

**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAT-YL-2004-0001**

**LOTKA-VOLTERRA SİSTEMLERİ
VE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Hazırlayan: Yılmaz ERDEM

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ

AYDIN 2004

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAT-YL-2004-0001

LOTKA-VOLTERRA SİSTEMLERİ
VE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Yılmaz ERDEM

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ

AYDIN 2004

ÖZ

Volterra integral denklemleri, Volterra integro-diferansiyel denklemleri ve Lotka-Volterra sistemleri hakkında bugüne kadar yapılan çalışmaların derlemesi olan bu çalışmada aşağıdaki yol izlendi:

I. Bölümde, integral denklemlerin değişik türlerinden bahsedildi ve Volterra integral denklemlerinin günümüze kadar yapılan çalışmaları hakkında kısaca bilgi verildi.

II. Bölümde, ikinci tip Volterra integral denkleminin sayısal çözüm yöntemleri ele alındı ve yerel kesme hataları bölümün sonunda çizelge halinde gösterildi.

III. Bölümde, Lotka-Volterra sistemlerinin sayısal çözümleri ele alındı ve Lotka-Volterra modelinin kararlılık durumları incelendi.

IV. Bölümde, doğrusal olmayan diferansiyel denklemler ile doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemler ele alındı. Şimdiye kadar yapılan çalışmalar verildi ve doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlerin sayısal incelemesi çalışıldı.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: İntegral denklem, Volterra integral denklem, Volterra integro-diferansiyel denklem, dikdörtgenler kuralı, yamuklar kuralı, yamuklar ve Simpson kuralı, Simpson kuralı, Runge-Kutta yöntemleri, Gregory yöntemleri, Euler yöntemleri, θ -yöntemi, doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklem, popülasyon, Lotka-Volterra sistemleri, global kararlılık, global asimptotik kararlılık, global üstel kararlılık, MATLAB, Mathematica, Lyapunov fonksiyonu.

ABSTRACT

In this work, which is aimed to collect the works about Volterra integral equations, Volterra integro-differential equations and Lotka-Volterra systems the following steps were taken:

In Chapter I, some information about studies on various types of integral equations and Volterra integral equations up to now have been given.

In Chapter II, Volterra integral equations of the second kind was dealt with and the local truncation errors was illustrated by tables at the end of Chapter II.

In Chapter III, the numerical solutions of Lotka-Volterra systems was discussed and the stability of Lotka-Volterra models have been given.

In Chapter IV, the nonlinear differential equations and nonlinear integro-differential equations was dealt with and the studies about this works up to now have been given. The numerical researches of nonlinear integral differential equations was done.

KEY WORDS: Integral equation, Volterra integral equation, Volterra integro-differential equation, rectangle rule, trapezoidal rule, the trapezoidal and Simpson rule, Simpson's rule, Runge-Kutta type methods, Gregory methods, Euler methods, the θ -method, nonlinear integro-differential equation, population, Lotka-Volterra systems, global stability, global asymptotic stability, global exponential stability, MATLAB, Mathematica, Lyapunov function.

İçindekiler

Öz	ii
Abstract	iii
1 GİRİŞ	1
1.1 Tezin Organizasyonu	1
1.2 Doğrusal İntegral Denklemler	2
1.2.1 Doğrusal İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	2
1.2.2 Diferansiyel İle İntegral Denklemler Arasındaki İlişki	3
1.3 Volterra İntegral Denklemleri	5
1.3.1 Giriş	5
1.3.2 Lojistik Diferansiyel Denklem	5
1.3.3 Gecikmeli Lojistik Diferansiyel Denklem	6
1.3.4 Lojistik Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem	7

1.4	Çoklu Türlerin Büyümesi	9
2	VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN SAYISAL YÖNTEMLER	10
2.1	Giriş	10
2.2	İntegral Denklemlerin Temel Tipleri	10
2.3	Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi	11
2.4	Volterra Denklemleri ve Çözümün Varlığı	12
2.5	Volterra İntegral Denklemleri İçin Sayısal Yöntemler	12
2.5.1	Dikdörtgenler Kuralı	13
2.5.2	Yamuklar Kuralı	14
2.5.3	Yamuklar ve Simpson Kuralları	15
2.5.4	Simpson Kuralı	18
3	LOTKA-VOLTERRA SİSTEMLERİ	23
3.1	Çoklu Türlerin Büyümesi	23
3.2	Lotka-Volterra Sisteminin Çözümü	24
3.3	Adi Diferansiyel Denklemlerin Lotka-Volterra Sistemleri	30
3.4	Lotka-Volterra Modelinin Global Kararlılığı	31

3.4.1	Global Kararlılık İçin Yeterli Koşullar	34
3.5	İntegral Terimli Lotka-Volterra Sistemleri	40
3.6	Gecikmeli Lotka-Volterra Sistemlerinin Global Kararlılığı	42
3.6.1	Sınırsız Gecikmeli Sistemler	43
3.6.2	Sınırlı Gecikmeli Sistemler	44
4	DOĞRUSAL OLMAYAN İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER	47
4.1	Giriş	47
4.2	Tek Türün Büyümesi	48
4.2.1	$u'(t) = \alpha u(t)$ İçin Euler Yönteminin Kararlılığı	49
4.2.2	Lojistik Denklem	51
4.2.3	Popülasyon ve Hasat	53
4.2.4	Genel Büyüme	54
4.3	Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklem	56
4.3.1	Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklemlerde Bazı Çalışmalar	58
4.4	Sınırlı ve Sınırsız Gecikmeli Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklemler	61

4.4.1	Sınırlı Gecikmeli Doğrusal Olmayan İntegro- Diferansiyel Denklemler	63
4.5	Doğrusal Olmayan Bir İntegro-Diferansiyel Denklemin Sayısal İncelenmesi	66
	Özet	72
	Summary	73
	Teşekkür	74
	Kaynaklar	75
	Öz Geçmiş	80

Çizelgeler Listesi

2.1	Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı	16
2.2	Simpson $\frac{1}{3}$ ve yamuklar kuralı	16
2.3	Simpson I Kuralı	19
2.4	Simpson II Kuralı	21
2.5	Sayısal çözümler ve hataları	22

Şekiller Listesi

3.1	$u(0) = v(0) = 1$ başlangıç noktaları için (3.1.2) denklem sisteminin Euler yöntemi ile sayısal çözümü.	25
3.2	$a = 1, c = 2, K = 121.848, u(0) = 1, v(0) = 3$ için (3.2.2) denklem sisteminin grafiği.	27
3.3	$u(0) = v(0) = 0.5$ başlangıç noktaları ile (3.2.1) denklem sisteminin ileri Euler yöntemi ile sayısal çözümü.	28
3.4	$u(0) = v(0) = 0.5$ başlangıç noktaları ile (3.2.1) denklem sisteminin değiştirilmiş (modified) Euler yöntemi ile sayısal çözümü.	29
3.5	$u(0) = v(0) = 0.5$ başlangıç noktaları ile (3.2.1) denklem sisteminin RK4 yöntemi ile sayısal çözümü.	30
3.6	(3.5.1) denklem sisteminin (a) Euler (b) değiştirilmiş Euler yöntemi ile sayısal çözümü.	41
4.1	(a) $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$, (b) $u(t) = u_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha = 5, u_0 = 1$ değerleri ile Mathematica grafiği	49

- 4.2 Solda $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$, $u_0 = 1$, $\alpha = 5$, $h = 0.1$ için sağda $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$, $u_0 = 1$, $\alpha = -5$, $h = 0.1$ Euler Yöntemi ile MATLAB grafiği 49
- 4.3 (a) $u'(t) = u(t) \cos(t)$ denkleminin Mathematica ile elde edilmiş gerçek değeri, (b) aynı denklemin Euler yönteminde $h = 0.01$ olarak elde edilmiş MATLAB grafiği, (c) Euler yönteminde $h = 1.8$ olarak elde edilmiş MATLAB grafiği. 51
- 4.4 $u_0 = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1$ başlangıç değerleri, $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1$ için (4.2.4) lojistik büyüme denkleminin MATLAB grafiği 52
- 4.5 Denklem (4.3.3) için $r = 1$, $c = 0.5, 0.2, 0.1$ ve 0.05 değerleri için dördüncü mertebe Runge-Kutta(RK4) yöntemi kullanarak elde edilen MATLAB grafiği 59
- 4.6 Doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklem $u'(t) = u(t)(1 - u(t) - \epsilon \int_0^t u(s) ds)$, $u(0) = 0.5$ başlangıç değeri ve $\epsilon = 2, 1, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ değerleri için sayısal çözümleri. 71

Bölüm 1

GİRİŞ

1.1 Tezin Organizasyonu

Özerk (autonomous) bir Lotka-Volterra Sistemi (bkz Wang & Yi (1995) ve Filiz (2000b)) aşağıdaki gibi verilsin;

$$\begin{aligned} u'_i(t) = & u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j(t) + \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u_j(t - \tau_{ij}) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \int_{p(t)}^t k_{ij}(t-s) u_j(s) ds \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

burada $u_i(t)$, i 'inci boyuttaki popülasyon yoğunluğunu, alt sınır $p(t) = 0, -\infty$, veya $t - \tau_{ij}$; $\alpha_i, \beta_{ij}, \eta_{ij}$ ve γ_{ij} reel değerli değişkenler $\tau_{ij} \geq 0$ ve bunlara ek olarak çekirdekler, $k_{ij}(t)$ negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun ve aşağıdaki şartı sağlasın,

$$\int_0^\infty k_{ij}(s) ds = 1.$$

Bu bölümde, (1.1.1) denklem sistemi ile verilen Volterra integral denklemlerinin değişik türleri hakkında bilgi vereceğiz; ikinci tip Volterra integral denklemi, ikinci tip Fredholm denklemleri ile doğrusal ve doğrusal olmayan Volterra integral denklemlerinden bahsedeceğiz.

Bölüm 2’de integral denklemlerin çeşitli sayısal çözümleri tanıtılacak ve uygun bir örnek ile yöntemlerin (dikdörtgenler yöntemi, yamuklar yöntemi, Simpson 1/3 ve Simpson 3/8 yöntemleri, Runge-Kutta yöntemleri, Gregory yöntemi, vb) yerel kesme hataları gösterilecektir.

Bölüm 3’de Lotka-Volterra (LV) sistemlerinin günlük hayatta kullanım alanları ve kararlılığı incelenecektir. Sınırlı ve sınırsız gecikmeli Lotka-Volterra sistemlerinin kararlılık durumları incelenecektir.

Bölüm 4’de doğrusal olmayan diferansiyel denklemler ile doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemleri ele alınacak ve bu denklemler üzerine çeşitli sayısal yöntemleri uygulanacaktır.

1.2 Doğrusal İntegral Denklemler

1.2.1 Doğrusal İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklem, integral işareti altında bir bilinmeyen fonksiyon içeren denklem olarak tanımlanır.

$$u(x) = f(t) + \lambda \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t, s)u(s)ds, \quad (1.2.1)$$

Burada, $\alpha(t), \beta(t)$ integralin sınır değerleri ve $K(t, s)$ integralin çekirdeğidir. İntegral denklemler Fredholm ve Volterra denklemleri olmak üzere ikiye ayrılır.

$$f(t) = \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad (1.2.2)$$

denklemini *birinci tip Fredholm denklemi* olarak bilinir. Eğer (1.2.2) denkleminde $f(t) = 0$ ise *birinci tip homojen Fredholm denklemi* elde edilir. $f(t)$ ve $K(t, s)$ verilen fonksiyonlar ve a, b ve λ sabit sayılar olduğunda,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad a < t < b, \quad (1.2.3)$$

ikinci tip Fredholm integral denklemi elde edilir. Eğer (1.2.3) denklemde $f(t) = 0$ ise *ikinci tip homojen Fredholm integral denklemi* elde edilir. İntegral denklemin uygulamadan çıkan bir başka tipinde, integralin üst sınırının değişken olmasıdır. Bu denklem,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad t > a,$$

biçimindedir ve *ikinci tip Volterra integral denklemi* olarak adlandırılır.

$$f(t) = \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad t > a,$$

denklemini *birinci tip Volterra integral denklemdir*. Yukarıda verilen tüm denklemler,

$$\sigma(t)u(t) = f(t) + \lambda \int_a^{\rho(t)} K(t, s)u(s)ds,$$

genel doğrusal integral denklemin özel örnekleri olarak düşünülebilir. Volterra denklemini için $\rho(t) = t$, Fredholm integral denklemini için $\rho(t) = b$ olarak düşünülebilir. Birinci tip denklemler için $\sigma(t) = 0$ iken ikinci tip denklemler için $\sigma(t) = 1$ olur.

1.2.2 Diferansiyel İle İntegral Denklemler Arasındaki İlişki

Eğer $p(t)$ ve $q(t)$ ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sisteminin verilen fonksiyonları ise

$$u''(t) + p(t)u(t) = q(t), \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (1.2.4)$$

denklemini,

$$K(t, s) = \begin{cases} s(1-t), & s \leq t \text{ ise,} \\ t(1-s), & t \leq s \text{ ise,} \end{cases}$$

ve

$$f(t) = - \int_0^1 K(t, s)q(s)ds,$$

olan

$$u(t) = f(t) + \int_0^1 K(t, s)p(s)u(s)ds, \quad (1.2.5)$$

ikinci tip Fredholm integral denkleminin $K(0, s) = K(1, s) = 0$ için (1.2.5) denkleminin $u(0) = u(1) = 0$ olarak elde edilir.

Bundan başka (1.2.5) denkleminin,

$$\begin{aligned} u(t) &= - \int_0^t K(t, s)q(s)ds - \int_t^1 K(t, s)q(s)ds + \int_0^t K(t, s)p(s)u(s)ds \\ &\quad + \int_t^1 K(t, s)p(s)u(s)ds, \\ &= -(1-t) \int_0^t sq(s)ds - t \int_t^1 (1-s)q(s)ds + (1-t) \int_0^t sp(s)u(s)ds \\ &\quad + t \int_t^1 (1-s)p(s)u(s)ds, \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Buradan,

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^t sq(s)ds - (1-t)tq(t) - \int_t^1 (1-s)q(s)ds + t(1-t)q(t) \\ &\quad - \int_0^t sp(s)u(s)ds + (1-t)tp(t)u(t) + \int_t^1 (1-s)p(s)u(s)ds \\ &\quad - t(1-t)p(t)u(t), \\ &= \int_0^t sq(s)ds - \int_t^1 q(s)ds + \int_t^1 sq(s)ds - \int_0^t sp(s)u(s)ds \\ &\quad + \int_t^1 p(s)u(s)ds - \int_t^1 sp(s)u(s)ds \\ &= \int_0^1 sq(s)ds - \int_t^1 q(s)ds - \int_0^1 sp(s)u(s)ds + \int_t^1 p(s)u(s)ds, \end{aligned}$$

elde edilir. Bir kez daha türev alınırsa,

$$u''(t) = q(t) - p(t)u(t), \quad (1.2.6)$$

olur ve (1.2.6) denkleminin, (1.2.5) integral denkleminin çözümü olup, (1.2.4) diferansiyel denklemini sağlar. Benzer şekilde aynı işlemler,

$$u''(t) + p(t)u(t) = q(t) \quad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta, \quad (1.2.7)$$

başlangıç değer problemine uygulanırsa, (1.2.7) diferansiyel denkleminin ile,

$$u(t) = \int_0^t (t-s)q(s)ds - \int_0^t (t-s)p(s)u(s)ds + \alpha + \beta t, \quad (1.2.8)$$

ikinci tip Volterra integral denkleminin denkliği elde edilir.

(1.2.5) ve (1.2.8) integral denklemlerinin sırasıyla (1.2.4) ve (1.2.7) diferansiyel denklemleri ile denkliğini, integral denklemin diferansiyel sistemi sağladığını göstermiş oluruz (bkz Ledermann *et al.* (1990)).

1.3 Volterra İntegral Denklemleri

1.3.1 Giriş

Volterra integro-diferansiyel denklem ilk kez 1920'lerin sonlarına doğru Volterra tarafından verilmiştir. Volterra integro-diferansiyel denklemlerin uygulamaları matematiksel modellemede çok önemli rol almaktadır. Biyoloji, ekoloji, tıp, nükleer reaktör dinamiği ve daha pek çok fen ve mühendislik uygulamalarında geniş yer almaktadır. Bu tip denklemler Volterra (1931) ve Volterra (1962)'deki çalışmalarda verilmiştir.

1.3.2 Lojistik Diferansiyel Denklem

Tek bir türün büyümesinin sınırlı olduğu ve bölgeye homojen olarak dağıtılmış olan nüfus yoğunluğu için genel bir model, lojistik diferansiyel denklem ile açıklanabilir. Aşağıdaki başlıklarda bu modelin değişik biçimleri ele alınmıştır.

- Lojistik Diferansiyel Denklem:

$\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{\alpha - \beta u(t)\}, & (t \geq 0), \\u(0) &= u_0,\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

şeklindedir.

- Hasatlanmış Lojistik Diferansiyel Denklem :

(1.3.1) lojistik diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş halidir (bkz Sánchez (1989), Borrelli and Coleman (1998) veya Mooney and Swift (1999)). Eğer hasat oranı sabiti $H > 0$ ise, $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{\alpha - \beta u(t)\} - H, \\u(0) &= u_0,\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

şeklinde verilir.

Eğer (1.3.1) denklemini aşağıdaki gibi değiştirirsek (bkz Cushing (1977)),

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{\alpha - \beta(u(t))^m\}, \\u(0) &= u_0.\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

(1.3.1) için doğrusal olmayan genelleştirilmiş halini elde ederiz, burada α, β ve m pozitif reel sayıdır. (1.3.3)'in yaklaşık (limit durumundaki) çözümü $u^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/m}$ şeklindedir.

1.3.3 Gecikmeli Lojistik Diferansiyel Denklem

Gecikmeli lojistik diferansiyel denklem (1.3.1) lojistik denkleminin ilginç bir genelleştirilmesidir.

- Gecikmeli Lojistik Diferansiyel Denklem :

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{\alpha - \beta u(t - \tau)\}, \quad (t \geq 0), \\u(0) &= \phi(t), \quad (-\tau \leq t \leq 0).\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

Eğer $w(t) = (\beta u(t) - \alpha)/\alpha$ alırsak (1.3.4) denkleminin daha kapsamlı biçimi,

$$\begin{aligned}w'(t) &= -\alpha w(t - \tau)\{1 + w(t)\}, \quad (t \geq 0), \\w(0) &= \bar{\phi}(t), \quad (-\tau \leq t \leq 0),\end{aligned}\tag{1.3.5}$$

şeklinde elde edilir (bkz Wright (1955), Jones (1962)). Yukarıdaki örnekler (1.3.1) denkleminin farklı biçimleridir. Bir başka örnek olarak,

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{\alpha - \beta u(t) - \gamma u(t - \tau)\}, \quad (t \geq 0), \\u(0) &= \phi(t) \quad (-\tau \leq t \leq 0),\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

verilebilir.

Yukarıda çeşitli gecikmeli diferansiyel denklemlere örnekler verdik ancak, bu tezde gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal ve analitik incelenmesi ele alınmayacaktır. Fikir vermesi açısından birkaç örnek ile yetineceğiz.

1.3.4 Lojistik Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem

Gözönünde bulunduracağımız bir başka model,

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0,\tag{1.3.7}$$

biçiminde verilen integro-diferansiyel denklemdir. Burada β katsayısının bulunduğu kareli terim, kirlenme terimini ifade eder. (1.3.7) ile verilen denklem biyolojide popülasyon büyümesini modellemek için kullanılır. Volterra (1931) ve Volterra (1959) çalışmalarında biyolojik popülasyonun büyümesini incelemiştir.

ve bunun için matematiksel modeller ortaya çıkarmıştır. Tek tür için denklem biçimi:

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_0^t k(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.3.8)$$

veya

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{-\infty}^t k(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3.9)$$

şeklinde. Ek olarak integral sınırlarında τ gecikme terimi de bulunabilir,

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{t-\tau}^t k(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3.10)$$

burada t zamanındaki $u(t)$ popülasyon büyüklüğü ve α , β ve γ pozitif sabitler, $k(t)$ kalıtsal etkidir. Bununla ilgili ilk çalışma, $\forall t \geq 0$, $k(t) \geq 0$ için Volterra (1959) tarafından ele alınmıştır. Eğer $\gamma = 0$ veya $k(t) \equiv 0$ ise (1.3.8), (1.3.9) ve (1.3.10) denklemleri lojistik diferansiyel denklem olarak bilinen (1.3.1) denklemine dönüşür (bkz örneğin Volterra (1931), Volterra (1962), Davis (1962), Pielou (1969), Gilpin and Ayala (1973), Cushing (1977), MacDonald (1978), Gopalsamy (1992), Boyce and DiPrima (1997), Borrelli and Coleman (1998)).

(1.3.3) denkleminde $(u(t))^m$ ifadesinin yerine integral terim alırsak, aşağıdaki gibi yeni bir integro-diferansiyel denklem elde edilir.

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \left(\int_0^\infty u(t-s)k(s)ds \right)^m \right\}, \quad (m > 0), \quad (1.3.11)$$

veya

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_0^\infty \{u(t-s)\}^m k(s)ds \right\}. \quad (1.3.12)$$

Eğer $\sigma_\infty = \int_0^\infty k(s)ds = 1$ ise (1.3.11) veya (1.3.12) denklemlerinin sabit (durgun) (steady-state) çözümü (1.3.3) denkleminin çözümüne benzer ve limit durumdaki yaklaşık çözümü $u^* = \left(\frac{\alpha}{\beta + \gamma} \right)^{1/m}$ olur.

1.4 Çoklu Türlerin Büyümesi

Dinamik popülasyon modellerinde sürekli zaman gecikmesi Volterra (1931)'in öncü çalışmasından sonra pek çok bilim adamı tarafından ele alındı. Analizlerin çoğu tekli türdeki popülasyon modelleri (Cushing (1977), Cushing (1976), Miller (1966), Lakshmikantham and Rao (1995), ve Landman (1980)) veya av-avcı modelleri (Davis (1962), Boyce and DiPrima (1997), Borrelli and Coleman (1998)) tarafından sınırlandırılmıştır. Şimdi bu denklemlerin analog sistemlerini ele alacağız.

- Denklemlerin Lotka-Volterra Sistemi:

Şimdi, bahsedeceğimiz Lotka-Volterra (LV) modeli (1.4.1) yırtıcı-yem etkileşim modelinin en basit şeklidir ve ekolojik modellemede ortaya çıkar. Model Lotka (1925), Volterra (1926) veya Volterra (1928)'den bağımsız olarak geliştirilmiştir.

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{\alpha_1 - \beta_1 v(t)\}, & u(0) &= u_0, \\v'(t) &= -v(t)\{\alpha_2 - \beta_2 u(t)\}, & v(0) &= v_0,\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

burada $u(t)$ ve $v(t)$ yem ve yırtıcı hayvan türlerinin popülasyonunu, α_i , ($i = 1, 2$), i 'inci türün net doğum oranını, β_i , ($i = 1, 2$) ise iki türün arasındaki etkileşim oranını gösterir.

Gopalsamy (1980) aşağıdaki sistem ile türlerin birbiriyle etkileşiminin salınımlı bir şekilde olduğunu buldu.

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t) \left\{ \alpha_1 - \beta_1 v(t) - \gamma_1 \int_{p(t)}^t k_1(t-s)v(s)ds \right\}, & u(0) &= u_0, \\v'(t) &= v(t) \left\{ -\alpha_2 + \beta_2 u(t) + \gamma_2 \int_{p(t)}^t k_2(t-s)u(s)ds \right\}, & v(0) &= v_0,\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

burada $p(t) = 0, -\infty$, $k(t) = \exp(-\mu t)$ tipinde gecikmeli çekirdekler için μ pozitif bir parametre olur ve burada α_1 ve α_2 birinci ve ikinci türün düşme ve yükselme katsayısıdır. Eğer $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise (1.4.2) denklemi klasik Lotka-Volterra sistemine indirgenir.

Bölüm 2

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN SAYISAL YÖNTEMLER

2.1 Giriş

Bu bölümde aşağıdaki gibi ikinci tip Volterra integral denklemini,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t, s)u(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (2.1.1)$$

ele alacağız ve bazı sayısal çözüm yöntemlerini, örneğin dikdörtgenler (Euler) yöntemi, yamuklar yöntemi, Simpson $\frac{1}{3}$ ve Simpson $\frac{3}{8}$ yöntemlerini vereceğiz. Bu bölümde, sonraki bölümlerde temel teşkil edecek bazı sayısal integrasyon yöntemlerini açıklayacağız.

Kısım 2.2'de değişik integral denklemlerden, Kısım 2.3'de de integro-diferansiyel denklemlerden bahsedeceğiz.

2.2 İntegral Denklemlerin Temel Tipleri

İntegral denklem ilk kez Du Bois-Reymond tarafından 1883 tarihinde verildi. *İntegral denklem*, integral işareti altında bir bilinmeyen fonksiyon içeren denk-

lemdir. Bunu ikiye ayırırız, birincisinde integral sınırları aşağıdaki gibi belirlidir:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad (a \leq t \leq b), \quad (2.2.1)$$

burada $f(t)$ ve $K(t, s)$ verilen fonksiyonlar ve λ , a ve b sabitlerdir. (2.2.1) denklemi **ikinci tip doğrusal Fredholm integral denklemi** olarak isimlendirilir. $K(t, s)$ integral denklemin çekirdeğidir. Eğer integralin üst sınırı değişkense,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(t, s, u(s))ds \quad t \geq 0, \quad (2.2.2)$$

ikinci tip doğrusal olmayan Volterra integral denklemi elde edilir. (2.2.2) denklemi $0 \leq t < \infty$ 'den ziyade $0 \leq t \leq T < \infty$ için daha uygundur. Özel olarak,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t, s)u(s)ds, \quad t > 0, \quad (2.2.3)$$

denklemi ikinci tip doğrusal Volterra integral denklemdir. Volterra integral denklemleri genellikle zamana veya nüfusa bağlı sistemlerde karşımıza çıkar.

Tanım 2.2.1 (2.2.3) denklemindeki çekirdek $(t-\xi)$ 'nin $K(t, \xi) = k(t-\xi)$ şeklindeki gibi bir fonksiyonu ise K 'ya konvolüsyon tipinde çekirdek denir.

2.3 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemi

Eğer (2.1.1) denkleminin türevini alırsak,

$$u'(t) = f'(t) + \lambda K(t, t)u(t) + \lambda \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)u(s)ds, \quad (2.3.1)$$

denklemi elde edilir. Bu bir Volterra integro-diferansiyel denkleme örnektir (bkz Collatz (1966)). (2.3.1) ile verilen denklemin genel hali,

$$u'(t) = \mathcal{F} \left(t, u(t), \int_0^t \mathcal{K}(t, s, u(s))ds \right), \quad (2.3.2)$$

şekindedir.

2.4 Volterra Denklemleri ve Çözümün Varlığı

(2.2.2) denklemini düşünürsek,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(t, s, u(s)) ds, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.4.1)$$

denkleminde $u(t)$ 'nin bilinmediği, $f(t)$ fonksiyonu ile \mathcal{K} çekirdeğinin bilindiği varsayılıyor.

- a) $f(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ aralığında sürekli fonksiyon ,
- b) $\mathcal{K}(t, s, z)$ çekirdeği $(0 \leq s \leq t \leq T)$, $-\infty < z < \infty$ aralığında sürekli,
- c) Çekirdek Lipschitz koşulunu sağlayacak,

$$|\mathcal{K}(t, s, z_1) - \mathcal{K}(t, s, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|, \quad (2.4.2)$$

şeklindedir. $0 \leq s \leq t \leq T$ ve $\forall z_1, z_2$ için $[0, T]$ aralığında $u(t)$ çözümü tek ve sürekli. Bu sonucun ispatı için (Tricomi (1957), Smithies (1958), Davis (1962) ve Linz (1985)) bakınız.

2.5 Volterra İntegral Denklemleri İçin Sayısal Yöntemler

Bu bölümde (2.4.1) denkleminin sayısal çözümleri için kullanılan temel formülleri sınıflandırarak ana hatlarını vereceğiz.

Verilen adım aralığı $h > 0$ için $t_k = k * h$, $k = 0, 1, \dots, n$ noktalarında çözümü hesaplayacağız. $u(t_n)$ için $\tilde{u}(t_n)$ yaklaşık çözümünü $t = t_n$ koyarak hesaplayacağız ve (2.4.1) denkleminin sağındaki integral teriminin yerine sayısal integral kuralında t_k , $k = 0, 1, \dots, n$ için integral değerini kullanacağız. Daha sonra $\tilde{u}(t_n)$ için meydana gelen denklemi çözeceğiz. (2.4.1) denkleminde integral

kuralını,

$$\int_0^{nh} g(t)dt \approx h \sum_{k=0}^n w_{nk}g(t_k), \quad (2.5.1)$$

(2.4.1) denklemindeki integralin yerine kullanınız ve uygun koşullar altında yaklaşık çözümün $\tilde{u}(t_n)$ değerlerini tanımlayan,

$$\tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=0}^n w_{nk}\mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.5.2)$$

denklemini elde ederiz. Adım adım hesaplamada yaklaşık çözüm $\tilde{u}(t_0) = f(t_0)$ olarak alınır. Eğer w_{nk} ağırlık fonksiyonları düzgün sürekli ise, yeterince küçük h ve Kısım 2.4'ün varsayılan durumları için denklemin tek çözümü vardır.

2.5.1 Dikdörtgenler Kuralı

İntegral hesabında en basit yaklaşım Riemann anlamında integral tanımı olan dikdörtgenler yoluyla integral alma ile elde edilir. Bu şekilde yapılan hesaplama yöntemine Euler yöntemi de denir. İntegralini hesaplayacağımız $[0, T]$ aralığı n eşit parçaya bölünür ve

$$\text{soldan} \quad \int_0^{t_n} \phi(s)ds \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \phi(t_i),$$

$$\text{sağdan} \quad \int_0^{t_n} \phi(s)ds \approx h \sum_{i=1}^n \phi(t_i),$$

değerleri ile hesaplanır. (2.4.1) denklemini için düşünersek,

$$\text{Açık Euler} \quad \tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)), \quad (2.5.3)$$

$$\text{Kapalı Euler} \quad \tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=1}^n \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)), \quad (2.5.4)$$

elde edilir.

Bunlar dikdörtgensel yöntemlere iki örnektir, sırasıyla açık Euler kuralı, kapalı Euler kuralı olarak isimlendirilir. Eğer $u(t_r)$, $(r = 0, 1, \dots, n-1)$ değerlerini

biliyorsak $u(t_n)$ değerini buluruz. Bundan dolayı (2.5.3) denklemi açık olarak isimlendirilir. (2.5.4) denklemi kapalıdır. Doğrusal durumda (2.1.1) denklemi eğer $\lambda h\mathcal{K}(t_n, t_n) \neq 1$ ise $\tilde{u}(t_n)$ için çözülebilir (ve doğrusal olmayan durumda buna benzer durum vardır). Gerçekten doğrusal denklem için $\mathcal{K}(t, s, u(s)) = \mathcal{K}(t, s)u(s)$ oluyorsa, (2.5.4) denklemi $\tilde{u}(t_0) = f(t_0)$ ile,

$$\tilde{u}(t_n)(1 - \lambda h\mathcal{K}(t_n, t_n)) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k) \tilde{u}(t_k), \quad (2.5.5)$$

olur ve $\tilde{u}(t_n)$ için direkt olarak çözülebilir. Doğrusal olmayan durumda $\tilde{u}(t_n)$ değerini istenilen bir doğrulukta çözmek için iterasyon teknikleri kullanılır. Dikdörtgenler kuralından elde edilen çözümün birinci derece doğruluğa sahip olduğu görülebilir (bkz Turner and Buchanan (1992) veya Conte (1980)).

2.5.2 Yamuklar Kuralı

(2.4.1) denklemine yamuklar kuralını uygularsak,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t_n) = & f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_0, \tilde{u}(t_0)) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)) + \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_n, \tilde{u}(t_n)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

çözümünü yaparak $\tilde{u}(t_n)$ hesaplanır. Bu kapalı şekilde görünen aşağıdaki denklemi verir:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t_n) - \frac{\lambda h}{2} \mathcal{K}(t_n, t_n, \tilde{u}(t_n)) = & f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_0, \tilde{u}(t_0)) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

$\mathcal{K}(t, s, u(s)) = \mathcal{K}(t, s)u(s)$ ile bir doğrusal integral denklem için (2.5.7) denklemi $\tilde{u}(t_0) = f(t_0)$ ile,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t_n) \left(1 - \frac{\lambda h}{2} \mathcal{K}(t_n, t_n) \right) = & f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_0) \tilde{u}(t_0) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k) \tilde{u}(t_k) \right\}, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

olur ve $\tilde{u}(t_n)$ için direkt olarak çözülebilir. Eğer doğrusal olmayan durum varsa ve (2.4.2)'de verilen L için eğer $\frac{\lambda h L}{2} < 1$ ise, tek bir $\tilde{u}(t_n)$ vardır ve istenilen bir doğrulukta $\tilde{u}(t_n)$ değerini çözmek için bazı iterasyon teknikleri kullanılır. Yamuklar kuralında elde edilen doğruluğun ikinci merteye doğruluğa sahip olduğu görülebilir (bkz Baker (1977), Linz (1985) veya Gerald and Wheatley (1999)).

2.5.3 Yamuklar ve Simpson Kuralları

Simpson $\frac{1}{3}$ kuralının (bkz Gerald and Wheatley (1999)) veya Simpson $\frac{3}{8}$ kuralının (2.4.1) denkleminde doğrudan uygulanamayacağı kolaylıkla görülür. Yukarıdaki altbölümlerden, dikdörtgenler kuralı ve yamuklar kuralı tüm aralıklar için (çift veya tek) uygulanabilir, fakat Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı sadece çift adımlı aralıklara uygulanabilir ve Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı ise üçe bölünebilen adım aralıklarını gerektirir. Eğer aralık sayısı çift değilse, aralığın başında veya sonunda yamuklar kuralı diğer yerlerde ise Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı kullanılır. Sonuçlar Çizelge 2.1 ve 2.2'de gösterilmiştir. Yamuklar kuralı, Simpson kuralı ile (2.5.1) denklemindeki değişimleri vermek için birleştirilebilir. Örneğin, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\int_0^{(2n+1)h} g(t)dt \approx \frac{h}{2}\{g(0) + g(h)\} + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n g(2kh) + \frac{2h}{3} \sum_{k=0}^n g((2k+1)h),$$

şeklinde verebiliriz. Bu yaklaşımlar bize nh sabit ve $h \rightarrow 0$ iken sırasıyla $O(h^4)$ ve $O(h^3)$ yerel kesme hatası verir. $w_{n,k}$ ağırlıklarının uygun sırası Çizelge 2.1'de verilmiştir.

İkinci yöntem Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve yamuklar kuralı için,

$$\begin{aligned} \int_0^{(2n+1)h} g(t)dt \approx \frac{4h}{3} \sum_{k=0}^{n-1} g(2kh) &+ \frac{2h}{3} \sum_{k=0}^n g((2k+1)h) \\ &+ \frac{h}{2}\{g(2nh) + g((2n+1)h)\}, \end{aligned}$$

denklemini ile verilir.

Çizelge 2.1: Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı

n\k	0	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$					
3	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$			
5	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$		
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$	
⋮				

Çizelge 2.2: Simpson $\frac{1}{3}$ ve yamuklar kuralı

n\k	0	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$					
3	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$				
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$			
5	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$		
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$	
⋮				

$w_{n,k}$ ağırlık fonksiyonlarının sırası Çizelge 2.2'de verilmiştir. Bu yöntemin yerel kesme hatası $h \rightarrow 0$ iken $O(h^3)$ 'tür. İkinci türden Volterra integral denkleminin sayısal çözümü için Çizelge 2.1'i aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

Eğer **n çift ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Eğer **n tek ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= \frac{1}{2}, \\w_{n,1} &= \frac{5}{6}, \quad n \geq 3, \\w_{n,2k} &= \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \\w_{n,2k+1} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1, \\w_{n,n} &= \frac{1}{3}, \quad n \geq 3\end{aligned}$$

Simpson $\frac{1}{3}$ ve yamuklar kuralı için (2.5.1) denklemini düşünürsek:

Eğer **n çift ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Eğer **n tek ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, \\w_{n,n-1} &= \frac{5}{6}, \quad n \geq 3, \\w_{n,n} &= \frac{1}{2}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

2.5.4 Simpson Kuralı

Simpson kuralı yamuklar kuralından potansiyel olarak daha fazla doğruluğa sahiptir, fakat sadece n 'nin çift olduğu durumda doğrudan uygulanabilir, n 'nin tek olduğu değerler için ilave bir formülün kullanılması gereklidir. Eğer Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı $n \geq 2$ için t_0, t_1, t_2, t_3 noktalarına uygulanırsa elde edilen ağırlık fonksiyonları Çizelge 2.3'de gösterilir.

Eğer **n çift ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Çizelge 2.3: Simpson I Kuralı

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$							
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$						
3	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$					
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
5	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$			
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$		
7	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$	
⋮					

Eğer **n tek ise** :

$$\begin{aligned}
 w_{n,0} &= \frac{3}{8}, \\
 w_{n,1} &= w_{n,2} = \frac{9}{8}, \\
 w_{n,3} &= \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n3}, \\
 w_{n,2k} &= \frac{4}{3}, \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}, \\
 w_{n,2k+1} &= \frac{2}{3}, \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2} \\
 w_{n,n} &= \frac{1}{3}, \quad n \geq 5,
 \end{aligned}$$

burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır ve

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki ağırlıkların sayısal gösterimi Simpson I kuralı olarak adlandırılır ve dördüncü mertebeden yakınsama verir.

Eğer $\frac{3}{8}$ kuralını $t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ için uygularsak Çizelge 2.4 elde edilir.

Eğer **n çift ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Eğer **n tek ise** :

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= \frac{1}{3}, \quad n \geq 5, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-5}{2}, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n-5}{2}, \\w_{n,n-3} &= \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n3}, \\w_{n,n-1} &= \frac{9}{8}, \\w_{n,n} &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Yukarıdaki ağırlıkların sayısal gösterimi Simpson II kuralı olarak adlandırılır.

Örnek 2.1 *Aşağıdaki gibi ikinci tip Volterra integral denklemini ele alalım;*

$$u(t) = \exp(t) + \lambda \int_0^t \exp(t-s)u(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (2.5.9)$$

Gerçek çözüm $u(t) = \exp((1 + \lambda)t)$ 'dir. Eğer $\lambda = -1$ ise $u(t) = 1$ elde edilir. Çizelge 2.5'te (2.5.9) denklemini için çeşitli sayısal çözüm yöntemleri ile elde edilmiş hata değerleri gösterilmiştir. Burada,

$$\text{hata} = |\text{gerçek değer} - \text{yaklaşık değer}|$$

eşitliği ile ifade edilmiştir.

Çizelge 2.4: Simpson II Kuralı

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$							
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$						
3	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$					
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
5	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$			
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$		
7	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	
⋮					

Bu bölümde ikinci tip Volterra integral denklemlerinin sayısal çözümleri üzerinde durduk. Bu tip denklemlerde gerektiğinde orta nokta kuralı, Runge-Kutta yöntemleri, Gregory yöntemleri gibi farklı yöntemler de kullanılabilir (Baker (1977), Linz (1985), Filiz (2000b), vb).

Çizelge 2.5: Sayısal çözümler ve hataları

t	Gerçek	Dikdörtgenler			Yamuklar			Yamuk+Simpson		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.01	1.00	9.6e-002	4.8e-002	2.4e-002	8.3e-005	2.1e-005	5.2e-006	8.3e-005	7.1e-007	9.1e-008
0.02	1.00	9.2e-002	4.5e-002	2.3e-002	1.7e-004	4.2e-005	1.0e-005	1.2e-005	1.5e-006	2.0e-007
0.03	1.00	8.7e-002	4.3e-002	2.1e-002	2.5e-004	6.3e-005	1.6e-005	9.7e-005	2.5e-006	3.1e-007
0.04	1.00	8.3e-002	4.1e-002	2.0e-002	3.3e-004	8.3e-005	2.1e-005	2.7e-005	3.5e-006	4.5e-007
0.05	1.00	7.9e-002	3.8e-002	1.9e-002	4.2e-004	1.0e-004	2.6e-005	1.2e-004	4.8e-006	6.1e-007
0.06	1.00	7.4e-002	3.6e-002	1.8e-002	5.0e-004	1.3e-004	3.1e-005	4.7e-005	6.2e-006	7.8e-007
0.07	1.00	7.0e-002	3.4e-002	1.7e-002	5.8e-004	1.5e-004	3.6e-005	1.4e-004	7.7e-006	9.9e-007
0.08	1.00	6.6e-002	3.1e-002	1.5e-002	6.7e-004	1.7e-004	4.2e-005	7.4e-005	9.6e-006	1.2e-006
0.09	1.00	6.1e-002	2.9e-002	1.4e-002	7.5e-004	1.9e-004	4.7e-005	1.7e-004	1.2e-005	1.5e-006
1.00	1.00	5.7e-002	2.7e-002	1.3e-002	8.3e-004	2.1e-004	5.2e-005	1.1e-004	1.4e-005	1.8e-006
		$O(h)$			$O(h^2)$			$O(h^3)$		
t	Gerçek	Simpson+Yamuk			Simpson I			Simpson II		
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.01	1.00	8.3e-005	7.1e-007	8.8e-008	-	0.36e-08	0.21e-09	-	0.36e-08	0.21e-09
0.02	1.00	1.2e-005	1.4e-006	1.8e-007	0.12e-06	0.66e-08	0.41e-09	0.12e-06	0.66e-08	0.41e-09
0.03	1.00	7.2e-005	2.1e-006	2.6e-007	0.41e-06	0.95e-08	0.61e-09	0.41e-06	0.96e-08	0.62e-09
0.04	1.00	2.4e-005	2.9e-006	3.5e-007	0.20e-06	0.12e-07	0.81e-09	0.20e-06	0.13e-07	0.82e-09
0.05	1.00	6.0e-005	3.6e-006	4.4e-007	0.56e-06	0.15e-07	0.10e-08	0.49e-06	0.16e-07	0.10e-08
0.06	1.00	3.5e-005	4.3e-006	5.3e-007	0.26e-06	0.18e-07	0.12e-08	0.27e-06	0.19e-07	0.12e-08
0.07	1.00	4.8e-005	5.0e-006	6.2e-007	0.72e-06	0.20e-07	0.14e-08	0.57e-06	0.22e-07	0.14e-08
0.08	1.00	4.7e-005	5.7e-006	7.0e-007	0.32e-06	0.23e-07	0.16e-08	0.35e-06	0.25e-07	0.16e-08
0.09	1.00	3.6e-005	6.4e-006	7.9e-007	0.89e-06	0.25e-07	0.17e-08	0.65e-06	0.28e-07	0.18e-08
1.00	1.00	5.9e-005	7.1e-006	8.8e-007	0.36e-06	0.27e-07	0.19e-08	0.43e-06	0.31e-07	0.20e-08
		$O(h^3)$			$O(h^4)$			$O(h^4)$		

Bölüm 3

LOTKA-VOLTERRA SİSTEMLERİ

3.1 Çoklu Türlerin Büyümesi

Popülasyonda, birbirini etkileyen bir çok tür bulunduğundan bu bölümde çoklu türlerin büyümesini modelleyeceğiz. Biyoloji, ekoloji, tıp ve mühendislikte çok önemli yer tutan ve kullanılan Lotka-Volterra (LV) sistemlerini inceleyeceğiz.

Matematiksel ekolojide başlıca makalelerin ve çoklu türlerin büyümesi analizinin başlangıç noktası Volterra (1931)'dir. Volterra, av türünün yoğunluğunu $u(t)$ ile, avcının yoğunluğunu $v(t)$ ile tanımlamaktadır. Av ile avcının büyümesini diferansiyel denklem sistemleri ile ortaya koymaktadır.

Avın büyüme oranını (eğer avcı yoksa), α pozitif reel sayı olmak üzere $u'(t) = \alpha u(t)$ olarak bilinen üstel büyüme denklemini ele almıştır. Bundan başka avın oranı, avcı yoğunluğunun oranına bağlı olarak doğrusal olarak azalacağını kabul etmiş ve av denklemi için:

$$u'(t) = u(t)(\alpha_1 - \beta_1 v(t)), \quad \alpha_1, \beta_1 > 0,$$

denklemini elde etmiştir.

Avcı için, avın yokluğunda yoğunluk üstel olarak sifira azalacağını, fakat $u(t)$ yoğunluğu ile büyüme oranının artacağını farzetmiştir. Avcı denklemi için:

$$v'(t) = v(t)(-\alpha_2 + \beta_2 u(t)), \quad \alpha_2, \beta_2 > 0,$$

denklemini çıkarmıştır.

Yukarıdaki iki denklemden,

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)(\alpha_1 - \beta_1 v(t)), \\ v'(t) &= v(t)(-\alpha_2 + \beta_2 u(t)), \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu model aynı zamanda Lotka (1920) tarafından kimyasal kinetik metninde ele alındı. (3.1.1)'ün üç tane çözümünü elde ederiz. Eğer $u(0) = 0$ ve $v(0) = 0$ ise, o zaman $\forall t > 0$ için $u(t) = v(t) = 0$ dır. Eğer $u(0) = 0$ ve $v(0) > 0$ ise, o zaman $u(t) = 0$ ve $v(t) = v(0) \exp(-\alpha_2 t)$ dir. Eğer $v(0) = 0$ ve $u(0) > 0$ ise, o zaman da $v(t) = 0$ ve $u(t) = u(0) \exp(\alpha_1 t)$ elde edilir.

Örnek 3.1 $u(t)$ ve $v(t)$ pozitif fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= u(t) \left(1 - \frac{1}{2}v(t) \right), \\ \frac{dv(t)}{dt} &= -v(t) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}u(t) \right), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

sisteminin çözümünü düşünelim. Eğer $u(t) = \alpha$, $v(t) = \beta$ olduğunda $u'(t) = v'(t) = 0$ ise α ve β kritik noktaldır. Bu sistemin kritik noktaları $u(t)(1 - 0.5v(t)) = 0$, $v(t)(0.75 - 0.25u(t)) = 0$, olur ve denklem sisteminin çözümü, $(0, 0)$, $(3, 2)$ olarak bulunur.

3.2 Lotka-Volterra Sisteminin Çözümü

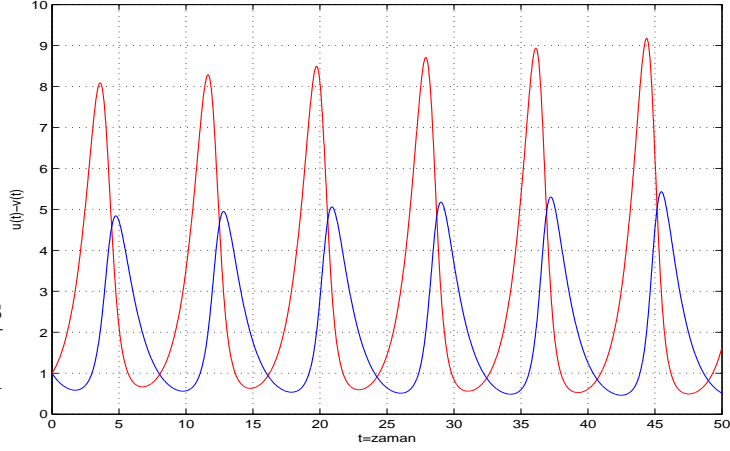
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = 1$ için (3.1.1) denklem sistemi,

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) - u(t)v(t); \quad u(0) = u_0, \\ v'(t) &= -v(t) + u(t)v(t); \quad v(0) = v_0, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

PSfrag replacements

$t = \text{zaman}$

$u(t), v(t)$



Şekil 3.1: $u(0) = v(0) = 1$ başlangıç noktaları için (3.1.2) denklem sisteminin Euler yöntemi ile sayısal çözümü.

şeklinde ve grafiği Şekil 3.1’de verilmiştir.

(3.2.1) sisteminin birinci bölgedeki u_0 ve v_0 ’ın tüm değerleri için çözümünün sarmal olduğu iyi bilinmektedir. Bu sarmallar (u^*, v^*) ile ifade edilen denge noktasının etrafındadır. Bu nokta (3.2.1) denkleminin sol tarafının sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir. Shampine *et al.* (1997)’ye göre (3.1.1) denkleminde $\alpha_1 = \beta_1 = a$ ve $\alpha_2 = \beta_2 = -c$ seçilirse,

$$\begin{aligned} u'(t) &= a(u(t) - u(t)v(t)), \\ v'(t) &= -c(v(t) - u(t)v(t)), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin analitik çözümü yoktur, fakat $u(t)$ ’nin $v(t)$ ’ye göre çözümü,

$$\frac{du}{dv} = -\frac{c(v - uv)}{a(u - uv)},$$

oranıyla çözülebilir ve bu çözüm,

$$e^{cu+av} = Ku^c v^a, \quad (3.2.3)$$

biçimindedir. Şekil 3.2’de (3.2.2) denkleminin MATLAB ve Mathematica ile elde edilmiş grafikleri verilmektedir. MATLAB programında,

```
ezmeshc('121.848*v.*u.^2-exp(2*u+v)', [0,3.3,0,4.4], 500)
```

kodu ile, Mathematica programında ise,

```
a=1;
c=2;
k=121.848;
f[u_,v_] = k* u^c v^a - Exp[c*u + a*v]
ContourPlot[f[u,v],{u,0,3.3},{v,0,4.4}, Contours -> {0},
ContourShading -> False, PlotPoints -> 50, ContourLines -> True,
Axes -> True, AxesLabel -> {"u(t)", "v(t)"} ] (* PlotLabel
->FontForm["Lotka-Volterra (Predator-Prey) Equations",
{"Helvetica-Bold", 9.4}], Frame -> True, FrameLabel{"time",
"Population Size"} ] *)
```

kodu ile Şekil 3.2 elde edilir. Bununla beraber Gander (1995) veya Arrigoni and Steiner (1988) bu denklem sisteminin kapalı çözümünü aşağıdaki parametrik denklem ile vermektedir.

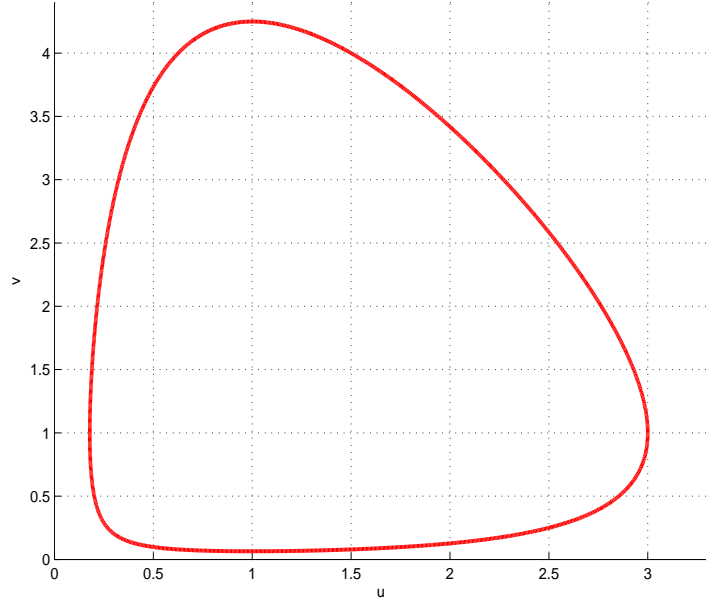
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 4C \exp(\tau)}, \\ v(t) &= \frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 4C \exp(\tau)}, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

burada $C = u_0 v_0 \exp(u_0 + v_0)$ ve $\tau = u(t) + v(t)$ ile verilir.

İleri Euler yöntemi, (3.2.1) denklem sisteminin ileri farklar yönteminde zamana göre türevine denktir. Bu sistemi t_n zamanında elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} &= \tilde{u}_n - \tilde{u}_n \tilde{v}_n; \quad u(0) = u_0, \\ \frac{\tilde{v}_{n+1} - \tilde{v}_n}{h} &= -\tilde{v}_n + \tilde{u}_n \tilde{v}_n; \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Bu bir açık iterasyon formülüdür. Şekil 3.3'de verildiği gibi adım aralığı $h = 0.1$ ve başlangıç değerleri $u_0 = 0.5$ ve $v_0 = 0.5$ için (3.2.5) algoritması ile elde edilir.



Şekil 3.2: $a = 1$, $c = 2$, $K = 121.848$, $u(0) = 1$, $v(0) = 3$ için (3.2.2) denklem sisteminin grafiği.

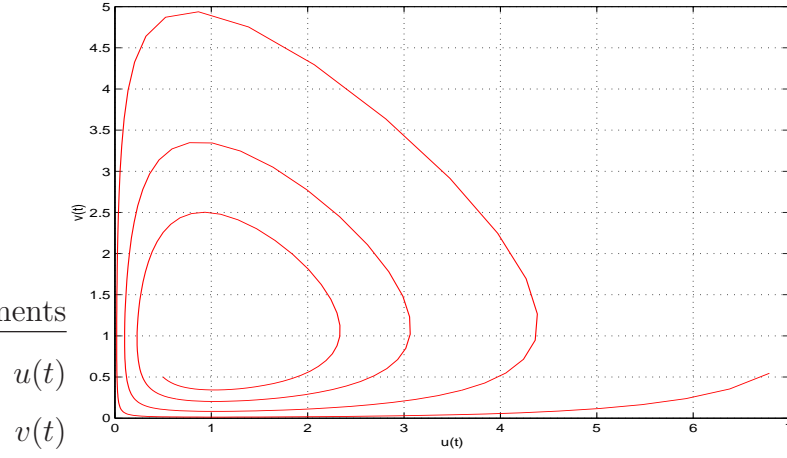
(3.2.1) denkleminin ileri Euler yöntemi ile sayısal çözümü sarmal bir görüntü gösterir. Bir sonraki yöntemde, basit bir değiştirme ile ileri Euler yönteminin sarmal olmayan bir yonteme yani, değiştirilmiş Euler yöntemine nasıl ulaştığına bakacağız. (3.2.5) denklem sisteminin ikinci denkleminde çarpım durumunda olan \tilde{u}_n yerine \tilde{u}_{n+1} yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} &= \tilde{u}_n - \tilde{u}_n \tilde{v}_n; & u(0) &= u_0, \\ \frac{\tilde{v}_{n+1} - \tilde{v}_n}{h} &= -\tilde{v}_n + \tilde{u}_{n+1} \tilde{v}_n; & v(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

algoritması elde edilir.

Şekil 3.4 değiştirilmiş ileri Euler yönteminin MATLAB programı ile elde edilmiş grafiğini göstermektedir. Değiştirilmiş ileri Euler yönteminin hala açık olduğu görülmektedir.

PSfrag replacements

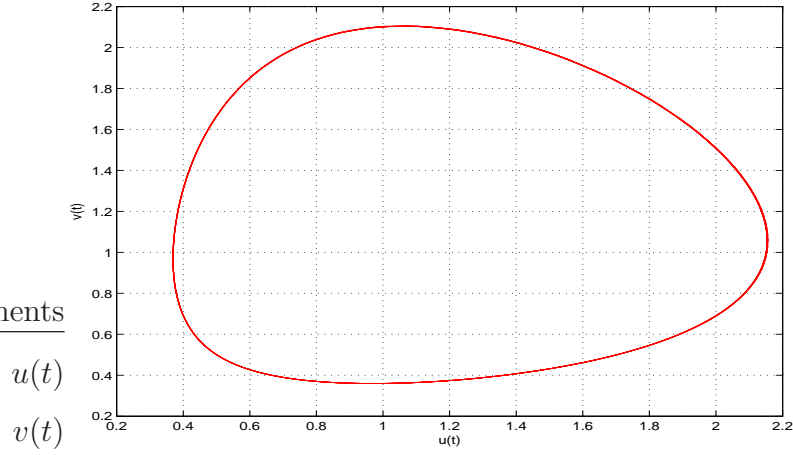


Şekil 3.3: $u(0) = v(0) = 0.5$ başlangıç noktaları ile (3.2.1) denklem sisteminin ileri Euler yöntemi ile sayısal çözümü.

(3.2.1) denklem sisteminin sayısal çözümünde sarmal olmayan çözümü için dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi kullanılabilir. (3.2.1) sistemi $u'(t) = f(t, u(t), v(t))$ ve $v'(t) = g(t, u(t), v(t))$ olarak ele alınırsa,

$$\begin{aligned} k_1 &= h * f(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n); \\ m_1 &= h * g(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n); \\ k_2 &= h * f\left(t_n + \frac{h}{2}, \tilde{u}_n + \frac{k_1}{2}, \tilde{v}_n + \frac{m_1}{2}\right); \\ m_2 &= h * g\left(t_n + \frac{h}{2}, \tilde{u}_n + \frac{k_1}{2}, \tilde{v}_n + \frac{m_1}{2}\right); \\ k_3 &= h * f\left(t_n + \frac{h}{2}, \tilde{u}_n + \frac{k_2}{2}, \tilde{v}_n + \frac{m_2}{2}\right); \\ m_3 &= h * g\left(t_n + \frac{h}{2}, \tilde{u}_n + \frac{k_2}{2}, \tilde{v}_n + \frac{m_2}{2}\right); \\ k_4 &= h * f(t_n + h, \tilde{u}_n + k_3, \tilde{v}_n + m_3); \\ m_4 &= h * g(t_n + h, \tilde{u}_n + k_3, \tilde{v}_n + m_3); \\ \tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4); \\ \tilde{v}_{n+1} &= \tilde{v}_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2 * m_2 + 2 * m_3 + m_4); \end{aligned}$$

PSfrag replacements

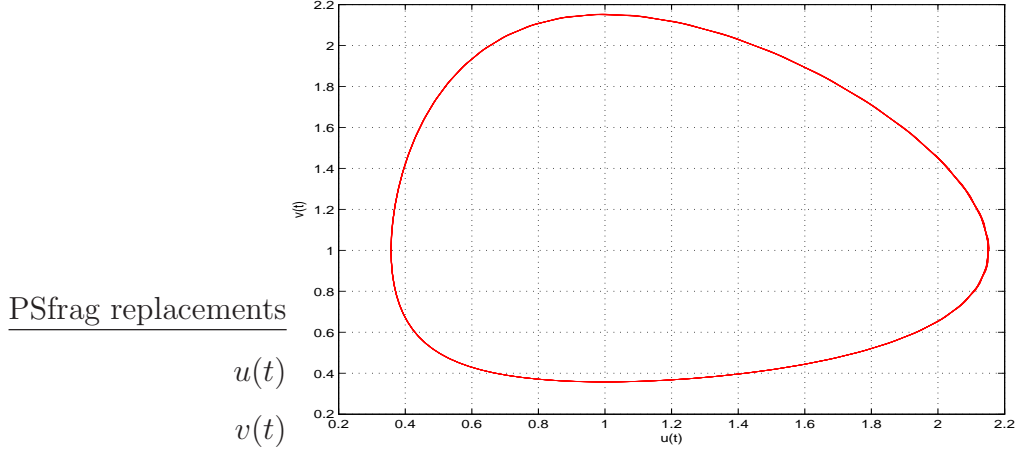


Şekil 3.4: $u(0) = v(0) = 0.5$ başlangıç noktaları ile (3.2.1) denklem sisteminin değiştirilmiş (modified) Euler yöntemi ile sayısal çözümü.

ifadesinden aşağıdaki,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h * (\tilde{u}_n - \tilde{u}_n * \tilde{v}_n); \\
 m_1 &= h * (-\tilde{v}_n + \tilde{u}_n * \tilde{v}_n); \\
 k_2 &= h * \left((\tilde{u}_n + \frac{k_1}{2}) - (\tilde{u}_n + \frac{k_1}{2}) * (\tilde{v}_n + \frac{m_1}{2}) \right); \\
 m_2 &= h * \left(-(\tilde{v}_n + \frac{m_1}{2}) + (\tilde{u}_n + \frac{k_1}{2}) * (\tilde{v}_n + \frac{m_1}{2}) \right); \\
 k_3 &= h * \left((\tilde{u}_n + \frac{k_2}{2}) - (\tilde{u}_n + \frac{k_2}{2}) * (\tilde{v}_n + \frac{m_2}{2}) \right); \\
 m_3 &= h * \left(-(\tilde{v}_n + \frac{m_2}{2}) + (\tilde{u}_n + \frac{k_2}{2}) * (\tilde{v}_n + \frac{m_2}{2}) \right); \\
 k_4 &= h * ((\tilde{u}_n + k_3) - (\tilde{u}_n + k_3) * (\tilde{v}_n + m_3)); \\
 m_4 &= h * (- (\tilde{v}_n + m_3) + (\tilde{u}_n + k_3) * (\tilde{v}_n + m_3)); \\
 \tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4); \\
 \tilde{v}_{n+1} &= \tilde{v}_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2 * m_2 + 2 * m_3 + m_4); \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$

algoritmasını elde ederiz. Bu algorithmadan MATLAB programı ile Şekil 3.5 elde edilir.



Şekil 3.5: $u(0) = v(0) = 0.5$ başlangıç noktaları ile (3.2.1) denklem sisteminin RK4 yöntemi ile sayısal çözümü.

3.3 Adi Diferansiyel Denklemlerin Lotka-Volterra Sistemleri

Denklem (3.1.1), avcı-av ilişkisiyle bir araya gelmiş iki tür arasındaki etkileşimi tanımlar. Bu ilişkinin yanında bir türün büyümesi üzerinde bir çok etki vardır. Örneğin; mevsimsel değişme, yaş durumu, cinsiyet oranı ve bunun gibi bir çok etki modelde yer almalıdır. Bununla beraber, ilk yaklaşım olarak, dikkatimizi farklı popülasyonlar arasındaki üç temel üzerine yoğunlaştıracğız.

n tane popülasyonun sistemini ve i 'inci türün kendi içinde ve diğer türler ile olan toplam etkileşimi vasıtasıyla tanımlanabilen i 'inci türün büyüme oranını ele alacağız. Yani,

$$\frac{u'_i(t)}{u_i(t)} = b_i + a_{ii}u_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ij}u_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

veya

$$u'_i(t) = u_i(t) \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(t) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3.1)$$

sistemi n tane tür için bir LV sistemidir. Burada b_i yaratılıştan olan büyüme oranını, a_{ij} ise j 'inci türün i 'inci türe olan etkisini tanımlar.

$A = [a_{ij}]$ matrisi etkileşim matrisi olarak adlandırılır. i 'inci türle j 'inci tür arasında ilişki varsa ($i \neq j$) bu, yarışma veya işbirliği şeklinde olabilir, (a_{ij}, a_{ji}) nin işaret modeli sırasıyla $(-, -)$ veya $(+, +)$ olur. Yırtıcı hayvan-yem durumu için $(+, -)$ veya $(-, +)$ olur. A 'nın köşegen elemanları a_{ii} genellikle $i = 1, 2, \dots, n$ için pozitif değildir. Çünkü bunlar aynı türler arasındaki ilişkiyi tanımlar ve sınırlı kaynakları yansıtır (çevre, normal yaşlanma vb). Negatif olmayan başlangıç değerleri $u_i(0) = (u_1(0), \dots, u_n(0))$ ile (3.3.1) LV sisteminin bazı temel özelliklerini özetleyeceğiz. (3.3.1) sistemini sadece negatif olmayan $u_i(0)$ için ele aldığımızı dikkat edelim, çünkü $u_i(0)$ i 'inci türün yoğunluğunu tanımlar.

3.4 Lotka-Volterra Modelinin Global Kararlılığı

Özerk (autonomous) bir Lotka-Volterra Sistemi (bkz Filiz (2000b), Filiz (2000c) ve Wang & Yi (1995)) aşağıdaki gibi verilsin,

$$u_i'(t) = u_i(t)\alpha_i + u_i(t) \left[\sum_{j=1}^n \beta_{ij}u_j(t) + \sum_{j=1}^n \eta_{ij}u_j(t - \tau_{ij}) + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \int_{p(t)}^t k_{ij}(t-s)u_j(s)ds \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.1)$$

burada $u_i(t)$, i 'inci türün popülasyon yoğunluğu, alt sınır $p(t) = 0, -\infty$, veya $t - \tau_{ij}$; $\alpha_i, \beta_{ij}, \eta_{ij}$ ve γ_{ij} reel değerli değişkenler $\tau_{ij} \geq 0$ ve ek olarak çekirdekler $k_{ij} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun ve

$$\int_0^\infty k_{ij}(s) = 1, \quad (3.4.2)$$

şartını sağlasın. Başlangıç koşullarımız aşağıdaki gibi olsun,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(t) = \phi_i(t) \geq 0, \quad -\infty < t \leq 0, \\ \phi_i > 0, \\ \sup_{-\infty < s \leq 0} \phi_i(s) < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.4.3)$$

burada $\phi_i(t)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, $(-\infty, 0]$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

Volterra (1931) birbirini etkileyen türlerin ekolojik sistemlerinin tanımlanması için integro-diferansiyel denklem sistemi gibi bir sistem tanımladı ve bu sistemi $n = 2$ için araştırdı.

Geçmişte bilinen nüfus yoğunluğunun, negatif olmayan sınırlı fonksiyonlar,

$$u_i(t) = \phi_i(t), \quad -\infty < t < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4.4)$$

olduğunu farzediyoruz.

Buradan (3.4.4) başlangıç şartı ile (3.4.1) integro-diferansiyel sisteminin negatif olmayan bir tek çözümü vardır. Bir ekolojik sistem için bu teoremin uygulaması Post and Travis (1982) tarafından verilmiştir. Eğer (3.4.1) sisteminde $\alpha_i, \beta_{ij}, \eta_{ij}, \gamma_{ij}$ ve τ_{ij} reel değerli değişkenler yerine t 'nin bir fonksiyonu olan $\alpha_i(t), \beta_{ij}(t), \eta_{ij}(t), \gamma_{ij}(t)$ ve $\tau_{ij}(t)$ sürekli fonksiyonları seçilirse özerk olmayan (non-autonomous) Lotka-Volterra sistemi elde ederiz (bkz Bereketoğlu and Györi (1997)). Fargue başlangıç koşulları $x_i(t) = \phi_i(t), -\infty < t < 0$ olan integro-diferansiyel denklemin ancak ve ancak $k(t)$ çekirdeği sabit katsayılarla bir diferansiyel denklem koşulunu yerine getirdiğinde yani $k(t)$ için gerek ve yeter koşul,

$$e^{at}, te^{at}, \dots, t^m e^{at}, \quad a \in \mathbb{C},$$

olmasıdır. Bu koşul sağlandığında diferansiyel denklemle başlangıç koşullarının eşit olduğu gözlemlenir. Burada ele aldığımız her bir $k_{ij}(t)$ çekirdeği aşağıdaki şekilde verilsin,

$$k_{ij}(t) = k_v(t) = \frac{a^v}{(v-1)!} t^{v-1} \exp(-at), \quad v \in \mathbb{N}, \quad (3.4.5)$$

$a \in (0, \infty)$ bir pozitif sabit k_v nin birinci türevi,

$$\frac{d}{dt}k_v(t) = ak_{v-1}(t) - ak_v(t), \quad k_0(t) = 0,$$

ile verilir ve bu kolaylıkla gösterilebilir.

$$y_i(t) := u_i(t), \quad i = 1, \dots, p,$$

tanımlarız ve

$$\int_{-\infty}^t k_\mu(t - \tau)y_i(\tau)d\tau, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

formunda olan y_{p+1}, \dots, y_n daha yoğun fonksiyonları ileri süreriz. Burada $k_m, k_{1j}, \dots, k_{pj}$ (her zaman tanımlananlar ihmal edilerek) $j = 1, \dots, p$ için elde edilen tüm yoğun fonksiyonlar (3.4.5) denkleminde seçilir.

Yeni fonksiyonlar $y_{p+1}, \dots, y_n, y_1, \dots, y_n$ 'deki doğrusal diferansiyel denklem sistemini sağlar. y_1, \dots, y_p için diferansiyel denklemler ile birlikte aşağıdaki gibi,

$$\begin{aligned} y'_i &= y_i \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}y_j \right), \quad i = 1, \dots, p, \\ y'_l &= \sum_{j=1}^n \beta_{lj}y_j, \quad l = p + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

diferansiyel denklem sistemini $y_1(0), \dots, y_n(0)$ başlangıç değerleri ile elde ederiz. \mathbb{R}_+ pozitif reel sayıları göstermek üzere $\mathbb{R}_+^p, \mathbb{R}^p$ 'nin pozitif kısmını gösterebiliriz. Bu durumda (3.4.6) sisteminin her $y(0) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^{n-p}$ başlangıç değeri ile y çözümü $\mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^{n-p}$ 'de değere sahiptir, fakat (3.4.1) sisteminde olduğu gibi \mathbb{R}_+^n 'de olmak zorunda değildir.

Eğer (3.4.1) sisteminde $\gamma_{ij} = \eta_{ij} = 0$ olarak seçersek, aşağıdaki gibi yeni bir Lotka-Volterra sistemi elde ederiz,

$$u'_i(t) = u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}u_j(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.7)$$

ve başlangıç değerleri $u_i(0) = (u_1(0), \dots, u_n(0))$ biçiminde olur.

3.4.1 Global Kararlılık İçin Yeterli Koşullar

Aşağıda (3.4.6) sistemindeki diferansiyel denklemlerin izole edilmiş $u_i^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ dengesine sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda u^* , $\mathbf{A} = (\beta_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$ ve $\mathbf{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0)^T$ için,

$$\mathbf{A}u^* = -\mathbf{B},$$

doğrusal denklemini sağlar.

Tanım 3.4.1 \mathbf{A} $n \times n$ tipinde reel matris olsun.

- a. \mathbf{A} matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatif (pozitif olmayan) ise \mathbf{A} kararlı (yarı kararlı),
- b. \mathbf{CA} her pozitif \mathbf{C} köşegen matrisi için kararlı (yarı kararlı) ise \mathbf{A} \mathbf{C} -kararlı (\mathbf{C} -yarı kararlı),
- c. Eğer $\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T\mathbf{C}$ kararlı olacak şekilde bir pozitif üçgensel \mathbf{C} matris var ise Cross (1978) \mathbf{A} 'yı Volterra-Lyapunov kararlı olarak tanımlar.

Her reel \mathbf{A} matrisi için (c.) \Rightarrow (b.) \Rightarrow (a.) gerektirmeleri mevcuttur.

Zaman gecikmesi olmayan birbirini etkileyen n türün popülasyonunu tanımlayan diferansiyel denklem sistemi için Goh (1977) izole edilmiş pozitif denge durumunun global kararlılığı için yeterli bir koşul vermiştir.

Teorem 3.4.1 Goh (1977)

$$u_i'(t) = u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.8)$$

diferansiyel denklem sisteminin izole edilmiş bir denge durumu olsun. Bu durumda eğer \mathbf{A} Volterra-Lyapunov kararlı (yarı kararlı) ise u^* global asimptotik karardır (global karardır).

Goh (1977)'nin bu sonucu ikinci dereceden ve doğrusal diferansiyel denklem sistemleri için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Teorem 3.4.2 Eğer (1.1.1) sisteminin denge noktaları $u_i^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ ise ve bir pozitif değerli köşegen \mathbf{C} matrisi varsa ve $\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}$ negatif değerlere sahip (kararlı) ise (3.4.7) Lotka-Volterra modeli mümkün olan bir bölgede karardır.

İspat: Singüler olmayan bir \mathbf{A} matrisi alalım. Bu bize,

$$\alpha_i = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.9)$$

eşitliğini verir. (3.4.7) sisteminin biricik çözümleri (u_1^*, \dots, u_n^*) ile gösterilsin. Açıkça, tüm çözümler $u_i^* > 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Kabulden, $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ şeklinde pozitif değerli köşegen matris vardır ve $\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}$ negatiftir.

Aşağıdaki biçimde uygun bir Lyapunov fonksiyonu seçelim,

$$V(u)(t) = \sum_{i=1}^n c_i \left[u_i - u_i^* - u_i^* \log \left(\frac{u_i}{u_i^*} \right) \right]. \quad (3.4.10)$$

V Lyapunov fonksiyonunun türevini alıp (3.4.7) ve (3.4.9) numaralı denklemleri de kullanırsak sırası ile aşağıdaki denklemleri buluruz,

$$\begin{aligned} V' &= \sum_{i=1}^n c_i \left(u_i' - u_i^* \frac{u_i'}{u_i} \right) = \sum_{i=1}^n c_i (u_i - u_i^*) \left(\frac{u_i'}{u_i} \right), \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (u_i - u_i^*) \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j \right), \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i - u_i^*) c_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (u_j - u_j^*), \end{aligned}$$

$u_i - u_i^* = w_i$ ve $u_j - u_j^* = w_j$ kısaltmalarını kullanırsak,

$$\begin{aligned} V' &= \sum_{i=1}^n w_i c_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} w_j, \\ &= \mathbf{W}^T (\mathbf{CA}) \mathbf{W}, \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{W}^T (\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}) \mathbf{W}, \end{aligned}$$

açıkça görüldüğü gibi $\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}$ negatif tanımlı ve tüm $u_i(t) \neq u_i^*$ için V' negatif olur ve ispat biter.

Lemma 3.4.3 *Worz-Busekros (1978) farzedelim ki,*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix},$$

matrisi için $(\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C})$ negatif tanımlı (yarı kararlı) olacak şekilde \mathbf{C}_1 bir pozitif diyagonal matris ve \mathbf{C}_4 bir pozitif tanımlı matris olmak üzere,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix},$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

a. \mathbf{A}_1 *Volterra-Lyapunov kararlı (yarı kararlı),*

b. \mathbf{W}_1 *pozitif diyagonal matris ve \mathbf{I} birim matris olmak üzere her $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ matrisi için \mathbf{WA} kararlıdır (yarı kararlıdır).*

İspat:

a. $(\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C})$ nin alt matrisi $(\mathbf{C}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1)$ negatif tanımlı (yarı tanımlı) yani \mathbf{A}_1 Volterra-Lyapunov kararlıdır.

b. Her $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ matrisi için $\mathbf{WC} = \mathbf{CW}$ 'dir. Bu nedenle

$$(\mathbf{WC})(\mathbf{AW}) + (\mathbf{AW})^T(\mathbf{WC}) = \mathbf{WCAW} + \mathbf{WA}^T\mathbf{CW} = \mathbf{W}(\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T\mathbf{C})\mathbf{W}$$

elde edilir. $(\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T\mathbf{C})$ kararlı (yarı kararlı) olduğundan, $\mathbf{W}(\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T\mathbf{C})\mathbf{W}$ ve $(\mathbf{WC})(\mathbf{AW}) + (\mathbf{AW})^T(\mathbf{WC})$ aynı şekilde kararlıdır (yarı kararlıdır). Lyapunov'un kararlılık kriterinden \mathbf{AW} kararlıdır (yarı kararlıdır). \mathbf{AW} ile \mathbf{WA} matrislerinin karakteristik polinomları aynı olduğu için \mathbf{WA} kararlıdır (yarı kararlıdır).

Lemma 3.4.3 b. Volterra-Lyapunov kararlılığının \mathbf{D} -kararlılığı gerektirmesi duruma benzerdir. (3.4.6) sisteminin bazı alt sistemleri için Teorem 3.4.2 ve Lemma 3.4.3'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.4 $\mathbf{A} = (\beta_{ij})$ 'nin Lemma 3.4.3'in hipotezini sağladığını kabul edelim.

a. Eğer $u^* > 0$

$$u'_i = u_i \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} u_j \right), \quad i = 1, \dots, p,$$

p boyutlu diferansiyel denklem sisteminin izole edilmiş bir denge durumu ise $u^* \in \mathbb{R}_+^p$ 'de global asimptotik (global) kararlıdır.

b.

$$y'_l = \sum_{j=p+1}^n \beta_{lj} y_j, \quad l = p+1, \dots, n,$$

kısıtlanmış sisteminin ($y_1 = \dots = y_p = 0$ yerleştirildiğinde) $y_{p+1}^*, \dots, y_n^* = 0$ sabit durumu, global asimptotik (global) kararlıdır.

Uyarı 3.4.5 Volterra-Lyapunov kararlı matrisinin her temel alt matrisi aynı özelliğe sahip olduğundan \mathbf{A} matrisinin tüm diyagonal elemanlarının negatif olduğu Teorem 3.4.2'nin güçlü bir versiyonu gereklidir.

Uygulama 3.4.6 Öncelikle büyüme oranı şu anda ve geçmişteki popülasyon yoğunluğuna bağlı olan basit bir türü göz önünde bulunduracağız. Türlerin hareketi aşağıdaki α , $\beta + \gamma > 0$ ve (3.4.2) denklemiyle düzenlenen $k(t)$ ile,

$$u' = u \left(\alpha - \beta u - \gamma \int_{-\infty}^t k(t - \tau) u(\tau) d\tau \right), \quad t \geq 0, \quad (3.4.11)$$

integro-diferansiyel denklemi tanımlanır. Taşıma kapasitesi,

$$u^* = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \quad (3.4.12)$$

ile ifade edilen tek pozitif denge durumudur.

Aşağıda, k çekirdekleri için u^* in kararlılığını inceleyeceğiz.

Teorem 3.4.7 (3.4.11) integro-diferansiyel denklemi,

$$k(t) = a \cdot e^{at}, \quad (3.4.13)$$

çekirdeğine sahip olsun. u^* denge durumu,

a. $\forall a, \alpha, \beta > 0$ ve $\gamma > -\beta$ için \mathbb{R}_+ da global asimptotik karardır.

b. $\beta = 0$ ve $a, \alpha, \gamma > 0$ için \mathbb{R}_+ da global karardır.

İspat: (3.4.13) çekirdeği ile (3.4.11) integro-diferansiyel denklemi

$$y_1(t) = u(t), \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^t a \cdot e^{-a(t-\tau)} u(\tau) d\tau,$$

ile

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1(\alpha - \beta y_1 - \gamma y_2), \\ y_2' &= a y_1 - a y_2, \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

diferansiyel denklem sistemine denktir. (3.4.14) sistemi, $n = 2$ ve $p = 1$ için (3.4.6) sisteminin özel bir halidir,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ a & -a \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \vartheta = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorem 3.4.2 yi uygulamak için $\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}$ negatif tanımlı (yarı tanımlı) olacak şekilde ne zaman pozitif \mathbf{C} üçgensel matrisinin mevcut ve ne zaman \mathbf{A} nın Volterra-Lyapunov kararlı (yarı kararlı) olduğunu kontrol edeceğiz.

- a. 2×2 tipindeki \mathbf{A} matrisinin ancak ve ancak $\det(\mathbf{A}) > 0$ ve köşegen elemanlar negatif iken Volterra-Lyapunov kararlı olduğunu söyleyen Goh (1976)'nın teoremini uygulayacağız. Şimdiki durumda,

$$\det(\mathbf{A}) = a(\beta + \gamma) > 0,$$

ve köşegen elemanlar $-\beta$, $-a$ dır. Bu nedenle ilk önermemizi elde etmiş oluruz.

- b. $\beta = 0$ olduğunu varsayalım. Buradan,

$$\mathbf{CA} + \mathbf{A}^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -c_1\gamma + c_2a \\ -c_1\gamma + c_2a & -2c_2a \end{pmatrix}$$

gibi $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2)$ nin varlığı negatif ve yarı tanımlıdır örneğin

$c_1 = a$, $c_2 = \gamma$. Teorem 3.4.2 nin tekrar uygulanmasıyla **b.** önermesini elde ederiz.

Teorem 3.4.7 de önerilen k çekirdeği $t = 0$ için maksimum değere sahiptir. Denklem (3.4.11) in sadece zayıf bir zaman gecikmesi vardır.

Uygulama 3.4.8 *Av-avcı sisteminin dinamiği üzerindeki çalışmasında Volterra (1931) av popülasyonunda değişiklik olması için avcının sayısal karşılığına bağlı zaman gecikmesi olan diferansiyel denklem sistemini ileri sürdü. Bownds and Cushing (1975), Cushing(1976, 1976) ve MacDonald (1976) bu sistemi tekrar ele aldılar.*

$u_1(t)$ ve $u_2(t)$ sırasıyla av ve avcının yoğunluğunu tanımlasın. Tüm popülasyonun dinamiği aşağıdaki integro-diferansiyel denklem sistemiyle tanımlanır.

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1(\alpha_1 - \beta_1 u_1 - \gamma_1 u_2), \\ u_2' &= u_2(-\alpha_2 + \gamma_2 \int_{-\infty}^t k(t - \tau) u_1(\tau) d\tau), \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ pozitif reel sayılar ve k , (3.4.2) denklemi ile düzenlenir. Av popülasyonunun taşıma kapasitesi $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ olmak şartıyla,

$$u^* = (u_1^*, u_2^*)^T = \left(\frac{\alpha_2}{\gamma_2}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \left(1 - \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \right) \right)^T,$$

pozitif denge durumunun varlığında, $\frac{\alpha_2}{\gamma_2}$ kritik değerinden daha büyüktür. MacDonald (1976)

$$k(t) = ae^{-at}, \quad (3.4.16)$$

ile verilen k çekirdeği ile (3.4.15) sisteminin çözümünün davranışlarını araştırdı.

Lemma 3.4.9 MacDonald (1976)

$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\gamma_2}$ olmak şartıyla, (3.4.15), (3.4.16) ün u^* denge durumu $a > a_H$ ve kararlı olmayan $0 < a < a_H$ için asimptotik kararlıdır. Burada

$$a_H = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \gamma_2 - \alpha_2 - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \beta_1,$$

şeklindedir. Lemma 3.4.9 un bir diğer versiyonunda eğer av popülasyonunun taşıma kapasitesi kritik değerden büyük, fakat bu değere yakın ise,

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \left(\frac{a}{\gamma_2} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2^2} \beta_1 \right) < \frac{\alpha_2}{\gamma_2} < \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

olur. Buradan pozitif denge durumu u^* asimptotik kararlıdır ve eğer taşıma kapasitesi oldukça geniş ise,

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{a}{\gamma_2} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2^2} \alpha_1,$$

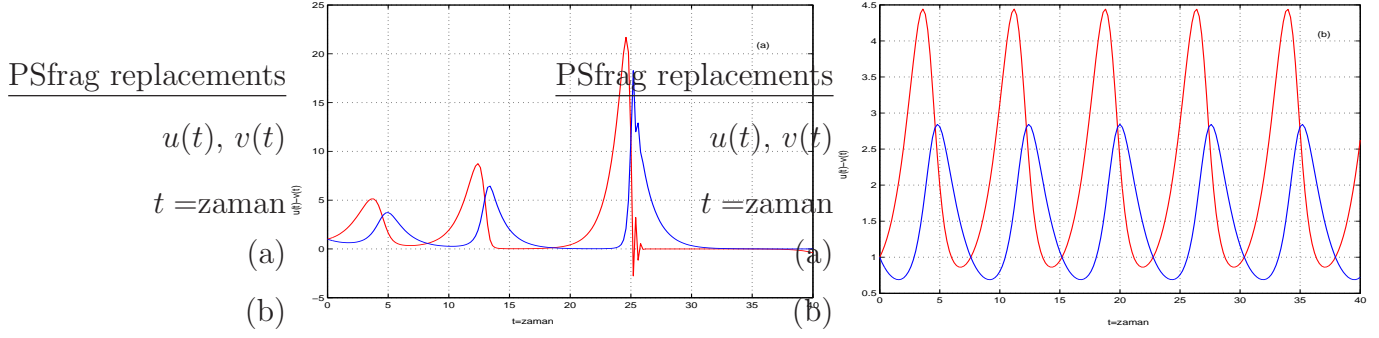
ifadesi u^* 'in kararsız olduğunu söyler.

3.5 İntegral Terimli Lotka-Volterra Sistemleri

Eğer (3.1.2) denklem sistemini genişletirsek, aşağıdaki,

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= u(t) \left(1 - 0.5v(t) - \int_0^t k_1(t-s)v(s)ds \right), \\ \frac{dv(t)}{dt} &= -v(t) \left(0.75 - 0.25u(t) - \int_0^t k_2(t-s)u(s)ds \right), \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

denklemleri elde ederiz. Şekil 3.6'de (3.5.1) denklem sisteminin sayısal çözümü elde edilir. (3.5.1) sisteminde $k_1 = \exp(-\frac{3}{2}(t - s))$, $k_2 = \exp(-\frac{7}{2}(t - s))$ ve başlangıç koşulları $u(0) = v(0) = 1$ alındı.



Şekil 3.6: (3.5.1) denklem sisteminin (a) Euler (b) değiştirilmiş Euler yöntemi ile sayısal çözümü.

Aşağıdaki özerk Lotka-Volterra sistemini ele alalım.

$$u'_i(t) = u_i(t) \left[r_i + \sum_{j=1}^n (a_{ij}u_j(t) + b_{ij}u_j(t - \tau_{ij})) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5.2)$$

r_i, a_{ij}, b_{ij} ve τ_{ij} negatif olmayan reel sayılar, başlangıç koşulu,

$$\begin{cases} u_i(t) = \phi_i(t) \geq 0, & -\tau < t \leq 0, \\ \phi_i > 0, \end{cases}$$

burada $\tau = \max_{-1 < j < n} \tau_{ij}$, $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $[-\tau, 0]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardır. Açık bir şekilde (3.5.2) denklem sisteminin $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ çözümü başlangıç koşulları ile beraber $t \geq 0$ için $u_i(t) > 0$ 'ı sağlar. (3.5.2)

sisteminin tek pozitif çözümü (u_1^*, \dots, u_n^*) olduğunu farzedelim yani,

$$\begin{cases} u_i^* > 0, \\ r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j^* + \sum_{j=1}^n b_{ij}u_j^* \equiv 0. \end{cases}$$

3.6 Gecikmeli Lotka-Volterra Sistemlerinin Global Kararlılığı

Gecikmeli Lotka-Volterra Sistemlerinin kararlılık teorisi May (1973), Gopalsamy (1984), Gopalsamy (1986), Leung (1979), Goh (1977), Leung and Zhou (1988) vb tarafından geniş şekilde çalışılmıştır. Çalışmalardaki problemlerden bir tanesi sistem pozitif denge noktalarına sahipse kararlılığın nasıl bulunacağı ile ilgilidir. Bu soruya Lyapunov yöntemi ve doğrusallaştırma gibi değişik yöntemler kullanarak cevap aranmıştır.

Gopalsamy (1984), Gopalsamy (1986) sabit değişkenli sonsuz gecikmeli Lotka-Volterra sistemlerin basit kararlılık durumlarını incelemek için Lyapunov fonksiyonlar yöntemini ve $L_1(0, \infty)$ uzayını kullandı. Bununla beraber iki engel vardır. Bu çalışmalardan birincisi çekirdek fonksiyonu $k_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) için mevcuttur ve

$$\int_0^{\infty} s|k_{ij}(s)|ds < +\infty, \quad (3.6.1)$$

durumunu gerektirir. Diğer bir durum ise, bu yöntemlerin $L_1(0, \infty)$ uzayına bağlı olmasıdır; özellikle değişken katsayılar sınırsız olduğu durumda değişken katsayılar ile sistemin uygulanması zordur. Bu bölümde değişken katsayılı sonsuz gecikmeli Lotka-Volterra sistemlerinin global asimptotik kararlılığını çalışmak için teklik analizini geliştirmeye çalışacağız. Bu metod Gopalsamy'den tamamen farklıdır. Bazı kararlılık kriterleri için (3.6.1) durumuna gereksinim duymayacağız. Bunlar ikinci kısımda görülecektir. Üçüncü kısımda sabit gecikmeli Lotka-Volterra sistemlerinin global exponential (üstel) kararlılığını çalışmak için Lyapunov fonksiyon metodu ile teklik analizi metodunu birleştireceğiz. Bildiğimiz kadarıyla şimdiye kadar gecikmeli Lotka-Volterra sistemleri için meydana gelen pek çok kararlılık asimptotik kararlılık çevresinde dönmekteydi. Lotka-Volterra sistemleri doğrusal olmayan sistemler olduğu için, asimptotik kararlılık üstel kararlılığı içermemektedir. Bu yüzden gecikmeli Lotka-Volterra sistemlerinin üstel

kararlılığını çalışmak çok ilginç olmaktadır. Son kısımda ise teoremimizi örneklerle göstereceğiz.

3.6.1 Sınırsız Gecikmeli Sistemler

(3.4.1) sisteminde $\beta_{ij} = 0$ ve $\alpha_i, \eta_{ij}, \tau_{ij}$ yerine $\alpha_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \eta_{ij}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \tau_{ij}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, k_{ij}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli fonksiyonlar, $p(t) = -\infty, \tau_{ii}(t) \equiv 0, t \rightarrow +\infty$ iken $t - \tau_{ij} \rightarrow +\infty$ ve k çekirdeği (3.4.2) şartını sağlasın, başlangıç fonksiyonları ise (3.4.3) şeklinde olsun. (3.4.3) ile (3.4.1) sisteminin $u_i(t), i = 1, \dots, n$ çözümü $t > 0$ için $u_i(t) > 0, i = 1, \dots, n$ olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten eğer bu yanlış olsaydı $u_i(t_0) = 0$ olacak şekilde $t_0 > 0$ var ve $t \in [0, t_0]$ için $u_i(t) > 0$ olurdu. Buna rağmen, eğer,

$$l = \inf |\alpha_i(s)| - \sum_{j=1}^n \left[\sup_{0 \leq s \leq t_0} |\beta_{ij}(s)| \cdot |u_j(s - \tau_{ij}(s))| + \sup_{0 \leq s \leq t_0} |\gamma_{ij}(s)| \cdot \left(\sup_{-\infty < s \leq 0} (\phi_j(s)) + \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u_j(s)| \right) \right]$$

alırsak,

$$u_i'(t) \geq l u_i(t),$$

$\forall t \in [0, t_0]$ ve

$$x_i(t_0) \geq \phi(0) e^{l t_0} > 0,$$

olur ki bu bir çelişkidir. (3.4.1) sistemini düşünersek (u_1^*, \dots, u_n^*) bir tek pozitif denge noktasına sahiptir. Yani, $\forall t \geq 0$ için,

$$\begin{cases} u_i^* > 0 \\ \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t) u_j^* + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}(t) u_j^* \equiv 0 \end{cases} \quad (3.6.2)$$

elde edilir.

Tanım 3.6.1 *Eğer, $t \geq 0$ ve*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_i(t) - u_i^*| = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

için,

$$|u_i(t) - u_i^*| \leq \mathcal{T} \max_{-1 < j < n} \left[\sup_{-\tau < s \leq 0} |\phi_j(s) - u_j^*| \right],$$

olacak şekilde $\mathcal{T} \geq 1$ sabiti varsa, (3.5.2) sisteminin pozitif denge noktasına (u_1^*, \dots, u_n^*) global asimptotik kararlıdır denir.

Teorem 3.6.1 Eğer,

- i. $\forall t > 0$ için $\beta_{ii}(t) < 0$ ve $\int_0^{+\infty} |\beta_{ii}(t)| dt = +\infty$,
- ii. $\forall t > 0$ için $\frac{|\beta_{ij}(t)|(1 - \delta_{ij}) + |\gamma_{ij}|}{|\beta_{ii}(t)|} \leq w_{ij}$ burada,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

- iii. $\rho[(w_{ij})_{n \times n}] < 1$

ise (u_1^*, \dots, u_n^*) global asimptotik kararlıdır.

İspat: bkz Wang and Yi (1995).

3.6.2 Sınırlı Gecikmeli Sistemler

$$u_i'(t) = u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n (\beta_{ij} u_j(t) + \gamma_{ij} u_j(t - \tau_{ij})) \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.6.3)$$

sistemini düşünelim, burada α_i , β_{ij} , γ_{ij} ve $\tau_{ij} (> 0)$ reel sayılar,

$$\begin{cases} u_i(t) = \phi_i(t) \geq 0 & -\tau \leq t \leq 0, \\ \phi_i(0) > 0, \end{cases} \quad (3.6.4)$$

başlangıç değeri ve $\tau = \max_{1 < i, j < n} (\tau_{ij})$, ϕ_i $i = 1, \dots, n$, $[-\tau, 0]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Açık olarak (3.6.3) sisteminin (3.6.4) başlangıç değeri ile $u_i(t)$,

$i = 1, \dots, n$, çözümlü $t \geq 0$ için $u_i(t) > 0$ olmasını gerektirir.

(3.6.3) sistemi (u_1^*, \dots, u_n^*) şeklinde tek pozitif denge noktasına yani,

$$\begin{cases} u_i^* > 0, \\ \alpha_i + \sum_{j=1}^n (\beta_{ij} + \gamma_{ij})u_j^* = 0, \end{cases} \quad (3.6.5)$$

sahip olsun.

Tanım 3.6.2 $t \geq 0$ için

$$|u_i(t) - u_i^*| \leq R \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi_j(s) - u_j^*| \right] \cdot e^{-\lambda t},$$

olacak şekilde $R > 1$ ve $\lambda > 0$ var ise (3.6.3) sisteminin (u_1^*, \dots, u_n^*) pozitif dengesi *global üstel kararlıdır* denir.

Teorem 3.6.2 Eğer $\beta_{ii} < 0$ $i = 1, \dots, n$ ve

$$\rho \left[\left(\frac{|\beta_{ij}|(1 - \delta_{ij}) + |\gamma_{ij}|}{|\beta_{ii}|} \right)_{n \times n} \right] \leq 1,$$

burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

ise (3.6.3) sisteminin (u_1^*, \dots, u_n^*) pozitif dengesi *global üstel kararlıdır*.

İspat: bkz Wang and Yi (1995).

Bereketoğlu and Györi (1997) sınırsız gecikmeli Lotka-Volterra sistemini ele almıştır,

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= b_i(u_i(t)) \left[r_i(t) - a_i(t)u_i(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)u_i(t - \tau_{ijl}(t)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty b_{ij}(t, s)u_j(t - s)ds \right], \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Çalışmanın ana hedefi (3.6.6) denkleminin global asimptotik kararlılığı için yeterli durumlar vermektir (bkz Bereketoğlu and Györi (1997)).

Örnek 3.2

$$u'(t) = u(t) \left[t + 2 - 2(t+1)u(t) + t \int_{-\infty}^t \frac{2u(s)}{\pi[1+(t-s)^2]} ds \right],$$

denklemini düşünelim. $u^* = 1$ pozitif denge noktasının tekliği açıkça görülür. $\alpha(t) = t + 2$, $\beta(t) = -2(t+1)$, $\gamma(t) = t$ ve $k(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)}$ alınıp Teorem 3.6.1 vasıtasıyla $u^* = 1$ global asimptotik kararlıdır. Katsayıların sınırsız olduğuna ve $k(t)$ çekirdek fonksiyonunun,

$$\int_0^{+\infty} s \cdot k(s) ds = \int_0^{+\infty} \frac{2s}{\pi(1+t^2)} ds = +\infty,$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 3.3

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(t) \left[1 - 3u_1(t) + u_2(t - \frac{t}{2}) \right], \\ u_2'(t) &= u_2(t) \left[3 - 2u_2(t) + u_1(t - \frac{t}{2}) \right], \end{aligned}$$

sistemini düşünelim.

$(u_1^*, u_2^*) = (1, 2)$ tek pozitif denge noktası olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$\tau_{12}(t) = \tau_{21}(t) = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 3, \quad \beta_{11}(t) = -3, \quad \beta_{22}(t) = -2,$$

$$\beta_{12}(t) = \beta_{21}(t) = 1, \quad \gamma_{ij}(t) = 0 \quad i, j = 1, 2, \text{ alındığında,}$$

$$(w_{ij})_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\rho((w_{ij})_{2 \times 2}) = 0.4082 < 1$ olduğu için Teorem 3.6.1'den $(u_1^*, u_2^*) = (1, 2)$ pozitif dengesi global asimptotik kararlıdır.

Örnek 3.4

$$u'(t) = u(t) \left[\frac{1}{2} - 2u(t) + u(t - \tau) \right],$$

denklemini düşünelim. Burada $\tau \geq 0$ sabittir. Bu denklem $u^* = \frac{1}{2}$ tek pozitif denge noktasına sahiptir. Teorem 3.6.2 de $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ olduğundan, $u^* = \frac{1}{2}$ global üstel kararlıdır.

Bölüm 4

DOĞRUSAL OLMAYAN İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1 Giriş

Bu bölümde, biyoloji veya ekolojide uygulama alanları olan bazı ilginç integro-diferansiyel denklemleri ele alacağız.

$$\begin{aligned} u'_i(t) = & u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j(t) + \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u_j(t - \tau_{ij}) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \int_{p(t)}^t k_{ij}(t-s) u_j(s) ds \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

burada $\alpha_i, \beta_{ij}, \eta_{ij}$ ve γ_{ij} reel değerli değişkenler, $\tau_{ij} \geq 0$ ve ek olarak çekirdekler $k_{ij}(t)$ negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır. İntegro-diferansiyel denklemleri ana denkleminiz olan (4.1.1) denkleminin katsayılarında bazı özel değerler vererek elde edeceğiz.

Bölümün ilk kısmı çoğunlukla popülasyon problemleri için modellerle ve analizlerin elde edilen sonuçlarıyla ilişkili olacaktır. Kısım 4.2'de lojistik denk-

lemden ve ilavelerinden bahsedeceğiz. Kısım 4.3 doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlerin tanıtımını içerecektir. Kısım 4.5’de açık ve kapalı Euler, θ -yöntemi, adi diferansiyel denklem içeren kısım için dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemi ve integral kısım için (dikdörtgenler yöntemi, değiştirilmiş dikdörtgenler yöntemi, Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemi) olarak bilinen değişik sayısal teknikler kullanılarak integro-diferansiyel denklemin çözümleri için verilen sayısal yöntemleri tanıtacağız.

4.2 Tek Türün Büyümesi

Bu kısımda tek bir türün ekolojik sistemini oluşturacağız ve dikkatimizi o türün büyümesi ile sınırlayacağız. Bu sistem laboratuvarında uygulanıyor gibi görünebilir fakat, genel ekolojik sistemin başlangıç noktası bu sistemdir. Hemen hemen tüm ekolojik sistem, küçük olsa bile, bir çok türün birleşmesinden oluşur ve türlerin her biri diğerlerinden bazılarını etkilemektedir. Bölüm 3’de çoklu türlerin sistemini oluşturmuş ve matematiksel ekolojide belli başlı sistemleri tanıtmıştık.

Uzun yıllar önce Volterra (1931), (4.1.1) sisteminde $i = 2$ için integro-diferansiyel denklem sistemini ele almış ve ekolojik sistem için incelemiştir. Biz şimdilik bu sistemde $i = 1, j = 1, \eta = 0$ için olan aşağıdaki denklemi inceleyeceğiz.

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha + \beta u(t) + \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0, \quad (4.2.1)$$

(4.2.1) denkleminde $\beta = 0, \gamma = 0$ seçilirse,

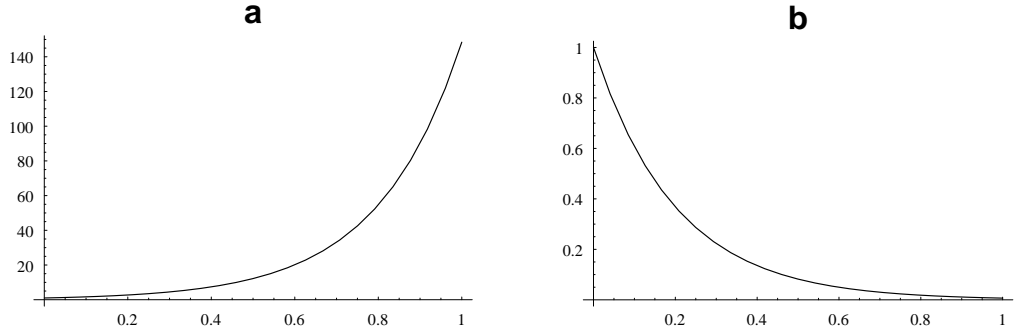
$$u'(t) = \alpha u(t), \quad t \geq 0, \quad (4.2.2)$$

$$u(0) = u_0,$$

ile verilen test denklemini elde ederiz. Burada $u(t)$, t zamanında canlı bir popülasyonun birey sayısını belirtir. (4.2.2) denkleminin çözümü,

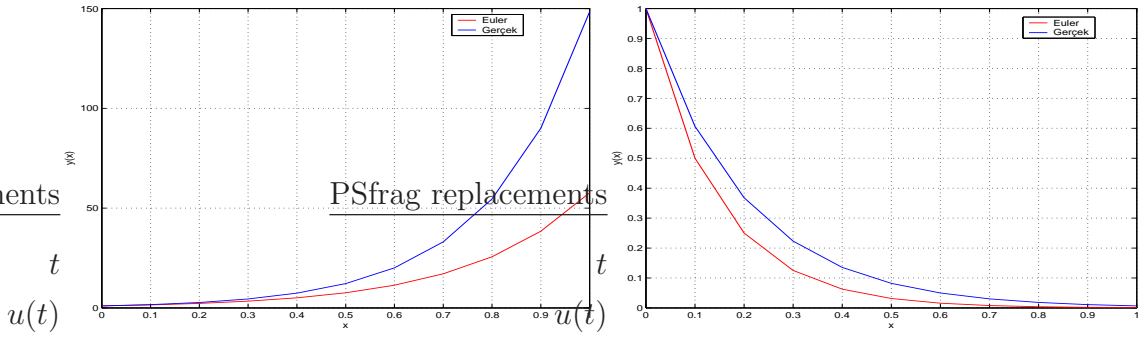
$$u(t) = u_0 e^{\alpha t},$$

çıkar ve bu denklem, Şekil 4.1'de görüldüğü gibi biyolojide üstel (sınırsız) büyümeyi ifade eder.



Şekil 4.1: (a) $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$, (b) $u(t) = u_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha = 5$, $u_0 = 1$ değerleri ile Mathematica grafiği

PSfrag replacements



Şekil 4.2: Solda $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$, $u_0 = 1$, $\alpha = 5$, $h = 0.1$ için sağda $u(t) = u_0 e^{\alpha t}$, $u_0 = 1$, $\alpha = -5$, $h = 0.1$ Euler Yöntemi ile MATLAB grafiği

4.2.1 $u'(t) = \alpha u(t)$ İçin Euler Yönteminin Kararlılığı

(4.2.2) denklemi için Euler yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h\alpha u_n, \\ &= u_n(1 + \alpha h), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

elde edilir. (4.2.3) denkleminde n için $0, 1, 2, \dots, n$ değerlerini yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}u_0 &= 1, \\u_1 &= u_0(1 + \alpha h), \\u_2 &= u_1(1 + \alpha h) = u_0(1 + \alpha h)(1 + \alpha h) = u_0(1 + \alpha h)^2, \\&\vdots \\u_n &= u_0(1 + \alpha h)^n,\end{aligned}$$

elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha h)^n = u^* = 0,$$

ifadesinin yakınsak olması için;

$$|(1 + \alpha h)| < 1,$$

olması gerekir dolayısıyla,

$$-1 < (1 + \alpha h) < 1,$$

elde edilir. Buradan $h > 0$ için,

$$-1 < (1 + \alpha h),$$

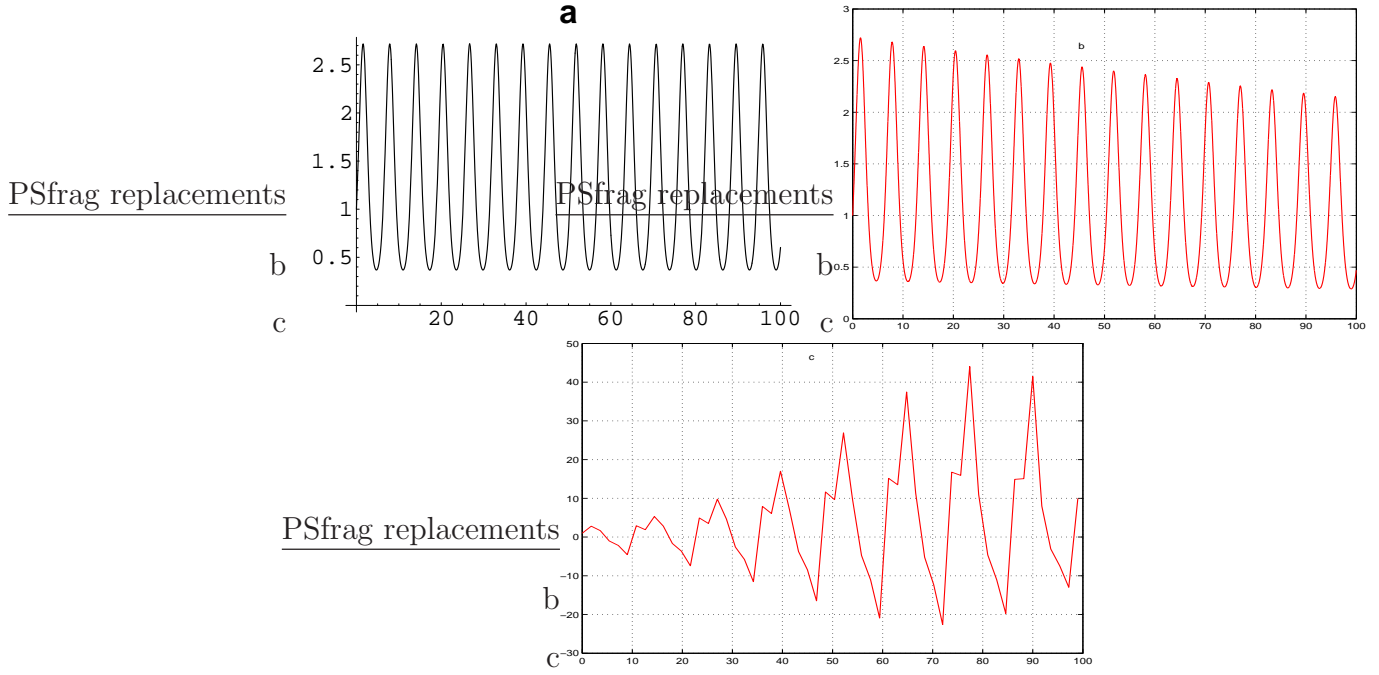
$$-2 < \alpha h,$$

olur, öyleyse;

$$h < \frac{2}{\alpha},$$

olduğunda Euler yöntemi yakınsak olur.

Şekil 4.3'de $u'(t) = u(t) \cos(t)$ denkleminin Euler yönteminde $h = 0.01$ ve $h = 1.8$ değerleri için MATLAB grafiği ve Mathematica ile elde edilmiş $u(t) = c_1 e^{\sin(t)}$ fonksiyonunun grafiği görülmektedir.



Şekil 4.3: (a) $u'(t) = u(t) \cos(t)$ denkleminin Mathematica ile elde edilmiş gerçek değeri, (b) aynı denklemin Euler yönteminde $h = 0.01$ olarak elde edilmiş MATLAB grafiği, (c) Euler yönteminde $h = 1.8$ olarak elde edilmiş MATLAB grafiği.

4.2.2 Lojistik Denklemler

t zamanındaki $u(t)$ fonksiyonunu, ya popülasyon büyüklüğü ya da popülasyon yoğunluğu olarak tanımlarız. Büyük popülasyon birey için az kaynak gerektirir. $u(t)$ 'nin fonksiyonu olarak verilen popülasyonun büyüme oranı için doğrusal olarak azalan durum basit bir durumdur.

$\gamma = 0$ için (4.2.1) ifadesi lojistik denklem,

$$u'(t) = u(t)\{\alpha - \beta u(t)\}, \quad (4.2.4)$$

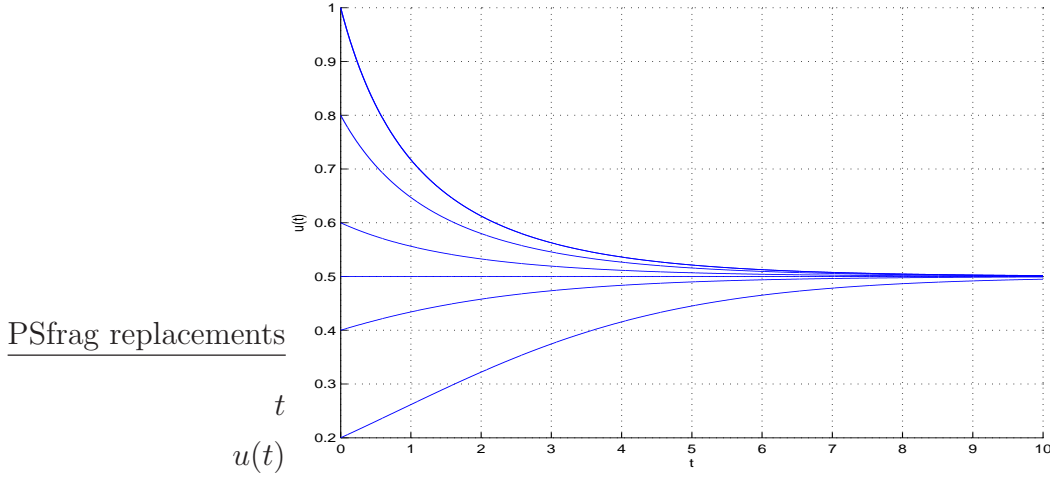
biçimine indirgenir. Burada α, β pozitif reel sayılardır. (4.2.4) denkleminde "üstel terim" $\alpha u(t)$, $\beta u^2(t)$ çarpanı ile azaltılır. (4.2.4) denklemini küçük $u(t)$ popülasyonunda yaklaşık olarak üstel büyümeyi ve büyük $u(t)$ için türün üyeleri

kaynaklar için birbiriyle yarıştığı modeli verir.

(4.2.4) denkleminin dinamik davranışı kolaylıkla anlaşılır. Eğer, $u = 0$ veya $u = \frac{\alpha}{\beta}$ ise $u' = 0$ ve u değişmez. $0 < u < \frac{\alpha}{\beta}$, $u' > 0$ ve dolayısıyla u artar, $u > \frac{\alpha}{\beta}$ için ise azalır. (4.2.4) denkleminin çözümü $u(0) = u_0 > 0$ başlangıç değeri ile,

$$u(t) = \frac{u_0 \alpha \exp(\alpha t)}{\alpha - \beta u_0 + u_0 \beta \exp(\alpha t)}, \quad (4.2.5)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4.4: $u_0 = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1$ başlangıç değerleri, $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1$ için (4.2.4) lojistik büyüme denkleminin MATLAB grafiği

Şekil 4.4, popülasyon dinamiğini gösterir. $u(0) < \frac{\alpha}{\beta}$ için, $t \rightarrow \infty$ iken $u(t)$ artar ve asimptotik olarak $\frac{\alpha}{\beta}$ değerine yaklaşır. $0 < u(0) < \frac{\alpha}{\beta}$ olduğunda çözümün davranışı lojistik büyüme olarak isimlendirilir. u 'nun küçük değerleri için popülasyon hemen hemen üstel olarak artar ve $\frac{\alpha}{\beta}$ değerine yaklaşma hızı daha zordur ve asimptotik olarak yaklaşır. $u(0) = u_0 > \frac{\alpha}{\beta}$ için, $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak $\frac{\alpha}{\beta}$ değerine azalarak yaklaşır. $u_0 = u(0) = \frac{\alpha}{\beta}$ olduğunda ise popülasyon $\frac{\alpha}{\beta}$ değerinde kalır.

(4.2.5) denkleminde, $\forall u(0) > 0$ için $t \rightarrow \infty$ iken $u(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ elde edilir. $\frac{\alpha}{\beta}$ değeri popülasyonun büyümesi için kısıtlayıcı faktördür ve ortamın *taşıma kapasitesi* olarak isimlendirilir.

4.2.3 Popülasyon ve Hasat

Bu kısımda (4.2.4) denkleminde hasat terimini ekleyeceğiz ve hasatın etkisini göstereceğiz. Popülasyon denkleminde hasat oranını $\mathcal{H} > 0$ reel değeri olarak varsayacağız ve

$$u'(t) = u(t)\{\alpha - \beta u(t)\} - \mathcal{H}, \quad u(0) = u_0, \quad (4.2.6)$$

şeklinde elde edeceğiz. Denge noktaları (4.2.6) denkleminin sağ tarafı olan $u(t)\{\alpha - \beta u(t)\} - \mathcal{H} = 0$ ikinci derece denkleminin sıfır çözümüdür ve buradan aşağıdaki sonuçlar bulunur.

a. Ancak ve ancak $\mathcal{H} \leq \frac{\alpha^2}{4\beta}$ ise reel pozitif kökleri vardır. Aksi durumda (4.2.6) denkleminin sağ tarafı her zaman negatiftir.

b. $\mathcal{H} < \frac{\alpha^2}{4\beta}$ ise iki kökün daha açık hali $u^* = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\mathcal{H}}}{2\beta}$ şeklindedir.

Daha küçük kökler kararsız iken $0 < \mathcal{H} < \frac{\alpha^2}{4\beta}$ olduğunda $u^* = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\mathcal{H}}}{2\beta}$ kararlı bir denge noktasıdır. $u^* > u_* > 0$ iki sabit çözüm olsun. Eğer $u^* > 0$ ve $u_* > 0$ (4.2.6) denkleminin iki kökü ise ,

$$u'(t) = -\beta(u(t) - u_*)(u(t) - u^*),$$

eşitliği yazılabilir. Eğer $u(t) = u_* + \epsilon_*(t) = u^* + \epsilon^*(t)$ olarak saptarsak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\epsilon_*(t) &= -\beta\epsilon_*(t)[\epsilon_*(t) + u_* - u^*], \\ &= -\beta\epsilon_*(t)[u_* - u^*] + O(|\epsilon_*(t)|^2), \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dt}\epsilon^*(t) = -\beta[u^* - u_*]\epsilon^*(t) + O(|\epsilon^*(t)|^2)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\epsilon_*(t) &\approx \gamma_*\epsilon_*(t), \\ \frac{d}{dt}\epsilon^*(t) &\approx \gamma^*\epsilon^*(t),\end{aligned}$$

elde edilir, burada $\gamma_* > 0$ ve $\gamma^* < 0$ 'dır ve böylece doğrusallaştırılmış kararlılık yoluyla $u(t) = u^*$ kararlı (asimptotik kararlı) iken $u(t) = u_*$ kararsızdır. Eğer $\mathcal{H} = \frac{\alpha^2}{4\beta}$ ise $u(t)\{\alpha - \beta u(t)\} - \mathcal{H} = 0$ denklemi $u^* = \frac{\alpha}{2\beta}$ olan bir tek denge noktasına sahiptir. Buradan $u^* = \frac{\alpha}{2\beta}$ denge değeri için maksimum değer $\mathcal{H} = \frac{\alpha^2}{4\beta}$ değeridir.

Uyarı 4.2.1 Eğer (4.2.4) lojistik denkleminde $\beta u(t)$ yerine $\beta(u(t))^m$ seçersek,

$$u'(t) = u(t)\{\alpha - \beta(u(t))^m\}, \quad u(0) = u_0, \quad (4.2.7)$$

denklemini elde ederiz. Burada α , β ve m pozitif reel sabittir. $u^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{m}}$ pozitif denge noktası etrafında kararlılık analizini yürütürüz.

4.2.4 Genel Büyüme

(4.2.4) lojistik modelinden sonra tek türe ait popülasyon için popülasyonun büyüme oranı, popülasyon yoğunluğunun doğrusal bir fonksiyonu olduğu farzedilir. Bu bazı ekolojistler tarafından uygulanamaz olarak eleştirildi. Bu nedenle adi diferansiyel denklem olarak tanımlanan genel büyümeyi ele alacağız.

$$u'(t) = u(t)G(u(t)), \quad (4.2.8)$$

burada $G(u(t))$ popülasyonun büyüme oranıdır ve aşağıdaki kabulleri sağlar:

- (a) $G(u(t)) \in C^1[0, \infty)$,
- (b) $G(0) > 0$, $u \in [0, \infty)$ için $\frac{dG(v)}{dv} < 0$,
- (c) $G(\alpha/\beta) = 0$ olacak şekilde $\alpha/\beta > 0$ vardır.

(a) kabulü sadece matematikselidir. (b)'nin ilk kısmı popülasyon küçük iken üstel büyümesini garantiye alır. (b)'nin ikinci kısmı kaynakların sınırlı olduğu, (c)'de verilen α/β ortamın taşıma kapasitesi anlamına gelir. Lojistik büyüme için $G(u(\cdot)) = \alpha - \beta u(\cdot)$ olur ve yukarıdaki kabulleri sağlar. (4.2.8) genel büyüme modeli bir çok yazar tarafından kullanıldı. Örneğin,

$$\frac{du(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{u(t)}{K}\right) \quad (\text{Boyce and DiPrima (1997)})$$

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) - b(u(t))^2 \quad (\text{Borrelli and Coleman (1998)}) \quad (4.2.9)$$

$$\frac{du}{dt} = (\epsilon - \lambda u(t))u(t) \quad (\text{Volterra (1962)}) \quad (4.2.10)$$

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = b - du(t) \quad \text{ve} \quad \frac{u'(t)}{u(t)} = b - du(t)^m \quad (\text{Cushing (1977)}) \quad (4.2.11)$$

burada r , K , a , b , d , ϵ, λ ve m pozitif sabitlerdir.

(4.2.8) denklemini düşünelim ve $w > 0$ için $V(w)$ tanımlayalım,

$$v(w) = w - \alpha/\beta - \alpha/\beta \log \left(\frac{\beta w}{\alpha} \right). \quad (4.2.12)$$

Aşağıdaki özellikler (4.2.12) için kolaylıkla gösterilebilir.

- (i) $V(\alpha/\beta) = 0$,
- (ii) $w \in (0, \infty)$ için, $w = \alpha/\beta$ noktasında $V(w)$ sifıra denk global minimum noktası vardır, bu nedenle $u > 0$ için $V(u) \geq 0$ vardır.
- (iii) $w \in (0, \infty)$ için, $\forall \xi > 0$ için $V(w) = \xi$ seviye çizgisi olacak şekilde iki pozitif nokta tanımlıdır.

Ayrıca (b) ve (c) kabullerinden aşağıdaki özellik sağlanır.

(iv) (4.2.12) denkleminin zamana göre türevinin (4.2.8) denkleminin $u(t) = u^*$ çözümü boyunca $u(t) \neq \alpha/\beta$ için,

$$V'(u)(t) = \frac{\partial V}{\partial u} u'(t) = (u(t) - \alpha/\beta)G(u(t)) < 0, \quad (4.2.13)$$

denklemini sağlar. (4.2.12) denkleminde $V(u)$ (4.2.8) için **Lyapunov fonksiyonu** olarak isimlendirilir.

4.3 Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklemler

Lojistik denklem Volterra (1931) tarafından sınıflandırılarak ve daha sonra Miller (1966) tarafından genişletilerek çalışılmıştır. 1930'lu yıllarda çoğunlukla Volterra'nın çalışmasının etkisi nedeniyle hızlı üreyen türler ile tek veya iki türün küçük organizmalarının pek çok laboratuvar popülasyonları deneyi yapıldı. Bu deneylere lojistik modeli uygulamak güçlendirilmiş sabit bir değere ulaşmak yerine popülasyon ölümleri olduğu için sık sık engellendi. Bunun bir nedeninin organizma ölümleri ve artık ürünler nedeniyle ortamın kapalı olmasının verdiği rahatsızlık olduğu fark edildi. Böylece Volterra deneyin başlamasından sonraki tüm zamanlarda türün ölüm oranının popülasyon üzerindeki toplam etkisini araştırmaya başladı.

Benzer bir durum üzerinde yaşadığı canlının (konak) ortamını paylaşan ve onu öldürmeyerek hayat döngüsünü tamamlayan bir parazit için meydana gelebilir. Konağın bağışıklık direnci parazit popülasyonunun yayılmasına bağlıdır. Bu konuda Michel (1969)'dan alıntı yaparsak "konağın ideal ortam sunduğu zaman hastalığın erken aşamaları sırasında artım üsteldir. Sonradan konak dirençli olduğunda ve daha az uygun ortam oluştuğunda artış oranı sifira doğru azalır ve

popülasyon bu yüzden hızlı bir şekilde azalır.” (4.2.8) denklemini genelleştirirsek,

$$u'(t) = u(t)G(t, u(\cdot)), \quad (4.3.1)$$

denklemini elde ederiz. Burada $G(t, u(\cdot))$ $s \leq t$ için, $u(s)$ değerine bağlıdır. Eğer (4.3.1) denkleminde,

$$G(t, u(\cdot)) := \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

denklemini seçersek,

$$u'(t) = u(t) \left(\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.3.2)$$

elde ederiz. Burada üç olasılık vardır; $p(t) = 0$, $p(t) = -\infty$, $p(t) = t - \tau$ burada $\tau > 0$ ve τ sabit veya $t \geq 0$ için $\tau(t)$ sınırlıdır.

Eğer $p(t) = 0$ alırsak deneyin başlangıç zamanı, deneyin başladığı anı veya konağın parazitleri midesine indirdiği anı gösterir. Basit olarak çekirdek fonksiyonunu $k \equiv c$ alır ve bu durumdaki sonuçların özelliğini göstermek için anlık ikinci dereceden terimi ihmal edersek,

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t) \left(r - c \int_0^t y(s)ds \right), \quad t \geq 0, \\ y(0) &= y_0 > 0, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

olur.

$$m(t) = \int_0^t y(s)ds, \quad m(0) = 0,$$

olsun. Bunun türevi alınırsa,

$$m'(t) = y(t) \quad \text{ve} \quad m''(t) = y'(t),$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.3.3) denklemi,

$$m''(t) = m'(t)(r - cm(t)), \quad (4.3.4)$$

şekline dönüşür. (4.3.4) denkleminde integral uygularsak; (m, t ye bağlı bir bağımlı değişken olduğu için $(m^2)' = 2mm'$ düşünülür.)

$$m'(t) = -\frac{c}{2} \left(m^2(t) - \frac{2m(t)r}{c} - \frac{2}{c}y_0 \right),$$

$$m^2(t) - \frac{2m(t)r}{c} - \frac{2}{c}y_0 = 0,$$

elde edilir ve denklemin kökleri $-\alpha$ ve β olursa denklem,

$$m'(t) = -\frac{c}{2}(m(t) - \alpha)(m(t) + \beta), \quad (4.3.5)$$

şekline gelir. (4.3.5) diferansiyel denkleminde ara işlemi Mathematica ile çözüldüğünde ve gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$m(t) = \frac{-e^{(\alpha+\beta)\frac{ct}{2}}\alpha - e^{(\alpha+\beta)c_1}\beta}{-e^{(\alpha+\beta)\frac{ct}{2}} + e^{(\alpha+\beta)c_1}}, \quad (4.3.6)$$

denklemi elde edilir. $\gamma = (\alpha + \beta)\frac{c}{2}$ ve $k = e^{(\alpha+\beta)c_1}$ yazarsak,

$$m(t) = \frac{-e^{\gamma t}\alpha - k\beta}{-e^{\gamma t} + k},$$

şeklinde olur. Burada $m(0) = 0$ başlangıç değeri yerine yazılırsa $k = -\frac{\alpha}{\beta}$ elde edilir. (4.3.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$m(t) = \frac{\alpha\beta(e^{\gamma t} - 1)}{\alpha + \beta e^{\gamma t}}, \quad (4.3.7)$$

elde edilir. $m'(t) = y(t)$ olduğundan (4.3.7) denkleminde t ye göre türev alırsak;

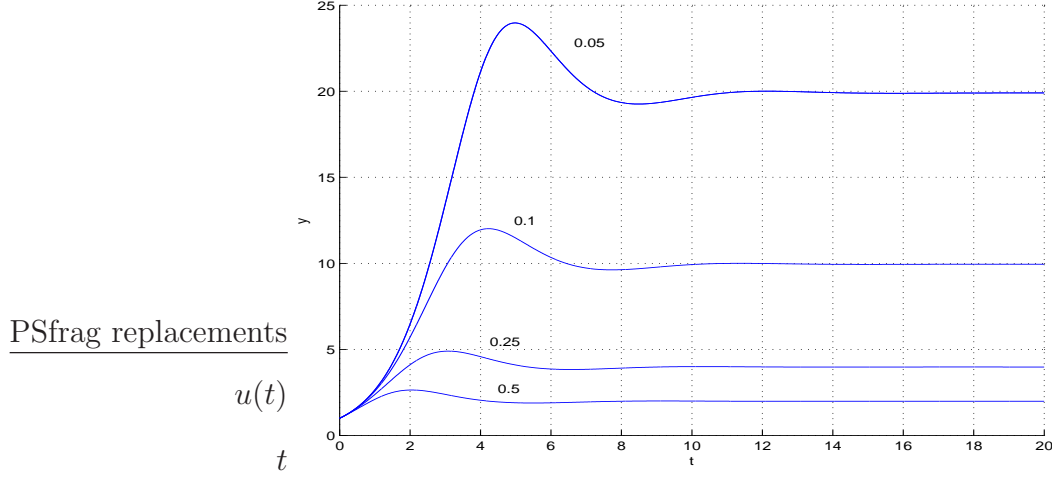
$$m'(t) = y(t) = \frac{y_0(\alpha + \beta)^2 e^{\gamma t}}{(\alpha + \beta e^{\gamma t})^2}, \quad (4.3.8)$$

olarak elde edilir. Şekil (4.5)'da da görüleceği üzere integro-diferansiyel denklem bir maksimum değere yükseldikten sonra $e^{-\gamma t}$ değerine doğru azalmaktadır.

4.3.1 Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklemlerde Bazı Çalışmalar

Cushing (1977) pek çok sonuç ve referanslar içerir. Böyle sistemler için global kararlılık üzerine pek çok sonuç, integro-diferansiyel denklemin, adi diferansiyel denkleme indirgemesine izin veren özel çekirdeklerin içerdiği gecikme teriminin dağıtılmasını gerektirir. Cushing (1977),

$$u'(t)/u(t) = b - au(t) - d \int_{-\infty}^t k(t-s)u(s)ds, \quad (4.3.9)$$



Şekil 4.5: Denklem (4.3.3) için $r = 1$, $c = 0.5, 0.2, 0.1$ ve 0.05 değerleri için dördüncü merteye Runge-Kutta(RK4) yöntemi kullanarak elde edilen MATLAB grafiği

integro-diferansiyel denklemini ele aldı. $b > 0$, a ve $d \geq 0$ $a + d \neq 0$, burada $k(t) > 0$ olduğu söylenir bu yüzden $k \in L^1[0, \infty)$, $|k(t)|_1 := \int_0^\infty |k(s)|ds = 1$ dir. (4.3.9) denklemi,

$$u'(t)/u(t) = b - au(t) - d \int_0^\infty k(s)u(t-s)ds, \quad (4.3.10)$$

şekilde de ifade edilebildiğine dikkat edilmelidir.

Cushing (1977), (4.3.9) denklemini gecikmesiz terim $-au(t)$ ve Volterra integrali yoluyla tanımlanmış olan gecikmeli terimi olarak iki kısma ayırdı. Ayrıca a , b ve d yi pozitif reel sayılar olarak kabul etti. Bu yüzden (4.3.9) denklemi $u^* = b/(a + d) > 0$ ile verilen tek pozitif denge çözümüne sahiptir.

- Cushing (1976) integro-diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde ele aldı.

$$u'(t)/u(t) = \lambda(1 - \frac{1}{c} \int_0^\infty u(t-s)d\eta(s)), \quad (4.3.11)$$

Bu denklem şekli büyüme oranı, önceki zamanlardaki popülasyon büyüklüğü tarafından etkilendiğinde, tek türe ait popülasyonun büyüme modeli olarak

kullanılır. Burada $u(t)$, $(d\eta(s) = k(s)ds)$ için t zamanında popülasyon büyüklüğünün bazı ölçülerinin modeli, $c > 0$ türün taşıma kapasitesi ve $\lambda > 0$ frenlenmemiş popülasyon için üstel büyüme oranıdır (yani $c = +\infty$ için). İntegral terim büyüme oranı üzerinde, geçmiş popülasyon büyüklüğünün kalıtsal veya yığılmış etkisini tanımlar.

- Gopalsamy (1992) aşağıdaki şekilde lojistik integro-diferansiyel denklemi yukarıda anlatılmış olan koşullar ile ele alır.

$$u'(t)/u(t) = \alpha - \int_0^t k(t-s)u(s)ds, \quad (4.3.12)$$

denkleminin tüm çözümleri için u^* limit değerine yaklaştıran yeterli koşullar elde etti. (4.3.12) denklem için varsayımlar aşağıdaki gibidir:

(i) $k(t) > 0$,

(ii) $\alpha > 0$, $\int_0^\infty k(t)dt = \beta$; $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty tk(t)dt < 1$;

ve kullanılmış olan Lyapunov fonksiyon analizi,

$V(w)(t) = w(t) - u^* - u^* \log \left\{ \frac{w(t)}{u^*} \right\}$ ve (4.3.12) denkleminin her pozitif çözümü için $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^* = \frac{\alpha}{\beta}$ eşitliğini sağlayan denklem kurulur.

- Freedman and Wu (1992) yoğunluğun periyodik gecikmedeki değişimine yanıt olduğu büyüme oranında, tek türün popülasyonunun büyüme modelini ele alır. Bu yüzden denklem modeli bir global asimptotik kararlı, pozitif periyodik çözüme sahiptir. Daha genel bir durum aşağıda özerk olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemdir.

$$u'(t)/u(t) = a(t) - b(t)u(t) + \int_{-\infty}^t K(t,s)u(s)ds, \quad (4.3.13)$$

denkleminde $K(t,s)$, $-\infty < s \leq t < \infty$ için $K(t+w, s+w) = K(t,s)$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur.

- Miller (1966), Miller (1971), Lakshmikantham and Rao (1995), Baker *et al.* (1998) ve Baker *et al.* (1999) da skaler denklem çalışıldı.

$$u'(t)/u(t) = a - bu(t) - \int_c^t k(t-s)u(s)ds, \quad (4.3.14)$$

(burada $c = 0$ veya $c = -\infty$) başlangıç koşulu $u(0) = u_0 > 0$ ve $u(t) = \phi(t)$, $t < 0$ açısından denklem yukarıdaki gibidir. Burada $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k(t) \in C[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$ şeklindedir. $\int_0^\infty |k(s)|ds < b$ olduğunu farzedelim, Miller (1966, Teorem 2), Miller(1971) ve Lakshmikantham and Rao (1995),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^* = a \left[b + \int_0^\infty k(s)ds \right]^{-1}, \quad (4.3.15)$$

olduğunu kanıtladı.

- Landman (1980) aşağıda verilen gecikmeli lojistik denklemi çalıştı.

$$u'(t)/u(t) = \lambda(1 - au(t) - \int_{-\infty}^t k(t-s)F(u(s))ds), \quad (4.3.16)$$

burada $u(t)$ fonksiyonu $t > 0$ anında türlerin yoğunluğu ve büyüklüğünün bir ölçüsüdür. (4.3.16) denklemi bir pozitif katsayı olan λ 'nın küçük değerleri için kararlı olan pozitif denge çözümünün bir araştırması mevcuttur. Hatta eğer, λ değeri büyütülürse bu çözüm kararlılığını kaybeder (bkz Landman (1980)).

4.4 Sınırlı ve Sınırsız Gecikmeli Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklemler

Biyolojik popülasyonların büyümesi çalışmasında Voterra (1931), Volterra (1959) aşağıdaki gibi verilmiş olan tek türün popülasyonu için matematiksel model ortaya çıkardı.

$$u'(t) = u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.4.1)$$

burada $u(t)$, t anındaki popülasyon büyüklüğü ve α , β pozitif reel sayılar,

$p(t) = 0$, $p(t) = -\infty$, (4.4.1) denkleminin alt sınırları ve $k(t)$ kalıtsal etkidir.

(4.4.1) denklemi için Volterra (1959) orjinal çalışmasında her $t \geq 0$ için $k(t) \geq 0$

olduğunu varsaymıştır. Eğer $\gamma = 0$ veya $k(t) \equiv 0$ ise buradan (4.4.1) denklemi (4.2.4) lojistik denkleme indirgenir. (4.4.1) denklemi lojistik integro-diferansiyel denklem olarak bilinir.

Şimdi lojistik integro-diferansiyel denklemler ve ($p(t) = 0$ veya $p(t) = -\infty$ olduğunda) (4.4.1) denklemi ile ilgili bazı teorem ve lemmalar vereceğiz.

Teorem 4.4.1 (Miller (1966))

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma = 1$, $k(t) \in C(0, \infty) \cap L^1(0, \infty)$, $k(t) \not\equiv 0$ ve

$$\beta - \int_0^{\infty} |k(s)| ds > 0 \quad (4.4.2)$$

olsun. Eğer, $p(t) = -\infty$ ise buradan $-\infty < t \leq 0$ aralığında herhangi pozitif, sürekli, sınırlı fonksiyon $g(t)$ için (4.4.1) denkleminin $-\infty < t \leq 0$ aralığında $u(t) = g(t)$ olacak şekilde tek $u(t)$ çözümü vardır. $\forall t > 0$ için $u(t)$ çözümü pozitiftir ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^* = \alpha \left[\beta + \gamma \int_0^{\infty} k(s) ds \right]^{-1}, \quad (4.4.3)$$

şeklindedir.

İspat: Bkz Miller (1966).

Teorem 4.4.2 Miller (1966)

Teorem 4.4.1'in sağlandığını farzedelim. Eğer $p(t) = 0$, $\gamma = 1$, ise herhangi $u_0 > 0$ için $u(0) = u_0$ ile (4.4.1) denkleminin tek bir çözümü olan $u(t)$ mevcuttur. Bu çözüm (4.4.3) denklemini sağlar.

İspat: Bkz Miller (1966).

(4.4.1) denklemi oldukça basit bir büyüme modelini tanıtır. Volterra'nın $\forall t \geq 0$ için $k(t) \geq 0$ olduğunu farzediğine dikkat edilmelidir. Eğer $k(t)$ küçük ise (4.4.1) denkleminin çözümünün asimptotik davranışı (4.2.5) denkleminin çözümüne yakındır.

4.4.1 Sınırlı Gecikmeli Doğrusal Olmayan İntegro-Diferansiyel Denklemler

İkinci dereceden terimi ihmal edersek ((4.4.1) denkleminde $\beta = 0$ ve $p(t) = -\infty$ olarak seçersek) aşağıdaki doğrusal olmayan diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$u'(t) = u(t) \left[\alpha - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right], \quad (4.4.4)$$

burada α , β pozitif sayılar, $\beta = 0$ ve $k(t)$ türlerin geçmiş tarihteki oranının şimdiki orana etkisini tanıtan bir gecikme çekirdeğidir. (4.4.4) denklemi biyolojik olarak gerçeğe uygun olduğunda uygun gecikmeli çekirdeğini seçmede büyük zorluklar söz konusudur. Bununla beraber analitik uygunluğun eşlik etmesi nedeniyle (bkz Gopalsamy (1992), MacDonald (1978) ve Post and Travis (1982)) çekirdek aşağıdaki şekildedir,

$$k(t) = \frac{a^{k+1}t^k \exp(-at)}{k!}, \quad t \geq 0, \quad (4.4.5)$$

burada $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ve a ekolojinin integro-diferansiyel denklem modellerinde yaygın olarak kullanılmış olan pozitif bir sabittir. (4.4.4) denklemini (4.4.5) çekirdeği ile alarak Post and Travis (1982) ve MacDonald (1978) ve diğerlerinin önerdiği bir teknik sayesinde adi diferansiyel denkleme dönüştürmek mümkündür.

$$u'(t) = - \int_0^t k(t-s)u(s)ds, \quad (\text{Gopalsamy (1992)}) \quad (4.4.6)$$

şeklindeki integro-diferansiyel denklemin çözümünün asimptotik davranışını ele alalım. Burada $k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, yukarıda özelleştirilmiş olan çekirdek sınıfına aittir. (4.4.6) integro-diferansiyel denklem, başlangıç koşulu $u(0) = u_0$ ile aşağıdaki integral denkleme eşittir,

$$u(t) = u_0 - \int_0^t \left\{ \int_0^\xi k(\xi-s)u(s)ds \right\} d\xi. \quad (4.4.7)$$

denkleminde integrasyon sırasında bir değişiklik yapılırsa,

$$u(t) = u_0 - \int_0^t u(s) \left(\int_0^\xi k(\xi-s)d\xi \right) ds, \quad (4.4.8)$$

denklemi elde edilir. (4.4.6) denkleminin çözümünün asimptotik davranışını çalışmak için $k(t)$ çekirdeğinin belli pozitif koşulları sağladığını farzedeceğiz.

Tanım 4.4.1 $\forall v \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $\forall T > 0$ için,

$$\int_0^T v(t) \int_0^t v(s) ds dt \geq 0, \quad (4.4.9)$$

ise gerçel değer fonksiyonu $k \in L^1(0, \infty)$ pozitifdir ve kuvvetli pozitiftir denir ve $k(t) - \epsilon \exp(-\mu t)$ olacak şekilde $\epsilon > 0$, $\mu > 0$ sayıları varsa pozitif çekirdek denir.

Lemma 4.4.3

- (i) $k(t) \in C[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$
- (ii) $t \geq 0$ için $(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} k(t) \geq 0$, $j = 0, 1, 2$,
- (iii) $k(t) \neq \text{sabit}$.

koşulları sağlayan $k(t)$ çekirdeği kuvvetli pozitif çekirdektir.

İspat: Bkz Gopalsamy (1992)

Teorem 4.4.4 $k(t)$ Lemma 4.4.3'ün koşullarını sağlayan bir kuvvetli pozitif çekirdek olsun. Buradan $u'(t) = - \int_0^t k(t-s)u(s)ds$ 'nin her çözümü $t \rightarrow \infty$ iken $u(t) \rightarrow 0$ 'ı sağlar.

İspat: Bkz Gopalsamy (1992)

Şimdi aşağıdaki şekilde integro-diferansiyel denklemi ele alalım,

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ \alpha - \int_0^t k(s)u(t-s)ds \right\}, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \in (0, \infty), \quad \alpha \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

ve bir dengeye yaklaştırmak için (4.4.10) denkleminin çözümleri için yeterli koşullar elde ederiz.

Teorem 4.4.5

- (i) k kuvvetli pozitif çekirdek,

$$(ii) \int_0^{\infty} k(s)ds = \beta, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} sk(s)ds < 1$$

olsun. (4.4.10) denkleminin her çözümü $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ 'yi sağlar.

İspat: Bkz Gopalsamy (1992)

Aşağıdaki lemma doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemin asimptotik davranışını araştırmamız için yeterli durumlar sağlar. Bu bölümde $k(t)$ çekirdeği pozitif veya kuvvetli pozitif olarak kabul ederiz.

Lemma 4.4.6 $t \rightarrow \infty$ iken $u \rightarrow u^*$ ve $\int_0^{\infty} |k(s)|ds < +\infty$ ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(t-s)u(s)ds = u^* \int_0^{\infty} k(s)ds,$$

eşitliği vardır.

İspat: Bkz Filiz (2000b)

(4.1.1) Lotka-Volterra sisteminde $i, j = 1$, $u_1(t) = u(t)$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_{11} = -\beta$, $\eta_{11} = 0$, ve $\gamma_{11} = -\gamma$ alırsak,

$$u'(t) = u(t) \left(\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right), \quad t \geq 0,$$

$u(t) = \phi(t)$, $t \leq 0$ başlangıç şartını da sağlayan bir doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemi elde ederiz.

Lemma 4.4.7 Aşağıdaki gibi alt limit $p(t) = 0$ olan bir doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemi verilsin

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left(\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_0^t k(t-s)u(s)ds \right), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

kabul edelim ki $(p(t) = 0)$ $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$ ve $k(t) = a^2 t \exp(-at)$, $a \in (0, \infty)$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^* = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ olur.

İspat.

(4.4.11) eşitliği aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left(\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_0^\infty k(s)u(t-s)ds \right), \\ 0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \left(\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_0^t k(t-s)u(s)ds \right). \end{aligned}$$

Burada $\int_0^\infty k(s)u(t-s)ds = \int_0^t k(t-s)u(s)ds$ eşitliği kolayca gözükür (bkz Filiz (2000b)) ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(t-s)u(s)ds = u^* \int_0^\infty k(s)ds$ olur.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \beta u^* - \gamma u^* \int_0^\infty k(s)ds, \quad u^* \neq 0, \\ 0 &= \alpha - \beta u^* - \gamma u^*, \quad \int_0^\infty k(s)ds = 1 \quad \text{ve} \quad u^* \neq 0, \\ 0 &= \alpha - u^*(\beta + \gamma), \end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^* = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ elde edilir.

4.5 Doğrusal Olmayan Bir İntegro-Diferansiyel Denklemin Sayısal İncelenmesi

Şimdi aşağıdaki şekilde verilen lineer olmayan integro-diferansiyel denklemi (Baker *et al.* (1998), Baker *et al.* (1999), Baker *et al.* (2000) ve Cushing (1977)) gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ \alpha - \beta u(t) - \gamma \int_0^t \exp(-\mu(t-s))u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

denkleme açık Euler kuralı uygularsak,

$$\frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} = \tilde{u}_n \left\{ \alpha - \beta \tilde{u}_n - \gamma \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}, \tag{4.5.2}$$

denklemini buluruz. (4.5.2) denkleminin sağ tarafındaki integral yakınsaması için herhangi bir kural (dikdörtgenler, ortanokta, yamuklar (trapezler) veya Simpson kuralları) uyguladığımızda sayısal yakınsama Euler kuralından dolayı birinci mertebeden yakınsar.

Şimdi de (4.5.1) denklemini θ -yöntemi ile sayısal çözelim. Bu yöntem ile kapalı bir yöntem elde ederiz ($\theta > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} &= \theta \tilde{u}_{n+1} \left\{ \alpha - \beta \tilde{u}_{n+1} - \gamma \sum_{j=0}^{n+1} w_{n+1,j} \exp(-\mu((n+1)h - jh)) \tilde{u}_j \right\} \\ &+ (1 - \theta) \tilde{u}_n \left\{ \alpha - \beta \tilde{u}_n - \gamma \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

burada $w_{n,j}$ 'ler her zamanki gibi ağırlık fonksiyonlarıdır.

Yukarıdaki (4.5.3) denklemini yeniden düzenlersek,

$$a_n = 1 + h(1 - \theta) \left\{ \alpha - \gamma \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}$$

ve $b_n = h\theta \left\{ \alpha - \gamma \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}$, kısaltmalarını kullanarak \tilde{u}_{n+1} için,

$$\begin{aligned} f(u) &= \tilde{u}_n \{ a_n - h(1 - \theta) \beta \tilde{u}_n \} + \tilde{u}_{n+1} \{ b_n - 1 - h\theta \gamma w_{n+1,n} \exp(-h) \tilde{u}_n \} \\ &- \tilde{u}_{n+1}^2 \{ \beta h \theta + h\theta \gamma w_{n+1,n+1} \} = 0, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

ikinci dereceden bir doğrusal olmayan bir polinom elde ederiz.

(4.5.4) polinomunu ya Newton iterasyonu ile ya da ikinci dereceden polinomun kökleri yardımı ile çözebiliriz. (4.5.1) denkleminde diferansiyel terim için θ -yöntemi ve integral terimi için yamuklar yöntemini uyguluyoruz. Yeni yöntem olarak dördüncü mertebeden ($O(h^4)$) yakınsama elde edebilmek için diferansiyel terim için dördüncü mertebeden yakınsama veren klasik Runge-Kutta methodu (RK4) ve integral terim için Simpson 1/3 yöntemi (ya da Simpson 3/8 yöntemi) uygulayabiliriz.

Örnek 4.1 (4.1.1) sistemine sade bir örnek vermek için doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemini verebiliriz,

$$u'(t) = u(t) \left[t + 2 - 2(t+1)u(t) + t \int_{-\infty}^t \frac{2u(s)}{\pi[1+(t-s)^2]} ds \right]. \quad (4.5.5)$$

Açıkça görüldüğü gibi tek pozitif denge çözümü $u^* = 1$ 'dir.

Örnek 4.2 Doğrusal olmayan integro-diferansiyel denkleme ikinci bir örnek olarak,

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left[\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{-\infty}^t \exp(-(t-s))u(s)ds \right], \\ u(t) &= \phi(t) = \exp(t), \quad t \leq 0, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

denklemini verebiliriz. Burada $\phi(t)$ daha önce belirttiğimiz gibi başlangıç fonksiyonudur. (4.5.6) denkleminin tek pozitif denge çözümü $u^* = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ 'dir.

Şimdi de dördüncü mertebeden yakınsama veren klasik Runge-Kutta yöntemini (RK4) doğrusal olmayan integro-diferansiyel denkleme adapte edelim.

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{F} \left(t, u(t), \int_0^t u(s)ds \right), \\ u(0) &= u_0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

genel denklemi ele alalım, \tilde{u}_n 'den \tilde{u}_{n+1} 'e kadar h aralık uzunluğu ve RK4 methodu uygulandığında,

$$\begin{aligned} k_1 &= h\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n), \\ \tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_1, \\ k_2 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+1/2}), \\ k_2 &= h\mathcal{F} \left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+} + \frac{h}{4} [\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/2}^b] \right), \\ \tilde{u}_{n+1/2}^h &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^h, \tilde{z}_{n+1/2}), \\
&= h\mathcal{F}\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^h, \tilde{z}_n + \frac{h}{4} [\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/2}^h]\right), \\
\tilde{u}_{n+1}^\circ &= \tilde{u}_n + k_3, \\
k_4 &= h\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^\circ, \tilde{z}_{n+1}), \\
&= h\mathcal{F}\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^\circ, \tilde{z}_n + \frac{h}{6} [\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1/2}^h + \tilde{u}_{n+1}^\circ]\right), \\
\tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\right). \tag{4.5.7}
\end{aligned}$$

denklemleri buluruz.

Bu örnekte, k_2 ve k_3 'lerin $[t_n, t_{n+1/2}]$ aralığında, integral terim $\int_0^t u(s)ds$ yamuklar kuralı ile ve k_4 'ün $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında Simpson's 1/3 kuralı uygulandı. İstenirse $[0, t_n]$ aralığında yamuklar kuralı uygulanabilir (ikinci mertebeden yakınsama verir). Tek sayılarda $[0, t_n]$ aralığında istenirse yamuklar ve Simpson's 1/3 kuralı beraber uygulanabilir (çift sayılarda Simpson 1/3 kuralı tek başına uygulanabilir). Fakat bu üçüncü mertebeden yakınsama verir.

Dördüncü mertebeden yakınsama elde edebilmek için RK4'ün yanında integral terimin $\int_0^t u(s)ds$, $[t_n, t_{n+1/2}]$ aralığında k_2 ve k_3 'ler için daha etkili hesaplanması gerekir. Diferansiyel terim için RK4 ile beraber $[0, t_n]$ aralığında integral terim için çift sayılarda Simpson 1/3 kuralı tek başına ve tek sayılarda Simpson 1/3 kuralı ve Simpson 3/8 kuralı (ya da Simpson 3/8 ve Simpson 1/3) kuralları uygulanabilir. İlk adım için yukarıdaki (4.5.7) formülünü kullanırsak ve $\tilde{u}_{n-1}, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1/2}$ 'ler için interpolasyon uygularsak ($t = -1, 0, 1/2$ noktaları için Lagrange formülü uygulayalım),

$$u(t) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}t(t - \frac{h}{2})u_{-1} - 2(t+h)(t - \frac{h}{2})u_0 + \frac{4}{3}t(t+h)u_{1/2} \right],$$

polinomunu elde ederiz. $u(t)$ polinomunun 0'dan $h/2$ 'ye kadar integralini alırsak, k_2 ve k_3 'lerin son yarım aralıkları için aşağıdaki ifadeyi,

$$\int_0^{h/2} u(s)ds \approx h \left(-\frac{1}{72}u_{-1} + \frac{7}{24}u_0 + \frac{2}{9}u_{1/2} \right), \tag{4.5.8}$$

buluruz. Benzer şekilde, $t = -1, 0, 1$ noktaları için

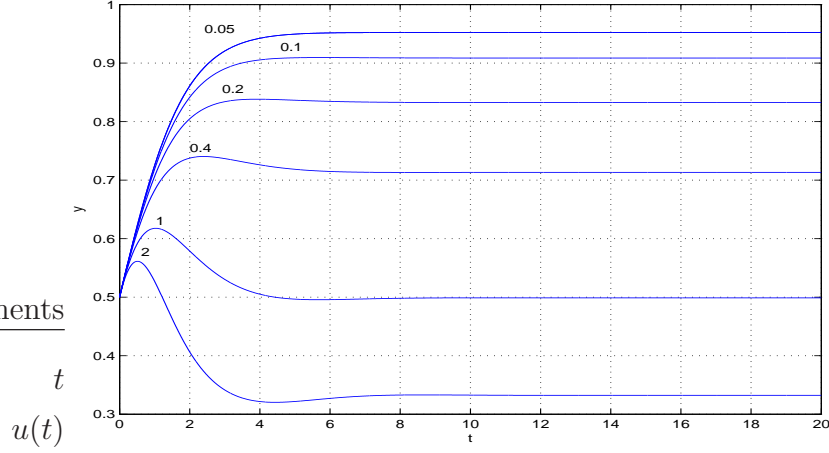
$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(-\frac{1}{12}u_{-1} + \frac{2}{3}u_0 + \frac{5}{12}u_1 \right), \quad (4.5.9)$$

buluruz. Böylece RK4 formülleri $n \geq 2$ için aşağıdaki denklemleri buluruz (başlangıç değerleri için (4.5.7) formüllerini kullanabiliriz)

$$\begin{aligned} k_1 &= h\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n), \\ \tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_1, \\ k_2 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+1/2}), \\ &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_n \\ &\quad + h \left[-\frac{1}{72}\tilde{u}_{n-1} + \frac{7}{24}\tilde{u}_n + \frac{2}{9}\tilde{u}_{n+1/2}^b \right]), \\ \tilde{u}_{n+1/2}^{\sharp} &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_2, \\ k_3 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^{\sharp}, \tilde{z}_{n+1/2}), \\ &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^{\sharp}, \tilde{z}_n \\ &\quad + h \left[-\frac{1}{72}\tilde{u}_{n-1} + \frac{7}{24}\tilde{u}_n + \frac{2}{9}\tilde{u}_{n+1/2}^{\sharp} \right]), \\ \tilde{u}_{n+1}^{\circ} &= \tilde{u}_n + k_3, \\ k_4 &= h\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^{\circ}, \tilde{z}_{n+1}), \\ &= h\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^{\circ}, \tilde{z}_n \\ &\quad + h \left[-\frac{1}{12}\tilde{u}_{n-1} + \frac{2}{3}\tilde{u}_n + \frac{5}{12}\tilde{u}_{n+1}^{\circ} \right]), \\ \tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Şekil 4.6'dan da görüldüğü gibi ϵ değerleri sıfıra yaklaştıkça integro-diferansiyel denkleminiz lojistik diferansiyel denkleminin eğrisi gibi davranır.

PSfrag replacements



Şekil 4.6: Doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklem $u'(t) = u(t)(1 - u(t) - \epsilon \int_0^t u(s)ds)$, $u(0) = 0.5$ başlangıç değeri ve $\epsilon = 2, 1, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ değerleri için sayısal çözümleri.

Bu bölümde doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemleri ele aldık. Özellikle integral terim için iki alt sınır ($p(t) = 0$ ve $p(t) = -\infty$) düşündük. Değişik sayısal yöntemleri doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlere uyguladık ve teorik çözüme yakın değerler elde ettik ve bunları grafikler ile destekledik.

ÖZET

Volterra integro-diferansiyel denklem ilk kez 1920'lerin sonlarına doğru Volterra tarafından verilmiştir. Biyoloji, ekoloji, tıp, nükleer reaktör dinamiği ve daha pek çok fen ve mühendislik uygulamalarında geniş yer almaktadır. Etki sonrası veya gecikmeyi içeren pek çok yaşam süreci gecikmeli Volterra denklem veya Volterra integro-diferansiyel denklem gibi çeşitli Volterra denklem tipleri ile modellenenbilir. Bu tezde matematiksel model olarak Volterra denklemlerinin kullanımı incelenmiş ve denklemlerin sayısal çözümleme yöntemleri ele alınmıştır. Volterra (1931) ve Volterra (1959) çalışmalarında biyolojik popülasyonun büyümesini incelemiş ve bunun için matematiksel modeller ortaya çıkarmıştır. Filiz (2000c) tarafından verilen Lotka-Volterra sistemi,

$$u_i'(t) = u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j(t) + \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u_j(t - \tau_{ij}) + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \int_{p(t)}^t k_{ij}(t-s) u_j(s) ds \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

biçimindedir. Yukarıdaki genel Lotka-Volterra denkleminde uygun α_i , β_{ij} , η_{ij} ve γ_{ij} reel değerleri seçilerek bir çok Lotka-Volterra denklemi ve Lotka-Volterra sistemini elde ederiz. Bir ekolojik sistem için bu teorinin uygulaması Post and Travis (1982) tarafından verilmiştir.

Lotka-Volterra sisteminin global kararlılığı için Goh (1977), Wang and Yi (1995), Bereketoğlu and Györi (1997) yeterli durumlar vermiştir.

Adi diferansiyel denklem olarak tanımlanan genel büyümeyi, Volterra (1962), Cushing (1977), Boyce and DiPrima (1997), Borrelli and Coleman (1998) ele almıştır. Doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlerde Miller (1966), Miller (1971), Cushing (1977), Landman (1980), Gopalsamy (1992), Freedman and Wu (1992), Lakshmikantham and Rao (1995), Baker *et al.* (1998), Baker *et al.* (1999) ve Filiz (2000b) çalışmıştır.

SUMMARY

The Volterra integro-differential equations were first introduced by Volterra in the late 1920's. This equations take place in the biyology, echology, medical science, dynamic of reactor and more science and engineering aplications. Many real-life processes involve after-effect or delay can be modelled with various types of Volterra equations such as delay or integro-differantial equations. In this thesis the use of Volterra equations have been research as mathematical model and the numerical solution methods of equations were dealth with. Volterra (1931) and Volterra (1959) were research in their studies the greath of biyological population and they find out for this purpose mathematical models. The Lotka-Volterra system which was given by Filiz (2000c) is as follows;

$$u'_i(t) = u_i(t) \left[\alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j(t) + \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u_j(t - \tau_{ij}) + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \int_{p(t)}^t k_{ij}(t-s) u_j(s) ds \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

The many Lotka-Volterra equations and Lotka-Volterra systems were obtained by choosing aproprate value α_i , β_{ij} η_{ij} and γ_{ij} which are real coefficient in the general Lotka-Volterra equations which was introduce above. The aplication of this theory for an echological system was given by Post and Travis (1982).

Goh (1977), Wang and Yi (1995), Bereketoğlu and Györi (1997) gave sufficient conditions for global stability of Lotka-Volterra system. Volterra (1962), Cushing (1977), Boyce and DiPrima (1997), Borrelli and Coleman (1998) dealth with the general greating which is definition as ordinary diffrential equation. Miller (1966), Miller (1971), Cushing (1977), Landman (1980), Gopalsamy (1992), Freedman and Wu (1992), Lakshmikantham and Rao (1995), Baker *et al.* (1998), Baker *et al.* (1999) and Filiz (2000b) worked the nonlinear integro-differential equations.

Teşekkür

İlk önce, bana her zaman güvenen ve maddi-manevi destek olan aileme, beni kardeşi kadar çok seven abilerim Nizamettin ALTIN ve Hasan Fahri CESUR'a, her zaman yanımda olup, çalışmalarına yardımcı olan sevgili eşim Mihrican'a ve 03.09.2004 tarihinde doğan oğlum Ömer Meriç'e çok teşekkür ederim.

Bu çalışmayı yöneten ve değerli yardımlarını esirgemeyen Hocam Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ'e ve tezimdaki hataları kontrol eden arkadaşlarım Araş. Gör. Korhan GÜNEL'e ve Araş. Gör. Ümit TOTUR'a en içten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu tez Adnan Menderes Üniversitesi Araştırma Fon Saymanlığınca FB 02004 nolu proje ile desteklenmiştir.

Kaynaklar

- Arrigoni, M. & Steiner, A. (1988). Die Lösung gewisser Räuber-Beute systeme. *Studia Biophysica* **123** (2), 237–241.
- Baker, C. T. H. (1977). *The Numerical Treatment of Integral Equations*. Clarendon Press, Oxford.
- Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., Filiz, A., Ford, N. J., Paul, C. A. H., Rihan, F. A., Tang, A., Thomas, R. M., Tian, H. & Willé, D. R. (1998). Numerical modelling by retarded functional differential equations. In *MCCM Tech. Rep.*, 335. Manchester, ISSN 1360-1725.
- Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., Filiz, A., Ford, N. J., Paul, C. A. H., Rihan, F. A., Tang, A., Thomas, R. M., Tian, H. & Willé, D. R. (1999). Numerical modelling by delay and Volterra functional differential equations. In *Topics in Computer Mathematics and its Applications*, pp. 113–137. LEA-Athens.
- Bereketoğlu, H. & Györi, I. (1997). Global stability results for a generalized L-V system with distributed delays. *J. Math. Anal. and Appl.* **210**, 279–291.
- Borrelli, R. & Coleman, C. (1998). *Differential Equations: A Modeling Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Bownds, J. M. & Cushing, J. M. (1975). On preserving stability of Volterra integral equations under a general class perturbations. *Math. Sys. Theory* **9**, 117–131.

- Boyce, W. & DiPrima, R. (1997). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, New York.
- Collatz, L. (1966). *The Numerical Treatment of Differential Equations*. 3d ed. Berlin: Springer-Verlag, translated from a supplemented version of the 2d German edition by P. G. Williams. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 60.
- Conte, S. D. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An algorithmic approach*. New York: McGraw-Hill Book Co.
- Cushing, J. (1976). Integro-differential equations and delay models in population dynamics. *SIAM J. Appl. Math.* **31**, 251–261.
- Cushing, J. (1977). *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*. Lecture Notes in Biomathematics, Vol.20, Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Davis, H. T. (1962). *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover, New York.
- Filiz, A. (2000b). *Numerical Solution Of Some Volterra Equations*. PhD. Thesis, University of Manchester.
- Filiz, A. (2000c). Lotka-Volterra sistemleri ve uygulamaları. In *Doç. Dr. Eyüp Sabri TÜRKER Anısına Matematik Sempozyumu*, pp. 92–102. Adapazarı.
- Freedman, H. & Wu, H. (1992). Periodic solutions of single-species models with periodic delay. *SIAM J. Appl. Math.* **23**, 689–701.
- Gander, M. J. (1995). A non spiraling integrator for the Lotka Volterra equation. *Il Volterriano, Liceo Cantonale e Biblioteca Cantonale di Mendrisio* **4**, 21–28.
- Gerald, C. F. & Wheatley, P. O. (1999). *Applied Numerical Analysis*, sixth edn. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA.

- Gilpin, M. E. & Ayala, F. J. (1973). Global models of growth and competition. *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **70**, 3590–3593.
- Goh, B. S. (1977). Global stability in many species. *Am. Nat.* **111**, 135–143.
- Gopalsamy, K. (1980). Time lags and global stability in two-species competition. *Bull. Math. Biol.* **42**, 729–737.
- Gopalsamy, K. (1984). Global asymptotic stability in Volterra's population systems. *J. Math. Biol.* **19**, 1222–1236.
- Gopalsamy, K. (1986). Global asymptotic stability in a generalized Lotka-Volterra system. *Internat. J. Systems Sci.* **17** (3), 447–451.
- Gopalsamy, K. (1992). *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc.
- Jones, G. S. (1962). The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$. *J. Math. Anal. and Appl.* **5**, 435–450.
- Lakshmikantham, V. & Rao, M. R. M. (1995). *Theory of Integro-differential Equations*. Gordon and Breach Science, USA.
- Landman, K. A. (1980). Bifurcation and stability theory of periodic solutions for integrodifferential equations. *Stud. Appl. Math.* **63**, 217–248.
- Ledermann, W., Lloyd, E., Vajda, S. & Alexander, C., ed. (1990). *Handbook of Applicable Mathematics. Supplement*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Leung, A. (1979). Conditions for global stability concerning a prey-predator model with delay effects. *SIAM J. Appl. Math.* **36** (2), 281–286.
- Leung, A. W. & Zhou, Z. M. (1988). Global stability for large systems of Volterra-Lotka type integro-differential population delay equations. *Nonlinear Anal.* **12** (5), 495–505.

- Linz, P. (1985). *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology* (Baltimore: Williams and Wilkins, 1925). Reprinted as *Elements of Mathematical Biology* (New York: Dover, 1956).
- MacDonald, N. (1978). *Time Lags in Biological Models*. Lecture Notes in Biomathematics, Vol.27, Springer-Verlag, Berlin, New York.
- May, R. M. (1973). Time-delay versus stability in population models in two and three trophic levels. *Ecology* **54**, 315–325.
- Michel, J. F. (1969). The epidemiology and control of some nematode infections of grazing animals. *Adv. Parasitol* **7**, 211–282.
- Miller, R. K. (1966). On Volterra's population equation. *SIAM J. Appl. Math.* **14**, 446–452.
- Miller, R. K. (1971). *Nonlinear Volterra Integral Equations*. W.A. Benjamin, Inc., California.
- Mooney, D. & Swift, R. (1999). *A Course in Mathematical Modeling*. USA: The Mathematical Ass. of America.
- Pielou, E. C. (1969). *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley-Interscience, New York.
- Post, W. M. & Travis, C. C. (1982). Global stability in ecological models with continuous time delay. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **67**, 241–250.
- Sánchez, D. A. (1989). Population and harvesting. *Classroom Notes in Applied Mathematics, M.S. Klamkin, ed.* **67**, 311–313.
- Shampine, L. F., Allen, Jr., R. C. & Pruess, S. (1997). *Fundamentals of Numerical Computing*. New York: John Wiley & Sons Inc.

- Smithies, F. (1958). *Integral Equations*. Cambridge University Press.
- Tricomi, F. G. (1957). *Integral Equations*. Interscience, New York.
- Turner, P. R. & Buchanan, W. J. (1992). *Numerical Methods and Analysis*. McGraw-Hill, Inc, New York.
- Volterra, V. (1926). *Animal Ecology with Special Reference to Insects*. A translation of his 1926 paper can be found in appendix to R. N. Chapman, McGraw-Hill, 1931, New York. (Translated from Italian original, 1926.).
- Volterra, V. (1928). *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together, in Animal Ecology by R. N. Chapman, pp. 409-448*. McGraw-Hill, 1931, New York. (Translated from Italian original, 1928.).
- Volterra, V. (1931). *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte Pour la Vie*. Gauthier-Villars, Paris.
- Volterra, V. (1959). *Theory of Functionals and of Integro-Differential Equations*. Dover, New York.
- Volterra, V. (1962). *Opere Matematiche; Memorie e Note Vol. 5*. Accademia Nazionale dei Lincei (Rome) 1962, 1926-1940.
- Wang, L. & Yi, Z. (1995). Global stability of Lotka-Volterra systems with delay. *Diff. Eqns. and Dynamical Systems* **3**, 205–216.
- Worz-Busekros, A. (1978). Global stability in ecological systems with continuous time delay. *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1), 123–134.
- Wright, E. M. (1955). A non-linear difference-differential equation. *J. reine angew. Math.* **194**, 66–87.

Öz Geçmiş

Yılmaz ERDEM 1977 yılında Batman'da doğdu. Babasının Jandarma Astsubay olmasından dolayı İlk okulu Kars Atatürk İlkokulu'nda, Ortaokulu Aydın Gazipaşa Ortaokulu'nda ve liseyi Aydın Teknik Lisesi'nde bitirdi. 1996 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü'ne girdi ve 2000 yılında mezun oldu. Mezun olduğu yıl Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde yüksek lisansa başladı.