapılması	İşlemi tamamlama		✓			
	İşlemi eksik yapma	✓			✓	
	İşlemi tamamlayamama					
Yapılanların özetlenmesi	Yapılan işlemlerin ifade edilmesi		✓			

Öğrencilerin beşinci soruya ait çözümleri incelendiğinde; dört öğrencinin problem durumunu açıklayabildiği ancak bu dört öğrenciden yalnızca birinin teoremi ifade edebildiği görülmüştür. Çünkü öğrenciler teoremin ispatında hipotez ve hüküm arasındaki ilişkiye odaklanmadan verilen teoremi eşitsizlik sorusu gibi düşünerek çözmeye çalışmışlardır. Bu durum da onların verilen teoremi ispatlamadan $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul ederek ifadenin ≥ 2'ye eşit olduğunu göstermeye çalışmalarına sebep olmuştur. İşlem yapmaya odaklanan öğrencilerin teoreme dair stratejiler geliştirdiği tespit edilmiş ancak teoremi ispatlayamadıkları görülmüştür. Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler de işlemlerini tamamlayamamış sürekli verilen ifadeye eşit bir ifadeye ulaştıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerden karşılaştıkları problem durumunda a, b > 0 hipotezini kabul edip $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ hükmüne ulaşmaları beklenirken öğrencilerin hipotez ve hükmü göz ardı edip sadece işlem yapmaya çalıştıkları görülmüştür. Ö1 ve Ö3 kodlu öğrenciler ise deneme yöntemini kullanarak süreci sadece özel örnekler üzerinden düşünmüşlerdir. Bu durum bize öğrencilerin bu ispatı yaparken sorularda ezbere dayalı işlemler yaptıkları sonucuna ulaştırmıştır. Bunların aksine Ö2 kodlu öğrenci ispat sürecinin tüm aşamalarını tamamlamış hatta yaptıkları işlemleri nedenleriyle birlikte anlatmıştır. Buradan hareketle Ö2 kodlu öğrenci hariç diğer öğrencilerin teoremi ifade edemedikleri ve matematiksel dil ve notasyonda sıkıntı yaşadıkları için süreci tamamlayamadıkları söylenebilir. Sonuç olarak bu soruda bir öğrencinin ispat yapma sürecini başarıyla tamamladığı görülmüştür.

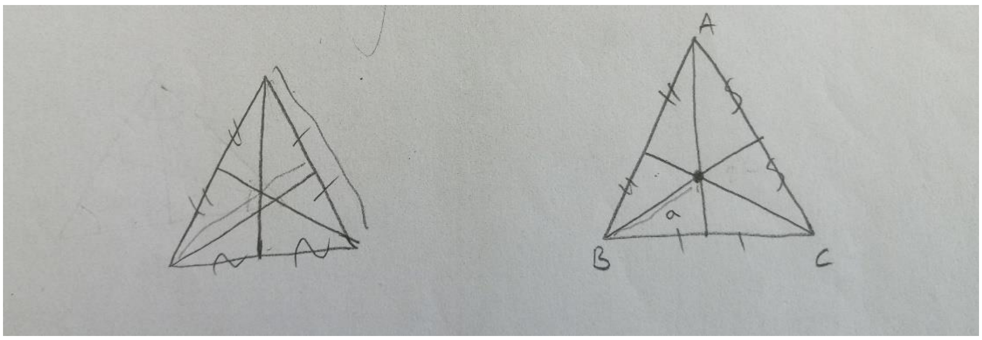
4.3.6 . Altıncı soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soruda öğrencilerden; bir üçgende ağırlık merkezinin bir köşeye olan uzaklığının, aynı köşeden karşı kenara çizilen kenarortay uzunluğunun $\frac{2}{3}$ 'sine eşit olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, üç öğrencinin modelin aşamalarının tamamını geçirebildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Soruda senden neyi ispatlamanı istiyor? (Öğrenci bir üçgen çizdi ve açıortayların kesim noktasını gösterdi) Neden açıortayları çizdin?

Ö1: Açıortayların kesiştiği nokta ağırlık merkezi olduğu için çizdim. (Düşündü) Açıortayların kesiştiği nokta değil miydi ağırlık merkezi? Ya da kenarortayların kesim noktası mıydı? Doğru doğru kenarortayların kesim noktası ağırlık merkeziydi.

A: Peki sana hangi uzunlukların oranını soruyor? (Şekil üzerinden gösterdi) Ağırlık merkezinin özelliği neydi? Ağırlık merkezi kenarortayı nasıl ayırırdı?



Şekil 4.20: Ö1 kodlu öğrencinin altıncı soruya verdiği cevap

Ö1: 3’e 2’mi? Unuttum.

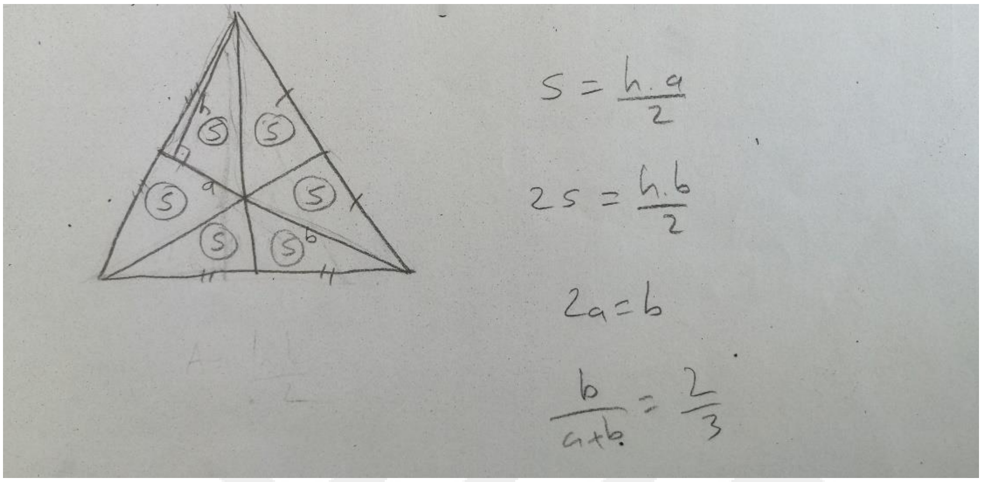
Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu ifade edememiş, teoremi açıklayamamış, uygun bir strateji geliştiremediği için ispat sürecini tamamlayamamıştır. Öğrenci ağırlık merkezinin açıortayların kesim noktası mı kenarortayların kesim noktası mı olduğu konusunda ikilemde kalmıştır. Sonradan kenarortayların kesim noktasının ağırlık merkezi olduğunu ifade etmiş ancak bunu gerçekten bildiği için mi yoksa kendisine yöneltilen soru üzerine mi söylediği hakkında kesin bir sonuca ulaşılamamıştır. Öğrencinin kavramların tanımlarını karıştırdığı ve bu durumun ön bilgi ve matematiksel temel bilgi eksikliğinden kaynaklandığı söylenebilir. Ayrıca öğrencinin teoremi ifade edememesi ispata nasıl ve nereden başlayacağı konusunda da sıkıntı yaşamasına sebep olmuştur. Öğrencinin sözel olarak ifade edebildiklerini matematiksel olarak ifade edememesi matematiksel dil ve notasyonda da sıkıntı yaşadığını gösterebilir. Sonuç olarak öğrenci ispat sürecinin hiçbir basamağını tamamlayamamıştır.

A: Soruda senden neyi ispatlamanı istiyor?

Ö2: Üçgende kenarortay uzunluklarının k’ ya 2k oranında kestiğini göstermemi istiyor.

A: Peki ağırlık merkezi neydi?

Ö2: Ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasıydı. (Öğrenci bir üçgen çizdi ve kenarortayları gösterip ağırlık merkezini işaretledi) Ağırlık merkezi bir üçgeni altı eş üçgene böler. Bu üçgenlerin hepsinin alanı eşittir. Bir kenarortayı a ve b olarak isimlendirelim. a tabanlı üçgenin alanı yüksekliği h olursa S = $\frac{h.a}{2}$ olur. b tabanlı üçgenin alanı yüksekliği h olan 2S = $\frac{h.b}{2}$ olur. 2a = b olur. $\frac{b}{a+b} = \frac{2}{3}$ olur.



Şekil 4.21: Ö2 kodlu öğrencinin altıncı soruya verdiği cevap

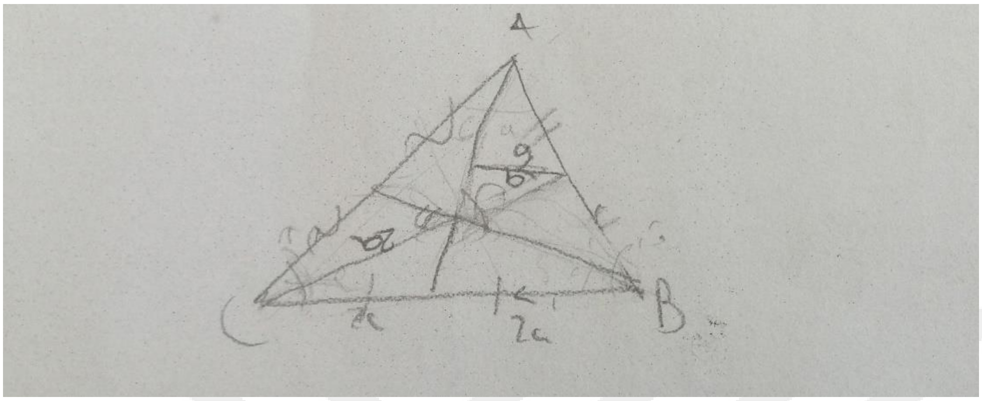
Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci ispat sürecinin tüm basamaklarını tamamlamıştır. Öğrenci problem durumunu açıklamış, teoremi ifade etmiştir. Problemin ispatı için çizdiği üçgen üzerinde oluşan eş üçgenlerde alan bağıntısını kullanarak ağırlık merkezinin kenarortaylar üzerinde oluşturduğu uzunlukların oranını ifade etmiştir. Yazdığı alan bağıntıları üzerinde gerekli işlemleri yapmış ve yaptığı adımları özetleyerek ispatını tamamlamıştır. Ancak öğrencinin süreçte kullanılan bilgiler açısından hiyerarşiyi göz önünde bulundurmadığı öğrendiği bilgileriyle ilişkilendirme yaparak bilgilerini yeni karşılaştığı duruma uygulayarak ispat sürecini tamamladığı sonucuna da ulaşılmıştır.

A: Soruda senden neyi ispatlamanı istiyor?

Ö3: Bir üçgen çizelim. Ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasıdır onu gösterelim. Oluşan kenarortay uzunluklarının neden $\frac{2}{3}$ oranında kestiğini göstermemi istiyor.

A: Ağırlık merkezi kenarortayı nasıl bölüyordu?

Ö3: Ağırlık merkezi kenarortayı biri birinin iki katı olacak şekilde böler. Bu oranın niye böyle böldüğünü göstermem lazım. (Uzun süre düşündü ve işlemler yaptı) Nasıl ispatlandığını bilmiyorum.



Şekil 4.22: Ö3 kodlu öğrencinin altıncı soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve teoremini ifade etmiştir. Öğrenci bir üçgen çizip kenarortayların oluşturduğu ağırlık merkezinin kenarortay uzunluklarını böldüğü oranları göstereceğini söylemiştir. Ancak ispata ulaşmak için hangi stratejiyi kullanacağını belirleyememiş ve ispatını tamamlayamamıştır. Görüşme sırasında üçgenlerde oluşan açılara takılmış açılarla ilgili bir bağlantı kurmaya çalışmış ancak bir sonuç elde edememiştir. Bu durumda öğrencinin üçgen konusunda ön bilgi ve matematiksel temel bilgi eksikliği olduğu söylenebilir. Bu eksiklik öğrencinin ispata nasıl ve nereden başlayacağını bilememesine de sebep olabilir. Ayrıca öğrenci soru çözümlerinde bu kuralları kullandığını ama hiç ispatıyla karşılaşmadığını ve sorgulamadığını ifade etmiştir.

A: Soruda senden neyi ispatlamanı istiyor?

Ö4: Ağırlık merkezinin oluşturduğu oranları soruyor.

A: Ağırlık merkezi neydi?

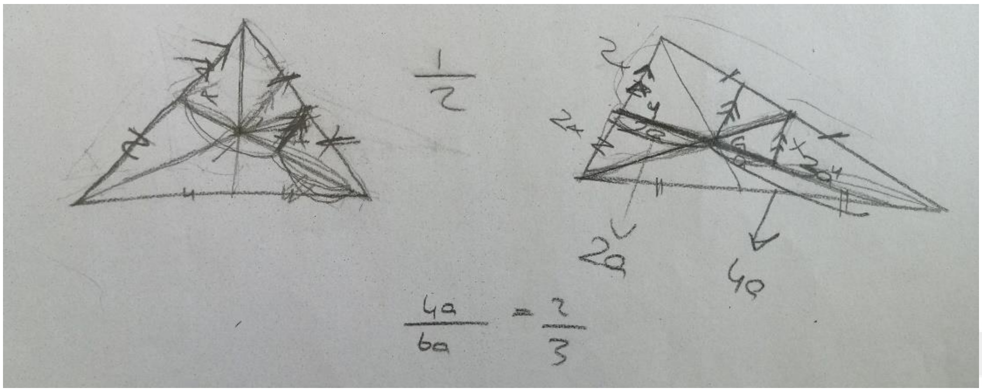
Ö4: Açıortayların kesim noktasıydı. Açıortay mı, kenarortay mıydı ya? Çizerek ulaşabilirim bu sonuca. (hem açıortayı hem de kenarortayı belirten üçgenler çizdi) Açıortayların kesim noktası iç teğet çemberini oluşturuyordu. Kenarortayların kesim noktası ağırlık merkezidir.

A: Neyi ispatlaman gerekiyordu?

Ö4: Ağırlık merkezindeki oranın 1'e 2 olduğunu göstermemi istiyor.

A: Peki nasıl gösterirsin?

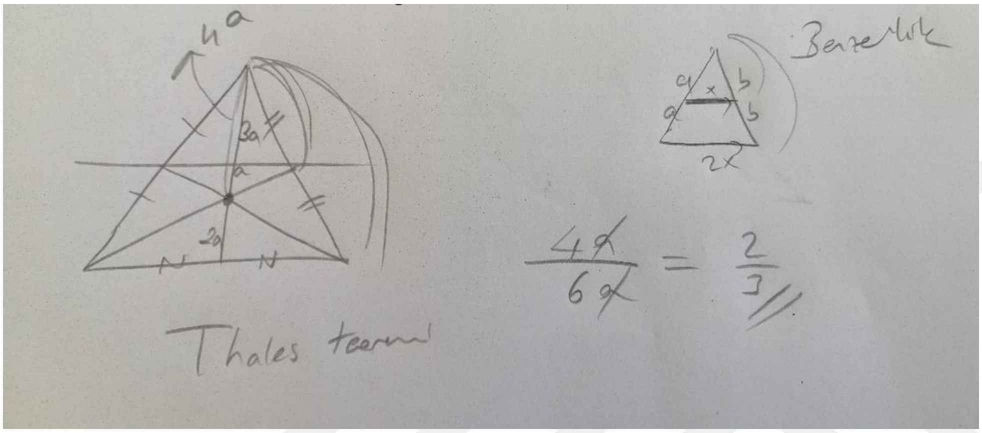
Ö4: Benzerlikten ispatlayabilirim. Çünkü benzerlik var. Thales teoreminden ispatlarım. (Çizdiği üçgen üzerinde benzer olan iki üçgeni gösterdi) Kenarlarından dolayı 1'e 2 oranı var. Bu orandan dolayı uzunlukları isimlendirelim. Ayrıca oluşan kelebek kuralından dolayı y dediğimiz uzunluk 3a'ya eşit olsa. O zaman köşeden ağırlık merkezine kadar çizilen uzunluk 4a olur tamamı 6a olur. Oranı $\frac{2}{3}$ 'e eşit olur. Benzerlikten ispatlamış oldum.



Şekil 4.23: Ö4 kodlu öğrencinin altıncı soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve teoremini ifade etmiştir. Ö4 kodlu öğrenci de Ö1 kodlu öğrenci gibi ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası mı yoksa açıortayların kesim noktası mı olduğu konusunda kararsız kalmıştır. Ancak bu durumu farklı üçgenlerde kenarortay ve açıortay oluşturarak kesinleştirmiştir. Açıortayların kesim noktasının iç teğet çemberin merkezi olduğu kenarortayların kesim noktasının ise ağırlık merkezi olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu durum öğrencinin üçgenlerde kenarortay ve açıortay kavramlarını anlamlı bir şekilde öğrendiğini gösterebilir. Bu aşamadan sonra öğrenci ispatın çözümü için benzerlikten yararlanabileceğini söylemiş ve Thales teoreminin olduğunu ifade etmiştir. Kendi çizdiği üçgen üzerinde benzerliği göstermiş ayrıca oluşan iki üçgenin benzerliğinden dolayı uzunluklar arasındaki ilişkiyi ifade etmiştir. Öğrenci gerekli işlemleri yapmış yaptığı işlemleri özetleyerek ispatını tamamlamıştır.

Ö5: Bir üçgen çizip ağırlık merkezinin bir üçgenin kenarortaylarının kesim noktası olduğunu gösterelim. Bir kenarortayın neden $\frac{1}{2}$ oranında böldüğünü göstermemi istiyor. (biraz düşündü) Bu oran Thales teoreminden geliyor. (Farklı bir üçgen çizip Thales teoremini gösterdi) Eğer bir üçgende ve içinde oluşan bir üçgen varsa bu taban kenarlar paralel ise kenarlar arasında da 1'e 2 oranı vardır. Benzerlikten dolayı kenarortaylar arasında da bu oran vardır. O yüzden $\frac{2}{3}$ olur.



Şekil 4.24: Ö5 kodlu öğrencinin altıncı soruya verdiği cevap

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci problem durumunu açıklamış ve teoremini ifade etmiştir. Problemin ispatı için Thales teoremini kullanabileceğini söylemiş ve kenarortayları ifade ettiği üçgen dışında bir üçgen çizerek Thales teoremini anlatmıştır. Thales teoremindeki paralellik özelliğini kendi üçgeninde de göstererek ağırlık merkezinin bir köşeye olan uzaklığının, aynı köşeden karşı kenara çizilen kenarortay uzunluğunun $\frac{2}{3}$ oranında olduğunu belirtmiştir. Gerekli işlemleri yapıp yaptıklarını özetlemiştir. Ayrıca görüşme sonunda öğrenci şimdiye kadar öğrendiği kuralları ezbere öğrenip geçtiğini hangi kuralın nereden geldiğini nasıl oluştuğunu hiç düşünmediğini, sorgulamadığını fark etmiştir. Ancak bu şekilde ezberlemenin kendisine bir şey katmadığını ve daha çok bu tarz ispat sorularıyla uğraşmanın daha anlamlı olacağını söylemiştir. Öğrenci bundan sonraki çalışmalarında ispat konusunda bilgi sahibi olacağını öğrendikleri üzerinde araştırıp, sorgulayacağını belirtmiştir.

Tablo 6'da öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 4.6: Altıncı soruya ait ispat süreci aşamaları

Ana Safhalar (aşama)	Alt Safhalar (aşama)	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problemin incelenmesi	Problem durumunun açıklanması		✓	✓	✓	✓
	Problem durumunun açıklanamaması	✓				
Teoremin açık ve net biçimde ifade edilmesi	Teoremi açıklama		✓	✓	✓	✓
	Teoremi açıklayamama	✓				
Teoremin geçerliğini göstermek için uygun stratejilerin belirlenmesi	Alan bağıntısını kullanma		✓			
	Thales teoremini kullanma				✓	✓
Gerekli işlemlerin yapılması	İşlemi tamamlama		✓		✓	✓
	İşlemi eksik yapma					
	İşlemi tamamlayamama					
Yapılanların özetlenmesi	Yapılan işlemlerin ifade edilmesi		✓		✓	✓

Öğrencilerin altıncı soruya ait çözümleri incelendiğinde; dört öğrencinin problem durumunu açıklayabildiği ve teoremi ifade edebildiği görülmüştür. Ancak üç öğrenci problemin ispatı için çözüm yolu belirleyip gerekli işlemlerini yapmışlar ve yaptıkları işlemleri özetleyip ispatlarını tamamlamışlardır. İki öğrenci ispatın çözüm sürecinde Thales teoremini kullanmış bir öğrenci ise farklı bir bakış açısı ile yaklaşıp kenarortayların oluşturduğu üçgenler üzerinde alan bağıntısı yazarak sonuca ulaşmıştır. Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası mı yoksa açıortayların kesim noktası mı olduğu konusunda ikilemde kalmıştır. Ö4 kodlu öğrenci çizimler yaparak öğrendikleri arasında ilişki kurarak sonuca ulaşırken Ö1 kodlu öğrencinin bu konudaki bilgisi hakkında kesin bir sonuca ulaşılamamıştır. Sonuç olarak bu sorunun ispatında üç öğrenci tüm ispat süreci basamaklarını tamamlamış ancak bir öğrenci probleme dair hiçbir basamağı tamamlayamamıştır.

Üstün yetenekli beş öğrencinin, İspat Klinik Görüşme Formunda yer alan altı ispat problemine göre analiz sürecinde geçirmiş olduğu aşamalar aşağıdaki Tablo 4.7'de gösterilmiştir. Bu tablo, öğrenci ispat sürecinin tüm aşamalarını tamamladıysa '✓' işareti şeklinde, hiçbir aşamayı tamamlayamadıysa 'X' işareti şeklinde veya soruyu hangi aşamaya kadar tamamladıysa o aşama belirtilerek oluşturuldu.

Tablo 4.7: Öğrencilerin sorulara ait ispat süreci aşamaları

	1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	5. Soru	6. Soru
Ö1	4. Aşama	X	2. Aşama	✓	4. Aşama	X
Ö2	✓	✓	4. Aşama	✓	✓	✓
Ö3	4. Aşama	X	X	✓	3. Aşama	2. Aşama
Ö4	4. Aşama	✓	2. Aşama	✓	4. Aşama	✓
Ö5	✓	4. Aşama	4. Aşama	✓	3. Aşama	✓

Öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar analiz süreci aşamalarına göre incelendiğinde; öğrenciler bazında Ö2 kodlu öğrencinin ispat sürecini en başarılı, Ö3 kodlu öğrencinin ise en az başarılı olarak tamamladığı söylenebilir. Çünkü Ö2 kodlu öğrenci sadece üçüncü soruyu 4. Aşamaya kadar tamamlarken diğer sorularda tüm aşamaları tamamlamıştır. Ö3 kodlu öğrenci ise ikinci ve üçüncü soruda hiçbir aşamayı tamamlayamamış, diğer sorularda da dört öğrenciye göre ispat sürecinin daha alt aşamalarına kadar ulaşabilmiştir. Analiz süreci aşamaları sorular bazında incelenecek olursa öğrencilerin sorulara verdiği cevaplara göre, en kolay sorunun dördüncü soru en zor sorunun ise beşinci soru olduğu söylenebilir. Çünkü dördüncü soruda tüm öğrenciler bütün aşamaları tamamlarken beşinci soruda sadece Ö2 kodlu öğrenci tüm aşamaları tamamlamıştır. Aynı BİLSEM'e devam eden farklı fen lisesi öğrencisi olan bu beş öğrencinin, ispat sürecinde yer alan altı ispat sorusuna yönelik farklı aşamalara kadar ispat sürecini geçirdikleri gözlemlenmiştir. Bu durumun öğrencilerin okullarında aldıkları eğitimden ya da okul dışında kendi istekleri doğrultusunda yaptıkları ispat çalışmalarından kaynaklandığı söylenebilir.

Belirlenen bu beş öğrenci ispat görüşme formundaki açık uçlu sorulara verilen cevaplara göre; teorem ve ispat kelimelerinin tanımlarını doğru yapabilen, derslerinde ispat çalışmaları yapan, ispat çalışmalarının yapılması yönünde olumlu görüşe sahip olan ve ispat tutum ölçeğine göre, ortalama puanın üzerinde puan alan öğrenciler olmalarına rağmen ispat klinik görüşme formuna göre, farklı sonuçlar ortaya çıkmıştır. Bu çalışmaya göre ispat yapmaya yönelik benzer görüşlere ya da olumlu tutumlara sahip olan bu beş öğrencinin ispat yapma sürecinde farklı aşamalarda ispatı tamamlayabildiği sonucuna ulaşılmıştır. Buradan hareketle bir öğrencinin ispat sürecini tamamlayabilmesi için tutumun ya da görüşlerinin yeterli olmadığı bunun yanında sürecin iyi anlaşılması gerektiği ve süreçte sonuca ulaşmak için ispatın da aşamalarının anlaşılması gerektiği söylenebilir.

Birinci alt probleme göre ispat yapmaya yönelik olumlu görüşe sahip olan, ikinci alt probleme göre ispat yapmaya yönelik olumlu tutuma sahip olan bu beş öğrenci üçüncü probleme göre ispat yapma yeterlik göstergelerinin tamamını gerçekleştirememiştir. Öğrenciler genel olarak ispatı anlayabilmiş ancak ispata yönelik yanlış ya da eksik yaklaşımlarda bulunmuş, uygun strateji geliştirmekte zorlanarak ispat sürecine dair sözel veya matematiksel açıklamalar yapamamışlardır. Elde edilen bulgulara göre, ana problemde incelenen üstün yetenekli öğrencilerin yeterlikleri bazında ispata yönelik bilgi/görüş ve tutuma sahip oldukları ancak ispat yapma sürecine dair becerilerinin/davranışlarının yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Araştırmanın bu bölümünde üstün yetenekli 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesine yönelik elde edilen bulgulardan ortaya çıkan sonuç, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Birinci alt probleme yönelik veriler İspat Görüşme Formuna ilişkin bilgilerden yararlanılarak elde edilmiştir. Görüşme formuna göre öğrenciler ispat ve teorem kavramlarının tanımlarında, derslerinde yaptıkları ispat çalışmalarında ve ispatın yapılıp yapılmaması konusundaki görüşlerinde sorulara benzer cevaplar verdiklerinden öğrencilerin ispata yönelik görüşlerinin çok farklı olmadığı söylenebilir. Bu çalışmaya katılan öğrencilerin üstün yeteneklilik kuramlarına göre aynı özelliklere sahip olması benzer görüşlerin ortaya çıkmasının sebebi olarak düşünülebilir. Görüşme formundan elde edilen verilere göre klinik görüşmeye katılan beş öğrenci ispata yönelik benzer tutumlara sahip olsalar da ispat yapma sürecinde farklı sonuçlar sergilemişlerdir. Bu çalışmaya katılan öğrencilerin aynı BİLSEM'e devam etmelerine rağmen farklı fen lisesi öğrencileri olmaları bu durumla ilişkili olabilir. Çünkü derslerde ispata yönelik çalışmaların yapılması, öğrencilerin kendilerinin ispat çalışmaları yapmaları ve dersin işlenişi öğrencilerin ispat sürecindeki başarılarını etkileyebilecek faktörler arasındadır. Klinik görüşmeye katılan Ö2 kodlu öğrenci diğer öğrencilerle BİLSEM'de veya okulda aynı program bağlamında ders işlemesine rağmen ispat sürecinde daha başarılı olmuştur. Bu öğrencinin okul dışında kendisinin ispat çalışmaları yapmasının bu konudaki başarısıyla ilişkili olduğu düşünülebilir. Buradan hareketle BİLSEM ya da okul derslerinde sadece öğretmenlerinin ispat yapmasından ziyade öğrencilerin de ispat yapmaları sağlanabilir. Öğrencilerin matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapmaları için uygun ortamların oluşturulması onların bu konudaki başarılarını arttırabilir.

İkinci alt probleme yönelik veriler İspat Tutum Ölçeğine ilişkin bilgilerden yararlanılarak elde edilmiştir. İspat tutum ölçeğine göre üstün yetenekli bazı öğrencilerin olumlu tutuma bazı öğrencilerin ise olumsuz tutuma sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu farklı sonuçların ortaya çıkmasının öğrencilerin geçirmiş olduğu eğitim yaşantılarından kaynaklandığı söylenebilir. Çünkü öğrencilerin öğrenme süreçlerinde ispata yönelik çalışmaların içinde görev alması, sonuca ulaşarak başarı sağlaması öğrenciyi bu konuda olumlu yönde motive edebilir. Bu çalışmaya katılan öğrencilerin farklı okullarda öğrenim görmeleri ve farklı sınıf içi yaşantılara sahip olmaları onların ispat yapmaya yönelik tutumlarının farklı olmasına sebep olabilir. Üstün yetenekli öğrencilerin benzer özelliklere sahip olmalarına rağmen ispat yapmaya yönelik farklı tutumlar sergilemeleri çevresel faktörlerin etkisi sonucu da oluşabilir.

Üçüncü alt probleme yönelik veriler İspat Klinik Görüşme Formuna ilişkin bilgilerden yararlanılarak elde edilmiştir. Bu probleme ait veriler öğrencilerin ispatı anlayabilme, öğrencilerin ispata dair yaklaşımları, öğrencilerin kullandığı stratejiler ve öğrencilerin yapmış olduğu açıklamalar şeklinde belirlenen yeterlik göstergeleri çerçevesinde ele alınmıştır. Bu göstergeler ispat sorularının analizinde kullanılan aşamalarda incelenmiştir. İspat klinik görüşme formuna katılan öğrencilerin genel olarak ispatı anlayabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun üstün yetenekli öğrencilerin matematik alanında sahip olduğu özellikler sonucu oluştuğu düşünülebilir. Bu çalışmadaki üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma sürecinde karşılaştıkları sorularda stratejiler geliştirdikleri ancak birden çok stratejiyi düşünemedikleri görülmüştür. Öğrencilerin okullarında ve BİLSEM'de ispat çalışmalarına yeterince yer verilmemesi onların ispat yapma sürecinde uygun stratejiler geliştirememesine sebep olarak gösterilebilir. Öğrencilerin ispat sürecindeki yaklaşımları ve açıklamaları aşağıda detaylıca anlatılmıştır.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde, genellikle öğrencilerin bir ispata nasıl ve nereden başlayacaklarını bilemedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Moralı vd. (2006), Karaoğlu (2010), Yılmaz (2015) ve Polat ve Akgün (2016) 'ün çalışmalarının sonuçlarıyla da uyumludur. Öğrencilerin bir ispata nasıl ve nereden başlayacaklarını bilememe nedenlerinin ispat yapma sürecinde kullanılması gereken kavramsal bilgileri ve bunların nasıl kullanılması gerektiğini bilmemelerinden kaynaklandığı söylenebilir. Aslında üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel becerileri ve genel özellikleri göz önünde bulundurulduğunda böyle bir sorunun olmaması beklenir. Çünkü üstün yetenekli öğrenciler karşılaştıkları bir problem durumunda farklı düşünen, çözüm arayan, keşfeden ve kavramlar arasında ilişki kurabilen kişiler de olarak tanımlanmaktadır (Davis ve Rimm, 2004; Clark, 2013; Sak, 2013; Yılmaz, 2015; Tortop, 2018). Bu yüzden bu öğrencilerin ispata nasıl başlamaları gerektiği konusunda çözüm bulmaya çalışarak sonuca ulaşabilecekleri düşünülür. Halbuki bu süreçte bazı öğrenciler ispata nasıl başlanması gerektiğini bilmedikleri gibi çözüm arayışında bulunmayarak ispatı tamamlayamamışlardır. Klinik görüşmelerde; Ö1, Ö3 ve Ö4 kodlu öğrencilerin herhangi bir tam sayının 3 ile bölünebilme kuralını bildiği halde bu kuralı nasıl göstereceğini bilememesi, Ö1 ve Ö3 kodlu öğrencilerin bir üçgende ağırlık merkezinin kenarortayları hangi oranlarda ayırdığını gösterememesi ispata nasıl ve nereden başlayacaklarını bilmediklerinden ortaya çıkabilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde, ezbere dayalı işlemler yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Arslan (2007), Aylar (2014), Sağır (2013) ve Polat (2018)'ın çalışmalarının sonuçlarıyla da uyumludur. Öğrencilerin ezbere dayalı işlemler yapma nedenlerinin ispat yapma sürecinde kullandıkları bilgilerinin anlamlı bir şekilde öğrenilmediğinden kaynaklandığı söylenebilir. Üstün yetenekli öğrenciler araştıran, sorgulayan, merak eden, sonuca ulaşmak için çözüm yolları üreten bireyler (Davis ve Rimm, 2004; Clark, 2013; Sak, 2013; Yılmaz, 2015; Tortop, 2018) olmaları beklenirken öğrencilerin matematiksel ispat sorularında ezbere dayalı işlemler yapmaları onların öğrenmelerini anlamlandırmadıklarını gösterebilir. Öğrencilerin sınava yönelik çalıştırılmaları, test çözme üzerine odaklanılan bir öğretim anlayışı içinde eğitilmeleri de ezbere bilgilerin öğrenilmesine sebep olabilir. Aylar (2014)'a göre, matematikte ezberin önüne geçilmesi, kavramsal bilginin inşası ve anlamlı öğrenmenin sağlanması ispatın öğretilmesiyle gerçekleştirilebilir. İspat yapma sürecinde örneklemin belirlenmesi sırasında kullanılan görüşme formundan elde edilen verilere göre; üstün yetenekli öğrencilerin BİLSEM'de ya da okulda ispat yapmadıkları, öğrencilere ispat yapmak için uygun ortamların oluşturulmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun da öğrencilerin ezbere dayalı öğrenmeler gerçekleştirmelerine sebep olabileceği düşünülebilir. Halbuki bu öğrenciler akranlarına göre ispat yapmaya yatkın özelliklere sahip olan, ispatla uğraşmaktan zevk alan bireyler (Altıparmak ve Öziş, 2005) olmalarına rağmen onların ispatla uğraşmamaları bu konuda başarısız olmalarına sebep olabilir. Bu başarısızlığın önüne geçilmesi için ispat yapmayı içselleştirebilecek öğretim ortamlarının sağlanması gerekir. Arslan (2007)'a göre, ezber ağırlıklı öğrenmelerin önüne geçebilmek için matematikte birden çok konunun bütünleştirilebilmesi, daha önceden öğrendikleri kuralların kullanılabilmesi önemlidir ki bu da ispatla sağlanır. Ayrıca klinik görüşmeler sürecinde öğrenciler kendi öğrendikleri bilgilerinin ezbere olduğunu fark edip neden hiç sebeplerini sorgulamadıklarını da kendilerine sormuşlardır. Bu çalışmanın öğrencilerin ispat konusundaki eksikliklerini fark etmeleri açısından yarar sağladığı düşünülebilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde, ön bilgi ve matematiksel temel bilgi eksiklikleri olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Uğurel ve Moralı (2010), Sağır (2013), Güler (2013), Yılmaz (2015) ve Yıldız (2019)'ın çalışmalarıyla da uyumludur. Üstün yetenekli öğrencilerin ön bilgi ve matematiksel temel bilgi eksiklikleri onların ispat yapma süreçlerini zorlaştırdığından (Polat, 2018) ispatlarını tamamlayamamalarının sebebi olabilir. Öğrencilerin ispat sürecini istenen şekilde yürütememelerinin ve ispatı tamamlayamamalarının nedeni derslerinde ispatın yapılmaması bu yüzden ezbere dayalı öğrenmelerin gerçekleşmesi olabilir. Klinik görüşme sürecinde, "Bir üçgenin ağırlık merkezinin üçgenin kenarortayları üzerinde oluşturduğu uzunlukların oranlarının" gösterilmesinin istendiği soruda Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenciler kavramların tanımlarında sıkıntı yaşamıştır. Öğrencilerin açıortayların kesim noktasını ağırlık merkezi olarak ifade etmeleri onların bu konudaki bilgi eksikliklerini gösterirken bu durumun öğrencilerin ezbere öğrenmelerinden kaynaklandığı da söylenebilir. Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelenmesinden önce BİLSEM öğretmenleriyle yapılan görüşmeler sonucunda; ispat yapma üzerine derslerde çalıştıkları, öğrencilerin ispat yapma yöntemlerini bildikleri ve bu konuda başarılı oldukları öğrenilmiştir. Ancak ispat yapma sürecinde öğrencilerin ispat yapmanın mantığını kavrayamadıkları ve ispat yapma yöntemleri hakkında bilgi sahibi olmadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Pilot uygulama sırasında, asıl uygulamaya katılan öğrencilerin devam ettiği BİLSEM dışındaki farklı bir BİLSEM'e devam eden özel bir fen lisesinin öğrencilerine yöneltilen bir soruda tümevarım ispat yöntemini kullanarak sonuca ulaşmaları istenmiş ancak öğrenciler bu yöntemi hiç bilmedikleri ve kullanmadıklarını söylemişlerdir. Asıl uygulamada ise soru üzerinde değişiklik yapılarak tümevarım kelimesine yer verilmeden ve strateji sınırlaması yapılmadan soru öğrencilere yöneltilmiştir. Ancak süreçte edinilen bilgilere göre üstün yetenekli öğrencilerin de tümevarım yöntemini bilmedikleri ve hiç kullanmadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Asıl uygulama sırasında Ö1 kodlu öğrenci "$n \geq 1$'den n'ye kadar olan ardışık sayıların toplamı" formülünün ispatlanmasının istendiği bir soruda tümevarım yöntemiyle yapılabilir stratejisini geliştirmiş ancak bu yöntemin ne olduğunu bilmediğini hatta tümevarımı felsefe dersinden hatırladığını söylemiştir. Bu durum üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmada ve ispat yapma yöntemlerinde eksik olduğunu gösterebilir. Öğrenciler ispatlama sürecinde önceki matematiksel bilgilerinden hareketle karşılaştıkları yeni bilgiler arasında ilişkilendirme yaparak ispatlarını tamamlamışlardır. Ancak bu süreçte öğrencilerin kullandıkları bilgiler açısından hiyerarşiyi göz önünde bulundurmadıkları sonucuna da ulaşılmıştır. Ayrıca “Herhangi bir tam sayının 3 ile bölünebilme kuralının” gösterilmesinin istendiği soruda bütün öğrenciler sadece pozitif sayıları göz önünde bulundurarak ispat sürecinde strateji belirlemeye çalışmıştır. Ö1 ve Ö4 kodlu öğrenci de ispat sürecinde sadece üç basamaklı sayılarla sınırlı kalarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Öğrencilerin karşılaştığı bu durum onların bu konudaki bilgi eksikliklerini ortaya çıkarırken soruda verilen sayı kümesini göz önünde bulundurmadan sadece pozitif tam sayı kümesi üzerinde özel örneklerle sınırlı kalarak soruyu tamamlamaya çalıştıklarını da gösterir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde, öğrencilerin genellikle deneme yöntemi ile ispatı tamamlamaya çalıştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Baker (1996), Boero (1999), Özer ve Arıkan (2002), Harel ve Sowder (2007), Güler vd. (2011), Sağır (2013), Demircioğlu ve Polat (2015), Polat (2018)’ın çalışmalarıyla ve üstün yetenekli öğrencilerle yapılan Sriraman (2005)’ın çalışmasıyla da uyumludur. Öğrencilerin ispatlama sürecinde örnekler vererek teoremlerin doğruluğuna inanması, matematiksel teoremlerin öğrencilerde soyut kavram olmasından kaynaklıyor olabilir. Bu durumun oluşmaması için öğrencilere somut temsiller ve görsel ilişkiler sunularak sembolik ifadelere anlam verebilmeleri için fırsatlar sağlanmalıdır (Polat, 2018). Ayrıca öğretim yapılırken öğrencilere konunun örnekler üzerinden öğretilmesi de ispatlama sürecinde öğrencilerin deneme yöntemini tercih etmelerinin sebebi olabilir. Öğrenciler teoremlerde hipotez ve hükmü belirleme, bunları matematiksel olarak ifade etmeye çalışma, ispatlama sürecinde hangi stratejiyi kullanacağına karar verme aşamalarını gerçekleştirmekten ziyade verilen teoremi örnekler üzerinden test etmeye dayanan yaklaşımlar benimsemişlerdir. Bu durum Özer ve Arıkan (2002)’ın lise öğrencileri ile yaptığı araştırmada da yer almaktadır. Öğrencilerin ispat sürecinde özel bazı sayısal değerlere bağlı kalarak sonuca ulaşmaya çalışması onları doğru ve geçerli bir ispat sürecinden uzaklaştırabilir. Ancak ispatlama sürecinde kullanılacak stratejinin sorudan soruya değiştiği yani deneme yönteminin de uygulanabileceği soruların olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Uğurel ve Moralı’ya göre (2010) matematiksel ispatlarda örnekler vererek deneme yapmanın başlangıçta yararlı olacağı ancak örnekleme yönteminin tek başına ispatı oluşturamayacağı sonucuna da ulaşılmıştır. Üstün yetenekli öğrenciler problemler karşısında çözüm arayan, ilişkiler kuran ve üreten kişilerdir (Davis ve Rimm, 2004; Clark, 2013; Sak, 2013; Yılmaz, 2015; Tortop, 2018). Bu özellikleri göz önünde bulundurulduğunda deneme yöntemi ile ispat yapma sürecini tamamlamamaları beklenir. Klinik görüşmede ise öğrencilerden “a, b > 0 için, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$” teoremini ispatlamaları istendiğinde iki öğrencinin deneme yöntemini tercih ettikleri görülmüştür. Ancak öğrenciler bu yöntemi kullandıklarında ispat yapmadıklarını sadece teoremi doğruladıklarını da ifade etmişlerdir. İspat yapma sürecinde farklı bir çözüm üretemedikleri için deneme yöntemini kullanma stratejisini düşünmüşlerdir. Ayrıca birçok çalışmanın sonucunda (Almeida 1996; Boero, 1999; Harel ve Sowder, 2007; Güler vd., 2011; Sağır, 2013) çalışma gruplarının deneme yöntemini doğru kabul ederek ispatı tamamladıklarını düşünmelerinin yanında üstün yetenekli öğrenciler bu stratejiyi kullandıkları halde ispat yapmış olmadıklarını belirtmişlerdir. Bu paralel olmayan durumun ortaya çıkmasının üstün yetenekli öğrencilerin matematik alanında; fikirleri yeniden yapılandırma, keşfetme, merak etme, kavramlar arasındaki ilişkileri anlamlandırma, öğrenmeye istekli olma, problem çözme gibi özelliklere sahip olmalarından kaynaklandığı düşünülebilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde, matematiksel dil ve notasyonda eksiklikleri olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Moore (1994), Selden ve Selden (2007), Uğurel ve Moralı (2010), Güler (2013), Sağır (2013), Yılmaz (2015), Polat (2018)'ın çalışmalarıyla da uyumludur. Güler (2013)'e göre, sözel bir teoremi formal olarak ifade edememe, problem çözümünü ve çözüm sürecini açıklayamama öğrencilerin matematiksel dil ve notasyona hâkim olmadıklarından kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin matematiksel dil ve notasyondaki eksiklikleri onların ispatta başarısız olmalarına sebep olabilir. Uğurel ve Moralı (2010)'ya göre, öğrencilerin test çözme üzerine odaklanılan bir öğretim anlayışı içinde eğitilmeleri onların matematiksel dil ve notasyonları kullanmalarını engellemektedir. Bu nedenle öğrencilere matematiksel dil ve notasyonu etkin olarak kullanabilecekleri problem çözme süreçleri, etkinlikler ve öğrenme ortamları oluşturulmalıdır. Klinik görüşme sürecinde; "Bir üçgenin ağırlık merkezinin üçgenin kenarortayları üzerinde oluşturduğu uzunlukların oranlarının" gösterilmesinin istendiği soruda Ö1 kodlu öğrencinin, "a, b > 0 için, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ "teoreminin gösterilmesinin istendiği soruda Ö2 hariç dört öğrencinin, ispat sorularını nasıl çözmeleri gerektiğini anladıkları fakat bunu matematiksel olarak gösteremedikleri; "Herhangi bir tam sayının 3 ile bölünebilme kuralının" gösterilmesinin istendiği soruda Ö1 ve Ö4 kodlu öğrencilerin, teoremi sözel olarak cevaplamaya çalıştıkları ancak sözel olarak ifade edebildikleri teoremi formal olarak gösteremedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca klinik görüşme sürecinde Ö3 kodlu öğrencinin Pisagor teoremini "$a^2 + b^2 = c^2$" şeklinde tanımladığı görülmüştür. Buradan hareketle Ö3 kodlu öğrencinin kabul ettiği üçgende a, b, c şeklinde sembolize ettiği harflerin üçgende hangi kenara ait olduğunu belirtmeyerek Pisagor teoreminin tanımını genelleştirdiği söylenebilir. Bu durum öğrencinin verilen teoremde hipotezin önemini dikkate almadığını da gösterebilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde; teoremi ifade edemedikleri yani hipotez ve hükmün farkına varamadıkları için onların ispatı tamamlayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Uğurel ve Moralı (2010), Demircioğlu ve Polat (2016) ve Polat (2018)'ın çalışmalarıyla da uyumludur. Öğrencilerin teoremi açıklamaya dair bilgilerinin olmaması onların sadece yaptıkları işlemlere odaklanmalarının sebebi olabilir. Halbuki lisede üstün yetenekli öğrencilerin tanımlarla, aksiyomlarla ve teoremlerle çalışma konusunda usta olmaları ve ispat yapabilmeleri beklenmektedir (Sriraman, 2005). Öğrenciler verilen teoremde ifadelerin anlamını sorgulamadan yapmaları gereken işlemler için strateji üretmeye çalışmışlar ancak teoremi ispatlayamamışlardır. İspat yapma sürecinde karşılaşılan bir teoremde doğrudan ispat denilen hipotezi kabul edip hükme ulaşılması veya dolaylı ispattan hareketle teoremin doğru olamayacağının gösterilmesi beklenir. Ancak öğrencilerin teoremlerde hipotez ve hükmü bile ifade etmeden işlem yapmaya çalışmaları onların ispatı tamamlayamamalarına sebep olmuştur. "n ≥1 doğal sayısı için 1'den n'ye kadar olan ardışık sayıların toplamı" formülünün ispatlanmasının istendiği soruda Ö1 ve Ö3 kodlu öğrenciler, "Herhangi bir tam sayının 3 ile bölünebilme kuralının" ispatlanmasının istendiği soruda Ö3 kodlu öğrenci, "a, b > 0 için , $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$" teoremin ispatlanmasının istendiği soruda dört öğrenci, "Bir üçgenin ağırlık merkezinin üçgenin kenarortayları üzerinde oluşturduğu uzunlukların oranlarının" ispatlanmasının istendiği soruda Ö1 kodlu öğrenci teoremi açıklayamadığı için ispatı tamamlayamamıştır. Halbuki bir ispat sürecinin tamamlanmasının en önemli basamağının teoremin açıklanması olduğu söylenebilir. Çünkü öğrenci ispat sürecinde hipotezden yararlanarak hükme ulaşması gerektiğini bilirse veya hükmün değilinin olamayacağını gösterirse sonuca ulaşabilir. Ayrıca ispat sürecinde hiçbir öğrenci dolaylı ispat yöntemi dediğimiz verilen teoremin doğru olamayacağını düşünerek ispatlamaya çalışmamıştır.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde, ispat yapmaya dair farklı bir bakış açısı kazandıkları, kullandıkları formüllerin nereden geldiğini sorgulamak istedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç tipik gelişim gösteren öğrenciler üzerinde yapılan Altıparmak ve Öziş (2005) ve Polat (2018)'ın çalışmalarıyla da uyumludur. Bu durumun üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma konusunda çalışmaması ve öğrencilere ispat yapmak için uygun çalışma ortamlarının oluşturulmamasından kaynaklandığı söylenebilir. Öğrenciler görüşmeler süresince teoremlerin ispatlarını öğrendikleri zaman asıl öğrendikleri kuralların anlam kazandığını, şu an kullandıkları birçok formülün ezber dışında bir anlam ifade etmediğini fark etmişlerdir. Üstün yetenekli öğrenciler rutin ders içeriklerinden sıkılan, rutin ders içeriklerini kolay bulan, öğrenme özellikleri açısından yaşıtlarından ileride oldukları için müfredat dışı konulara yönelen öğrenciler oldukları için yaratıcı, rutin dışı, üretkenlik isteyen sorularla çalışmak istemişlerdir. İspat yapmanın da üstün yetenekli öğrencilerin bu isteklerine cevap vermesinden dolayı onların çalışabileceği, çözümler arayacağı, ilişkilendirmeler yapacağı eğitim ortamları sağlanmalıdır. Öğrencilerden birkaçı ispat konusunun neden derslerde işlenmediğini, kuralları öğrenirken niye ispatlarının da öğretilmediğini sorgulamıştır. Hatta Ö5 kodlu öğrenci çalışmadan sonra bildiği, kullandığı formüllerin ispatlarını araştıracağını bu konuda çalışmalar yapacağını belirtmiştir. Buradan hareketle üstün yetenekli öğrencilerin öğrenme özellikleri ve bu konudaki çalışma istekleri de dikkate alınarak öğrenciler için hazırlanan programlarında ispat konusunun olması gerektiği söylenebilir.

Bu çalışmadaki üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma sürecinde ortaya çıkan sonuçlar farklı çalışma gruplarının ispat yapma sürecinde ortaya çıkan sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Ancak diğer çalışmaların (Güler, 2013; Karahan, 2013; Sağır, 2013; Yılmaz, 2015; Göl, 2017; Polat, 2018; Yıldız, 2019) sonuçlarından farklı olarak bu çalışmadaki üstün yetenekli öğrencilerin, ispat sürecinde yaptıkları işlemlerin ispat olup olamayacağı konusunda farkında oldukları gözlemlenmiştir. Ayrıca öğrenciler bu çalışmadan sonra ispat yapma konusunda motivelerinin arttığını, bundan sonraki süreçte derslerinde gördükleri formül olarak verilen ifadelerin ispatlarını yapmaya çalışacaklarını yapamadıkları takdirde de ispatları araştırıp öğreneceklerini dile getirmişlerdir. Bu sonucun üstün yetenekli öğrencilerin sahip olduğu özelliklerden dolayı kaynaklandığı söylenebilir.

Türkiye’de Bilim ve Sanat Merkezi tanılamasında zekâ testi odaklı tanılama yapılmaktadır (Bilim ve Sanat Merkezi Yönergesi, 2019). Ancak üstün yetenek kavramını kuramsal olarak ele aldığımızda kavramın tek boyuttan, çok boyutlu bir kavrama doğru ele alındığı söylenebilir. Sternberg’in Renzulli’nin, Abraham Tannenbaum’un ve Taylor’un üstün yeteneklilik kuramları çerçevesinde yaratıcılık, motivasyon, mükemmellik, üretkenlik, şans faktörü, çevresel faktörler, özel yetenek alanı, genel yetenek alanı, akademik yetenek alanı gibi faktörlere göre değerlendirme yapılmaması, bu çalışmadaki üstün yetenekli çocukların ispat sürecinde zorlanmaları ile ilişkili olabilir. Birçok faktörün bir arada ele alınarak özellikle matematik alanında tanılamanın yapılması, ispat konusunda farklı sonuçları ortaya çıkarabilir.

Ayrıca bu çalışmanın sonuçlarına göre, üstün yetenekli öğrencilerin özellikleri dikkate alınarak ilgi ve istekleri doğrultusunda ispat öğretiminde farklılaştırılmış öğretim yapılırsa öğrencilerin bu konudaki eksiklikleri giderilerek ispat konusunda daha başarılı sonuçlar elde edilebilir. İspat eğitimin farklılaştırılmış öğretime uygun olması ve bu çalışmadaki üstün yetenekli öğrencilerin de ispat konusunda çalışmak istedikleri göz önünde bulundurularak öğrencilere ispat öğretiminde uygun öğrenme ortamları sağlanabilir. Tomlinson (2001), öğrenme biçimine göre farklılaştırmada; öğretmenlerin, tüm öğrencilerinin kendileri gibi öğrenmediklerinin, öğrenmek için farklı yöntemleri tercih edebileceklerinin farkında olmalarını bu yüzden öğrenme sürecinde farklı yöntem ve teknikler ile birlikte etkinlikler planlanması gerektiğini ifade etmektedir (Akt: Akkaş ve Tortop, 2015). Buradan hareketle üstün yetenekli öğrencilerin BİLSEM öğretmenlerinin, farklılaştırılmış eğitimi göz önünde bulundurarak ispat öğretiminde öğrenciler için uygun programlar düzenleyerek öğrenme ortamları oluşturmaları beklenmektedir.

Bu çalışmada elde edilen bulgular ve ulaşılan sonuçlar çerçevesinde yapılabilecek öneriler şu şekilde sıralanabilir:

BİLSEM'de üstün yetenekli öğrenciler için hazırlanmış öğretim programlarında gerekli düzenlemeler yapılarak ve ispat öğretiminin öğrencilerin bilişsel gelişim seviyeleri göz önünde bulundurularak öğretim programında yer alması gerektiği önerilmektedir.

Üstün yetenekli öğrencilerin özellikleri göz önünde bulundurularak matematiksel düşünmelerinin arttırılması amacıyla onların kendilerine özgü bir çözüm yolu geliştirebilecekleri, özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat yapabilmelerine olanak sağlayan rutin olmayan problemlerin yer aldığı uygun öğretim ortamların oluşturulması önerilmektedir.

Üstün yetenekli öğrencilerin istenilen seviyede ispat yapabilmeleri için ispat konusunda çalışmaya istekli olan öğrencilerin öğrenme süreçlerinde zenginleştirme ve mentörlük eğitimi çalışmalarıyla desteklenmesi önerilmektedir.

Bu araştırmada örneklem üstün yetenekli 11. sınıf öğrencileri ile sınırlı tutulmuştur. Farklı BİLSEM gruplarından değişik sınıf düzeylerinde ve daha büyük bir örneklemle araştırmalar yapılması konu üzerinde daha derin ve kapsamlı bilgiler sağlayabilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin BİLSEM ’deki matematik öğretmenlerinin; öğretim sürecinde farklı ispat yöntemlerine yer vermesi, mantıksal adımlar ve ön bilgilerin öğretmenlerce ayrıntılı biçimde sunulması ve bunlara yönelik gerekli açıklamaların yapılarak ispat yapmaya yönelik etkinlik, materyal ve çalışmalara yer verilmesi öğrencilerin ispatlama süreçlerini anlamlandırmalarına olumlu katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispatlara ve ispatlamaya yönelik bilgilerinde var olan eksiklikler ve sınırlılıkların giderilmesinde ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesinde izlenecek yollardan biri onları ispatlarla daha fazla karşı karşıya getirmek ve öğrencilerin ispatlar üzerinde bireysel çalışmalarına olanak sağlamaktır.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelendiği başka bir çalışmanın olmadığı görülmüştür. Buradan hareketle araştırmacıların bu konuda yapacağı çalışmaların alanyazına ışık tutacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Agaoğlu, F.C. 2016. Üstün yetenekli/zekâlı çocuklarda somut ve soyut anlamsal ulamların Türkçe ve İngilizce öntürleri. Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Akkaş, E., Tortop, H. S. 2015. Üstün yetenekliler eğitiminde farklılaştırma: temel kavramlar, modellerin karşılaştırılması ve öneriler. **Üstün Zekâlılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi**, 2(2): 31-44.

Alibert, D. 1988. Towards new customs in the classroom. **For the learning of mathematics**, 8(2): 31-43.

Alibert, D., Thomas, M. 1991. Research on mathematical proof. In: Advanced mathematical thinking (D. Tall., Ed.), pp. 215-230, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Almeida, D. 1996. Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 27: 659-665.

Almeida, D. 2003. Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us any thing?. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 34(4): 479-488.

Altıparmak, K., Öziş, T. 2005. Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme. **Ege Eğitim Dergisi**, 6(1): 25-37.

Altun, M. 2014. Liselerde matematik öğretimi. 5. Baskı., Aktüel Yayıncılık, Bursa.

Arıkan, A., Halıcıoğlu, S. 2016. Soyut matematik. Palme Yayıncılık, Ankara.

Arıkan, F. 2019. Matematikte yetenekli öğrencilerin aparatlı matematik problemlerine yaklaşımları. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

Arslan, Ç. 2007. İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, Bursa.

Arslan, S., Yıldız, C. 2010. 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. **Eğitim ve Bilim**, 35(156): 17-31.

Aylar, E. 2014. 7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bagav, M. 2015. Üstün yetenekli öğrencilerde öğrenme stilleri. Yeditepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi (Basılmamış), İstanbul.

Baker, J. D. 1996. Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction. Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Educational Resources Information Center (ERIC), New York.

Baki, A. 2008. Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi. 4. Baskı., Harf Eğitim Yayıncılık, Ankara.

Baki, A., Güven, B., Karataş, İ. 2002. Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek öğrenme. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Barak, B. 2018. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Eskişehir.

Barnard, T., Tall, D. 1997. Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof. **Proceeding of PME,** 21(2): 41-48.

Başaran, B. I. 2004. Etkili öğrenme ve çoklu zekâ kuramı: Bir inceleme. **Ege Eğitim Dergisi**, 5: 7-15.

Battista, M. T., Clements, D. H. 1995. Geometry and proof. **Mathematics Teacher** [Electronic Journal], 88(1): 48-54, Retrieved from [https://www.nctm.org]

Be11, A. W. 1976. A Study of Puppils' Proof- Explanations in Mathematical Situations. **Educational Studies in Mathematics,** 7: 23-40.

Bedros, V. 2003. An Exploratory Study of Undergraduate Students' Perceptions and Understandings of Indirect Proofs. Unpublished PhD Dissertation, Montana University, Canada.

Bildiren, A. 2018. Üstün yetenekli çocuklar. Pegem Yayıncılık, Ankara.

Bindak, R. 2005. Tutum ölçeklerine madde seçmede kullanılan tekniklerin karşılaştırılması. **İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 6 (10): 17-26.

Bloch, E. D. 2011. Proofs and fundamentals: a first course in abstract mathematics (2. edition). New York, NY: Springer Science, Business Media.

Bloom, R. M. 2009. Implementatıon practıces of differentiated instruction in the upper elementary and middle school math classroom: A discovery through grounded theory. Doctoral dissertation, Cambridge College.

Boero, P. 1999. Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on The Teaching and Learning of Mathematical Proof, (7)8.

Bozgeyikli, H., Doğan, H., Işıklar, A. 2010. Üstün yetenekli öğrencilerin mesleki olgunluk düzeyleri ile algıladıkları sosyal destek düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi. **Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**, 1(28): 133-149.

Budak, İ. 2007. Matematikte üstün yetenekli öğrencileri belirlemede bir model. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Trabzon.

Bütün. Ö. 2017. Üstün yetenekli öğrencilerin yaratıcılığını geliştirmeye yönelik programın etkililiği. İstanbul Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. 2010. Bilimsel araştırma yöntemleri. Pegem Yayınları, Ankara.

Cheng, Y. H., Lin, F. L. 2006. Using reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof. In Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2: 89-296. (July).

Clark, B. 2013. Growing Up Gifted: Developing the Potential of Children at School and at Home (Kaya, F. and Ogurlu, Ü., Eds.), Pearson.

Coe, R., Ruthven, K. 1994. Proof practices and constructs of advanced mathematics students. **British Educational Research Journal**, 20(1): 41-53.

Çalışkan, Ç. 2012. 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi. Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Bursa.

Çallıalp, F. 1999. Örnekler ile soyut matematik. 3. Baskı., Atatürk Eğitim Fakültesi Yayıncılık, İstanbul.

Çiltaş, A., 2011. Mutlak değer içeren denklem ve eşitsizliklerin öğretiminde grafik kullanımının etkinliği. **Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi**, 12(3).

Çontay, E.G. 2017. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları. Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Denizli.

Daştan, Ş. 2016. Okul öncesi öğretmenlerinin öz-yeterlik düzeyleri ile üstün yeteneklilerin eğitimine yönelik tutumlarının karşılaştırılması. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi (Basılmamış), Ankara.

Davaslıgil, Ü. 2004. Üstün zekâlı çocukların eğitimi. İçinde: Üstün yetenekli çocuklar seçilmiş makaleler kitabı (Çeviri: M.R. Şirin, A. Kulaksızoğlu ve M.E. Bilgili, M.E.), Çocuk Vakfı Yayınları, s.233-241, İstanbul.

Davis, G. A., Rimm, S. B. 2004. Characteristics of gifted students. **Education of the gifted and talented,** 5: 32-53.

De Villiers, M. 1999. Rethinking Proof with Sketchpad. Key Curriculum Press.

Dede, Y. 2012. Matematik öğretmenleri konseyi standartlarıyla matematik öğretimi. İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretimi içinde (Çeviri: S. Durmuş), Nobel Yayıncılık, Ankara.

Demircioğlu, H., Polat, K. 2015. Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının "sözsüz ispat" yöntemine yönelik görüşleri. The Journal of Academic Social Science Studies, 41: 233-254.

Deringöl, Y. 2017. Matematik beni kaygılandırıyor. Özel yetenekli çocukların psikolojisi içinde (Çeviri: M.Z. Leana-Taşçılar), Nobel Yayıncılık, 155-198, Ankara.

Duman, M. 2013. Üstün zekâlı ve yetenekli bireylere yönelik eğitim modelleri ve öğretimsel uygulamaları. Okan Üniversitesi, Doktora Tezi, İstanbul.

Eripek, S., Özsoy, Y., Özyürek, M. 2001. Özel eğitime muhtaç çocuklar özel eğitime giriş. Karatepe Yayıncılık, Ankara.

Gerstein, L. J. 2012. Introduction to Mathematical Structures and Proofs. New York: Springer.

Gökkurt, B., Soylu, Y. 2012. Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. **Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi**, 1(4): 56-64.

Gökkurt, B., Soylu, Y., Şahin, Ö. 2014. Analysis of the mathematical proof skills of students of science education. **Education Research Quarterly**, 38(2): 3-22.

Göl, R. 2017. 12. Sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelenmesi. Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Uşak.

Greenes, C. 1981. Identifying the Gifted Student in Mathematics. **Arithmetic Teacher,** 28(6): 14-17.

Güler, G. 2013. Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum.

Güler, G., Kar, T., Öçal, M. F., Çiltaş, A. 2011. Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, 15: 336-340.

Güler, G., Özdemir, E., Dikici, R. 2012. Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. **Kastamonu Eğitim Dergisi**, 20 (1): 219-236.

Güner, S. 2012. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi. Marmara Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi (Basılmamış), İstanbul.

Hanna, G. 2000. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. **Educational Studies in Mathematics,** 44: 5-23.

Harel, G., Sowder, L. 2007. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2: 805-842.

Heinze, A., Reiss, K. 2003. Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In: Proceedings of the ThirdConference of the European Society for Research in Mathematics Education, (Mariotti, M.A, Ed.), Bellaria, Italy.

Heinze, A., Reiss, K. 2004. The teaching of proof at lower secondary level-a video study. **ZDM International Journal on Mathematics Education,** 36(3):98–104.

Hemmi, K. 2010. Three Styles Characteristing Mathematicians' Pedagogical Perspectives on Proof. **Educational Studies in Mathematics,** 75:271-291.

Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S., Reiss, K. 2008. Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. **Learning and Instruction**, 18(1): 54-65.

İpek, S. 2010. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarını kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Kandamar, H. 2000. Soyut matematik I. Adnan Menderes Üniversitesi Yayınları, Aydın.

Karaduman, G. B. 2010. Üstün yetenekli öğrenciler için uygulanan farklılaştırılmış matematik eğitim programları. **Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi,** 13(1): 1-12.

Karahan, Ö. 2013. Matematik öğretmen adaylarının çift sütun ispat yöntemine yönelik görüşleri ve bu yönteme dayalı ispatlama süreçlerinin analizi.

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

Karakaya, İ. 2011. Dokuzuncu sınıf matematik ders kitaplarındaki fonksiyon kavramıyla ilgili görsel objelerin incelenmesi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Karaoğlu, Ö. 2010. Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlere desteklenmiş ispatları yapabilme performansları. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Karasar, N. 2008. Bilimsel araştırma yöntemi. Nobel Yayıncılık, Ankara.

Kayagil, S. 2012. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. **International Journal of New Trends in Arts, Sports, Science Education** (IJTASE), 1(2): 134-141.

Keçeli Bozdağ, S. 2012. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişki. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisan Tezi, İzmir.

Knuth, E. 2002. Teacher’s Conceptions of Proof in the Contex of Secondary School Mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education,** 5: 61-88.

Ko, Y. 2010. Mathematics Teachers’ Conseptions of Proof: Implications for Educational Research. **International Journal of Science and Mathematics Education,** 8: 1109-1129.

Ko, Y., Knuth, E. J. 2009. Undergraduate Mathematics Majors' Writing Performance Producing Proofs and Counterexamples about Continuous Functions. **The Journal OfMathematical Behavior,** 28: 68-77.

Kuşlu, H. 2016. Nasîruddin Tûsî'de önermeler mantığı. Klasik Yayınları, İstanbul.

Lane, E. 2004. The Nature of Proof in Today's Classroom. Book review of The Nature of Proof. **The Mathematics Enthusiast,** 1(2): 58-65.

Lee, H. S., Park, J. Y., Jung, I. C. 2009. A study on the proof of additive law of sine function using technology-A case study focused on mathematics education for the gifted. **The Mathematical Education,** 48(4): 387-398.

Lee, K. H. 2005. Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. In: In Helen, pp. 241-248.

Levent, F. 2014. Üstün yetenekli çocukları anlamak. Nobel Yayıncılık, İstanbul.

Mariotti, M. A., Balacheff, N. 2008. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. **ZDM Mathematics Education**, 40: 341–344.

Marland SP Jr. 1972. Education of the gifted and talented. Vol 1. Report to the Congress of the United States by the US Commissioner of Education. Washington, DC, US Government Printing Office.

Marrades, R., Gutiérrez, Á. 2000. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. **Educational studies in mathematics,** 44(1-2): 87-125.

MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. 2013. Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı, Ankara.

MEB. 2005. Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı, Ankara.

MEB. 2010. Ortaöğretim Geometri Dersi 9 ve 10. Sınıflar Öğretim Programı**,** Milli Eğitim Basımevi, Ankara.

Miles, M. B., Huberman, A. M. 1994. An expanded sourcebook qualitative data analysis. California: SAGE Publications.

Moore, R. C. 1994. Making the transition to formal proof. **Educational Studies in Mathematics,** 27: 249-266.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., Yeşildere, S. 2006. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. **Kastamonu Eğitim Dergisi**, 14(1): 147-160.

National Council of Teachers of Mathematics. 2000. Principles and standarts for school mathematics. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nicolopoulou, A. 2004. Oyun, bilişsel gelişim ve toplumsal dünya: Piaget, Vygotsky ve sonrası. **Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi**, 37(2): 137-169.

Niederer, K., Irwin, R. J., Irwin, K. C., Reilly, I. L. 2003. Identification of Mathematically Gifted Children in New Zealand. **High Ability Studies,** 14(1): 71-84.

Nyaumwe, L. Buzuzi, G. 2007. Teachers' Attitudes towards Proof of Mathematical Results in the Secondary School Curriculum: The Case of Zimbabwe. **Mathematics Education Research Journal,** 19: 21-32.

Ogurlu, Ü. 2015. Üstün zekâlı ve yetenekliler eğitimi için etkili programların genişletilmesi. İçinde: Üstün zekâlı olarak büyümek (Çeviri: F. Kaya ve Ü. Ogurlu), Nobel Yayıncılık, Ankara.

Öçal, M. F., Güler, G. 2010. Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, 9: 318–323.

Özdemir, F., Kaplan, A. 2014. Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. **Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 3(2): 410-429.

Özer, Ö., Arıkan, A., 2002. Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, II, 1083-1089. (16-18 Eylül) Ankara.

Özmantar, M. F. 2013. Matematiği tüm çocuklara eşit şekilde öğretmek. İlkokul ve ortaokul matematiği içinde (Çeviri: S. Durmuş), Nobel Yayıncılık, 93-111, Ankara.

Öztürk, M. 2017. Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi. Atatürk Üniversitesi, Doktora Tezi, Erzurum.

Öztürk, M., Akkan, Y., Kaplan, A. 2017. Üstün Yetenekli Lise Öğrencilerinin İspatla İlgili Kavramlara Yönelik Bilgi ve Farkındalıklarının İncelenmesi. **Üstün Zekalılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi,** 4(2): 19-35.

Öztürk, T. 2016. Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Trabzon.

Padula, J. 2006. The Wording of a Proof: Hardys‟ Second “Elegant” Proof. **Australian Mathematics Teacher,** 62(2): 18-24.

Pekşen Sağır, P. 2013. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Polat, K. 2018. Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum.

Polat, K., Akgün, L. 2016. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. **The Journal of Academic Social Science Studies**, 43: 423-438.

Raman, M. 2003. Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. **Educational Studies in Mathematics,** 52: 319 – 325.

Rav, Y. 1999. Why do we prove theorems? **Philosophic Mathematics**, 7:5-41. DOI: 10.1093/philmat/7.1.5

Recio, A. M., Godino, J. D. 2001. Instutional and Personal Meanings of Mathematical Proof. **Educational Studies in Mathematics**, 48(1): 83-89.

Reiss, K. M., Heinze, A. Renkl, A., Gross, C. 2008. Reasoning And Proof İn Geometry: Effects Of A Learning Environment Based On Heuristic Worked-Out Examples, **ZDM Mathematics Education**, 40: 455-467.

Reiss, K., Heinze, A., Klieme, E. 2002. Argumentation, Proof and the Understanding of Proof. In: Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. (Weigand, G.H., Neill, N., Peter-Koop, A., Reiss, K., Törner, G., Wollring, B. Eds.), Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam, pp. 109-120. Hildesheim: Franzbecker.

Rodd, M. M. 2000. On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. **Mathematical Thinking and Learning,** 2(3): 221–244.

Sak, U. 2010. Üstün zekâlılar özellikleri tanılanmaları ve eğitimleri. Maya Akademi Yayınları, Ankara.

Sak, U. 2012. Üstün zekâlılar. Vize Yayıncılık, Ankara.

Sak, U. 2013. Üstün zekâlılar. Vize Yayıncılık, Ankara.

Schabel, C. 2005. An Instructional Model for Teaching proof Writing in the Number Theory Classroom. **Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies**, 15(1): 45-59.

Selden, A., Selden, J. 2007. Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students'abilities. (Technical Report), Tennesse Technological University, Mathematics Department.

Senemoğlu, N. 2005. Gelişim ve öğrenme. 12. Baskı., Gazi Kitapevi, Ankara.

Sheffield, L. J. 1999. Definition and Identification of Mathematical Promising. In: Developing Mathematically Promising Students, (Sheffield, L.J, Ed.), NCTM Inc., Reston, Virginia.

Sheffield, L. J. 2003. Extending the Challenge in Mathematics: Developing Mathematical Promise in K-8 Students, Corwin Press, California.

Sowell, E. J., Zeigler, A. J., Bergwell, L., Cartwright, R. M. 1990. Identification and description of mathematically gifted students: A review of empirical research. **Gifted Child Quarterly**, 34: 147-154.

Sriraman, B. 2004. Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. **Journal for the Education of the Gifted,** 27(4): 267-292.

Sriraman, B. 2005. Are giftedness and creativity synonyms in mathematics?. **Journal of Secondary Gifted Education**, 17 (1): 20-36.

Sternberg, R. 1997. The concept of ıntelligence and ıts role in lifelong learning and success, American Psychologist, 52(10): 1030-1037.

Strausova, I., Hasek, R. 2012. "Dynamic visual proofs" using DGS. **The Electronic Journal of Mathematics and Technology,** 7(2): 130-143.

Stylianides, A. J. 2007. Proof and Proving in School Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education,** 38: 289-321.

Şahin, B. 2016. Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. **Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 11(2): 365-378.

Şaldırak, B. 2012. Farklılaştırılmış öğretim uygulamalarının matematik başarısına etkisi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Tall, D. 2002. Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics. Mathematics Education Research Centre.

Taştepe, M., Yavuz, İ., Baştürk, S. 2015. Soyut matematik ders kitaplarındaki ispatların Balacheff'in taksonomisi bağlamında incelenmesi. **Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi,** 2: 52-62.

Taylor, J., Garnier, R. 2014. Understanding mathematical proof. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, LLC.

Tekbaş, D. 2004. Kaynaştırma ortamında üstün zekâlı çocuğa uygulanan zenginleştirme programı hakkında örnek olay incelemesi ve programın etkililiğine ilişkin bir araştırma. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi (Basılmamış), Ankara.

Tomlinson, C. A., Strickland, C. A. 2005. Differentiation in practice a resource guide for differentiating curriculum. Alexandria, Virginia USA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Tortop, H. S. 2016. Niçin düşünce deneyleri üstün yetenekli öğrencilerin yaratıcılık ve problem çözme becerilerini geliştirici eğitimsel bir araç olarak kullanılmalıdır?. **Üstün Zekalılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi**, 3 (2): 35-48.

Tortop, H. S. 2018. Üstün zekâlılar eğitiminde farklılaştırılmış öğretim müfredat farklılaştırma modelleri. Genç Bilge, İstanbul.

Turğut, M., Yenilmez, K., Uygan, C. 2013. Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. **Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**, 6(13): 227-252.

Türk, T. 2018. Ortaokul matematik dersi öğretim programının üstün yetenekli öğrencilerin eğitimi açısından öğretmen ve öğrenci görüşlerine göre değerlendirilmesi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Uğurel, I. 2012. Non-thesis Master's Level Pre-Service Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. **Bolema, Rio Claro**, 26 (42B): 715-742.

Uğurel, I., Moralı, H. S., Karahan, Ö., Boz, B. 2016. Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (vp) and preliminary ideas about VP. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology,** 4(3): 174-197.

Uğurel, I., Moralı, S. 2010. Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. **Buca Eğitim Fakültesi Dergisi**, 28:135-154.

Urhan, S., Bülbül, A. 2016. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. **Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi**, 10(1): 351-373.

Uzun, M. 2004. Üstün yetenekli çocuklar el kitabı. Çocuk Vakfı, İstanbul.

Ünveren, E. N. 2010. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir.

Yavuz Açıl, F. 2018. Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel üretkenlik düzeyleri ile eleştirel düşünme becerileri arasındaki ilişkinin incelenmesi. Bahçeşehir Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Yıldırım, A., Şimşek, H. 2016. Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. 10. Baskı., Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yıldız, A. 2019. 9. Sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi. Mersin Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Mersin.

Yılmaz, K. 2015. Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum.

Yim, J., Song, S., Kim, J. 2008. Mathematically gifted elementary students' revisiting of Euler's polyhedron theorem. **The Mathematics Enthusiast,** 5(1): 125-142.

EKLER

Ek-1: Resmi İzin Yazıları

T.C.
GAZİANTEP VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 34659092-605.01-E.11384665 14/06/2019
Konu : Araştırma İzin Talebi
(Duygu DİNAMİT)

VALİLİK MAKAMINA

İlgi: Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün 26.04.2019 tarihli ve 7256 sayılı yazısı.

Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Doktora Üyesi Salman ULUSAN'ın danışmanlığını yaptığı Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Duygu DİNAMİT'in "Üstün Yetenekli Öğrencilerinin İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi " konulu araştırma çalışma isteği kapsamında, İlimiz Şahinbey Belediyesi Bilim ve Sanat Merkezinde öğrenim gören 11-12. sınıf öğrencilerine yönelik araştırma çalışma isteği, ilgi yazıda belirtilmektedir.

Bu kapsamda Aydın AdnanMenderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Doktora Üyesi Salman ULUSAN'ın danışmanlığını yaptığı Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Duygu DİNAMİT'in anket çalışma isteği, Bakanlığımız Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 22.08.2017 tarihli ve 12607291 (2017/25) sayılı genelgesi kapsamında değerlendirilmiş olup; araştırmacının, araştırmasının bitiminden itibaren 15 gün içerisinde araştırma sonuçlarını 2 kopya halinde CD içerisinde Müdürlüğümüze bildirmesi şartıyla, İlimiz Şahinbey Belediyesi Bilim ve Sanat Merkezinde öğrenim gören 11-12. sınıf öğrencilerine anket uygulama isteği eğitim öğretimi aksatmayacak şekilde gönüllülük esasına göre uygulanması, Müdürlüğümüz Ar-Ge bürosu bünyesinde oluşturulan komisyonun uygunluk raporu doğrultusunda uygun mütalaa edilmektedir.

Makamınızca da uygun görüldüğü takdirde; Olurlarınıza arz ederim.

Cengiz METE
İl Milli Eğitim Müdürü

OLUR
<...>

Cengiz AYHAN
Vali a.
Vali Yardımcısı

Adres: gaziantep valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü Strateji Geliştirme birimi oda numarası 530
Elektronik Ağ: gaziantep.meb.gov.tr
e-posta: gaziantepmem@meb.gov.tr

Bilgi için: Memur Sadullah AYYILDIZ dahili no 4450
Tel: 0 (342) 230 10 58
Faks: 0 ( )

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 6c41-ce39-3c05-bace-70e4 kodu ile teyit edilebilir.

T.C.
GAZİANTEP VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 34659092-605.01-E.11477801 17.06.2019
Konu : Araştırma İzin Talebi
(Duygu DİNAMİT)

DAĞITIM YERLERİNE

Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Doktora Üyesi Salman ULUSAN'ın danışmanlığını yaptığı Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Duygu DİNAMİT'in "Üstün Yetenekli Öğrencilerinin İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi" konulu araştırma çalışma isteği kapsamında, İlimiz Şahinbey Belediyesi Bilim ve Sanat Merkezinde öğrenim gören 11-12. sınıf öğrencilerine yönelik araştırma çalışma isteği,ekli yazıda belirtilmektedir.

Bu kapsamda Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Doktora Üyesi Salman ULUSAN'ın danışmanlığını yaptığı Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Duygu DİNAMİT'in anket çalışma isteğiyle ilgili Valilik Makamının 14.06.2019 tarihli ve 11384665 sayılı valilik oluru yazımız ekinde gönderilmiş olup konunun İlçenizde bulunan okullara duyurulması hususunda;

Bilgilerinizi ve gereğini arz/rica ederim.

Cengiz METE
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

EK:
Yazı ve ekleri
DAĞITIM:
Şahinbey İlçe MEM

BİLGİ:
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi

Adres: gaziantep valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü Strateji Geliştirme birimi oda numarası 530
Elektronik Ağ: gaziantep.meb.gov.tr
e-posta: gaziantepmem@meb.gov.tr

Bilgi için: Memur Sadullah AYYILDIZ dahili no 4450
Tel: 0 (342) 230 10 58
Faks: 0 ( )

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 293d-f12b-35a5-adf5-d7a5 koda ile teyit edilebilir.

Evrak Tarih ve Sayısı: 11/07/2019-E.42980

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Sayı : 80495558-300
Konu : Duygu DİNAMİT Araştırma İzni Hk.

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞINA

Enstitümüz Matematik ve Fen Bilgisi Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencimiz Duygu DİNAMİT'ın araştırma izni konusunda Gaziantep Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğünden alınan yazı ilişikte sunulmuştur. Bilgilerinize rica ederim.

e-imzalıdır
Prof.Dr. Gönül AYDIN
Müdür

Ek: Gaziantep Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü Yazısı

Evrakı Doğrulamak İçin: https://ebys.adu.edu.tr/enVision/Dogrula/A9BCLRE

Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Merkez Kampüsü Merkez Kampüs Merkezi Derslikler 09100 Efeler / Aydın
Telefon No: 0256 213 46 52 Faks No: 0256 213 36 57

Bilgi İçin: Nilüfer Ertek
Unvan: Memur

Ek-2: Veli İzin Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, "Üstün Yetenekli Öğrencilerin İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi" adıyla, Eylül 2020- Aralık 2020 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır. Çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu süreçte anket ve görüşme formu aracılığıyla toplanan veriler, analiz edilerek bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Araştırma T.C. Millî Eğitim Bakanlığı'nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı tamamen sizin isteğinize bağlıdır, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilenmeyecektir. Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir. Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra telefon ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Velisi bulunduğum ………………………….'in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum. (Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla geri gönderiniz)

İmza:

Veli Adı-Soyadı:

Telefon Numarası:

Araştırmacı : Duygu DİNAMİT

İletişim bilgileri : 05412669724

Ek-3: Öğrenci İzin Formu

BİLGİLENDİRİLMİŞ GÖNÜLLÜ ONAM FORMU

Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı kapsamında hazırlayacağım tez çalışmasının adı 'Üstün Yetenekli Öğrencilerin Matematiksel İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi' dir. Araştırma için katılımcılarla tahminen 60 dakika sürecek bir görüşme yapılacaktır. Görüşmede katılımcılara yöneltilmesi planlanan 'İspat Görüşme Formu', 'İspat Tutum Ölçeği' ve 'İspat Klinik Görüşme Formu' bulunmaktadır. Görüşme esnasında ses kaydı alınacaktır. Size bu çalışmada yapılacak uygulama ile ilgili gözlenebilecek istenmeyen durumlar ve beklenen risk bulunmamaktadır. Uygulama süresi boyunca, herhangi bir sorunla karşılaştığınızda sorumlu araştırmacıyı önceden bilgilendirmek ya da çalışma hakkında ek bilgiler almak için 05412669724 numaralı telefondan Duygu DİNAMİT'e başvurabilirsiniz.

Bu çalışmaya katılmak tamamen **gönüllülük** esasına dayanmaktadır. Çalışmaya katılmama veya katıldıktan sonra süreç içerisinde çalışmayı bırakma hakkına sahipsiniz. Çalışmanın sonuçları bilimsel amaçla kullanılacaktır. Size ait tüm bilgiler **gizli tutulacaktır** ve çalışma yayınlansa bile kimlik bilgileriniz verilmeyecektir. Ancak etik kurullar ve resmi makamlar gerektiği taktirde bilgilerinize ulaşabilir. Siz de istediğinizde kendinize ait verilere ulaşabilirsiniz.

Çalışmaya Katılma Onayı: Yukarıda yer alan ve araştırmaya başlamadan önce gönüllüye verilmesi gereken 1 (bir) sayfalık metni okudum ve sözlü olarak bana yapılan tüm açıklamaları ayrıntılarıyla anlamış bulunmaktayım. Çalışmaya katılmayı isteyip istemediğime karar vermem için bana yeterli zaman tanındı. Bu koşullar altında, bana ait verilerin gözden geçirilmesi, transfer edilmesi ve işlenmesi konusunda araştırma yürütücüsüne yetki veriyor ve söz konusu araştırmaya ilişkin bana yapılan katılım davetini hiçbir zorlama ve baskı olmaksızın gönüllülük içerisinde kabul ediyorum. Bu formu imzalamakla yasaların bana sağladığı hakları kaybetmeyeceğimi biliyorum. Bu formun imzalı ve tarihli bir kopyası bana verildi.

İmza:

Öğrenci Adı-Soyadı:

Telefon Numarası: Araştırmacı : Duygu DİNAMİT

İletişim bilgileri : 05412669724

Ek-4: İspat Görüşme Formu

Değerli Öğrenciler,

Aşağıdaki form matematiksel ispata yönelik ön öğrenmelerinize ve ispata yönelik hazırbulunuşluklarınıza ilişkin görüşlerinize başvurmak amacıyla hazırlanmıştır. Açık uçlu olarak verilen üç soruyu cevaplayınız. Lütfen tüm soruları cevaplamaya ve boş bırakmamaya özen gösteriniz. Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Elde edilen bulgular ve sonuçların yayınlanması aşamasında kesinlikle isminiz ya da diğer şahsi bilgileriniz belirtilmeyecektir. Lütfen soruları dikkatle okuyarak yansız ve titiz bir şekilde cevaplamaya çalışınız. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Araştırmacı: Duygu DİNAMİT

1) Teorem ve ispat kelimeleri sizce ne demektir? Açıklayınız.

2) Matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapıyor musunuz? Yapıyorsanız hangi konularda ispat yaptınız.

3) Derslerinizde ispat yapılması veya yapılmaması konusunda neler düşünüyorsunuz

Ek-5: İspat Tutum Ölçeği

Değerli Öğrenciler,

Aşağıdaki ölçek matematiksel ispata yönelik duygu ve düşüncelerinizi almak amacıyla hazırlanmıştır. Tutum ölçeğinde yer alan her bir ifade için size göre 3 seçenekten en uygun olan cevabı içeren kutucuğa bir "X" işareti koyarak doldurunuz. Lütfen tüm ifadeleri cevaplamaya ve boş bırakmamaya özen gösteriniz. Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Elde edilen bulgular ve sonuçların yayınlanması aşamasında kesinlikle isminiz ya da diğer şahsi bilgileriniz belirtilmeyecektir. Lütfen soruları dikkatle okuyarak yansız ve titiz bir şekilde duygu ve düşüncelerinizi yansıtmaya çalışınız. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Araştırmacı: Duygu DİNAMİT

İSPAT TUTUM ÖLÇEĞİ			
Adınız ve Soyadınız			
Sınıfınız	□ 9 □ 10 □ 11 □ 12		
Liseniz	□ Fen Lisesi □Sosyal Bilimler Lisesi □ Anadolu Lisesi □ Özel Lise		
İFADE	**Katılıyorum**	**Kararsızım/ Bilmiyorum**	**Katılmıyorum**
1. Matematik derslerinde ispat yaparken kendimi baskı altında hissediyorum.			
2. Matematiksel ispatlarla uğraşmayı sevmiyorum.			
3. İspat yapmak benim için eğlencelidir.			
4. Matematiğin sevdiğim yanlarından biri de derslerde teoremlerin ispatlarının yapılmasıdır.			
5. İspat yaparken endişelenmiyorum.			
6. İspat yapmak bende merak uyandırıyor.			
7. İspat yapmayı sıkıcı buluyorum.			
8. Teorem ve ispatların matematiğin temeli olduğunu düşünüyorum.			
9. Bir teoremi ispatlayamayınca kendime güvenim azalıyor.			
10. İspat yapmayı ilginç buluyorum.			

11. Matematik dilinin anlaşılmasında ispat çok önemlidir.			
12. İspatlar matematik için vazgeçilmezdir.			
13. İspat yapmak matematiksel düşünmeyi geliştirir.			
14. Bana göre matematikte ispat yapmak önemlidir.			
15. Sınıfın önünde ispat yapmak beni korkutuyor.			
16. İspat yapmaktan hoşlanıyorum.			
17. Mantıksal düşünmeyi geliştirmek için ispat yapmak gereklidir.			
18. Bir teoremi gördüğümde onu ispatlamak için heves duyuyorum.			
19. Matematiği seviyorum; ama ispat yapmaktan hoşlanmıyorum.			
20. Akıl yürütme becerisini geliştirmede ispatların yeri çok fazladır.			
21. Matematikçiler ve bilim adamlarınca üretilen ispatların öğrencilere yaptırılmasını gereksiz görüyorum.			
22. İspat yapamamak moralimi bozuyor.			

Ek-6: İspat Klinik Görüşme Formu

Adı Soyadı:

Değerli Öğrenciler,
Bu klinik görüşme üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerini incelemek amacıyla hazırlanmıştır. Vereceğiniz her cevap bu araştırma için önemli olduğundan bütün soruları samimiyetle cevaplayacağınızdan eminim. Bu görüşmeden elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacak olup vereceğiniz bilgilerin tümü gizli kalacaktır. Katkılarınızdan dolayı şimdiden teşekkür ederim.

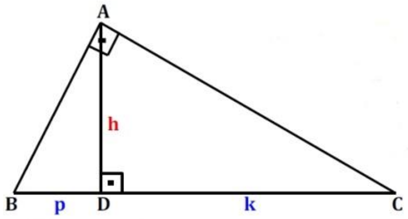
Araştırmacı: Duygu DİNAMİT

1) Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu gösteriniz.

2) $n \geq 1$ doğal sayısı için; $1 + 2 + 3 + \ldots = \frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.

3) Herhangi bir tamsayının 3 ile kalansız bölünebilmesi için sayının rakamlarının sayı değerleri toplamının 3 veya 3'ün tam katı olması gerektiğini gösteriniz.

4)



Pisagor teoremini kullanarak Öklid teoreminin $h^2 = p.k$ olduğunu gösteriniz.

5) a,b > 0 için , $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ olduğunu gösteriniz.

6) Bir üçgende ağırlık merkezinin bir köşeye olan uzaklığının, aynı köşeden karşı kenara çizilen kenarortay uzunluğunun $\frac{2}{3}$ ‘sine eşit olduğunu gösteriniz.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Duygu DİNAMİT

Doğum Yeri ve Tarihi: Muğla / 30.07.1995

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenim: Dokuz Eylül Üniversitesi / Eğitim Fakültesi / İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi: Aydın Adnan Menderes Üniversitesi / Eğitim Fakültesi / Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü / Matematik Eğitimi Anabilim Dalı (2017-2020)

Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

Ürün, Ö., Alkan, M., Dinamit, D., Yazıcı, E., Özen Ünal, D., Ulusan S. 2018. Matematik Öğretim Programının (5-8. Sınıflar) Geometrik Düşünme Düzeyleri ve Zihnin Geometrik Alışkanlıkları Açısından İncelenmesi. Vth International Eurasian Educational Research Congress (EJER2018), (5 Mayıs) Antalya.

ÇALIŞTIĞI KURUMLAR

MEB: Matematik Öğretmeni (2018-Devam ediyor) Kumla Ortaokulu, Nizip / Gaziantep

İLETİŞİM

E-Posta Adresi: ddinamit7@gmail.com

Tarih: 04/08/2020