

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
2013-YL-067**

**GAMZE POTANSİYELİN
BOSE-EINSTEIN YOĞUŞUK MADDESİNİN
TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİNE ETKİSİ**

Melike ÇIBIK AYDIN

**Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU**

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Melike ÇIBIK AYDIN tarafından hazırlanan Gamze Potansiyelin Bose-Einstein Yoğuşuk Maddesinin Termodinamik Özelliklerine Etkisi başlıklı tez, 19.11.2013 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Halil YARANERİ	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi.	
Üye :	Doç. Dr. Devrim TARHAN	DPÜ Eğitim Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla .../.../2013 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

19.11.2013

Melike ÇIBIK AYDIN

ÖZET**GAMZE POTANSİYELİN
BOSE-EINSTEIN YOĞUŞUK MADDESİNİN
TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİNE ETKİSİ**

Melike ÇIBIK AYDIN

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU
2013, 45 sayfa

Bu tezde; Bose-Einstein yoğuşukluğunu elde etmekte manyetik tuzaklamaya ek olarak kullanılan gamze potansiyel için teorik modeller ele alınmıştır. Tezin ilk aşamasında gamze potansiyelleri betimlemek için literatürde kullanılmış Dirac δ modeli tanıtılmıştır. Ancak, Dirac δ modelinde gamze potansiyelin genişliği ve derinliği ayrı birer parametre olarak kullanılamamaktadır. Bu yüzden, bu tezde gamze potansiyellerin, Dirac δ fonksiyonunu özel bir limit olarak içeren, kesilmiş parabolik fonksiyon ile modellenebileceği gösterilmiştir. Bu modelden yararlanarak, gamze potansiyel eklenmiş harmonik tuzak içindeki Bose-Einstein yoğuşuk maddesinin; kritik sıcaklık, yoğuşukluk oranı gibi termodinamik nicelikleri hesaplanmıştır. Ek kısmında ise kesilmiş parabolik fonksiyonun Dirac δ fonksiyonu için bir temsil oluşturduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler

Bose-Einstein Yoğuşması(BEY), Gamze Potansiyel, Kesilmiş Parabolik Fonksiyon, Kritik Sıcaklık, Yoğuşukluk Oranı.

ABSTRACT**THE EFFECT OF DIMPLE POTENTIAL TO THE
THERMODYNAMICAL PROPERTIES OF BOSE-EINSTEIN
CONDENSATE**

Melike ÇIBIK AYDIN

M.Sc. Thesis, Department of Physics

Supervisor: Ass. Prof. Dr. Haydar UNCU

2013, 45 pages

In this thesis; theoretical models of the dimple potential, which are used for obtaining Bose-Einstein condensate in addition to harmonic trap, are considered. In the first part of the thesis, the Dirac δ models which are used for describing the dimple potentials in the literature are introduced. However, one can not incorporate both the dimple depth and width together as different parameters into Dirac δ models. Therefore, in this thesis, it is tried to show that the dimple potentials can be modeled by the truncated parabolic function that includes Dirac δ function as a special limit. Using this model, the thermodynamical quantities like critical temperature, condensate fraction of a Bose-Einstein condensate are calculated. In the appendix, it is proven that the truncated parabolic function is a representation for the Dirac δ function.

Key Words

Bose-Einstein Condensation(BEC), Dimple Potential, Truncated Parabolic Function, Critical Temperature, Condensate Fraction.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada; bozon parçacıklarını tuzaklamada, harmonik tuzak ile birlikte kullanılan gamze potansiyelin teorik olarak bir modeli oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu amaçla, gamze potansiyelleri betimleyen literatürde kullanılan Dirac δ ya göre daha genel bir model olan kesilmiş parabolik fonksiyon kullanılmıştır. Bu modelden yararlanarak, gamze potansiyel eklenmiş harmonik tuzak içindeki Bose gazı ve Bose Einstein yoğunlaşmış maddesinin termodinamik nicelikleri hesaplanmıştır.

Tez çalışmam sürecinin her aşamasında bana yol gösteren, destek ve anlayışını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Haydar Uncu'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, Fizik Ana Bilim Dalı başkanı Sayın Prof. Dr. Halil Yaraneri'ye sonsuz teşekkür ederim.

Tez çalışmamın başlangıç kısmında Tübitak 108T003 nolu projeden aldığım destekten dolayı teşekkür ederim.

Destek ve sevgilerini esirgemeyen sevgili eşime, anneme, babama teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Melike ÇIBIK AYDIN

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xix
KISALTMALAR	xxi
1. BOSE-EINSTEIN YOĞUŞUKLUĞU NEDİR?	1
1.1. Tarihsel Arka Plan	1
1.2. Tezin Amacı	2
1.3. Etkileşmeyen Bose Gazının Termodinamik Özellikleri	4
2. BİR BOYUTTA HARMONİK TUZAKTAKİ ETKİLEŞMEYEN BOSE GAZI ve BOSE EINSTEIN YOĞUŞUKLUĞU	9
2.1. Yarı Klasik Yaklaşımda Etkileşmeyen Bose Gazı	9
2.2. Kuantum Mekaniksel Yaklaşımda Etkileşmeyen Bose Gazı	10
3. GAMZE POTANSİYEL MODELLERİ	13
3.1. Termodinamik Yöntem Kullanan Modeller	13
3.2. Potansiyel Formu Kullanan Modeller	14
3.2.1. Bir Boyutta Dirac δ Fonksiyonu ve Harmonik Tuzaktaki BEY	16
4. GAMZE POTANSİYEL İÇİN KESİLMİŞ PARABOLİK MODEL (KPM)	23
4.1. Kesilmiş Parabolik Model İçin Schrödinger Denklemi Çözümü	23
4.2. Harmonik Tuzak ve Gamze Potansiyeldeki BEYin Termodinamiği	27
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	33
KAYNAKLAR	35
EKLER	38

A. EK	39
1.1. Dirac Delta Fonksiyonu İçin Bir Model	39
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER DİZİNİ

k_b	Boltzman Sabiti
U_0	Gamze Potansiyelin Derinliği
a	Gamze Potansiyelin Genişliği
σ	Gamze Potansiyelin Gücü
Λ	Gamze Potansiyelin Gücünün Boyutsuz Biçimi
R	Geçiş Katsayısı
$H_n(x)$	Hermite Polinomları
${}_1F_1(x)$	Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon
T_c	Kritik Sıcaklık
$D_\lambda(x)$	Parabolik Silindirik Fonksiyon
$G_\lambda(x)$	Parabolik Silindirik Fonksiyonun Türevi
N_0	Taban Durumundaki Parçacık Sayısı
N	Toplam Parçacık Sayısı
z	Uçuculuk
N_{uy}	Uyarılmış Durumlardaki Parçacık Sayısı
T	Yansıma Katsayısı
N_0/N	Yoğuşukluk Oranı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Buharlaşma ile meydana gelen BEY.	3
Şekil 1.2	Gamze potansiyelin şekli	4
Şekil 3.1	Kritik sıcaklığın gamze potansiyelin gücüne göre değişimi	17
Şekil 3.2	Kimyasal potansiyelin sıcaklıkla değişimi	18
Şekil 3.3	Sabit parçacık sayısı için yoğunluk oranının sıcaklıkla değişimi	18
Şekil 3.4	Gamze potansiyelin gücünün sabit bir değerinde, yoğunluk oranının sıcaklıkla değişimi	19
Şekil 3.5	Yoğunluk oranının gamze potansiyelin gücü ile değişimi	19
Şekil 3.6	Yoğunluk profili	21
Şekil 4.1	Dar gamze için, kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimi.	27
Şekil 4.2	Geniş gamze için, kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimi.	28
Şekil 4.3	Dar ve geniş gamzenin kritik sıcaklıklarının karşılaştırılması	28
Şekil 4.4	Dar gamzede yoğunluk oranının sıcaklık değişmesi	29
Şekil 4.5	Geniş gamzede yoğunluk oranının sıcaklık değişmesi	29
Şekil 4.6	Dar ve geniş gamzenin yoğunluk oranının sıcaklık değişmesi	30
Şekil 4.7	Dar gamze için yoğunluk oranının derinlikle değişimi	30
Şekil 4.8	Geniş gamze için yoğunluk oranının derinlikle değişimi	31
Şekil 4.9	Dar gamze için yoğunluk profili	31
Şekil 4.10	Geniş gamze için yoğunluk profili	32

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 JWKB yaklaşımının nümerik değerlerle karşılaştırılması . . .	26
--	----

KISALTMALAR

BEY	Bose-Einstein Yoğuşması
KPM	Kesilmiş Parabolik Model
v.d.	Ve Diğerleri

1. BOSE-EINSTEIN YOĞUŞUKLUĞU NEDİR?

1.1. Tarihsel Arka Plan

Bose-Einstein Yoğuşması (BEY) ilk olarak 1925 yılında S.N. Bose ve A. Einstein tarafından teorik olarak öngörülmüştür. Einstein, Bose'un 1924 yılında fotonların istatistiği üzerine yaptığı çalışmayı, etkileşmeyen kütleli bozonları da içine alacak şekilde geliştirdi. Böylece, Bose ve Einstein çok düşük sıcaklıklarda etkileşmeyen parçacıklardan oluşan bozon gazının parçacıklarının gözlemlenebilir (sıfırdan farklı) bir oranının taban enerji seviyesinde toplanacağını gösterdiler [1–3]. Uzun bir süre boyunca bu teorik öngörülerle ilgili deneysel bir gözlem elde edilemedi. Ancak 1938'de F. London, He sıvısının süperakışkanlığının keşfinden sonra süperakışkanın davranışının BEY ile ilgili olabileceğini önerdi [4, 5].

Etkileşimli bozon gazının davranışı ile ilgili olarak ilk teorik çalışmalar 1947 yılında Bogoliubov tarafından başlatılmıştır [6]. Bu çalışmada düşük yoğunluklu, zayıf etkileşimli ve uyarılmış durumdaki atomların sayısının ihmal edilebilir olduğu durum için bir pertürbasyon açılımı geliştirilmiştir. Daha sonra BEY, Penrose ve Onsager [7] tarafından tek parçacık yoğunluk matrisinin öz değer ve öz vektörleri cinsinden formüle edilmiştir.

Homojen olmayan etkileşimli bozon gazının taban durumunun incelenmesinde genellikle Gross-Pitaevski denklemi kullanılır. Bu denklem Gross [8] ve Pitaevskii [9] tarafından birbirinden bağımsız olarak ve farklı teknikler kullanılarak zayıf etkileşimli ve seyrek bozon gazlarını tanımlamak için türetilmiştir.

Bose ve Einstein'ın teorik öngörülerinden yaklaşık 70 yıl sonra 1995'te 3 farklı deneysel grup derişik gazlarda BEY'i yaklaşık $2 \mu\text{K}$ sıcaklıklara inerek deneysel olarak gözlemlədiler [10–12]. BEY, makroskopik ölçekte kuantum mekaniksel özellikleri gösteren bir olgudur. Alkali atomlarla yapılan deneyler, kuantum

istatistik mekaniğinin teorik öngörülerinin karşılığı olması nedeniyle oldukça önemlidir. Bu deneyler parçacıkların kuantum davranışlarının makroskopik boyutta araştırılmasını sağlayan bir fırsattır. Bu nedenle de BEY olayına son yıllarda ilgi oldukça artmıştır.

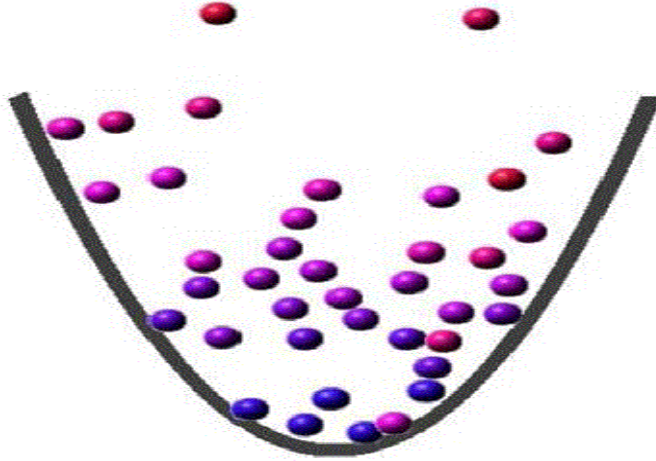
1.2. Tezin Amacı

BEY elde etmek için, bozonlar çeşitli soğutma teknikleri ile μK sıcaklıklara kadar soğutulurlar. Bu soğutma teknikleri lazer ile soğutma, manyetik tuzaklama ve buharlaşmalı soğutmanın (şekil 1.1) bir birleşimini içermektedir [13]. Şekil 1.1'de, sıcak olan atomlar (kırmızılar) buharlaşırken soğuk olanlar (maviler), belli bir sıcaklığa ulaştıktan sonra BEY'i meydana getirir. Yeterince soğutulmuş derişik atomların BEY oluşturduğu birçok deney sonucunda görülmüştür [10–12]. BEY oluştuktan sonra sıcaklıkları daha da düşürerek taban durumundaki parçacık sayısı yani, bozon gazının yoğunluk oranı artırılmaktadır [13]. Bose gazının yoğunluk oranını arttırmanın bir yolu da manyetik tuzaklamaya ek olarak gamze potansiyeller kullanmaktır. Manyetik alanlar kullanılarak elde edilen tuzakların bozonlara etkisi, bir dış harmonik salınıcı potansiyeli ile iyi bir biçimde betimlenebilmektedir.

Gamze potansiyeller ise manyetik tuzaklamaya ek olarak, lazer ışınımı kullanılarak elde edilen ve erimleri manyetik tuzaklara göre çok daha az olan potansiyellerdir. Bu potansiyeller, genellikle manyetik tuzaklarla birlikte kullanılmaktadır. Manyetik tuzak ve gamze potansiyelin birlikte kullanıldığı bir tuzağın oluşturduğu potansiyelin biçimi şekil 1.2'de¹ gösterilmiştir [14].

Gamze potansiyel etkisindeki bozonların özellikleri literatürde genellikle termodinamik yöntemler kullanılarak incelenmiştir [15,16]. Bununla birlikte Jacob

¹ [14] referansında BEY elde etmekte kullanılan gamze potansiyelin şekli. Bu deneyde manyetik alanın xy düzlemindeki frekansı z yönündeki frekansa göre daha büyük olduğundan, xy düzleminde harmonik tuzak, z yönündekine göre daha güçlüdür. Bu yüzden BEY içindeki parçacıklar z yönünde, x ve y yönündekine göre daha büyük bir aralığa dağılmışlardır. Deneyde, gamze potansiyel tuzağın daha zayıf olduğu z yönünde uygulanmıştır.



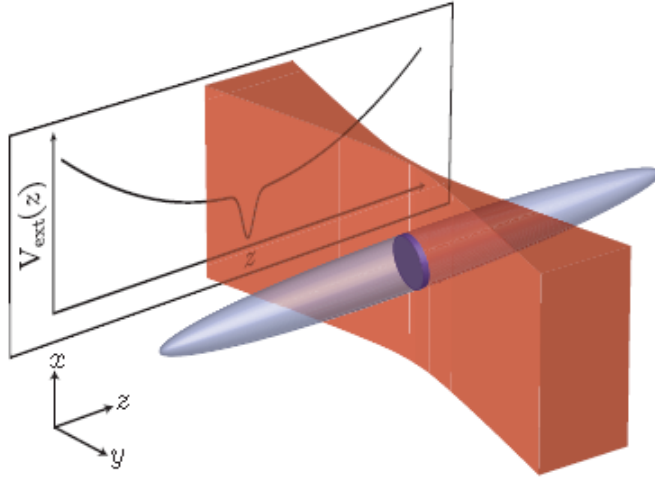
Şekil 1.1. Buharlaşıma ile meydana gelen BEY.

v.d., gamze potansiyel için, ters Gaussiyen $U_0 e^{-x^2/a^2}$ biçiminde bir potansiyel formu önermiştir [17]. Bu potansiyel için ne Schrödinger, ne de Gross-Pitaevskii denklemi çözülebildiğinden, bu çalışmada nümerik yöntemler kullanılmıştır. Bir diğer potansiyel formu kullanılan modelde ise gamze potansiyeller, Dirac δ potansiyeli kullanılarak betimlenmiştir [18]. Bu potansiyel için Schrödinger denklemi çözülebildiğinden, bu çalışmalarda gamze potansiyelin, etkileşmeyen bozon gazının termodinamik niceliklerine etkisi, niteliksel olarak açıklanabilmiştir. Ancak bu çalışmalarda, gamze potansiyelin derinliği ve genişliği ayrı birer parametre olarak modelin içine yerleştirilememektedir.

Bu çalışmada, gamze potansiyel kullanılan deneylerde, şekil 1.2'de verilen tuzaklama potansiyel şekli elde edildiğinden yola çıkarak ilk defa Ma. v.d. tarafından önerilen [19]² gamze potansiyel

$$U(x) = -U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (1.2.1)$$

²Ma v.d gamze potansiyeller için kesilmiş parabolik modeli önermekle birlikte bu potansiyeli kullanarak analitik çözümler yapmamış, yalnızca nümerik modeller oluşturmuşlardır.



Şekil 1.2. Gamze potansiyelin şekli

biçiminde betimlendi. Burada sıfırdan büyük bir değeri kabul ettiğimiz U_0 , gamze potansiyelin derinliğini gösterirken, a , gamze potansiyelin genişliğini göstermektedir. Bu model için Schrödinger denklemi çözülebildiği gibi, potansiyelin hem derinliği hem de genişliği model içine yerleştirilebilmektedir.

1.3. Etkileşmeyen Bose Gazının Termodinamik Özellikleri

BEY, maddenin, bozonlardan oluşan gazların mutlak 0 K sıcaklığına çok yakın değerlere kadar soğutulmasıyla ortaya çıkan bir halidir. Bu sıcaklıklarda, bozonik maddenin parçacıklarının çoğu temel enerji seviyesine iner ve bir kuantum durumu makroskobik olarak gözlemlenebilir hale gelmiş olur.

Grand kanonik kümede bozonlar için bölüşüm fonksiyonu:

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n_i=0}^{\infty} (\exp(-\beta(\varepsilon_i - \mu)))^{n_i} \quad (1.3.2)$$

şeklindedir [20].

$$\Phi = -k_b T \ln Z(T, V, \mu) = k_b T \sum_i \ln(1 - \exp[\beta(\mu - \varepsilon_i)]) \quad (1.3.3)$$

denklemleri ile tanımlanan grand potansiyel kullanılarak (T ve V sabit iken) bozon gazının toplam parçacık sayısının ifadesi;

$$N = - \frac{d\Phi}{d\mu} \Big|_{T,V} = \sum_i n_i = \frac{1}{\exp(\varepsilon_i - \mu/k_b T) - 1} \quad (1.3.4)$$

şeklinde bulunur. Buradan, termodinamik dengede, etkileşimsiz bozonlar için Bose dağılımı (bir enerji düzeyindeki ortalama parçacık sayısı)

$$n_i = \frac{1}{\exp(\varepsilon_i - \mu/k_b T) - 1} \quad (1.3.5)$$

olarak elde edilir [20]. Enerji ifadesi ise bu dağılım kullanılarak bulunabilir:

$$E = \sum_i \varepsilon_i n_i . \quad (1.3.6)$$

Diğer bir termodinamik nicelik olan entropi ifadesi eşitlik (1.3.3)'ün T'ye göre türevinin negatifi alınarak elde edilir:

$$S = - \frac{\partial \Phi}{\partial T} . \quad (1.3.7)$$

(1.3.3) ifadesi yerine konup, türev hesaplandığında entropi

$$S = k_b \sum_i \left(\frac{\beta(\varepsilon_i - \mu)}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} - \ln(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}) \right) \quad (1.3.8)$$

halini alır. Parçacık başına düşen öz ısı (c_v) ifadesi ise enerjinin T'ye göre türevi alınarak bulunur (sabit hacimde):

$$c_v = \frac{1}{N} \frac{\partial E}{\partial T} . \quad (1.3.9)$$

Bu denklemlerde μ kimyasal potansiyeli, k_b Boltzmann sabitini, ε_i 'ler ise tek parçacık durumlarının enerji değerlerini göstermektedir [20].

BEY, bozon gazı belli bir sıcaklığa düştükten sonra oluşmaya başlar. Bu sıcaklığa kritik sıcaklık (T_c) denir. Sistemin sıcaklığı (T) T_c 'den daha büyük sıcaklıklarda iken (yüksek sıcaklıklarda) taban durumundaki parçacık sayısı (N_0) ihmal edilebilecek kadar küçük olduğundan, uyarılmış seviyelerdeki parçacık sayısı

(N_{uy}) toplam parçacık sayısına eşit alınabilir. T_c 'den daha düşük sıcaklıklarda (düşük sıcaklıklarda), N_0 sıfırdan büyük değerler alırken, toplam parçacık sayısı (N) değişmeyeceğinden uyarılmış seviyelerdeki parçacık sayısı (N_{uy}) azalır ($N_0 = N - N_{uy}$). T 'nin, T_c 'ye eşit olduğu sıcaklıkta, taban durumunda parçacık sayısı (N_0) ihmal edilebilecek kadar küçük olduğundan, uyarılmış seviyelerdeki parçacık sayısı (N_{uy}) toplam parçacık sayısına eşit alınabilir:

$$T > T_c \Rightarrow N_0 = 0 \rightarrow z = \exp \beta \mu \rightarrow \mu < 0 \rightarrow \varepsilon > \mu \quad (1.3.10)$$

$$T < T_c \Rightarrow N_0 > 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow \mu = \varepsilon = 0 \quad (1.3.11)$$

$$T = T_c \Rightarrow N = N_{uy} \rightarrow z = 1 \rightarrow \mu = \varepsilon = 0. \quad (1.3.12)$$

Bu denklemlerdeki $z = \exp(\beta \mu)$ ifadesi uçuculuk olarak adlandırılır. (1.3.11) ifadesinde $\mu = 0$ olmasının sebebi, (1.3.4) denklemindeki $\exp(\varepsilon_i - \mu/k_b T) - 1$ ifadesinin negatif olamayacağındandır, yani hiçbir ε_i değeri için $\mu > \varepsilon_i$ olamaz. Taban durum enerjisi genellikle sıfır alındığından dolayı da μ 'nün alabileceği maksimum değer sıfır olur.

(1.3.4) ya da (1.3.5) denklemleri kullanılarak bozon gazının birçok termodinamik özelliğini belirlemek olasıdır. Bunun için öncelikle, verili bir sıcaklıkta, parçacık sayısı belirli bir sistemin, kimyasal potansiyelini bulmak gerekir. Bu, (1.3.4) denkleminin sağ tarafı hesaplanıp çıkan sonuç μ 'nün bir fonksiyonu olarak ifade edildikten sonra, bu fonksiyonun değerini, toplam parçacık sayısı N 'ye eşit yapan μ değeri bulunarak sağlanır. Ancak, (1.3.4) denklemindeki toplamı hesaplamak genellikle mümkün değildir. Sistemdeki parçacık sayısı fazla ve sistemin hacmi büyük ise enerji seviyeleri birbirine çok yakın olacağından (1.3.4) denklemindeki toplam ifadesi integrale dönüştürülerek, toplam iyi bir yaklaşıklıkla hesaplanabilir³:

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} g(\varepsilon) n(\varepsilon) d(\varepsilon). \quad (1.3.13)$$

³Bu işlem yarı klasik yaklaşım olarak adlandırılır.

Burada, N_0 taban durumundaki parçacık sayısını, $g(\epsilon)$ durum yoğunluğunu ifade eder. Bu yaklaşımda kritik sıcaklık (T_c), (1.3.13) denkleminde $\mu = \epsilon_0 = 0$ alınıp, uyarılmış seviyelerdeki parçacık sayısı toplam parçacık sayısına eşit alınarak hesaplanır.

Sıcaklığın T_c 'den büyük olduğu durumlarda ($T > T_c$) ((1.3.10)), Bose gazının termodinamik özelliklerini bulmak için, μ (1.3.13) denklemi kullanılarak hesaplanır. $T < T_c$ için ((1.3.11)), (1.3.13) denklemindeki integral $\mu = 0$ alınarak hesaplandığında, uyarılmış durumdaki (termal gazdaki) parçacık sayısını verir:

$$N_{uy} = \int_0^{\infty} g(\epsilon)n(\epsilon)d(\epsilon) . \quad (1.3.14)$$

Enerji ifadesi,

$$E = \int_0^{\infty} g(\epsilon)n(\epsilon)\epsilon d(\epsilon) \quad (1.3.15)$$

denklemi aracılığı ile ifade edilir. Entropi ise, (1.3.8) ifadesindeki toplam, durum yoğunluğu kullanılıp integrale dönüştürülerek hesaplanır:

$$S = k_b \left(\beta \int_0^{\infty} g(\epsilon) \frac{(\epsilon - \mu)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon - \int_0^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon)}) d\epsilon \right) . \quad (1.3.16)$$

2. BİR BOYUTTA HARMONİK TUZAKTAKİ ETKİLEŞMEYEN BOSE GAZI ve BOSE EINSTEIN YOĞUŞUKLUĞU

2.1. Yarı Klasik Yaklaşımda Etkileşmeyen Bose Gazı

Bir önceki bölümde vurgulandığı gibi, BEY elde etmek için yapılan deneylerde, bozonlar genellikle zamana bağlı manyetik alanlar kullanılarak tuzaklanır. Tuzaklama olayı, parçacıkların bir arada durmasını sağlar. Manyetik tuzaklar ile bozonların etkileşimi harmonik salınıcı potansiyeli kullanılarak iyi bir şekilde betimlenebilir [13]. Bir boyutta harmonik salınıcı potansiyeli:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2 \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Harmonik salınıcı potansiyeli altında hareket eden bir parçacığın enerji seviyelerinin $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ olduğu iyi bilinmektedir. Taban durum enerjisi sıfır alınırsa enerji seviyelerinin ifadesi $E_n = n\hbar\omega$ olur. O halde ε enerjisine kadar yaklaşık $n = \varepsilon/\hbar\omega$ tane durum vardır. Bu durumda bir boyutta durum yoğunluğunu şu şekilde yazabiliriz:

$$g(\varepsilon) = \frac{d\sum n(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d(\varepsilon/\hbar\omega)}{d\varepsilon} = \frac{1}{\hbar\omega}. \quad (2.1.2)$$

Bu ifadeyi eşitlik (1.3.14)de yerine koyarsak, $T > T_c$ için uyarılmış durumdaki parçacık sayısı:

$$N_{uy} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon_i - \mu)) - 1} d\varepsilon \quad (2.1.3)$$

olur. $T > T_c$ için uyarılmış durumdaki parçacık sayısı toplam parçacık sayısına eşit olduğundan, (2.1.3) eşitliği toplam parçacık sayısı olarak ifade edilebilir:

$$N = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{k_b T}{\hbar\omega} g_1(z). \quad (2.1.4)$$

Bu eşitlikte bulunan $g_1(z)$ ifadesinin genel formu:

$$g_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p} \quad (2.1.5)$$

şeklindedir. $g_1(1)$ sonsuz olduğundan bir boyutta, taban enerjisini sıfır kabul eden yarı klasik yaklaşım, anlamlı sonuçlar vermez, örneğin $T_c = 0$ K bulunur. Bu yüzden bir boyutta yarı klasik yaklaşımda küçük bir değişiklik yapılarak [21] (2.1.3) integralinin alt limitini $(3/2)\hbar\omega$ almak yararlı olacaktır [18]:

$$N = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{(3/2)\hbar\omega}^{\infty} \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon_i - \mu)) - 1} d\varepsilon = -\frac{k_b T}{\hbar\omega} \ln(1 - e^{\beta(\mu - 3/2\hbar\omega)}) . \quad (2.1.6)$$

$T < T_c$ için taban durumunda da parçacık bulunduğundan eşitlik (2.1.6)'daki integral alt limiti $(1/2)\hbar\omega$ olarak alınır:

$$N = -\frac{k_b T}{\hbar\omega} \ln(1 - e^{\beta(\mu - 1/2\hbar\omega)}) . \quad (2.1.7)$$

Bu durumda $T = T_c$ olduğu durumda $\mu = (1/2)\hbar\omega$ alınır ve toplam parçacık sayısı

$$N = -\frac{k_b T_c}{\hbar\omega} \ln(1 - e^{\beta_c(\hbar\omega)}) \quad (2.1.8)$$

ifadesine eşit olur. T_c , bu denklemin nümerik yöntemlerle çözülmesi ile bulunur.

Tüm sıcaklıklar için enerji, eşitlik (1.3.15)'deki integralin alt limiti $(1/2)\hbar\omega$ alınır hesaplanarak

$$E = \frac{(k_b T)^2}{\hbar\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{\beta}{2} n \hbar\omega \right) e^{\beta(\mu - \frac{\hbar\omega}{2})n} \quad (2.1.9)$$

elde edilir. Entropi ifadesi de yine tüm T'ler için, eşitlik (1.3.16)'nın integral alt limiti $(1/2)\hbar\omega$ alınarak bulunabilir:

$$S = \frac{k_b}{\hbar\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n\hbar\omega} + \frac{2}{\beta n^2} - \frac{\mu}{n} \right) e^{\beta(\mu - \frac{\hbar\omega}{2})n} . \quad (2.1.10)$$

2.2. Kuantum Mekaniksel Yaklaşımda Etkileşmeyen Bose Gazı

Bir boyutta, bozon gazının özellikleri kuantum istatistiği kullanarak da bulunabilir. Çünkü bu durumda eşitlik (1.3.5)'in sağ tarafındaki toplamı hesaplamak mümkündür:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ze^{-\beta\varepsilon_k}}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_k}} . \quad (2.2.11)$$

Bu ifadeden toplam parçacık sayısı:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-\beta\epsilon_n})^n \quad (2.2.12)$$

olur. Tek parçacık durumlarının enerji değerleri harmonik tuzak için:

$$\epsilon_k = (k + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (2.2.13)$$

şeklindedir. Bu ifade eşitlik (2.2.12) de yerine konursa toplam parçacık sayısı hiperbolik sinüs fonksiyonu cinsinden

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^n}{\sinh(\frac{n\beta\hbar\omega}{2})} \quad (2.2.14)$$

şeklini alır.

Enerji ifadesi hesaplanırken, eşitlik (1.3.6)'da (2.2.13) ve (1.3.5) ifadeleri yerine konduğunda:

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k + \frac{1}{2})\hbar\omega}{e^{\beta[(k + \frac{1}{2})\hbar\omega - \mu]} - 1} \quad (2.2.15)$$

olur. Bu ifade de gerekli hesaplamalar yapılırsa enerji ifadesi:

$$E = \hbar\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sinh(\frac{n\beta\hbar\omega}{2})} + z^n e^{-(\beta/2)\hbar\omega n} \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\beta\hbar\omega k} \quad (2.2.16)$$

şeklini alır. Bu ifadeyi tek bir toplam içerisinde yazmak için $\beta\hbar\omega n = x$ değişken dönüşümü yapıldığında ise enerji ifadesi:

$$E = \hbar\omega \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{1}{\sinh(\frac{n\beta\hbar\omega}{2})} + 4 \frac{e^{-(1/2)\beta\hbar\omega n}}{\sinh^2(\frac{\beta\hbar\omega n}{2})} \right) \quad (2.2.17)$$

halini alır.

3. GAMZE POTANSİYEL MODELLERİ

3.1. Termodinamik Yöntem Kullanan Modeller

Bu yöntem, harmonik salıncı potansiyeline ek olarak gamze potansiyel açıldıktan sonra sistemin sıcaklığı ve yoğunluk oranını, entropi ifadesinden yola çıkarak hesaplamak için geliştirilmiştir. Termodinamik yöntem yalnızca adyabatik süreçleri modellemek için kullanılabilir. Bu yüzden bu yöntem ile yalnızca gamze potansiyelin adyabatik olarak uygulandığı süreçleri modellemek mümkündür.

Deneysel olarak genellikle, gamze potansiyel, sistem harmonik tuzağın kritik sıcaklığının çok çok az üstündeki sıcaklıklara soğutulduktan hemen sonra uygulanmaktadır [6]. Gamze potansiyel, adyabatik bir biçimde uygulanırsa süreç boyunca entropi sabit kalır.

Bu modelin hesap yöntemi [6] bir boyutlu harmonik salıncı ve gamze potansiyel içindeki BEY'e uygulanarak gösterilebilir: Bu yöntemde termodinamik limitte yarı klasik yaklaşım kullanıldığından kritik sıcaklık hesabına benzer şekilde enerjinin alt limiti sıfır alınır. Bu yapılarak (1.3.16) denkleminde hesaplandığında entropi ifadesi

$$\frac{S}{k_b} = \frac{k_b T}{\hbar \omega} g_1(z) \left(\frac{2g_2(z)}{g_1(z)} - \ln z \right) = N \left(\frac{2g_2(z)}{g_1(z)} - \ln z \right) \quad (3.1.1)$$

şeklini alır. Eşitlik (3.1.1)'de T , T_c 'ye çok çok yaklaştığında $z = 1$ olacaktır. Bu durumda $g_1(z)$ ıraksadığından, (3.1.1) eşitliği de ıraksar. Bu yüzden bir boyutta $z = 1$ olduğu durumlarda [21] referansında tanımlanan modifiye yarı klasik yöntemle benzer bir yöntemle sonuca ulaşılabilir. Bunun için grand potansiyel, taban durumu ile uyarılmış durumların grand potansiyel ifadeleri ayrı ayrı yazılır [18]:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{k_b T}{\hbar \omega} \int_{3/2\hbar\omega}^{\infty} d\varepsilon \ln(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}) \quad (3.1.2)$$

Burada Φ_0 taban durumu için grand potansiyel, $1/(\hbar\omega)$ ise bir boyutta harmonik potansiyel için durum yoğunluğudur ((2.1.2)).

(1.3.7) ve (2.1.5) eşitliklerinden yararlanılarak entropi

$$S = \frac{2k_b^2 T}{\hbar\omega} g_2(e^{\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega)}) + \left(\frac{\mu}{\hbar\omega} - \frac{3}{2} \right) \ln[1 - e^{\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega)}] \quad (3.1.3)$$

şeklinde elde edilir. T, T_c 'nin çok çok az üstünde iken $\mu = \frac{\hbar\omega}{2}$ kabul edilirse ifade:

$$S = \frac{2k_b^2 T_c}{\hbar\omega} g_2(e^{\frac{\hbar\omega}{k_b T_c}}) - \ln[1 - e^{\frac{\hbar\omega}{k_b T_c}}] \quad (3.1.4)$$

haline gelir. Harmonik tuzağa gamze potansiyel eklendikten sonra sistemin taban durum enerjisi, dolayısıyla kimyasal potansiyeli değişir. Bu yüzden kimyasal potansiyel, $\mu = -U_0$ alınarak [6] entropi

$$S = \frac{2k_b^2 T}{\hbar\omega} g_2(e^{-\beta(U_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega)}) - \left(\frac{U_0}{\hbar\omega} + \frac{3}{2} \right) \ln[1 - e^{-\beta(U_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega)}] \quad (3.1.5)$$

şeklinde bulunur. Adyabatik süreçte entropi sabit kaldığı için, sistemin son sıcaklığı, (3.1.4) ve (3.1.5) ifadelerinin sağ tarafları birbirlerine eşitlenerek elde edilir. Bunun sonrasında bu sıcaklık için yoğunluk oranı (N_0/N) hesaplanabilir.

3.2. Potansiyel Formu Kullanan Modeller

1 boyutta, gamze potansiyel Dirac δ fonksiyonu ile tanımlanabilir [22, 23]. Bu potansiyel şu şekilde verilir:

$$V = V_{HO} - V_\delta = \frac{1}{2}m\omega x^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^P \sigma_i \delta(x - x_i). \quad (3.2.6)$$

Burada ω harmonik tuzağın frekansını, σ_i gamze potansiyelinin gücünü (derinliği ve genişliğinin çarpımını) betimlemektedir ve σ_i ; negatif ise itici etkileşimi, pozitif ise çekici etkileşimi ifade eder. $\hbar^2/2m$ ise sadece hesap kolaylığı için denkleme yazılmıştır. Zamandan bağımsız Schrödinger denklemi bilindiği üzere:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (3.2.7)$$

şeklinde. Burada $E = (\lambda + 1/2)\hbar\omega$ alınır ve bu denklem;

$$z = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}x \quad (3.2.8)$$

ve

$$z_i = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}x_i \quad (3.2.9)$$

boyutsuz nicelikleri kullanılarak yazılırsa,

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + \left[\lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} + \sum_i^P \Lambda_i \delta(z - z_i)\right]\Psi(z) = 0 \quad (3.2.10)$$

halini alır. Burada $\Lambda_i = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\sigma_i$ 'dir. $z \neq z_i$ olduğu durumda, eşitlik (3.2.7)'nin iki lineer bağımsız çözümü $\lambda \neq 0, 1..$ için parabolik silindirik fonksiyonlar cinsinden yazılabilir [24].

$$D_\lambda(z) = 2^\lambda e^{-z^2/2} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{{}_1F_1\left(-\lambda/2, 1/2; z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} + \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) z \frac{{}_1F_1\left((1-\lambda)/2, 3/2; z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{-\lambda}{2}\right)} \right\}$$

$$D_\lambda(-z) = 2^\lambda e^{-z^2/2} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{{}_1F_1\left(-\lambda/2, 1/2; z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} - \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) z \frac{{}_1F_1\left((1-\lambda)/2, 3/2; z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{-\lambda}{2}\right)} \right\} \quad (3.2.11)$$

Burada Γ iyi bilinen gama fonksiyonu, ${}_1F_1(\alpha, \gamma; y)$ ise konfluent hipergeometrik fonksiyonlardır. $D_\lambda(z)$ ve $D_\lambda(-z)$ nin asimptotik davranışları ise şu şekildedir [24]:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} D_\lambda(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} D_\lambda(-z) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} D_\lambda(-z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} D_\lambda(z) = \infty. \quad (3.2.12)$$

Dirac δ fonksiyonu potansiyelin merkezinde alındığında ise ($P = 1, x_1 = 0$) eşitlik (3.2.6) ve eşitlik (3.2.10) sırasıyla şu hali alır ;

$$V = V_{\text{harmonik}} - V_\delta = \frac{1}{2}m\omega x^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\sigma\delta(x) \quad (3.2.13)$$

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + \left[\lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} + \Lambda\delta(z)\right]\Psi(z) = 0. \quad (3.2.14)$$

Bu durumda özfonksiyonlar şu şekildedir:

$$x < 0 (z < 0) \Rightarrow \Psi(z) = cD_\lambda(-z) \quad (3.2.15)$$

$$x > 0 (z > 0) \Rightarrow \Psi(z) = cD_\lambda(z) . \quad (3.2.16)$$

Burada dalga fonksiyonu sürekli olduğu için her iki bölgede de D_λ fonksiyonlarının katsayıları aynıdır. Özdeğerleri elde etmek için ise dalga fonksiyonunun $z = 0$ 'daki sürekliliği ve türevinin Dirac δ fonksiyonundan ötürü $z = 0$ noktasındaki sıçraması kullanılır. Bu sıçrama miktarını bulmak için eşitlik (3.2.14)'ün $\alpha \rightarrow 0$ limitinde ($z = -\alpha, \alpha$) aralığında integrali alınır, böylece özdeğer denklemi :

$$\frac{\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} = \frac{\Lambda}{4}. \quad (3.2.17)$$

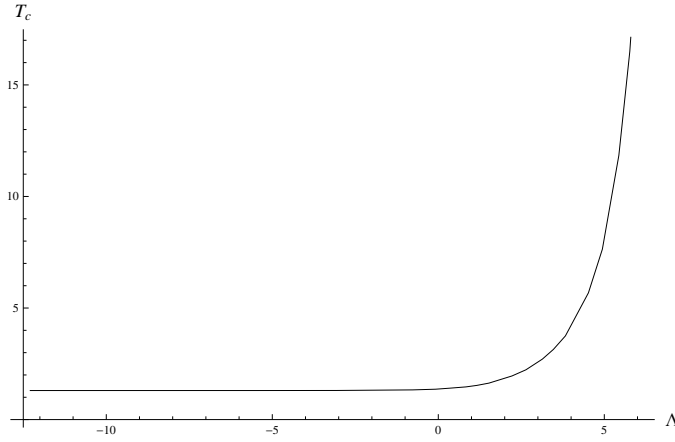
şeklinde elde edilmiş olur. Burada,

$$\Lambda = \sigma \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (3.2.18)$$

dır. Dirac δ potansiyeli harmonik potansiyelin merkezine yerleştiğinden, harmonik potansiyelin tek özfonksiyonları değişmezler. Çift durumların enerji özdeğerleri ise σ 'nın bir fonksiyonu olarak değişir. Taban durumu enerji özdeğeri σ yükseldikçe bir alt limite sahip olmaksızın, azalır. Ancak diğer çift durumların enerjileri alttan tek durumların E_{2n+1} enerjileri tarafından sınırlandırılır ve $\sigma \rightarrow \infty, E_{2n+2} \rightarrow E_{2n+1} = (2n + 1 + 1/2)\hbar\omega; n = 0, 1, \dots$ olur.

3.2.1. Bir Boyutta Dirac δ Fonksiyonu ve Harmonik Tuzaktaki BEY

Bu bölümde bir boyutta Dirac δ fonksiyonu eklenmiş harmonik potansiyelin çeşitli termodinamik niceliklerinin, σ 'nın bir fonksiyonu olarak değişimi araştırılacak. σ 'nın değeri referans [19]'da verilen deneysel parametre değerleri kullanılarak hesaplanacaktır. Bu makalede gamze potansiyelin minimum değeri $U_c = k_b 4\mu K$ iken ortalama potansiyel genişliği $r = 1 - 100\mu m$ arasında değişmektedir. $r, 1\mu m$ 'dan $100\mu m$ aralığında değiştikçe; $\Lambda, 460$ ile 46000 aralığında değişirken, σ



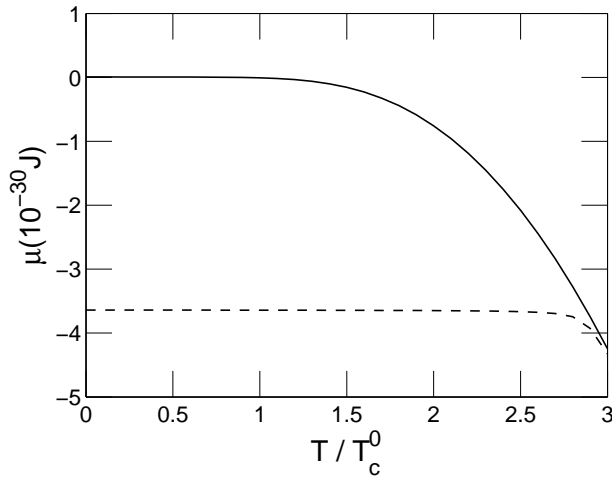
Şekil 3.1. Kritik sıcaklığın gamze potansiyelin gücüne göre değişimi

yaklaşık olarak 10^8 m^{-1} ile 10^{10} m^{-1} arasında değer alır. Deneyle ilgili diğer değerler ise $m = 23 \text{ amu}$ (^{23}Na), $\omega = 2\pi 21 \text{ Hz}$ [25] şeklindedir.

Kritik sıcaklık, kimyasal potansiyelin taban durumu enerjisine eşit alınıp ($\mu = E_g = E_0$)

$$N \approx \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta_c \varepsilon_i} - 1} \quad (3.2.19)$$

denklemini β_c için çözümlenerek bulunur. Burada $\beta_c = 1/(k_b T_c)$ iken, ε_i 'ler ise (3.2.13) eşitliğinde verilen potansiyeller için özdeğerlerdir. T_c^0 , N değeri sonlu olduğunda, $\Lambda = 0$ için (sadece harmonik osilatör) eşitlik (3.2.19)'un çözümü olarak tanımlanmıştır. Λ sıfırdan farklı değerler de olsa, tek durumların enerjileri değişmez ve $(2n + 1 + 1/2)\hbar\omega$ 'ya eşit olur. Çift durumların enerjileri ise eşitlik (3.2.17)'nin nümerik olarak çözülmesiyle elde edilir. Bu değerler eşitlik (3.2.19)'da yerine konup, nümerik olarak çözümlerse T_c bulunur. Şekil 3.1'de [18] Dirac δ potansiyeli eklenmiş harmonik tuzak için $N = 10^4$ 'de kritik sıcaklık T_c ve gamze potansiyelin gücünün boyutsuz niceliği Λ (3.2.18) değerleri gösterilmiştir, Λ eksenini için logaritmik skala kullanılmıştır. Şekilde görüldüğü gibi Λ 'nın 1'den büyük değerleri için; Λ artarken kritik sıcaklık hızlı bir şekilde artmaktadır.

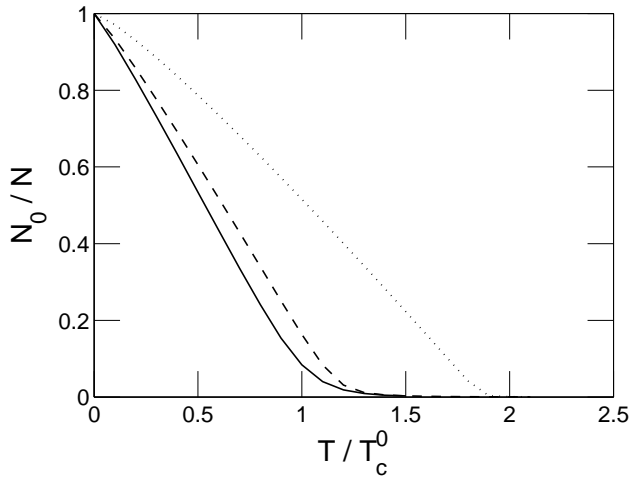


Şekil 3.2. Kimyasal potansiyelin sıcaklıkla değişimi

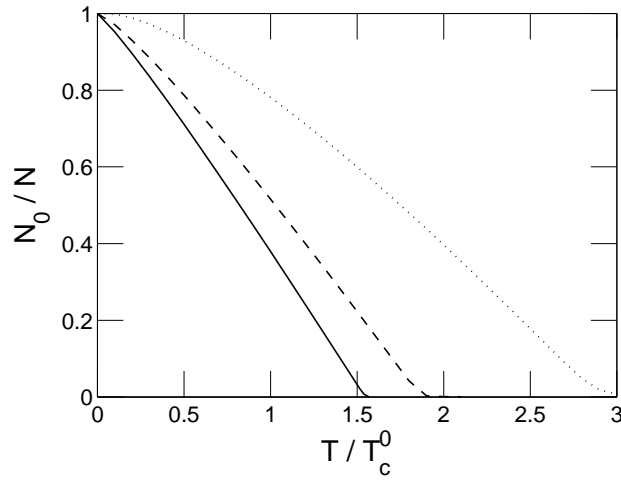
N tane özdeş bozondan oluşan bir gaz için, verili bir N ve sabit sıcaklıkta kimyasal potansiyel μ ,

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} = N_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \quad (3.2.20)$$

ifadesi çözülerek elde edilir. Burada ε_i , i . durumun enerjisini ifade etmektedir.

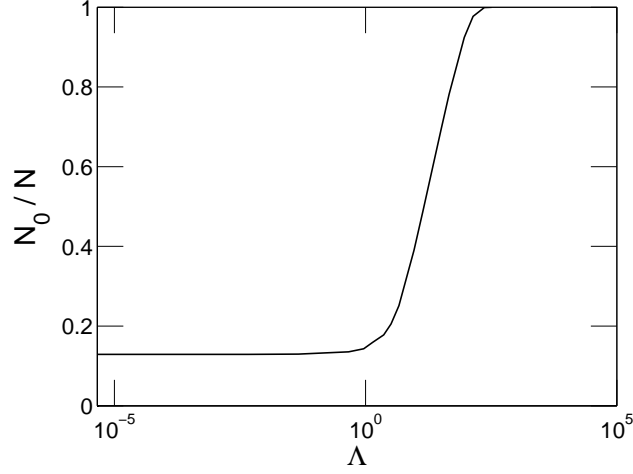


Şekil 3.3. Sabit parçacık sayısı için yoğuşukluk oranının sıcaklıkla değişimi



Şekil 3.4. Gamze potansiyelin gücünün sabit bir değerinde, yoğuşukluk oranının sıcaklıkla değişimi

Şekil 3.2de [18] Dirac δ potansiyeli eklenmiş harmonik tuzak için $N = 10^4$ ve $\Lambda = 0$ (kalın çizgi) ile $\Lambda = 46$ (kesikli çizgi) değerleri için μ 'nün değişimi T/T_c^0 'ın bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Taban durumunun ortalama parçacık sayısı ise



Şekil 3.5. Yoğuşukluk oranının gamze potansiyelin gücü ile değişimi

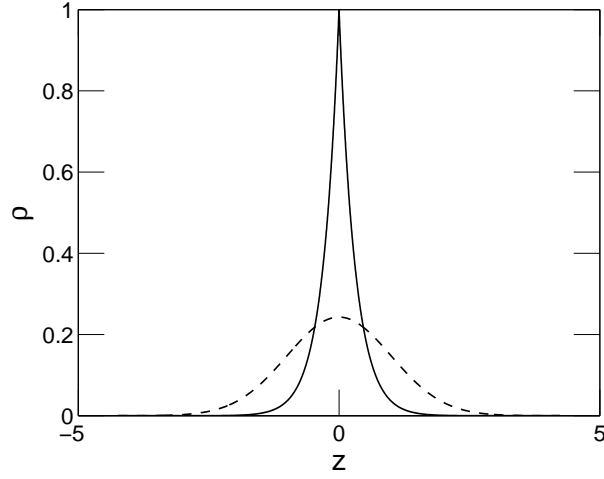
denklem (3.2.20) de bulunan kimyasal potansiyel μ ifadesi

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1}, \quad (3.2.21)$$

denkleminde yerine konarak bulunur. Şekil 3.3de [18] $N = 10^6$ için T/T_c^0 'a karşılık N_0/N oranının değişimi sırasıyla $\Lambda = 0$ (kalın çizgi), $\Lambda = 4.6$ (kesikli çizgi) ve $\Lambda = 46$ (noktalı çizgi) değerleri için gösterilmiştir. Bu şekilde, $\Lambda = 0$ için elde edilen sonuç, Ketterle v.d. [26] tarafından harmonik tuzak içindeki bozonlar için elde edilen sonuçla aynıdır. Gözlemlenebilir parametrelerin ya da türevlerinin süreksiz olduğu nokta olarak tanımlanan faz geçişi ancak termodinamik limitte elde edilir. Parçacık sayısının sonlu olduğu durumlarda bu tür keskin bir faz geçişi görülmemektedir [26]. Bu çalışmada da sonlu sayıda parçacıklı sistemler incelendiğinden, yoğunluk oranı grafiklerinde keskin bir faz geçişi görülmemektedir. Farklı parçacık sayılarının yoğunluk oranına etkisini anlamak için şekil 3.4de [18] sabit $\Lambda (= 46)$ değerinde N_0/N oranının sıcaklıkla değişimi $N = 10^4$ (noktalı çizgi), $N = 10^6$ (kesikli çizgi), $N = 10^8$ (kalın çizgi) değerleri için çizilmiştir. Bu çizimde farklı N değerleri için T_c^0 değiştiğinden yatay eksen T/T_c^0 , her N değerine karşılık gelen T_c^0 değeri dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu T_c^0 değerleri $N = 10^4$ için $13 \mu\text{K}$, $N = 10^6$ için $85 \mu\text{K}$ ve $N = 10^8$ için $6200 \mu\text{K}$ 'dir.

Şekil 3.5de [18], $N = 10^4$ için, sabit $T = T_c^0$ sıcaklığında yoğunluk oranının Λ 'nın bir fonksiyonu olarak değişimi gösterilmektedir; Λ ekseni için logatimik skala kullanılmıştır. BEY'in yoğunluk profili, BEY'in yoğunluğunun konumla değişimi olarak tanımlanmaktadır: $n_0(x)$. BEY tamamen taban durumundaki parçacıklardan oluştuğundan BEY'in yoğunluğu, sistemin taban durumu dalga fonksiyonunun mutlak karesi alınarak bulunur: $n_0(x) = |\psi_0(x)|^2$.

Şekil 3.6da [18] harmonik tuzak (kesikli çizgi) ve delta fonksiyonu ($\Lambda = 4.6$) eklenmiş harmonik tuzak içindeki (kalın çizgi) yoğunlukların yoğunluk profili karşılaştırılmıştır. Bu şekilde yatay eksendeki z parametresi ise eşitlik (3.2.8)'de ifade edilen boyutsuz uzunluğu tanımlamaktadır. Her iki sistemde de taban durum



Şekil 3.6. Yoğunluk profili

dalga fonksiyonları analitik olarak çözülebildiğinden, bu dalga fonksiyonlarının mutlak karesinin alınmasıyla yoğunluk profillerini elde etmek mümkün olmuştur.

4. GAMZE POTANSİYEL İÇİN KESİLMİŞ PARABOLİK MODEL (KPM)

4.1. Kesilmiş Parabolik Model İçin Schrödinger Denklemi Çözümü

Yakın geçmişte yapılan deneylerde, gamze potansiyeller kullanılarak Bose gazının faz uzayı yoğunluğu yaklaşık 50 kat arttırıldı ve yine bu potansiyeller kullanılarak soğutma yapılmadan BEY elde edildi [15,16]. Bu deneysel başarılar üzerine gamze potansiyeller için çeşitli teorik modeller geliştirildi [6]. Bu modellerin bazıları ters Gaussian fonksiyonundan yararlanırken, diğerleri ise gamze potansiyelleri, Dirac δ fonksiyonlarını kullanarak betimliyolar [18]. Bu bölümde ise gamze potansiyelleri modellemek için;

$$V_g(x) = -U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad |x| \leq a \quad (4.1.1)$$

denklemi ile tanımlanan kesilmiş parabolik potansiyel kullanılacak. Burada a gamze potansiyelin genişliği iken, U_0 derinliğidir. Gamze potansiyel ile güçlendirilmiş harmonik tuzağı betimleyen Hamiltonyen'in bir boyuttaki ifadesi

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) \quad (4.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemdeki potansiyel fonksiyonu

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & \text{için } |x| > a \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{için } |x| \leq a . \end{cases} \quad (4.1.3)$$

şeklinededir. Burada hem U_0 hem de a , sıfırdan büyük kabul edilmiştir ($U_0 > 0$, $a > 0$). Bu potansiyel için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (4.1.4)$$

şeklinededir. Eşitlik (4.1.3)'deki potansiyel için $U_0 = 0$ ise Hamiltoniyen, harmonik tuzak Hamiltoniyen'ine indirgenir ve bu Hamiltoniyen'in özdeğerleri $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ iken, özfonksiyonları Hermite polinomları

$H_n(\sqrt{m\omega/\hbar} x)$ cinsinden yazılır. $U_0 \neq 0$ ise özdeğer ve özfonksiyon ifadeleri değişir. Bunu görmek için öncelikle $|x| > a$ için Schrödinger denklemi yazılmalıdır:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (4.1.5)$$

Bu denklem, harmonik tuzak potansiyeli için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ile benzerdir. Ancak, $|x| > a$ için çözümler, dalga fonksiyonları ve onların $|x| = a$ noktalarındaki türevlerinin sınır koşullarından dolayı harmonik potansiyel çözümlerinden farklıdır. Eşitlik (4.1.5), (3.2.8) denklemindeki z ifadesi kullanılarak

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + (2\varepsilon - z^2) \Psi(z) = 0 \quad (4.1.6)$$

şeklinde boyutsuz bir biçimde yazılabilir. Burada $\varepsilon = E/(\hbar\omega)$ şeklinde tanımlanmıştır. Eşitlik (4.1.6)'ın çözümleri, $\lambda = \varepsilon - 1/2$ için parabolik silindirik fonksiyonlar ((3.2.11)) cinsinden yazılabilir. (3.2.12) denkleminde ifade edilen $D_\lambda(z)$ ve $D_\lambda(-z)$ 'nin asimptotik davranışlarından dolayı $x < -a$ ($z < -(\frac{m\omega}{\hbar})^{1/2}a$) ve $x > a$ ($z > (\frac{m\omega}{\hbar})^{1/2}a$) için dalga fonksiyonları

$$\psi_1(z) = c_1 D_\lambda(-z) \quad (4.1.7)$$

$$\psi_3(z) = c_4 D_\lambda(z) \quad (4.1.8)$$

biçimindedir. Burada c_1 ve c_4 birer sabittir. Bu sabitler, sınır koşulları ve dalga fonksiyonunun normalizasyonu kullanılarak hesaplanabilir.

Schrödinger eşitliği $|x| < a$ için yazılırsa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \Psi(x) = E\Psi(x) \quad (4.1.9)$$

olur. Bu eşitlikte

$$\omega_g = \sqrt{\omega^2 + \frac{2U_0}{ma^2}}, \quad \frac{E + U_0}{\hbar\omega_g} = \varepsilon_g, \quad \lambda_g = \varepsilon_g - \frac{1}{2} \quad (4.1.10)$$

ifadeleri ile tanımlanır ve $z_g = \sqrt{\frac{m\omega_g}{\hbar}} x$ değişken dönüşümü yapılırsa, eşitlik (4.1.9), eşitlik (4.1.6) ile benzer bir hale gelir:

$$\frac{d^2\Psi(z_g)}{dz_g^2} + (2\varepsilon_g - z_g^2)\Psi(z_g) = 0. \quad (4.1.11)$$

Bu nedenle bu eşitliğin çözümü, z yerine z_g ve λ yerine λ_g konursa eşitlik (3.2.11) ile benzerdir. Böylece $|x| \leq a$ için dalga fonksiyonu

$$\Psi_2(z) = c_2 D_{\lambda_g}(z_g) + c_3 D_{\lambda_g}(-z_g) \quad (4.1.12)$$

şekindedir. Burada, c_2 ve c_3 sabitleri, normalizasyon ve sınır koşullarından bulunabilir. Potansiyel ifadesi x 'in çift bir fonksiyonu olduğu için, özfonksiyonlar ya çift ya da tektir (bu yüzden (4.1.7), (4.1.8) eşitliklerinde $c_4 = \pm c_1$ ve eşitlik (4.1.12)'de $c_3 = \pm c_2$ 'dir.):

$$\Psi_\lambda(z) = \begin{cases} c_1 D_\lambda(-z) & \text{için } z < -(\frac{m\omega}{\hbar})^{1/2} a \\ c_2 [D_{\lambda_g}(z_g) \pm D_{\lambda_g}(-z_g)] & \text{için } |z| < (\frac{m\omega}{\hbar})^{1/2} a \\ \pm c_1 D_\lambda(z) & \text{için } z > (\frac{m\omega}{\hbar})^{1/2} a. \end{cases} \quad (4.1.13)$$

Burada + işareti ikinci ve üçüncü bölgelerdeki çift, - işareti ise bu bölgelerdeki tek özfonksiyonlar için geçerlidir. $|x| = a$ 'da dalga fonksiyonları ve türevlerinin süreklilik koşullarından Hamiltoniyen'in özdeğerleri bulunabilir. Bu yapıldığında, çift ve tek fonksiyonlar için Hamiltonyen'in özdeğer eşitlikleri sırasıyla

$$\sqrt{\frac{\omega}{\omega_g}} [D_{\lambda_g}(B) + D_{\lambda_g}(-B)] G_\lambda(A) = [G_{\lambda_g}(B) - G_{\lambda_g}(-B)] D_\lambda(A) \quad (4.1.14)$$

$$\sqrt{\frac{\omega}{\omega_g}} [D_{\lambda_g}(B) - D_{\lambda_g}(-B)] G_\lambda(A) = [G_{\lambda_g}(B) + G_{\lambda_g}(-B)] D_\lambda(A) \quad (4.1.15)$$

bulunur. Bu eşitlikler $D_\lambda(A) \neq 0$, $G_\lambda(A) \neq 0$ için geçerlidir ve burada

$$G_\lambda(z) = \frac{d}{dz} D_\lambda(z), \quad (4.1.16)$$

iken, $A = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} a$, $B = \sqrt{\frac{m\omega_g}{\hbar}} a$ şeklinde tanımlanır. Eşitlik (4.1.14) ve eşitlik (4.1.15) nümerik olarak hesaplanarak λ değerleri bulunabilir. Böylece

Çizelge 4.1. JWKB yaklaşımının nümerik değerlerle karşılaştırılması

Özenerjiler				
	Özdurum No	Analitik ($\hbar\omega$)	JWKB ($\hbar\omega$)	$ (Analitik-JWKB) $ ($\hbar\omega$)
$E_n^{(1)}$	0	-72.7948	-72.7948	0.0000
	1	-67.4650	-67.4650	0.0000
	2	-62.1353	-62.1353	0.0000
	3	-56.8055	-56.8055	0.0000
	4	-51.4758	-51.4758	0.0000
	5	-46.1461	-46.1461	0.0000
	6	-40.8163	-40.8163	0.0000
	7	-35.4866	-35.4866	0.0000
	8	-30.1570	-30.1569	0.0001
	9	-24.8278	-24.8271	0.0007
	10	-19.5005	-19.4974	0.0031
	11	-14.1807	-14.1676	0.0131
	12	-8.8874	-8.8379	0.0495
	13	-3.6816	-3.5082	0.1734
$E_n^{(2)}$	14	1.2167	1.8216	0.6049
	15	4.8125	4.4790	0.3335
	16	6.0940	6.0210	0.0730
	17	7.3188	7.4137	0.0949
	18	8.8970	8.7300	0.1670
	19	9.8991	9.9980	0.0989
	20	11.3352	11.2316	0.1036
	21	12.4303	12.4396	0.0093
	22	13.6232	13.6273	0.0041
	⋮	⋮	⋮	⋮
	499	497.1836	497.1835	0.0001
	500	498.1856	498.1857	0.0001

özdeğerler $E_\lambda = (\lambda + 1/2)\hbar\omega$ olur. Potansiyelin derinliği (U_0) arttıkça, taban durumu ve ilk birkaç uyarılmış durumun özdeğerleri azalır. Özdeğerler azaldıkça nümerik yöntemlerin sonucu tarafından bulunan özenerji değerlerinin güvenilirliği azalmaktadır. Bu nedenle bu değerlerin doğruluğu kontrol edilmelidir. Bu amaçla JWKB yaklaşımına başvurulabilir. Çünkü bu yaklaşım harmonik tuzak Hamiltonyen'i için özdeğer sonuçlarını tam verir [27–29]. Özenerjilerin

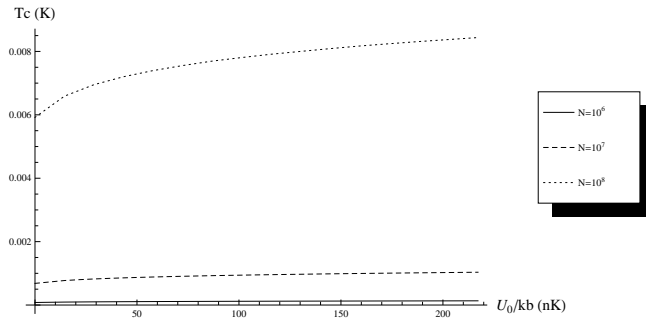
hesaplandığı JWKB yaklaşımının formülü [28]:

$$\int_{x_1}^{x_2} [2m(E_n - V(x))]^{1/2} dx = (n + \frac{1}{2})\pi\hbar \quad (4.1.17)$$

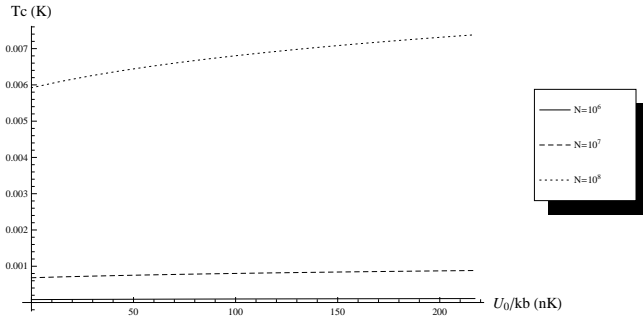
şeklinindedir. Burada x_1 ve x_2 , $E_n = V(x_{1,2})$ eşitliği ile bulunan klasik dönüm noktalarıdır. Potansiyel fonksiyonu $|x| \leq a$ ve $|x| > a$ için farklı olduğundan, formül $E_n < (1/2)m\omega^2a^2$ ve $E_n > (1/2)m\omega^2a^2$ için farklıdır. JWKB ve nümerik yöntemlerle bulunan özdeğerlerin bir karşılaştırılması $\omega = 2\pi 20\text{Hz}$, $m = 23$ amu, $a = 11\mu\text{m}$, $U_0 = 1.0 \cdot 10^{-30}\text{J}$ için tablo (4.1)'de verilmektedir. Bu tablodan da görülebileceği gibi potansiyel enerji fonksiyonunun form değiştirdiği $V(x = a) = (1/2)m\omega^2a^2$ değerlerine yakın değerler hariç, JWKB yaklaşımı ile nümerik değerler iyi bir uyum içerisindedir.

4.2. Harmonik Tuzak ve Gamze Potansiyeldeki BEYin Termodinamiği

Bu bölümde bir boyutta gamze potansiyel eklenmiş harmonik tuzak içindeki Bose gazının termodinamik özellikleri gösterilecektir. İlk olarak, kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimi dar ($a = 11\mu\text{m}$) ve geniş ($a = 32\mu\text{m}$) gamze potansiyeller için incelenmiştir. Bu değişimler sırası ile, şekil 4.1 ve 4.2 de gösterilmektedir. Bu şekillerden de görüldüğü gibi; kritik sıcaklık gamze potansiyelin derinliği arttıkça artmaktadır. Ancak derinliğin büyük değerleri



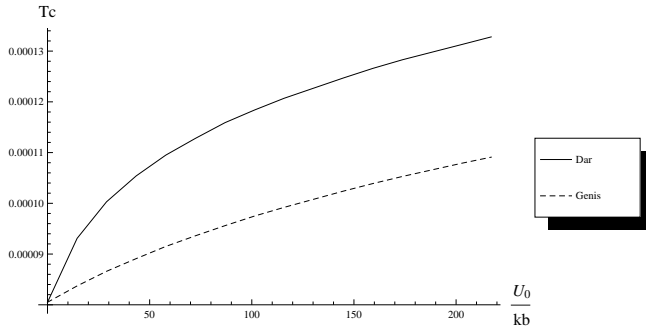
Şekil 4.1. Dar gamze için, kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimi.



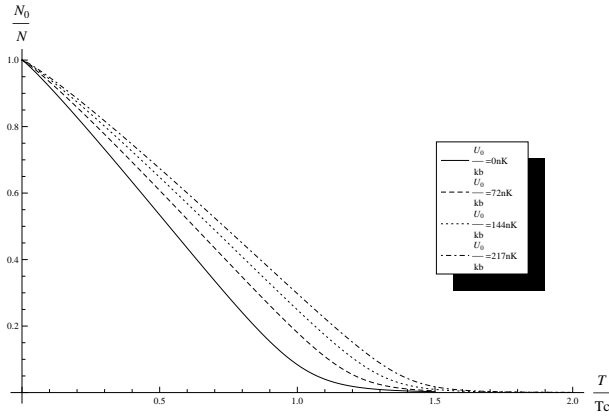
Şekil 4.2. Geniş gamze için, kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimi.

için artış neredeyse sıfırlanıp kritik sıcaklık sabit bir değere doğru gitmektedir. Ayrıca, parçacık sayısı arttıkça kritik sıcaklığın da (T_c) arttığı anlaşılmaktadır. Şekil 4.3'te ise gamze potansiyelin genişliğinin kritik sıcaklığa etkisi gösterilmeye çalışılmıştır. Bu yüzden aynı parçacık sayısına ($N=10^6$) sahip iki bose gazının farklı genişliklerde, kritik sıcaklık değerinin, gamze potansiyelin derinliği ile değişimi çizilmiştir. Genişliği dar olan gamze potansiyelin kritik sıcaklığı artırıcı etkisinin daha fazla olduğu görülmektedir.

Kritik sıcaklığın ardından, farklı gamze potansiyel derinliklerinde yoğuşukluk oranının sıcaklıkla değişimi 10^6 parçacık bulunan Bose gazı için incelenmiştir.

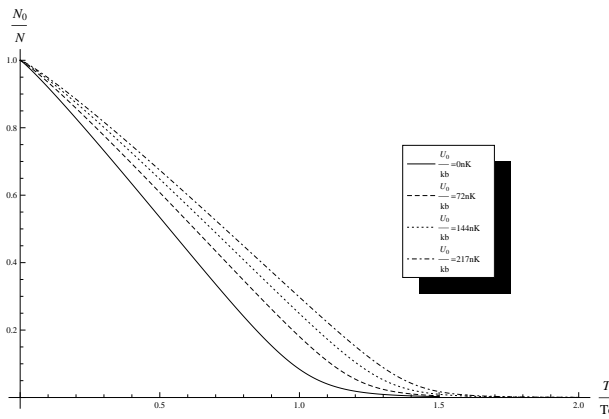


Şekil 4.3. Dar ve geniş gamzenin kritik sıcaklıklarının karşılaştırılması

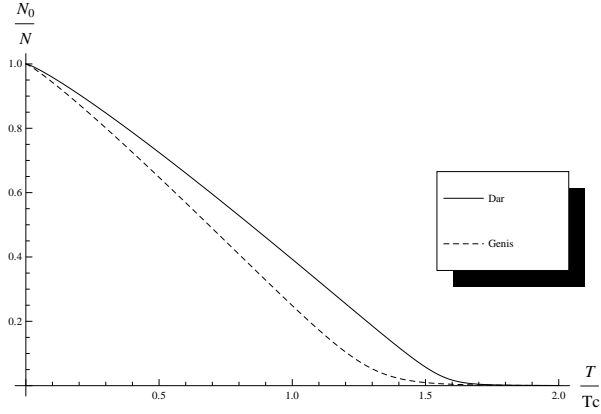


Şekil 4.4. Dar gamzede yoğunluk oranının sıcaklık değişmesi

Şekil 4.4den de görüldüğü gibi gamze potansiyelin derinliği arttıkça yoğunluk oranı da artmaktadır. Şekil 4.5te aynı etki geniş gamze potansiyeli için de görülmektedir. Son olarak, şekil 4.6da gamze potansiyelin yoğunluk oranına etkisini görmek amacıyla her iki gamze genişliği için aynı parçacık sayısına ($N = 10^6$) sahip bozonların yoğunluk oranının sıcaklıkla değişimi gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi kritik sıcaklıktaki etkiye benzer bir biçimde dar gamzenin, yoğunluk oranına etkisi daha fazladır.

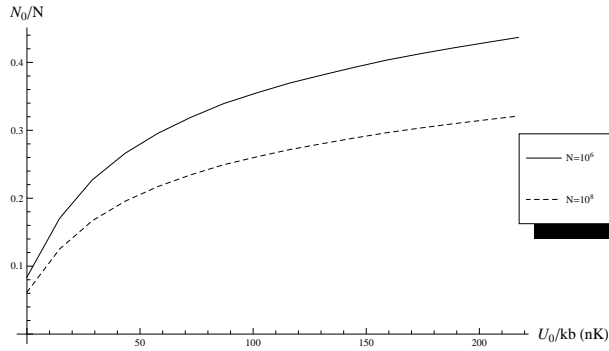


Şekil 4.5. Geniş gamzede yoğunluk oranının sıcaklık değişmesi

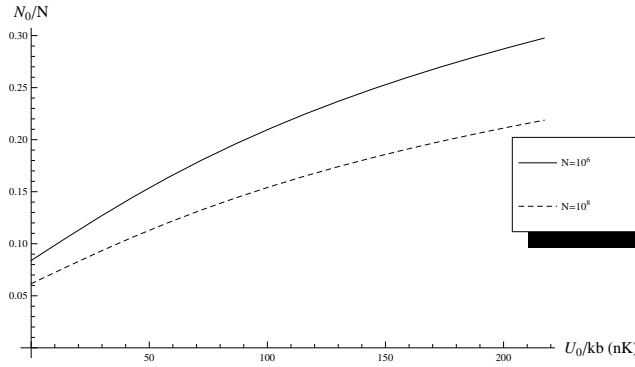


Şekil 4.6. Dar ve geniş gamzenin yoğuşukluk oranının sıcaklık değişmesi

Şekil 4.7'de gamze potansiyelin genişliğinin $a = 11\mu m$ değeri için, $T = T_c$ 'de yoğuşukluk oranının (N_0/N), gamze potansiyelin derinliği (U_0) ile değişimi toplam parçacık sayısının $N = 10^6$ ve $N = 10^8$ değerlerinde gösterilmiştir. Burada taban durum parçacık sayısı eşitlik (3.2.21) kullanılarak bulunmuştur. Bu grafikte her farklı U_0 değeri için T_c nin farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Şekil 4.8'in şekil 4.7'den farkı sadece gamze potansiyelin genişliğinin $a = 32\mu m$ olmasıdır. Bu iki şekilden görüldüğü gibi yoğuşukluk oranı gamze potansiyelin derinliği ile artmaktadır. Ancak bu artışın hızı U_0 'ın büyük değerleri için azalış göstermektedir.



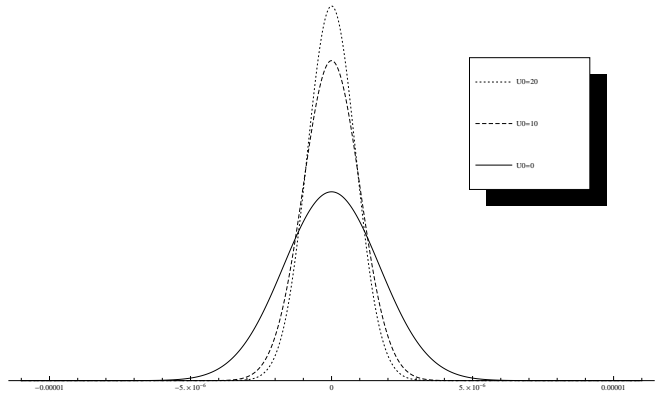
Şekil 4.7. Dar gamze için yoğuşukluk oranının derinlikle değişimi



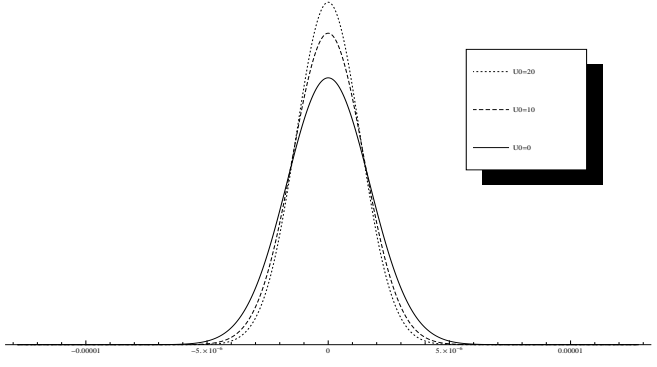
Şekil 4.8. Geniş gamze için yoğunluk oranının derinlikle değişimi

Ayrıca, parçacık sayısı arttıkça yoğunluk oranının azaldığı, gamze potansiyelin genişliğinin ise bu durumu etkilemediği anlaşılmaktadır. 4.7 ve 4.8 şekillerindeki aynı potansiyel derinliğine karşılık gelen yoğunluk oranları karşılaştırıldığında, genişliğin dar olduğu gamze potansiyelin yoğunluk oranının artışına etkisinin daha fazla olduğu görülmektedir.

Şekil 4.9 ve 4.10'de sırasıyla $a = 11\mu m$ ve $a = 32\mu m$ için gamze potansiyelin farklı derinliklerindeki yoğunluk profilleri $n_0(x)$ karşılaştırılmıştır. Bu grafiklerden, derinlik arttıkça merkezdeki parçacık yoğunluğunun arttığı görülmektedir.



Şekil 4.9. Dar gamze için yoğunluk profili



Şekil 4.10. Geniş gamze için yoğunluk profili

Bu iki şekil karşılaştırıldığında, aynı derinlik değerinde gamze potansiyelin genişlemesinin merkezdeki parçacık yoğunluğunu azalttığı anlaşılmaktadır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, kesilmiş parabolik fonksiyonun, gamze potansiyelleri betimlemede uygun bir model olduğunu göstermek amaçlanmıştır. Öncelikle, literatürde gamze potansiyelleri incelemede kullanılmış olan, termodinamik model ve Dirac δ modeli tanıtılmıştır. Ardından, gamze potansiyelin KPMsi oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu amaçla, bir boyutta kesilmiş parabolik potansiyel eklenmiş harmonik tuzak için Schrödinger eşitliğinin çözümleri özetlenip, özdeğer eşitlikleri ve özfonksiyonlar elde edilmiştir. Daha sonrasında bu çözümler kullanılarak gamze potansiyel içindeki Bose gazının termodinamik nicelikleri hesaplanmıştır. Tezin ek kısmında kesilmiş parabolik fonksiyonun, Dirac δ fonksiyonun bir temsili olduğu gösterilmiştir.

Termodinamik modeller yalnızca adyabatik süreçler için kullanılmaktadır. Bu yüzden bu modellerle, yalnızca entropinin sabit olduğu süreçlerde termodinamik niceliklerde yoğunluk oranı için yaklaşık bir hesap yapılabilir. Dirac δ modelinde ise, gamze potansiyel için, Dirac δ fonksiyonu bir potansiyel formu olarak önerildiğinden kuantum mekaniksel hesaplama yapmak mümkündür. Böylece gamze potansiyelin, kritik sıcaklık, yoğunluk oranı, yoğunluk profili gibi termodinamik nicelikleri çeşitli durumlarda hesaplanabilmektedir. Ancak bu modelde, gamze potansiyelin derinliği ve genişliği ayrı birer parametre olarak modelin içine yerleştirelemeyip, bu iki niceliğin çarpımı, gamze potansiyelin gücü olarak adlandırıp tek bir parametre olarak kullanılmaktadır. Bu yüzden bu modelle, örneğin [14] referansındaki genişliği büyük olan ($a = 32\mu m$) gamze potansiyelin sonuçlarını betimlemek anlamlı değildir. Ancak, genişliği çok dar olan gamze potansiyeller incelenebilir. Ayrıca, şekil 3.1de görüldüğü gibi, bu modelde gamze potansiyelin gücü arttıkça, kritik sıcaklık çok hızlı artmaktadır. Bu deneylerle de uyumsuz, gerçekçi olmayan bir sonuçtur [14, 15]. Benzer biçimde, şekil 3.5den de anlaşıldığı gibi, bu modelde yapılan hesaplamalarda, harmonik tuzakın

kritik sıcaklık değerinde, bir gamze potansiyelin eklenip gücünün artırılmasıyla sistemdeki bütün parçacıkların yoğunlaşmaya uğrayacağı öngörülmektedir. Bu da yapılan deneylerle uyumlu değildir [14, 15]. Son olarak, şekil 3.6da gösterilen yoğunluk profili, merkezdeki keskinlik nedeniyle gerçekçi bir yoğunluk profili değildir.

Yukarıdaki paragrafta, Dirac δ modelinde anlatılan tüm sorunların, KPM’de giderildiği görülebilir. Örneğin, KPMde farklı genişlikler için 4.1 ve 4.2 şekillerinde gösterilen kritik sıcaklık grafiklerinde, U_0 arttıkça kritik sıcaklığın bir miktar arttığı daha sonra ise hemen hemen sabitlendiği görülmektedir. Bu etkileşmenin ihmal edilebileceği küçük U_0 değerleri için yapılan deneylerle niteliksel olarak uyumludur [14]. Benzer bir durum, şekil 4.8 ve 4.7 grafiklerinde de görüldüğü gibi yoğunluk oranı içinde de geçerlidir. KPMde hesaplanan yoğunluk oranı, gamze potansiyelin artan derinliğiyle tam yoğunlaşmadan uzak sabit bir değere gitmektedir. Örneğin, genişliği dar olan gamze potansiyel için bu değer $N = 10^6$ da yaklaşık 0.4 tür. 4.9 ve 4.10 şekillerinde görüldüğü gibi yoğunluk profili de KPMde daha gerçekçidir.

Bu tartışmaların sonucunda KPMnin, gamze potansiyeli betimlemede Dirac δ modeline göre daha uygun olduğu söylenebilir. Ayrıca ek kısmında da görüldüğü gibi, Dirac δ fonksiyonu, kesilmiş parabolik fonksiyonun özel bir limiti olarak temsil edilebilmektedir. Bu yüzden Dirac δ modeli ile etkileşmeyen bozon gazı için elde edilen tüm sonuçlar, KPMde de özel bir limit durumu olarak içerilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Bose, S.N. 1924. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. **Z.Phys**, 26: 178-181.
- [2] Einstein, A. 1924. Qunatentheorie der einatomigen idealen gases. In:Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp.261-267, Berlin.
- [3] Einstein, A. 1924. Qunatentheorie der einatomigen idealen gases. In:Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp.3-14, Berlin.
- [4] London, F. 1938. The λ –phenomenon of liquid helium and the Bose Einstein degeneracy. **Nature**, 141: 643-644.
- [5] London, F. 1938. On the Bose Einstein condensation. **Phys. Rev.**, 54: 947-954.
- [6] Pitaevskii, L., Stringari, S. 2003. Bose Einstein Condensation. Clarendon Press, pp.1-4, New York.
- [7] Penrose, O., Onsager, L. 1956. Bose Einstein condensation and liquid helium. **Phys.Rev.**, 104: 576-584.
- [8] Gross, E.P. 1961. Structure of a quantized vortex in boson systems. **Nuovo Cimento**, 20: 454-457.
- [9] Pitaevskii, L.P. 1961. Vortex lines in an imperfect Bose gas. **Soviet Physics JETP**, 13: 451-455.
- [10] Davis, K.B., Mewes, M.-O., Andrews, M.R., Van Druten, N.J., Durfee, D.S., Kurn, D.M., Ketterle, W. 1995. Bose Einstein condensation in a gas of sodium atoms. **Phys. Rev. Lett.**, 75: 3969-3973.
- [11] Bradley, C.C., Sackett, C.A., Tollett, J.J., Hulet, R.G. 1995. Evidence of Bose Einstein condensation in atomic gas with attractive interactions. **Phys. Rev. Lett.**, 75: 1687-1690.
- [12] Anderson, M.H., Ensher, J.R., Matthews, M.R., Wiemann, C.E., Cornell, E.A. 1995. Observation of Bose Einstein condensation in a dilute atomic vapor. **Science**, 269: 198-201.
- [13] Pethick, C.J., Smith, H. 2002. Bose Einstein Condensation In Dilute Gases. 2.baskı, Cambridge University Press, pp.62-65, Cambridge.

- [14] Garrett, M.C., Ratnapala, A., van Ooijen, E.D., Vale, C.J., Weegink, K., Schnelle, S.K., Vainio, O., Heckenberg, N.R., Rubinsztein-Dunlop, H., Davis, M.J. 2011. Growth dynamics of a Bose Einstein condensate in a dimple trap without cooling. **Phys. Rev. A.**, 83: 013630 1-9.
- [15] Stamper-Kurn, D.M., Miesner, H.-J., Chikkatur, A.P., Inouye, S., Stenger, J., Ketterle, W. 1998. Reversible formation of a Bose Einstein condensate. **Phys. Rev. Lett.**, 81: 2194-2197.
- [16] Pinkse, P.W.H., Mosk, A., Weidemüller, M., Reynolds, M.W., Hijmans, T.W., Walraven, J.T.M. 1997. Adiabatically changing the phase-space density of a trapped gas. **Phys. Rev. Lett.**, 78: 990-993.
- [17] Jacob, D., Mimoun, E., De Sarlo, L., Weitz, M., Dalibard, J., Gerbier F. 2011. Production of sodium Bose Einstein condensates in an optical dimple trap. **New Journal of Physics**, 13: 06522 1-16.
- [18] Uncu, H., Tarhan, D., Demiralp, E., Mustecaplioglu, O.E. 2007. Bose Einstein condensate in a harmonic trap decorated with Dirac delta functions. **Phys. Rev. A.**, 76: 013618 1-7.
- [19] Ma, Z.-Y., Foot, C.J., Cornish, S.L. 2004. Optimized evaporative cooling using a dimple potential: an efficient route to Bose Einstein condensation. **J. Phys. B.**, 37: 3187-3195.
- [20] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. 1997. Thermodynamics and Statistical Mechanics. 2.Baskı, Springer, pp.314-319, Berlin.
- [21] Yukalov, V.I. 2005. Modified semiclassical approximation for trapped Bose gases. **Phys. Rev. A.**, 72: 033608.
- [22] Demiralp, E. 2005. Bound states of n-dimensional harmonic oscillator decorated with Dirac delta functions. **J. Phys. A.:Math. Gen.**, 38: 4783-4793.
- [23] Avakian, M.P., Pogosyan, G., Sissakian, A.N., Ter-Antonyan, V.M. 1987. Spectroscopy of a singular linear oscillator. **Phys. Lett. A.**, 124: 233-236.
- [24] Lebedev, N.N. 1965. Special Functions and Their Applications. Prentice Hall, pp.260-271, New Jersey.
- [25] Hau, L.V., Harris, S.E., Dutton, Z., Behroozi, C.H. 1999. Light speed reduction of 17 metres per second in ultracold atoms. **Nature**, 397: 594-598.

- [26] Ketterle, W., van Druten, N.J. 1996. Bose Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. **Phys. Rev. A.**, 54: 656-660.
- [27] Landau, L.D., Lifshitz, E.M. 1977. Quantum Mechanics. Butterworth Heinemann, pp.164-175, Oxford.
- [28] Schiff, L.I. 1968. Quantum Mechanics. McGraw-Hill, pp.260-271, New York.
- [29] Hruska, M., Keung, W-Y., Sukhatme, U. 1997. Accuracy of semiclassical methods for shape invariant potentials. **Phys. Rev. A.**, 55: 3345-3350.
- [30] Goold, J., O'Donoghue, D., Busch, Th. 2008. Low-density, one-dimensional quantum gases in the presence of a localized attractive potential. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.**, 41: 215301-215308.

A. EK

1.1. Dirac Delta Fonksiyonu İçin Bir Model

Literatürde, gamze potansiyeller, Dirac δ fonksiyonu ile betimlenerek, gamze potansiyel eklenmiş harmonik tuzaktaki BEYin temel özelliklerinin açıklanabileceği gösterilmiştir [18, 30]. Bu bölümde Dirac δ fonksiyonunun, KPMnin bir limit durumu olduğu gösterilecektir.

Dirac δ fonksiyonunun bir temsili olarak:

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{için } |x| \leq a \\ 0 & \text{için } |x| > a \end{cases} \quad (1.1.1)$$

fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon, $a \rightarrow 0$ limitinde, Dirac δ fonksiyonunun belirleyici özellikleri olan $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ ve düzgün davranışlı ve $\pm\infty$ limitinde 0 a giden $h(x)$ fonksiyonları için $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0)$ koşullarını sağlamaktadır.

Dirac δ potansiyeli için (3.2.7) özdeğer eşitliğinin çözümü $\kappa = \sigma/2 = [-(2mE)]^{1/2}/\hbar$ 'dir. Böylece Dirac δ potansiyelinin bağlı durum özdeğeri:

$$E = -\frac{\hbar^2 \sigma^2}{8m}. \quad (1.1.2)$$

olarak bulunur [22]. Benzer bir özdeğer eşitliği

$$V(x) = \begin{cases} -U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{için } |x| \leq a \\ 0 & \text{için } |x| > a \end{cases} \quad (1.1.3)$$

potansiyeli için de bulunabilir. Bu potansiyel için bağlı durum çift ve tek özfonksiyonları sırasıyla:

$$\psi_c(x) = \begin{cases} A_c e^{\kappa x} & \text{için } x < -a \\ B_c \left[D_{\gamma_g} \left(\sqrt{\frac{mV}{\hbar}} x \right) + D_{\gamma_g} \left(-\sqrt{\frac{mV}{\hbar}} x \right) \right] & \text{için } |x| \leq a \\ A_c e^{-\kappa x} & \text{için } x > a \end{cases} \quad (1.1.4)$$

ve

$$\psi_t(x) = \begin{cases} A_t e^{\kappa x} & \text{için } x < -a \\ B_t \left[D_{\gamma_g} \left(\sqrt{\frac{mV}{\hbar}} x \right) - D_{\gamma_g} \left(-\sqrt{\frac{mV}{\hbar}} x \right) \right] & \text{için } |x| \leq a \\ -A_t e^{-\kappa x} & \text{için } x > a. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Burada $v = \sqrt{2U_0/(ma^2)}$, $\gamma_g = (E + U_0)/(\hbar v) - 1/2$ dir ve A_c, A_t, B_c, B_t sabitleri; normalizasyondan, dalga fonksiyonu ve türevinin $|x| = a$ noktasındaki süreklilik

şartlarından bulunabilir. Bu süreklilik şartlarından eşitlik (1.1.3)'deki potansiyel için çift ve tek özfonksiyonlarının özdeğer eşitlikleri sırasıyla

$$-\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{m\nu}} = -\sqrt{-(2\gamma+1)} = \frac{G_{\gamma_g}(\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a) - G_{\gamma_g}(-\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a)}{D_{\gamma_g}(\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a) + D_{\gamma_g}(-\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a)} \quad (1.1.6)$$

$$-\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{m\nu}} = -\sqrt{-(2\gamma+1)} = \frac{G_{\gamma_g}(\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a) + G_{\gamma_g}(-\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a)}{D_{\gamma_g}(\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a) - D_{\gamma_g}(-\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a)} \quad (1.1.7)$$

şekindedir. Burada $\gamma = E/(\hbar\nu) - 1/2$; D_{γ_g} eşitlik (3.2.11)'deki ifade iken, G_{γ_g} ise D_{γ_g} 'nin z 'ye göre türevidir. $a \rightarrow 0$ limitinde, U_0a sabit alındığında (1.1.6) eşitliğinin sol tarafının a 'ya bağımlılığı, $a^{3/4}$ derecesindedir. Bu yüzden eşitliğin sağ tarafının da $a^{3/4}$ derecesine kadar Taylor serisine açılması gerekir. Böylece eşitlik (1.1.6) şu hali alır:

$$-\sqrt{-(2\gamma+1)} = -(2\gamma_g+1)\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a + \frac{7}{6}\left(\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}}a\right)^3. \quad (1.1.8)$$

Bu denklemde ν , γ_g , γ ifadeleri yerine konursa ($a \rightarrow 0$) limitinde bağıl durum öz enerji değeri;

$$E = -\frac{8mU_0^2a^2}{9\hbar^2}. \quad (1.1.9)$$

bulunur. Bu ifade, Dirac δ fonksiyonunun özdeğer eşitliği ((1.1.2)) ile benzerdir. Bu da eşitlik (1.1.3)'de verilen potansiyelin $a \rightarrow 0$ 'a giderken Schrödinger eşitliğinin çözümü için Dirac δ potansiyeli ile aynı taban durum özdeğerine sahip olduğunu gösterir. Aynı işlemler eşitlik (1.1.7) için de yapılırsa bu eşitliğin $a \rightarrow 0$ limitinde hiç bir çözüme sahip olmadığı görülür. Böylece, $a \rightarrow 0$ limitinde eşitlik (1.1.3)'de verilen potansiyelin yalnızca bir bağıl duruma sahip olduğu görülür. Hiçbir tek öz durum olmadığından, taban durumu dışında başka bir çift bağıl öz durum da bulunamaz.

Saçılma durumları için (1.1.3) potansiyeli, Dirac δ potansiyeli ile aynı yansıma ve geçiş katsayılarını verir. Bunu görmek amacıyla öncelikle, $E > 0$ enerjisi ile $-\infty$ 'dan gelen bir dalga fonksiyonunun saçılma katsayıları hesaplanmalıdır. Dirac δ potansiyelinin saçılma durumu için dalga fonksiyonları şu şekildedir:

$$\Psi_{\delta_s}(x) = \begin{cases} e^{ikax} + R_{\delta}e^{-ikax} & \text{için } x < -a \\ T_{\delta}e^{ikax} & \text{için } x > a. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

Burada $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ 'dir. Dalga fonksiyonunun sürekliliği ve δ fonksiyonundan dolayı türevde oluşan süreksizlik kullanılarak yansıma ve geçiş katsayıları kolaylıkla bulunabilir:

$$T_{\delta} = \frac{2ik}{2ik + \sigma}, \quad (1.1.11)$$

$$R_\delta = -\frac{\sigma}{2ik + \sigma}. \quad (1.1.12)$$

Eşitlik (1.1.3)'deki potansiyelin, $E > 0$ enerjisi ile $-\infty$ 'dan gelen saçılma durumu dalga fonksiyonları şu şekildedir:

$$\psi_s(x) = \begin{cases} e^{ikax} + Re^{-ikax} & \text{için } x < -a \\ c_1 D_{\gamma_g}(\sqrt{\frac{mV}{\hbar}}x) + c_2 D_{\gamma_g}(-\sqrt{\frac{mV}{\hbar}}x) & \text{için } |x| \leq a \\ Te^{ikax} & \text{için } x > a. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Bu ifadedeki R ve T sabitleri, dalga fonksiyonunun ve türevinin $x = |a|$ 'daki süreklilikleri kullanılarak bulunur. R 'nin ifadesi çok uzun olduğundan $F_1(\lambda, a)$, $F_2(\lambda, a)$, $F_3(\lambda, a)$, $F_4(\lambda, a)$ ifadelerini tanımlayıp, R 'yi bunlar cinsinden yazmak uygun olacaktır:

$$F_1(\lambda, a) = -\Phi\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, a^2s^2\right) + 2(1 + \lambda)_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2s^2\right) \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned} F_2(\lambda, a) &= (k^2 + s^2 + a^2s^4)_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, a^2s^2\right) \\ &- 2s^2(1 + a^2s^2)(1 + \lambda)_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2s^2\right) \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned} F_3(\lambda, a) &= 3(-1 + iak + a^2s^2)_1F_1\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2s^2\right) \\ &+ 2a^2s^2(-1 + \lambda)_1F_1\left(\frac{3-\lambda}{2}, \frac{5}{2}, a^2s^2\right) \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

$$F_4(\lambda, a) = 2as^2\lambda_1F_1\left(1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2s^2\right) + (ik + as^2)_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, a^2s^2\right), \quad (1.1.17)$$

$$\begin{aligned} R &= -ae^{-2iak} \left[\frac{2a^2s^4(2 + \lambda)_1F_1\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{5}{2}, a^2s^2\right)F_1(\lambda, a)}{3_1F_1\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2s^2\right)F_2(\lambda, a)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3_1F_1\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2s^2\right)F_2(\lambda, a)}{F_3(\lambda, a)F_4(\lambda, a)} \right]. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Burada ${}_1F_1(\alpha, \gamma; y)$ konfluent hipergeometrik fonksiyondur [24]. T 'yi bulmak için ise

$$F_5(\lambda, a) = -2a^2s^2(2 + \lambda)_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{5}{2}, a^2s^2\right) {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, a^2s^2\right) \quad (1.1.19)$$

$$F_6(\lambda, a) = {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, a^2 s^2\right) + 2a^2 s^2 (1 + \lambda) {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2 s^2\right) \quad (1.1.20)$$

tanımları yapıлып

$$T = -\frac{ie^{-2iak} \left[F_5(\lambda, a) + 3 {}_1F_1\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3}{2}, a^2 s^2\right) F_6(\lambda, a) \right]}{F_3(\lambda, a) F_4(\lambda, a)} \quad (1.1.21)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte $U_0 a$ sabit kabul edilip, eşitliğin sağ tarafının pay ve paydası a 'ya bağlı olarak seriye açılırsa, $a \rightarrow 0$ limitinde, a 'dan bağımsız bir eşitlik elde edilir:

$$\lim_{a \rightarrow 0} T = \frac{3ik}{3ik + 4mU_0 a / \hbar^2}. \quad (1.1.22)$$

Burada $\sigma = 8maU_0 / (3\hbar^2)$ olduğundan, $U_0 a$ 'nın sabit olduğu durumda, T, (1.1.11) eşitliğindeki T_δ 'ya indirgenir. Bu bölümde son olarak, $a \rightarrow 0$ 'a giderken $U_0 = 3\hbar^2 \sigma / (8ma)$ için

$$U(x) = -U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (1.1.23)$$

potansiyeline sahip Hamiltoniyen'in özdeğerlerinin,

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sigma \delta(x) \quad (1.1.24)$$

potansiyeline sahip Hamiltoniyen'in özdeğerlerine yaklaştığı gösterilecek. Eşitlik (1.1.24)'deki potansiyele sahip Hamiltoniyenin özdeğerleri,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{\Lambda}{4}, \quad (1.1.25)$$

eşitliğini sağlayan λ değerleri cinsinden $E_\lambda = (\lambda + 1/2)\hbar\omega$ şeklindedir [18, 23]. Burada $\Lambda = \sigma \sqrt{\hbar / (m\omega)}$ 'dır. Tek özdeğerler, harmonik salıncı potansiyelinin tek özdeğerlerine eşittir, yani $n = 1, 3, 5, \dots$ için $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ 'dır [18]. $U_0 a = c$ sabit iken $a \rightarrow 0$ 'a giderken, eşitlik (4.1.14), eşitlik (1.1.25)'e indirgenir ve eşitlik (4.1.15)'in kökleri (λ) $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $\lambda_n = 2n + 1$ ' e gider. Bunu göstermek için ilk olarak, $U_0 a = c$ sabit olmak üzere, (4.1.14) denkleminin sol tarafını Taylor serisine açmak gerekir:

$$\sqrt{\frac{\omega}{\omega_g}} = \left(\frac{ma^3 \omega^2}{2c}\right)^{1/4} \left(1 + \frac{ma^3 \omega^2}{2c}\right)^{-1/4} \approx \left(\frac{ma^3 \omega^2}{2c}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{ma^3 \omega^2}{2c} + O(a^3)\right) \quad (1.1.26)$$

Ardından (4.1.14)'ün sağ tarafı $D_{\lambda_g}(B)$, $D_{\lambda_g}(-B)$, $G_{\lambda_g}(B)$ ve $G_{\lambda_g}(-B)$, $B = \sqrt{m\omega_g / \hbar} a$ cinsinden; $D_\lambda(A)$ ise $A = \sqrt{m\omega / \hbar} a$ cinsinden açılıp (1.1.26) da elde

edilen sonuca eşitlenerek

$$-\frac{8}{3} \frac{(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma(\frac{1-\lambda_g}{2})\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})} \frac{(mc)^{3/4}}{2^{1/4}\hbar^{3/2}} a^{3/4} = 2 \left(\frac{m}{2c}\right)^{1/4} \omega^{1/2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-1/2)}{\Gamma(\frac{1-\lambda_g}{2})\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} a^{3/4} \quad (1.1.27)$$

bulunur. Bu ifade düzenlendiğinde

$$\frac{2}{3} \frac{U_0 a m^{1/2}}{\hbar^{3/2} \omega^{1/2}} = \frac{\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}. \quad (1.1.28)$$

haline gelir. Bu denklemde $\sigma = 8maU_0/(3\hbar^2)$ ve $\Lambda = \sigma\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ değerleri yerine konursa, bu denklem eşitlik (1.1.25)'e indirgenir. U_0a sabit için $a \rightarrow 0$ 'a giderken, benzer işlemlere başvurulduğunda, tek özfonksiyonların özdeğer denklemi (4.1.15),

$$\frac{\Gamma(-1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})\Gamma(-\frac{\lambda_g}{2})} = 0 \quad (1.1.29)$$

şeklini alır. Bu limitte $\lambda_g = -1/2$ 'dir. Bu yüzden, ancak $\Gamma(\frac{1-\lambda}{2}) = \infty$ olursa, eşitlik (1.1.29)'ün sol tarafı da sıfır olur. $n = 0, 1, 2, \dots$ ise $\Gamma(-n) = \infty$ olduğundan, λ

$$\frac{1-\lambda}{2} = -n \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2n+1; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.30)$$

olur. Bu nedenle, $a \rightarrow 0$ limitinde, eşitlik (4.1.3)'de verilen potansiyelin tek özdeğerleri, orijinde Dirac δ potansiyeli eklenmiş harmonik salıncı potansiyelinin tek özdeğerlerine indirgenir.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Melike ÇIBIK AYDIN
Doğum Yeri ve Tarihi : Aydın 30.10.1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Anadolu Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI : **Cibik Aydın, M.**, Uncu, H., Deniz, C.
: A parabolic model for dimple potentials,
Phys. Scr., 88, 035006.

b) Bildiriler

-Uluslararası : Altan, M., Ozkan, T., Ayyildiz, O.,
: Yoruk, Z.O., **Cibik, M.**,
: "X-ray Spectroscopy of Three Dwarf Novae
: SUUMa, WXHyi and V426Oph",
: The 14th North American Workshop on
: Cataclysmic Variables and Related Objects,
: University of Arizona, Tucson, Arizona,
: 15-19 March 2009 (POSTER BİLDİRİ),
: 15/03/2009.

-Ulusal : **Çıbık Aydın, M.**, Uncu, H.
: Gamze Potansiyel İçin Matematiksel Bir
: Model, İzmir Genç Fizikçiler Kongresi,
: Ege Üniversitesi, İzmir, 13-15 Haziran 2012
: (SÖZLÜ SUNUM), 13/06/2012.

c) Katıldığı Projeler

: Gamze Potansiyelleri Kullanarak
: Bose Einstein Yoğuşuk Maddesini
: Kontrol Etmek,
: TÜBİTAK TBAG 108T003, 2009-2011.

İLETİŞİM

E-posta Adresi : melikecaydin@gmail.com
Tarih : 19.11.2013