T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-008

EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE İLGİLİ MODÜLLER

Nazlı BABACAN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nazlı BABACAN tarafından hazırlanan "Eş-Üreteçli Modüller ve İlgili Modüller" başlıklı tez, 19.01.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ	Uşak Üniversitesi Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

19.01.2018

Nazlı BABACAN

ÖZET

EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE İLGİLİ MODÜLLER

Nazlı BABACAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2018, 39 sayfa

Bu tezde eş-üreteçli modüllerin tanımı ve sonlu eş-üreteçli modüllerin temel tanım ve özellikleri verilerek karakterizasyonu çalışılmıştır.
İlk üç bölümde sonlu eş-üreteçli modüllerin temel tanım ve özellikleri ispatlanmıştır.
Dört ve beşinci bölümlerde socle ve zincir şartları ile sonlu eş-üreteçli modüllerin ilgisi incelenmiştir.
Son bölümde farklı modül ve halkalar ile sonlu eş-üreteçli modüllerin uygulamaları verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Eş-üreteçli modüller, Sonlu üreteçli modüller, Sonlu eş-üreteçli modüller, essential modül, small modül, Socle, Radikal, Artin modül, Artin halka

ABSTRACT

CO-GENERATED MODULES AND RELATED MODULES

Nazlı BABACAN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2018, 39 pages

In this thesis, characterization of the co-genereted modules definition and finitely co-generated modules is practised with giving its basic definition and properties.
In the first three section, basic properties of finitely co-genereted modules has been proved.
In the forth and fifth sections, relations of finitely co-genereted modules with socle and chain condations are demonstrated.
In the last section, application of finitely co-genereted modules with different modules and rings have been given.

Key Words: Co-generated modules, Finitely generated modules, Finitely co-generated modules, essential module, small module, Socle, Radical, Artinian module, Artinian ring

ÖNSÖZ

Tez çalışma dönemim boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik ve bilimsel bakış açısı geliştirmeme zemin hazırlayan saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na, ayrıca bu dönemde yorumlarıyla sağlamış olduğu bilimsel katkılarından dolayı saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e teşekkürlerimi sunarım. Tüm yaşamım boyunca desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük payı olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Nazlı BABACAN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI v
ÖZET vii
ABSTRACT ix
ÖNSÖZ xi
SİMGELER DİZİNİ xv

1. GİRİŞ 1

2. TANIM VE ÖZELLİKLER 2

2.1. Temel Tanım ve Özellikler 2

3. SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER 6

3.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllere Giriş 6
3.2. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Karakterizasyonu 8

4. SOCLE VE SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER 16

4.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Socle ile Yapılandırılması 16

5. SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE ZİNCİR ŞARTLARI 24

5.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Artin Modüller ile
Karakterizasyonu 24
5.2. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Artin Halka ile Karakterizasyonu 29

6. SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER İÇİN İLERİ
KARAKTERİZASYON VE UYGULAMALARI 30

6.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüller ve n-Copresented Modüller 30
6.2. Solu Eş-Üreteçli Modül Uygulaması 31
6.3. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Artin Modüller için bir Uygulaması . . . 31
6.4. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Ore Bölgesi için bir Uygulaması 32

KAYNAKLAR 37

ÖZGEÇMİŞ 39

SİMGELER DİZİNİ

$B \leq A$	: B, A modülünün altmodülü
$B \lneqq A$	: B, A modülünün öz altmodülü
$B \ll A$	: B, A modülünün small altmodülü
$B \leq_e A$	: B, A modülünün essential altmodülü
A/B	: A nın B ye bölüm modülü
$T(M)$	: M nin Torsion altmodül
$RadM$	: M modülünün radikali
$SocM$	: M modülnün socle'si
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$End(_RM)$	: M modülünün endomorfizma halkası
$E(_RM)$	: M modülünün injektif hull'u
$r(a)$	: a elemanının R de sağ sıfırlayanı
$l(a)$	: a elemanının R de sol sıfırlayanı
$r_R(X)$	: Bir M modünün X alt kümesinin R de sağ sıfırlayanı
$l_R(X)$	: Bir M modünün X alt kümesinin R de sol sıfırlayanı
$Hom_R(M,N)$	: M den N ye R-homomorfizmalarının sınıfı
$_R\mathcal{M}$	: Sol R-modüllerin kategorisi
$Tr_R(A)$	: A nın İz'i (Trace)
$Rej_R(A)$	: A nın Reject'i
$\mathcal{U}$	: sol-R modüllerin bir sınıfı
$Gen(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ ile üretilmiş bütün modüllerin sınıfı
$Cogen(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ ile eş-üretilmiş bütün modüllerin sınıfı
$FGen(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ ile sonlu üretilmiş bütün modüllerin sınıfı
$FCogen(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ ile sonlu eş-üretilmiş bütün modüllerin sınıfı
$Ker(f)$	: f fonksiyonunun çekirdeği
$Im(f)$	: f fonksiyonunun görüntüsü
$\bigoplus$	: Direk toplam
Σ	: Toplam sembolü
$\prod$	: Çarpım sembolü
$Ann_R(X)$	: X in R de sıfırlayanı

$a.f.cog$	: hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (almost finitely cogenerated)
$U^{(A)}$	: U üzerinde toplam
U^A	: U üzerinde çarpım
dim	: Boyut

1. GİRİŞ

Vektör uzaylarında önemli, fakat kategorik olmayan üreteç kavramının duali yoktur. Ancak bu tezde modül teoride sonlu üreteçli modüllerin duali olarak sonlu eş-üreteçli modüller çalışılmıştır.

Tez altı bölümden oluşmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde genel modül tanımı ve tezde kullanacağımız temel tanım ve özellikler verilmiştir [1] [6] .

Üçüncü bölümde sonlu eş-üreteçli modüllerin tanımı verilmiş olup injektif modüller ile eş-üreteçli modüller arasındaki bağlantı incelenmiş ve sonlu eş-üreteçli modüllerin karakterizasyonu çalışılmıştır [1], [6],ve [9].

Dördüncü bölümde ilk olarak socle ve trace kavramlarının tanımları verilmiş olup aralarındaki ilişki incelenmiştir. Socle ile minimal modül arasındaki bağıntılar verilmiştir. Modüllerin basit modül olması durumunda sonlu eş-üretilmiş ve sonlu üretilmiş modül arasındaki ilişki incelenmiştir . Ayrıca socle ile sonlu eş-üretilmiş modüller arasındaki bağ çalışılmıştır [1] , [6], [9] .

Beşinci bölümde Artin modül kavramı verilip, bu tanım kullanılarak sonlu eş-üreteçli modüllerin farklı bir karakterizasyonu çalışılmıştır. Son olarak bir R Artin halkasının sonlu eş-üretilmiş modül ile karakrerizasyonu verilmiştir [1], [6].

Altıncı bölümde ise konuyla ilgili ileri karakterizasyon ve uygulamalarına yer verilmiştir [2], [3], [4], [5], [7], [8], [10], [11].

2. TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde tez için gerekli olan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir [1], [6].

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1. [6] R bir halka ve M bir toplamsal abel grup olmak üzere,

$$* : R \times M \to M$$
$$(r,m) \mapsto r * m$$

dış işlemi ile modül çarpımı tanımlansın. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa *M ye bir sol R-modül* denir ve $_RM$ ile gösterilir. Her r_1, $r_2 \in R$ ve m_1, $m_2 \in M$ için,

(1) $(r_1.r_2) * m = r_1 * (r_2 * m)$

(2) $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$

(3) $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$ dir.

Sol R-modül M için $1 * m = m$ sağlanıyorsa M ye bir *birimsel* sol R-modül denir. Benzer şekilde *sağ R-modül* tanımlanır.

Tanım 2.1.2. [6] M bir sol R-modül olsun. M nin boş kümeden farklı bir A alt kümesi de kendi başına bir R-modül oluyorsa A ya *M nin bir altmodülü* denir ve $A \leq M$ veya $_RA \leq_R M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [6] M bir sol R-modül, S ve R iki halka olsun. Eğer M bir sol S-modül ve sağ R-modül ise M ye *S-R-bimodül* denir ve $_SM_R$ ile gösterilir.

Aksi belirtilmediği sürece aldığımız R birimli bir halka ve modüller birimsel sol R-modüldür.

Tanım 2.1.4. [6] M bir sol R-modül olsun. Sıfırdan farklı bir M modülü ve M nin her A altmodülü için $A = 0$ veya $A = M$ olması durumunda *M ye bir basit (simple) modül* denir.

Eğer M modülü *basit* ise $M \neq 0$ dır, kendisinden ve sıfırdan farklı altmodülleri yoktur.

Tanım 2.1.5. [1] $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$, M nin basit (simple) altmodüllerinin indislenmiş kümesi olsun. Eğer bu kümenin direk toplamı M ye eşit ise ,

$$M = \bigoplus_A M_\alpha$$

o zaman M ye *yarı-basit (semisimple) modül* denir.

Tanım 2.1.6. [6] Bir M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü N olsun. M nin N de içerilen sıfırdan ve N den başka hiçbir altmodülü yoksa N modülüne *minimal altmodül* denir.

N modülünün minimal altmodül olması için gerek ve yeter şart N modülünün basit altmodül olmasıdır.

Tanım 2.1.7. [6] Bir M modülünün bir öz altmodülü N modülü olsun. M modülünün N modülünü kapsayan N modülünden başka hiçbir öz altmodülü yoksa N modülüne bir *maksimal altmodül* denir.

Tanım 2.1.8. [6] M bir modül olsun. M modülünün her U altmodülü için $A + U = M$ olması durumunda $U = M$ oluyorsa A altmodülüne *M de smalldur (=superflouse)* denir ve $A \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. [6] M bir modül olsun. M modülünün her U altmodülü için $A \cap U = 0$ olması durumunda $U = 0$ oluyorsa A altmodülüne *M de essential (=large)* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. [6] R bir halka, M ve N iki sol R-modüller olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa f ye bir sol *R-modül homomorfizması* adı verilir.

(1) Her $m_1, m_2 \in M$ için $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

(2) Her $m \in M$ ve için $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$ dir.

Eğer bir f homomorfizması birebir ise f monomorfizmadır.

Eğer bir f homomorfizması örten ise f epimorfizmadır.

Eğer bir f homomorfizması hem birebir hem örten ise f izomorfizmadır.

Tanım 2.1.11. [6] M ve E, R-modüller olsun. Eğer her $f : K \to E$ monomorfizma ve her $\gamma : K \to M$ R-homomorfizması için $hf = \gamma$ olacak şekilde $h : E \to M$ bir R-homomorfizması varsa, *M ye E-injektif* modül denir. Eğer M her E modülü için E-injektif ise *M ye injektif modül* denir.

Lemma 2.1.12. [6, Theorem 5.3.1] *Bir $_RQ$ modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) *Her $\xi : Q \to B$ monomorfizması parçalanabilirdir (split) (yani Im(ξ), B de bir direk toplanandır).*

(2) *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dotted, "\kappa"'] \\ Q & \end{tikzcd}$$

(3) *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması için,*

$Hom(\alpha, 1_Q) : Hom_R(B, Q) \to Hom_R(A, Q)$ *bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.13. [6] Teorem 2.1.12 da verilen denk koşullardan birini sağlayan bir $_RQ$ modülüne *injektif-R modül* denir.

Tanım 2.1.14. [6] A bir grup olsun. Eğer her $z \in \mathbb{Z}$ için $z \neq 0$ iken $zA = A$ oluyorsa A ya *bölünebilir (divisible) grup* denir.

Tanım 2.1.15. [6] $\varphi :_{\mathbb{Z}} D \rightarrow_{\mathbb{Z}} B$ monomorfizması verilsin. Eğer $_{\mathbb{Z}}D$ bölünebilir ise, o zaman φ parçalanabilirdir.

Tanım 2.1.16. [6] R bir halka, M bir sol R-modül olsun ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun. $\{r \in R \mid rX = 0\}$ kümesi R nin bir idealidir. Bu ideale *X in R deki sıfırlayanı* denir ve $Ann(X)$ veya $l_R(X)$ ile göterilir.

Tanım 2.1.17. [6] R değişmeli tamlık bölgesi ve M bir sol R-modül olsun.
$T(M) = \{x \in M \mid l_R(x) \neq 0\}$ kümesi bir altmodüldür. Bu altmodül M nin bir *torsion altmodülü* olarak adlandırılır.
Eğer $T(M) = M$ ise *M ye torsion modül*, $T(M) = 0$ ise *M ye torsion-free modül* denir.

Tanım 2.1.18. [6] R bir halka, M bir sol R-modül olmak üzere $m \in M$ için,
$mR = \{mr \mid r \in R\}$ M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle M nin *m ile üretilmiş devirli altmodülü* denir.

Tanım 2.1.19. [6] M bir sol R-modül olsun. $A, B, C \leq M$ ve $B \leq C$ olmak üzere,
$(A+B) \cap C = (A \cap C) + B$ eşitliğine *Modülarite Kuralı* denir.

Lemma 2.1.20. *(Zorn's Lemma)* [6] *A boş olmayan bir küme ve $\leqslant$ bağıntısı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. A nın her zincirinin bir üst sınırı varsa A kümesinin bir maksimal elemanı vardır.*

3. SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe halkalar birimli ve modüller birimsel sol R-modüller olarak alınacaktır.Bu bölümde sonlu eş-üreteçli modüllerin karakterizasyonuna yer verilmiştir [1], [6], [9] .

3.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllere Giriş

Tanım 3.1.1. [1] M bir sol R-modül ($_RM$) ve $\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{U}$ da bir (sonlu) indislenmiş $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi var ve $\bigoplus_A U_\alpha \to M \to 0$ tam dizi ise M ye $\mathcal{U}$ *ile (sonlu) üretilmiştir* ya da $\mathcal{U}$*, M yi (sonlu) üretir* denir.
Eğer $\mathcal{U} = \{U\}$ tek elemanlı ise basitçe $\mathcal{U}$*, M yi (sonlu) üretir* denir. Bu durumda (sonlu) A kümesi için,

$$U^{(A)} \xrightarrow{f} M \to 0$$

tam dizisi vardır.

Tanım 3.1.2. [1] M bir sol R-modül $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin M yi üreten kümesi olsun. O zaman sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $\mathcal{F}$, M yi üretiyorsa M modülüne *sonlu üretilmiştir* denir. Yani her sonlu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için,

$$\sum \mathcal{A} = M \quad \text{ise} \quad \sum \mathcal{F} = M$$

dir.

Tanım 3.1.3. [1] M bir sol R-modül ($_RM$) ve $\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{U}$ da bir (sonlu) indislenmiş $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi var ve

$$0 \to M \to \prod_A U_\alpha$$

tam dizi ise M ye $\mathcal{U}$ *ile (sonlu) eş-üretilmiştir* ya da $\mathcal{U}$, *M yi (sonlu) eş-üretir* denir.

Eğer $\mathcal{U} = \{U\}$ ise (tek elemanlı ise) basitçe $\mathcal{U}$, *M yi (sonlu) eş-üretir* denir. Bu durumda (sonlu) A kümesi için,

$$0 \to M \xrightarrow{f} U^A$$

tam dizisi vardır.

Örnek 3.1.4. [1] Eğer M bir torsion-free abel grup ise o zaman bir $f : M \to \mathbb{Q}^M$ monomorfizması vardır.

$x \in R$ için, $f_x : M \to \mathbb{Q}$ dönüşümü $0 \neq m \in M$ olmak üzere $f_x(m) = xm \neq 0$ biçiminde tanımlansın. Burada f_x bir monomorfizmadır ([1, Example 5.19] ve [1, Example 6.10]). Burada $f_x : M \to \mathbb{Q}$ ve $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^M$ dönüşümleri için, $\iota f_x = f$ olacak şekilde f monomorfizması vardır. Böylece ${}_{\mathbb{Z}}M$, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ ile eş-üretilmiştir.

Bütün abel gruplar $\mathbb{Z}$-modüller olduğundan $\mathbb{Q}$ ile eş-üretilmiş olduğunu söyleyebiliriz.

Diğer yandan $\mathbb{Q}^A$ nın her altgrubu torsion-free dir. Diğer bir deyişle torsion-free abel gruplar $\mathbb{Z}$-modül olarak $\mathbb{Q}$ ile eş-üretilen modüllerdir.

$\mathcal{U}$ modüllerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$ ile üretilen bütün modüllerin sınıfı Gen($\mathcal{U}$), $\mathcal{U}$ ile eş-üretilen bütün modüllerin sınıfı Cog($\mathcal{U}$) biçiminde gösterilir.

$\mathcal{U}$ ile sonlu üretilmiş ya da sonlu eş-üretilmiş bütün modüllerin sınıfı sırasıyla FGen($\mathcal{U}$), FCog($\mathcal{U}$) biçiminde gösterilir.

$\mathcal{U} = \{\mathbb{Z}_n \mid n > 1\}$ kümesi verilsin. Gen($\mathcal{U}$) torsion grupların sınıfını gösterirken Cog($\mathcal{U}$) torsion-free grupların sınıfını gösterir.

3.2. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Karakterizasyonu

Bu bölümde sonlu eş-üretilmiş modüllerin karakterizasyonu farklı bir şekilde verilmiştir.

Tanım 3.2.1. [1] M bir modül ve $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin bir kümesi(ailesi) olsun.
$\bigcap \mathcal{A} = 0$ olması, sonlu bir $\mathcal{F}$ alt kümesi için $\bigcap \mathcal{F} = 0$ olmasını gerektiriyorsa M modülüne *sonlu eş-üretilmiş* denir.

Sonlu üretilmiş ve sonlu eş-üretilmiş modüllerin birbirini gerektirmediği örnekler aşağıdaki gibi verilmiştir.

Örnek 3.2.2. (1) $\mathbb{Z}$ abel grubu sonlu üretilmiştir fakat sonlu eş-üretilmiş değildir.
(2) $\mathbb{Z}_m$ modülü sonlu olduğu için sonlu eş-üretilmiştir.
(3) p bir asal sayı olsun. O zaman,
$M = \left\{ \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi $\mathbb{Q}$ nun bir toplamsal altgrubudur.
Buradan, $M/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{ \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \leq \mathbb{Q}$ olur. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ grubu sonlu eş-üretilmiştir fakat sonlu üretilmiş değildir.

Sonlu eş-üretilmiş modüllerin karakterizasyonu için ilk etapta aşağıdaki denk koşullar verilebilir.

Önerme 3.2.3. [1] *Bir sol R-modül M için aşağıdakiler denktir:*
(1) *M sonlu eş-üretilmiştir.*
(2) $\bigcap\limits_{\mathcal{A}} Ker f_\alpha = 0$ *olacak şekilde her* $f_\alpha : M \to (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *homomorfizması için* $\bigcap\limits_{\mathcal{F}} Ker f_\alpha = 0$ *olacak şekilde sonlu bir* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *alt kümesi vardır.*
(3) *Her indislenmiş* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *kümesi ve* $0 \to M \to \prod\limits_{\mathcal{A}} U_\alpha$ *kısa tam dizisi için* $0 \to M \to \prod\limits_{\mathcal{F}} U_\alpha$ *olacak şekilde sonlu bir* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *alt kümesi vardır .*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. Tanımdan açıktır. $(Kerf_\alpha \leq M)$

$(2) \Rightarrow (1)$. $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ kümesi $\bigcap\limits_{\mathcal{A}} M_\alpha = 0$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin bir kümesi olsun. (2) deki dönüşüm yerine $f_\alpha : M \to M/M_\alpha$, $(\alpha \in A)$ için doğal epimorfizmasını alalım. (2) gereğince $\bigcap\limits_{\mathcal{F}} Kerf_\alpha = 0$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ kümesi vardır. Yani $Kerf_\alpha = M_\alpha$ olduğundan $\bigcap\limits_{\mathcal{F}} M_\alpha = 0$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi vardır.

$(2) \Rightarrow (3)$.$(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indislenmiş kümesi için $f : M \to \prod\limits_{\mathcal{A}} U_\alpha$ bir monomorfizma olsun. Bir N modülü için, $f_\alpha : N \to M_\alpha (\alpha \in A)$ homomorfizmalarını göz önüne alalım. O zaman, $Ker\left(\prod\limits_{\mathcal{A}} f_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\mathcal{A}} Kerf_\alpha$ dır.

Şimdi $M \to \prod\limits_{\mathcal{A}} U_\alpha \to U_\alpha$ göz önüne alalım. f bir monomorfizma olduğundan $Kerf = 0$ olur. Gerçekten ,

$$\begin{aligned} m \in Ker\left(\prod_{\mathcal{A}} \pi_\alpha f\right) &\Rightarrow \prod_{\mathcal{A}} \pi_\alpha f(m) = 0, \\ &\Rightarrow \pi_\alpha f(m) = 0, \\ &\Rightarrow \pi_\alpha(f(m)) = 0, \\ &\Rightarrow f(m) \in Kerf_\alpha, \end{aligned}$$

$Kerf = \bigcap Kerf_\alpha$ ve $Kerf = 0$ olduğundan $\bigcap\limits_{\mathcal{A}} Kerf_\alpha = 0$ olur. Buradan,

$\bigcap\limits_{\mathcal{A}} Ker\pi_\alpha f = 0$ dır. Böylece (2) den sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi için

$\bigcap\limits_{\mathcal{F}} Ker\pi_\alpha f = 0$ olur. Buradan tekrar [1, Corollary 6.2] kullanılırsa,

$\prod\limits_{\mathcal{F}} f : M \to \prod\limits_{\mathcal{F}} U_\alpha$ monomorfizması bulunur (Bu bir modülün injektif envelopları yardımıyla ispatlanır).

$(3) \Rightarrow (2)$. M sol R-modülü ${}_RM$ sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul her U modülü ve her A kümesi için bir $f : M \to U^A$ monomorfizması varsa $\pi_F \circ f : M \to U^F$ monomorfizma olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi var olmasıdır. Burada M_α lar M nin altmodülleri ve $\bigcap\limits_{\mathcal{F}} M_\alpha = 0$ olur . □

Sonuç 3.2.4. [1] *Bir M modülü sonlu eş-üretilmiş ise M modülünü eş-üreten her modül M modülünü sonlu eş-üretir.*

Tanım 3.2.5. [1] M bir sol R-modül ve $\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun.

$Rej_M(\mathcal{U}) = \bigcap\{Kerh \mid h \in Hom_R(M,U), U \in \mathcal{U}\}$ kümesine $\mathcal{U}$ nun M içindeki *rejekti* denir.

Tanım 3.2.6. [1] M bir sol R-modül ve $\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun.

$Tr_M(\mathcal{U}) = \sum\{Imh \mid h \in Hom_R(U,M), U \in \mathcal{U}\}$ kümesine $\mathcal{U}$ nun M içindeki *izi (trace)* denir.

${}_R\mathcal{M}$ kategorisindeki bir $f : M \to N$ homomorfizması için,

$f_* : Hom_R(G,M) \to Hom_R(G,N)$ olmak üzere $f_* = Hom_R(G,f)$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.2.7. [1] *Bir sol R-modül C için aşağıdakiler denktir:*

(1) *C bir eş-üretilmiş modüldür.*

(2) ${}_R\mathcal{M}$ *kategorisindeki her f homomorfizması için eğer* $Hom_R(f,C) = 0$ *ise, o zaman* $f = 0$ *dır.*

(3) ${}_R\mathcal{M}$ *kategorisindeki her* $f :_R M \to_R N$ *homomorfizması için eğer* $f^* : Hom_R(N,C) \to Hom_R(M,C)$ *örten ise* f *birebirdir.*

(4) ${}_R\mathcal{M}$ *kategorisinde* $Hom_R(M'',C) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,C) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M',C)$ *dizisi tam ise* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *dizisi tamdır.*

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$. [1, Corollary 8.11.(2)] U ve M modülleri verilsin. U, M yi eş-üretmesi için gerek ve yeter koşul her sıfırdan farklı $f : N \to M$ homomorfizması için $hf \neq 0$ olacak şekilde bir $h \in Hom_R(M,U)$ var olmasıdır.

$(1) \Rightarrow (4)$. C bir eş-üretilmiş modül olsun.

$Hom_R(M'',C) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,C) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M',C)$ dizisi tam olacak şekilde $f : M' \to M$ ye ve $g : M \to M''$ var olsun.

$f^*g^* = 0$ olduğundan $Hom_R(gf,C) = Hom_R(f,C)Hom_R(g,C) = 0$ dır. (1) ve (2) kabullerinin denkliğinden $gf = 0$ dır. Yani $Imf \leq Kerg$ dir.

$\eta : M \to M/Imf$ doğal epimorfizma olsun. Her $h : M/Imf \to C$ için $[f^*(h\eta)](M^{'}) = h(\eta(Imf)) = 0$ dır. Kabulden $Img^* = Kerf^*$ olduğunu biliyoruz. Böylece $h\eta \in Kerf^* = Img^*$ bulunur. Denk olarak $\alpha \in Hom_R(M^{''},C)$ için $h\eta = \alpha g$ vardır. Fakat $h(Kerg/Imf) = h\eta(Kerg) = \alpha g(Kerg) = 0$ dır. Böylece $Kerg/Imf \leq Rej_{(M/Imf)}(C) = 0$ dır.

Buradan $Kerg = Imf$ olur. O halde $M^{'} \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M^{''}$ dizisi tamdır.

$(4) \Rightarrow (3)$. Açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$. Eğer $\eta : M \to M/Rej_M C)$ ye doğal dönüşüm ise o zaman

$\eta^* : Hom_R(M/Rej_M(C),C) \to Hom_R(M,C)$ izomarfizmadır.

Böylece (3) gereğince η her zaman birebirdir. Yani $Ker\eta = 0$ olur.

Buradan $0 = Ker(\eta) = Rej_M(C)$ dır. Yani $Rej_M(C) = 0$ olur.

O halde [1, Proposition 8.13.(2)] gereğince C eş-üreteç olur. □

Önerme 3.2.8. [1] *E bir injektif sol R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*

(1) *E bir eş-üreteçtir.*

(2) *Her basit sol R-modül T için $Hom_R(T,E) \neq 0$ dır.*

(3) *E, her basit sol R-modülü eş-üretir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (3)$. Açıktır.

$(3) \Rightarrow (2)$. Açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$. E nin (2) kabulünü sağladığını kabul edelim. M bir sol R-modül ve $0 \neq x \in M$ olsun. Rx devirli olduğundan Rx basit olur. (2) kabulünden $h : Rx \to E$ sıfırdan farklı bir homomorfizması vardır. E injektif olduğundan,

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dotted, "\hbar"'] \\ E & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan $\hbar : M \to E$ homomorfizması vardır.

Burada $\hbar(x) = h(x) \neq 0$ dır. $Rej_M(E) = 0$ olduğundan [1, Proposition 8.13.(2)] gereğince E bir eş-üreteç olur. □

Önerme 3.2.9. [1] *Bir M modülünün sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul basit $T_1, ..., T_n$ modüllerin sonlu kümesi için $E(M) \cong E(T_1) \oplus ... \oplus E(T_n)$ olmasıdır.*

İspat:($\Leftarrow$). $E(T_1) \oplus ... \oplus E(T_n) \cong E(T_1 \oplus ... \oplus T_n)$ olduğunu biliyoruz. Burada bu toplamın sonlu üretilmiş essential socle vardır. Böylece her bir altmodül sonlu eş-üretilmiştir. Yani kendisi sonlu eş-üretilmiştir. O halde $SocM = T_1 \oplus ... \oplus T_n \leq_e E(T_1 \oplus ... \oplus T_n)$ dir ve [1, Theorem 10.4(2)] gereğince $SocM \leq_e E(M)$ olur.

($\Rightarrow$). M sonlu eş-üretilmiş olsun. [1, Theorem 10.4(2)] gereğince $SocM = T_1 \oplus ... \oplus T_n \leq_e M$ ise, o zaman $E(T_1 \oplus ... \oplus T_n) \cong E(T_1) \oplus ... \oplus E(T_n)$ olduğunu biliyoruz.

$SocM = T_1 \oplus ... \oplus T_n \leq_e M$ olduğundan,

$E(M) \cong E(T_1 \oplus ... \oplus T_n) \cong E(T_1) \oplus ... \oplus E(T_n)$ dir.

Yani $E(M) \cong E(T_1) \oplus ... \oplus E(T_n)$ olur. □

Lemma 3.2.10. [6, Theorem 9.1.3]

(1) *$m \in_R M$ için Rm nin M de small olması için gerek ve yeter koşul $m \in RadM$ olmasıdır.*

(2) *M bir sol R-modül olsun. M deki yarı-basit altmodüllerin en büyüğü $SocM$*

dir.

Lemma 3.2.11. [6, Theorem 9.3.1] *A altmodül $_RR$ için aşağıdaki denklikler vardır:*

(1) *A altmodülü $_RR$ de smalldur.*

(2) *A modülü Rad_RR nin altmodülüdür.*

(3) *Her $a \in A$ için R de $(1-a)$ nın bir sol tersi vardır.*

(4) *Her $a \in A$ için R de $(1-a)$ nın bir tersi vardır.*

Önerme 3.2.12. [1] *E bir injektif sol R-modül ve S:=End($_RE$) ve $\alpha \in S$ olsun. O zaman $\alpha \in J(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $Ker\alpha \leq_e E$ olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. $S\alpha \ll sS \Leftrightarrow \alpha \in RadS$ olduğu Lemma 3.2.10 dan görülür.

$\alpha \in RadS \Rightarrow Ker(\alpha) \leq_e ({}_RE)$ için $Ker(\alpha) \cap U = 0$ olacak şekilde $U \leq_R E$ olsun. O zaman diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $\alpha_0 := a|_U$ monomorfizması vardır.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\iota"] & Q \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \\
Q &
\end{tikzcd}
$$

$u = \iota(u) = \beta\alpha_0 = \beta\alpha(u), u \in U, U \leq Ker(1-\beta\alpha)$ vardır. $\alpha \in RadS$ olduğundan $\beta\alpha \in RadS$ olduğu görülür. Lemma 3.2.11 dan $(1-\beta\alpha)$ tersinirdir.

Böylece $Ker(1-\beta\alpha) = 0$ dır. Buradan $U = 0$ olur. Böylece $Ker(\alpha)$ nın E de essential olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$. Şimdi $Ker\alpha \leq_e E$ olsun. O zaman $S\alpha \ll sS$ olduğunu gösterelim.

$S\alpha + \Gamma = sS$, $\Gamma \leq sS$ olsun. O zaman $\sigma\alpha + \gamma = 1$ olacak şekilde $\sigma \in S$, $\gamma \in \Gamma$ vardır.

Buradan $Ker(\alpha) \cap Ker(\gamma) = 0$ dır ve $Ker(\alpha) \leq_R E$ olduğundan $Ker(\gamma) = 0$ olur.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "1_Q"'] & Q \arrow[dl, dotted, "\delta"'] \\ Q & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Yani $1_E = \delta\gamma$ olacak şekilde $1_\gamma : Q \to Q$ vardır.

Böylece $\Gamma = S$ olur. Buradan $S\alpha \ll sS$ olduğu görülür. □

Önerme 3.2.13. [1] *$SocE \leq_e E$ olacak şekilde E bir injektif sol R-modül ve S:=End($_RE$) olsun. O zaman $J(S) = r_S(SocE)$ ve $S/J(S) \cong End(_RSocE)$ dir.*

İspat: E injektif olduğundan [9, Proposition 22.1] gereğince,

$J(S) = \{f \in S \mid Kerf \leq_e M\}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan $J(S) \leq Hom_R(E/SocE, E)$ olur. Ayrıca $SocE \leq_e E$ olduğundan

[9, Proposition 22.1] gereğince $Hom(E/SocE, E) \leq J(S)$ dir.

Böylece $J(S) = Hom(E/SocE, E)$ olur.

Şimdi $0 \to SocE \to E \to E/SocE \to 0$ dizisine $Hom_R(-, E)$ funktorunu uygulayalım.

$0 \to Hom(E/SocE, E) \to Hom(E, E) \to Hom(SocE, E) \to 0$ dan

$Hom(SocE, E) \cong End(SocE)$ olduğundan [9, Proposition 22.1(5)] gereğince ve hipotez $SocE \leq_e E$ olduğundan $J(S) = Hom(E/SocE, E) = r_s(SocE)$ dir.

Ayrıca $Hom(SocE, E) \cong End_R(SocE)$ olduğundan,

$$\gamma : S \to Hom(SocE, E)$$

dönüşümünü ele alalım. Yani,

$$\gamma : End_RE \to Hom(SocE, E)$$

biçiminde tanımlanırsa γ bir epimorfizmadır. Aynı zamanda $Ker\gamma = J(S)$ olduğundan 1. İzomorfizma teoreminden $S/J(S) \cong Hom(SocE, E)$ olur. Bu da

$S/J(S) \cong Hom(SocE, E) = End_R(SocE)$ olur. Buradan istenen ispatlanmış olur. $\square$

Örnek 3.2.14. [9] $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak injektif eş-üretilmiş modüllerdir.

İspat: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, bölüm modülleri $\mathbb{Z}$-modül olarak bölünebilirdir. Bölünebilir modüllerin bölüm modülleri de bölünebilir olduğundan $\mathbb{Z}$-injektif modüllerdir. Basit $\mathbb{Z}$-modüller, p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ şeklindedir ve

$$f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \,;\, z + p\mathbb{Z} \to \tfrac{z}{p} + \mathbb{Z}$$

dönüşümü bir monomorfizmadır. Böylece $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ basit modülünü eş-ürettiğinden [9, Proposition 16.5.] gereğince $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eş-üreteçtir. O halde $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nin eş-üreteci olur. $\square$

4. SOCLE VE SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER

Bu bölümde socle tanımı verilmiş olup socle ile eş-üreteçli modül arasındaki bağlantıya yer verilmiştir [1], [6], [9].

4.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Socle ile Yapılandırılması

Tanım 4.1.1. [1] M bir sol R-modül olsun. M nin bütün basit (minimal) altmodüllerinin toplamına M nin *socle* denir ve $SocM$ ile gösterilir. Eğer M nin hiçbir minimal (basit) altmodülü yoksa $SocM = 0$ yazılır.

$\mathcal{U}$, sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. Bir sol R-modül M için $Tr(\mathcal{U},M)$ veya $Tr_M(\mathcal{U})$ şeklinde gösterilen $\sum\{Imh \mid h: U \to M, U \in \mathcal{U}\}$ ifadesine $\mathcal{U}$ nun M deki *izi (trace)* denir. Bu durumda,

$$Tr(\mathcal{U},M) = Tr_M(\mathcal{U}) = \sum\{Imh \mid h: U \to M, U \in \mathcal{U}\} \text{ dir.}$$

Tanım 4.1.2. [1] M bir sol R-modül olsun.

$$\begin{aligned} SocM &= \sum\{K \leq M \mid K, M \text{ de minimal altmodül}\} \\ &= \sum\{K \leq M \mid K, M\text{de basit altmodül }\} \\ &= \bigcap\{L \leq M \mid L \leq_e M\} \end{aligned}$$ biçiminde tanımlanan $SocM$ ye *M nin socle'si* denir. $SocM$, M nin bir altmodülüdür.

ε basit sol R-modüllerin sınıfı olsun. O zaman ε nun M deki izi (trace) $SocM$ dir. O halde $SocM$, M nin bir yarı-basit altmodülü olur.

Tanım 4.1.3. [1] Bir sol R-modül M için,

$$\begin{aligned} RadM &= \bigcap\{K \leq M \mid \text{K, M de maksimal }\} \\ &= \sum\{L \leq M \mid L \ll M\} \end{aligned}$$ şeklinde tanımlansın. $RadM$, M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle de M nin *radikali* denir.

Tanım 4.1.4. [9] R bir halka olsun. R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine R nin *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ şeklinde gösterilir.
$J(R) = Rad(_RR)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.1.5. [9] *M bir sol R-modül olsun.*
$RadM = Rej(M,\varepsilon) = \bigcap\{K \leq L \mid K, M \text{ de maksimal}\}$
$\qquad = \sum\{L \leq M \mid L, M \text{ de small } \}$ *dır.*

İspat: $Rej(M,\varepsilon) = \bigcap\{Kerh \mid h : M \to U, U \in \varepsilon\}$ olsun. İlk eşitlik için $Kerh \leq M$ de maksimal olduğunu göstermeliyiz. $M/Kerh \cong \mathcal{U}$ basit olduğu için $M/Kerh$ basit ve $Kerh$ maksimal olur.
Şimdi ikinci eşitlik için L modülü M de small olsun. Eğer K, M de bir maksimal altmodül ve L, K da içerilmiyor ise o zaman $K + L = M$ dir. Fakat L, M de small olduğundan $K = M$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda M nin her small altmodülü bir maksimal altmodülde kapsanır. Böylece her small altmodül $RadM$ de kapsanır. Yani, $\sum\{L \leq M \mid L \ll M\} \subseteq RadM$ olur.
Diğer yandan $x \in M$ olsun. Eğer $Rx + N = M$ olacak şekilde $N \leq M$ ise o zaman $N = M$ ya da $N \leq K$ ve $x \notin K$ olacak şekilde M nin bir maksimal K altmodülü vardır.
$x \in RadM$ ise yukarıdaki özellik gereğince benzer şekilde $N = RadM$ ya da $N \leq K$ ve $x \notin K$ olacak şekilde$RadM$ nin bir maksimal altmodülü vardır. O zaman $N = RadM$ den $Rx \ll RadM$ bulunur. O zaman $RadM = \sum Rx$ olduğundan
$RadM = \sum R_x = \sum\{Rx \mid Rx \ll M\} \subseteq \sum\{L \leq M \mid L \ll M\}$ olur. Diğer durumda ilk eşitlik durumu elde edilir. □

Örnek 4.1.6. [6]
(1) $\mathbb{Z}$ için $Rad_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = Soc_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = 0$ dir. Çünkü $\mathbb{Z}$ nin hiç small ve minimal altmodülü yoktur.
(2) $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ için $Soc_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0$ dır. Çünkü $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ nun hiç minimal $\mathbb{Z}$-altmodülleri yoktur. Ayrıca $Soc_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ dur.

(3) Asal sayıların kuvvetlerinin tek türlü ayrışımı olan $m_i > 0$ ve $i \neq j$ için $n = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}$, $p_i \neq p_j$ olacak şekilde $n > 1$,$n \in \mathbb{Z}$ alalım.

Şimdi $Soc(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ yi inceleyelim.

$n = 0$ ve $n = 1$ için $Soc(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sıfıra eşittir.

$n > 1$ için yukarıda verilen asal sayıların kuvvetlerinin ayrışımına bakalım. Öncelikle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bir basit $\mathbb{Z}$-modül olması için gerek ve yeter koşul n nin bir asal sayı olmasıdır özelliğini biliyoruz.

Eğer $n = p$ asal ise o zaman $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (halka olarak) bir cisimdir ve böylece $\mathbb{Z}$-modül olarak basittir.

Eğer n nin en az bir q böleni varsa, o zaman $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı bir öz altmodülüdür.

$(i = 1,...,k)$ için, $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ dir. $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin basit altmodülleridir.

O zaman $\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}\right)/n\mathbb{Z}$

$$= \frac{n}{p_i...p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \leq Soc(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ dir.}$$

Diğer taraftan $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n = qn_1$ olacak şekilde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin bir basit altmodülü olsun. $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$ olduğundan n_1, $p_1,...,p_k$ asal sayılarından biridir ve bunu p_i ile gösteririz. Buradan $q = \frac{n}{p_i}$ olur ve $Soc\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right) = \frac{n}{p_1...p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olur.

Böylece $Soc(\mathbb{Z}/p_i...p_k\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p_i...p_k\mathbb{Z}$ olur.

Buradan $Soc(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dir.

Önerme 4.1.7. [1] *Bir sol R-modül M için*

$Soc(M) = Tr(\varepsilon, M) = \sum\{K \leq M \mid K, M \text{ de basit altmodül } \}$ *şeklindedir.*

İspat: ε, basit R-modüllerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $SocM$, ε nun M de bir izidir. $Tr(\varepsilon, M)$ yada $Tr_M(\varepsilon)$ şeklinde gösterilir.

$Tr_M(\varepsilon) = \sum\{Imh \mid h : U \to M, U \in \varepsilon\}$ olur. Buradan $Tr(\varepsilon, M)$ yani $Tr_M(\varepsilon) = SocM$ bulunur. Böylece $SocM = Tr_M(\varepsilon) = \sum\{Imh|h : U \to M, U \in \varepsilon\}$ dur.

Basit altmodüllerin görüntüleri de basit olduğundan ε, M nin basit altmodüllerinin bir sınıfı ise, bir $h : U \to M$ monomorfizması icin $U \cong Imh$ ve U modülleri basit olduğundan Imh da basit olur.

İkinci eşitlik için $T \leq M$ basit altmodül olsun. Eğer sıfırdan farklı $L \leq_e M$ ise $T \cap L \neq 0$ dır. Ancak $T \cap L \leq T$ ve kabul gereğince T basit olduğundan $T \cap L = T$ dir. Yani $T \leq L$ olur. Böylece $SocM$, M nin her essential altmodülü içinde kapsanır. Buradan $SocM \leq \bigcap\{L \leq M \mid L \leq_e M\}$ olur.

Diğer yandan $H = \bigcap\{L \leq M \mid L \leq_e M\}$ olsun.

H nin yarı-basit olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten $N \leq H$ ve $N^{'} \leq M$ de N nin bir complementi olsun. O zaman $N + N^{'} = N \oplus N^{'} \leq_e M$ dır. Buradan $N \leq H \leq N \oplus N^{'}$ olur. Şimdi Modülarite kuralından $H = H \cap (N \oplus N^{'}) = N \oplus (H \cap N^{'})$ olur. Böylece N, H nin bir direk toplananı olarak bulunur. Yani H yarı-basittir. O halde $H \leq SocM$ olur ve böylece $SocM = H$ bulunur. $\square$

Tanım 4.1.8. [9] $M = MEnd_R(E(M))$ ise M ye $E(M)$ nin *fully invaryant altmodülü* denir.

M bir sol R-modül olsun. $S = End_R(M)$ olmak üzere M, (R,S)-bimodül olur.

Ayrıca M nin (R,S)-altmodüllerine M nin *fully invaryantı* yada *karakteristik altmodülleri* denir.

Önerme 4.1.9. [9] *M bir sol R-modül olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:*

(1) *Bir $f : M \to N$ homomorfizması için $f(SocM) \leq SocN$ dir.*

(2) *$K \leq M$ altmodülü için $SocK = K \cap SocM$ dir.*

(3) *Her sıfırdan farklı her $K \leq M$ altmodülü için $SocK \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $SocM$ nin M de essential olmasıdır.*

(4) *$SocM$, $End_R(M)$ nin bir altmodülüdür. Yani $SocM$, M de fully invaryanttır.*

(5) *$Soc(\bigoplus_{\Lambda} M_\lambda) = \bigoplus_{\Lambda} SocM_\lambda$ dır.*

İspat: (1) . $f : M \to N$ homomorfizma olsun.

Yarı-basit modüllerin homomorf görüntüsü de yarı-basit olduğundan, M nin M_i basit altmodülleri için $f(SocM) = f(\bigoplus M_i) = \sum f(M_i)$ vardır. Buradan $f(SocM) = \sum(f(M_i)) \leq SocN$ olur.

(2) . $K \leq M$ için $SocK \leq SocM$ dir. Buradan $SocK = K \cap SocK \leq K \cap SocM$ dır. Yani $SocK \leq K \cap SocM$ olur.

Şimdi $K \cap SocM \leq K$ ve $K \cap SocM$ yarı-basit olduğundan

$K \cap SocM \leq SocK$ olur. Buradan $SocK = K \cap SocM$ elde edilir.

(3) . $SocM \leq_e M$ olsun. $0 \neq K \leq M$ için $SocK = K \cap SocM$ ve

$SocM \leq_e M$ olduğundan $SocK \neq 0$ dır.

Tersine $0 \neq K \leq M$ için $SocK \neq 0$ olsun. $0 \neq SocK = K \cap SocM$ olduğundan $K \cap SocM \neq 0$ dır. Böylece $SocM \leq_e M$ bulunur.

(4) . $SocM$, sağ $End_R M$-modül olduğu açıktır. Şimdi ε basit modüllerin bir sınıfı olmak üzere ,

$Tr(\varepsilon, M) = \Sigma\{Imh \mid h : U \to M, U \in \varepsilon\}$ olduğundan $Tr(\varepsilon, M)$ nin sağ $End_R M$ modül olduğu açıktır.

(5) . $Soc(M_\lambda) \leq Soc(\bigoplus M_\lambda)$ dir. Buradan, $\bigoplus Soc(M_\lambda) \leq Soc(\bigoplus M_\lambda)$ olur.

Diğer taraftan $m \in Soc(\bigoplus M_\lambda)$ alalım. $m = \sum m_\lambda$, $m_\lambda \in M_\lambda$ için,

$\pi_\lambda : \bigoplus M_\lambda \to M_\lambda$, $\pi_\lambda(m) = m_\lambda$ olacak şekilde vardır.

Buradan $m = \sum m_\lambda \in \bigoplus SocM_\lambda$ dir. $Soc(\bigoplus M_\lambda) \leq \bigoplus(SocM_\lambda)$ olur.

Böylece $Soc(\bigoplus_\Lambda M_\lambda) = \bigoplus_\Lambda Soc(M_\lambda)$ elde edilir. □

Teorem 4.1.10. [1] *M nin sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul SocM in sonlu eş-üretilmiş ve* $0 \to SocM \to M$ *dizisindeki içerim dönüşümünün essential olmasıdır. Yani* $SocM \leq_e M$ *dır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M sonlu eş-üretilmiş olsun. $SocM \leq M$ olduğundan ve sonlu eş-üretilmiş modülün her altmodülü sonlu eş-üretilmiş olduğundan $SocM$ sonlu eş-üretilmiştir.

Şimdi $SocM \leq_e M$ olduğunu göstereceğiz. Bir $K \leq M$ altmodülü için $SocM \cap K = 0$ olduğunu kabul edelim. $SocM$, M nin bütün essential altmodüllerinin arakesiti ve M sonlu eş-üretilmiş olduğundan $L_1 \cap ... \cap L_n \cap K = 0$ olacak şekilde M nin $L_1, ..., L_n$ essential altmodülleri vardır. Fakat $L_1 \cap ... \cap L_n$, M de essential olduğundan $K = 0$ dır. Böylece $SocM$, M de essentialdır.

$(\Leftarrow)$. $SocM$ sonlu eş-üretilmiş ve $SocM \leq_e M$ olsun. M nin sonlu eş-üretilmiş olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{A}$, $\bigcap \mathcal{A} = 0$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin bir kümesi olsun.

Buradan $\bigcap\{A \cap SocM \mid A \in \mathcal{A}\} = 0$ dır. Buradan, $(A_1, ...A_n \in \mathcal{A})$ için

$(A_1 \cap SocM) \cap ... \cap (A_n \cap SocM) = (A_1 \cap ... \cap A_n) \cap SocM = 0$

Böylece $SocM \leq_e M$ olduğundan $A_1 \cap ... \cap A_n = 0$ bulunur. O zaman M sonlu eş-üretilmiş olur. $\square$

Sonuç 4.1.11. [1] *M sonlu eş-üretilmiş ise M nin bir minimal altmodülü vardır.*

İspat: M sonlu eş-üretilmiş ise Teorem 4.1.10 gereğince $SocM \leq_e M$ dir.

$SocM \neq 0$ ve essential altmodül tanımından,

$$
\begin{aligned}
0 \neq SocM &= \bigcap\{L \leq M \mid L \leq_e M\} \\
&= \sum\{K \leq M \mid K, M\text{de minimal }\} \neq 0 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

O halde M nin sıfırdan farklı bir minimal altmodülü vardır. $\square$

Yarı-basit modüller için sonlu üretilmiş modül , sonlu eş-üretilmiş modüle denktir. Bunun için aşağıdaki önermeleri verelim.

Önerme 4.1.12. [1] *Bir yarı-basit M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) *M sonlu eş-üretilmiştir.*

(2) *$i = 1, 2, ..., n$ için T_i basit modüller olmak üzere $M = T_1 \oplus ... \oplus T_n$'dir*

(3) *M sonlu üretilmiştir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. M bir yarı-basit modül olduğundan $\mathcal{A}$, M nin basit T_i altmodüllerinin ailesi olmak üzere $M = \bigoplus_{T_i \in \mathcal{A}} T_i$ olsun. Şimdi M sonlu eş-üretilmiş olduğundan $M \to \bigoplus_{T_i \in \mathcal{A}} T_i$ monomorfizması için,

$M \to \bigoplus_{\mathcal{F}(Sonlu)} T_i$ monomorfizma olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi vardır.

$M \leq \bigoplus_{\mathcal{F}} T_i \leq M = \bigoplus_{T_i \in \mathcal{A}} T_i$ olduğundan $M = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$ biçiminde yazılır .

$(2) \Rightarrow (3)$. Hipotezden M nin sonlu geren bir kümesi vardır.

[1, Proposition 10.1 $((a) \Leftrightarrow (e))$] şartından M sonlu üretilmiştir.

$(3) \Rightarrow (1)$. M yarı-basit olduğundan basit altmodüller tarafından gerilir.

(3) özelliğinden basit altmodüllerin sonlu $T_1, \ldots, T_n$ kümesiyle gerilir.

n üzerinden tümevarımla ispatı yapalım .

$n = 1$ ise M basit olur. Böylece M sonlu eş-üretilmiştir.(Sonuç4.1.11)

$n > 1$ için basit modüllerle gerilen modül sonlu eş-üretilmiş olsun.

$\mathcal{A}$ kümesi , $\bigcap \mathcal{A} = 0$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin bir kümesi olsun. O zaman $L \in \mathcal{A}$ için $T_n \cap L = 0$ dır. Sonlu üreteçli olan her S_i basit modülleri ve $m < n$ olmak üzere $L = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$ olur.

$\mathcal{A}^{'} = \{N \cap L \mid N \in \mathcal{A}\}$ böylece $\mathcal{A}^{'}$, $\cap \mathcal{A}^{'} = 0$ olacak şekilde L nin altmodüllerinin bir kümesidir. Buradan L sonlu eş-üretilmiş olduğundan $\{N_1, \ldots, N_k\} \subseteq \mathcal{A}$ sonlu alt kümesi için, $L \cap N_1 \cap \ldots \cap N_k = 0$ dır. Bu ise, M nin sonlu eş-üretilmiş olduğunu gösterir. □

Önerme 4.1.13. [1] *M bir sol R-modül olsun. M nin sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $SocM$ sonlu üretilmiş ve $SocM \leq_e M$ olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M sonlu eş-üretilmiş olsun. Teorem 4.1.10 gereğince $SocM \leq_e M$ dir. Şimdi $SocM$ nin sonlu üretilmiş olduğuna bakalım.

M sonlu eş-üretilmiş olduğundan $SocM$ altmodül olarak sonlu eş-üretilmiş olur. Böylece $SocM$ yarı-basit modül ve $SocM$ sonlu eş-üretilmiş oluğundan Önerme 4.1.12 gereğince $SocM$ sonlu üretilmiştir.

$(\Leftarrow)$. $SocM \leq_e M$ ve $SocM$, sonlu üretilmiş olsun.

$SocM$ sonlu üretilmiş ve $SocM$ yarı-basit olduğundan Önerme 4.1.12 gereğince $SocM$ sonlu eş-üretilmiştir. O zaman Teorem 4.1.10 gereğince M sonlu eş-üretilmiş olur. □

Önerme 4.1.14. [1] *$M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ olsun.*

M nin sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $M_i(i = 1,2,...)$ modüllerinin sonlu eş-üretilmiş olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$. Eğer M_i ler (i=1,2,...) sonlu eş-üretilmiş iseler M nin sonlu eş-üretilmiş olduğunu gösterelim. $SocM = (SocM_1) \oplus ... \oplus (SocM_n)$ olduğunu biliyoruz.

M_i ler sonlu eş-üretilmiş olduğundan $SocM_i$ sonlu üretilmiş olur(Önerme 4.1.13). Böylece $SocM$ sonlu üretilmiş olur. Hipotez ve 4.1.13 gereğince $SocM_i \leq_e M_i$ olur. Böylece $SocM \leq_e M$ olur. Önerme 4.1.13 tekrar uygulanırsa M sonlu eş-üretilmiş olur.

$(\Rightarrow)$. Tersine M sonlu eş-üretilmiş olsun. $M \to U^{(A)}$ monomorfizmasını göz önüne alırsak, $M_i \to M \to U^{(A)}$ monomorfizmasıdır. Böylece M_i ler sonlu eş-üretilmiş olur. □

NOT: Bir M modülünün radikali ve socle arasındaki ilişki tam belli değildir. Ancak bazen $SocM \cap RadM \neq 0$ olabilir. Örneğin M sonlu eş-üretilmiş ve $RadM \neq 0$ ise $SocM \cap RadM \neq 0$ dır. M sonlu eş-üretilmiş ise Teorem 4.1.10 $SocM \leq_e M$ olduğundan ve $RadM \neq 0$ ise $SocM \cap RadM \neq 0$ dır.

5. SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE ZİNCİR ŞARTLARI

Bu bölümde zincir şartı ve sonlu eş-üreteçli modül ile bağlantısına yer verilmiştir [1], [6].

5.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Artin Modüller ile Karakterizasyonu

Tanım 5.1.1. [1] $\mathcal{L}$, M nin altmodüllerinin bir ailesi olsun.
$\mathcal{L}$ deki her $L_1 \geq L_2 \geq ... \geq ..$ (i=1,2,...) azalan zinciri için, $L_{n+i} = L_n$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$ ye *azalan zincir koşulunu sağlar* denir. M nin bütün altmodüllerinin $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ kafesinde azalan zincir şartı sağlanıyorsa M ye *Artin modül* denir.

Örnek 5.1.2. [1]

(1) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ un bölüm modülleri sonlu eş-üretilmiştir.

(2) $\mathbb{Z}_m$ modülü sonlu olduğu için sonlu eş-üretilmiştir. Dolayısıyla Artin modüldür.

(3) $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}$ Artin değildir.

(4) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak Artin değildir. Çünkü $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ da minimal bir altmodül bulunamaz. Sonlu eş-üreteçli olmadığı için Artin modül olmaz.

(5) $\mathbb{Q}$-modül $\mathbb{Q}$ Artin modüldür. $\mathbb{Q}$ basit olduğundan sonlu eş-üreteçli olur.

Her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiş olan modüllerin karakterizasyonları için zincir şartları önemli bir rol oynar. Genel olarak sonluluk şartlarından hiçbiri diğerini gerektirmez. Ancak bazı özel durumlarda denklik olabilir.

Önerme 5.1.3. [1] *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) *M Artin modüldür.*

(2) *M nin her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiştir.*

(3) *M nin altmodüllerinin boş olmayan her alt kümesinin bir minimal elemanı*

vardır.

İspat: $(1) \Rightarrow (3)$. $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\mathcal{A}$ nın bir minimal elemanı olmadığını kabul edelim. O zaman, her $L \in \mathcal{A}$ için $\{L^{'} \in \mathcal{A} \mid L^{'} < L\}$ kümesi boştan farklıdır. Böylece seçme aksiyomu ile her $L \in \mathcal{A}$ için $L > L^{'}$ olacak şekilde bir $L \to L^{'}$ fonksiyonu vardır. Şimdi $L^{'} \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman, $L > L^{'} > L^{''} > \ldots$ M nin altmodüllerinin azalan bir zinciridir. Bu durum M nin Artin modül olmasıyla çelişir. O halde $\mathcal{A}$ nın bir minimal elemanı vardır.
$(3) \Rightarrow (2)$. $K \leq L$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$, $K = \bigcap \mathcal{A}$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin bir kolleksiyonu ise o zaman, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ sonlu alt kümesi olmak üzere $K = \bigcap \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim.
$\mathcal{P} = \{\bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ sonlu $\}$ kümesini göz önüne alalım. (3) kabulünden $\mathcal{P}$ nin bir minimal elemanı $\bigcap \mathcal{F}$ olsun. Açıkça $K = \bigcap \mathcal{F}$ dir. [1, Proposition 2.9] gereğince M/K nın altmodüllerinin kafesi M nin K yı içeren altmodüllerinin kafesine izomorf olacağından M/K sonlu eş-üretilmiştir.
$(2) \Rightarrow (1)$. M nin her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiş ve
$L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_n \ldots$, M nin altmodüllerinin bir azalan zinciri olsun.
$K = \bigcap\limits_{\mathbb{N}} L_n$ olsun. M/K sonlu eş-üretilmiş olduğundan $(n = 1, 2, \ldots)$ için
$L_{n+1} = L_n$ olduğu durumda $K = L_n$ olacak şekilde bir n vardır. Yani M modülü Artin modül olur. □

Sonuç 5.1.4. [1] *M sıfırdan farklı bir modül olsun. M Artin modül ise M nin basit bir altmodülü vardır ve SocM, M de essensial altmodüldür.*

İspat: M Artin modül ise Önerme 5.1.3($(1) \Rightarrow (3)$) gerektirmesinden M nin altmodüllerinin ailesinin minimal elemanı M nin bir basit altmodülüdür. M Artin modül olduğundan Önerme 5.1.3 ($(1) \Rightarrow (2)$) gereğince her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiş olur. Yani $M/\{0\}$ sonlu eş-üretimiştir. Buradan M sonlu eş-üretimiştir.

Böylece Teorem 4.1.10 gereğince $SocM \leq_e M$ olduğu elde edilir. □

Önerme 5.1.5. [1] $0 \to K \to M \to N \to 0$ *sol R-modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. O zaman, M modülünün Artin modül olması için gerek ve yeter koşul K ve N modüllerinin de Artin modüller olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M Artin modül olsun.

M nin her Artin altmodülü Artindir ve K, M nin bir altmodülüne izomorf olduğundan K Artin modüldür. Ayrıca M nin her bölüm modülü N ye izomorf olduğundan ve M nin bölüm modülü de Artin modül olduğundan N Artin modül olur.

M nin bir T altmodülü için, T yi içeren bölüm altmodülleri ile bir azalan $L_1/T \geq L_2/T \geq ... \geq L_n/T...$ zincirini düşünelim. Eğer bu dizi sonlu adımda durmaz ise M nin $L_1 \geq L_2 \geq ... \geq L_n...$ azalan zinciri sonlu adımda durmaz. Bu M nin Artin modül olmasıyla çelişir. O halde M nin her bölüm altmodülü de Artin modüldür. Böylece N Artin modül olur.

$(\Leftarrow)$. K ve N Artin modüller olsun. M nin Artin modül olduğunun gösterelim.

$K \leq M$ için $M/K = N$ olsun.

M nin altmodüllerinin $L_1 \geq L_2 \geq ... \geq L_n...$ azalan zincirini göz önüne alalım.

$M/K = N$ Artin modül olduğundan $(i = 1, 2, ...)$

$L_m + K = L_{m+i} + K$ olacak şekilde bir m tamsayısı vardır.

Diğer taraftan K Artin modül olduğundan $(i = 1, 2, ...)$ için

$L_n \cap K = L_{n+i} \cap K$ olacak şekilde $n \geq m$ bir tamsayısı vardır.

$L_n \geq L_{n+i}$ olduğundan Modülarite kuralı ile her $i = 1, 2, ...$ için

$L_n = L_n \cap (L_n + K) = L_n \cap (L_{n+i} + K) = L_{n+i} + (L_n \cap K)$

$\quad = L_{n+i} + (L_{n+i} \cap K) = L_{n+i}$ dir. Böylece M Artin modül olur. □

Sonuç 5.1.6. [1] $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ *olsun. O zaman, M modülünün Artin modül olması için gerek ve yeter koşul* $i = 1, 2, ...$ *için her bir* M_i *modüllerinin de Artin modüller olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M Artin modül olsun. $0 \to M_1 \to M_1 \oplus ... \oplus M_n \to M_2 \oplus ... \oplus M_n \to 0$ kısa tam dizisi Önerme 5.1.5 gereğince M_1 ve $M_2 \oplus ... \oplus M_n$ Artin modül olur. $M_2 \oplus ... \oplus M_n$ Artin modül olduğundan benzer şekilde devam edilirse $i = 1, 2, ...$ için M_i ler Artin modüller olur.

$(\Leftarrow)$. Tersine (i=1,2,...) için M_i ler Artin modüller olsun. Burada

$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$ kısa tam dizisi için,

M_1 ve M_2 Artin modüller olduklarından $M_1 \oplus M_2$ de Artin modül olur. Tekrar

$0 \to M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \to M_3 \to 0$ kısa tam dizisi için $M_1 \oplus M_2$ ve M_3 Artin modüller olduklarından $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ de Artin modül olur. Bu sekilde devam edilirse $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ Artin modül bulunur. $\square$

Önerme 5.1.7. [1] *M sıfırdan farklı bir modül olsun. M direk toplananları üzerinde azalan zincir şartını sağlasın. Yani M modülü Artin modül olsun. O zaman,* $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ *direk toplamı parçalanamaz (indecomposible) altmodüllerinin bir sonlu direk toplamıdır.*

İspat: M sıfırdan farklı ve $M = N^{'} \oplus M^{'}$ öz ayrışımı parçalamaz ayrışıma (indecomposible) sahip olmasın. Burada $M^{'}$ de sonlu parçalamaz ayrışıma (indecomposible) sahip değildir.

$0 \neq M$ nin parçalanamaz (indecomposible) modüllerinin bir sonlu direk toplamına eşit olmadığını kabul edelim. O zaman,

$M = N^{'} \oplus M^{'}, M^{'} = N^{''} \oplus M^{''}, M^{''} = N^{'''} \oplus M^{'''}$ ... öz ayrışımlarının dizisi vardır .

$N^{'} < N^{'} \oplus N^{''} < ....$ ve $M > M^{'} > M^{''} > ....$ M nin direk toplananlarının sonsuz zincirleridir. Bu durum hipotez ile çelişir. O halde M bir sonlu parçalanamaz ayrışıma (indecomposible) sahiptir. □

Önerme 5.1.8. [1] *Her M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) *$RadM = 0$ ve M Artin modüldür.*

(2) *$RadM = 0$ ve M sonlu eş-üretilmiş modüldür.*

(3) *M yarı-basit ve sonlu üretilmiş modüldür.*

(4) *M yarı-basit ve Noether modüldür.*

(5) *M basit altmodüllerin bir sonlu kümesinin direk toplamıdır.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. M, Artin modül ise $M/\{0\}$ bölüm modülü sonlu eş-üretilmiştir. Teorem 5.1.3 greğince M sonlu eş-üretilmiştir.

$(4) \Rightarrow (3)$. M, Noether modül ise her altmodül sonlu üretilmiş olduğundan kendisi kendisinin altmodülü olarak M sonlu üretilmiş olur.

$(2) \Rightarrow (5)$. $RadM = 0$ ve M sonlu eş-üretilmiş modül olsun.

[1, Proposition 9.16] gereğince M basit modüllerin sınıflarıyla eş-üretilmiş olur. Önerme 3.2.3 (3) gereğince M basit modüllerin bir sonlu P çarpımının bir altmodülüne izomorf olur. Burada,

$$0 \to M \to \prod_A U_\alpha \text{ için } 0 \to M \to \prod_F U_\alpha$$

monomorfizması vardır. Sonlu durumda direk çarpım direk toplam olduğundan M basit modüllerin sonlu bir direk toplamına izomorf olur.

$(3) \Leftrightarrow (5)$. Önerme 4.1.12 den ispatı açıktır.

$(5) \Rightarrow (1)$. Hipotezden M yarı-basittir ve [1, Proposition 9.16] gereğince $RadM = 0$ dır. Basit modüller hem Artin hem Noether modüller olduklarından dolayı bunların direk toplamları da Artin ve Noether modüller olur.

$(5) \Rightarrow (4)$. Hipotezden M yarı-basittir. Basit modüller hem Artin hem Noether modüller olduklarından dolayı bunların direk toplamları da Artin ve Noether modüller olur. □

Aşağidaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1.9. [1, Corollary 10.16] *Bir M yarı-basit modül için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M, Artin modüldür.*

(2) *M, Noether modüldür.*

(3) *M sonlu üretilmiş modüldür.*

(4) *M sonlu eş-üretilmiş modüldür.*

5.2. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Artin Halka ile Karakterizasyonu

Sonuç 5.2.1. [1] *Her R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R sol Artin halkadır.*

(2) *R nin sol Artin modül olan bir $_RG$ üreteci vardır.*

(3) *Her sonlu üreteçli sol R-modül Artin modüldür.*

(4) *Her sonlu üreteçli sol R-modül sonlu eş-üretilmiş modüldür.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. R birimli bir halka olduğundan $_RR$ bir üreteçtir. O zaman R, (1) kabulünen Artin bir $_RR$ üretecine sahip olduğundan istenen elde edilmiş olur.

$(2) \Rightarrow (3)$. (2) koşulunu kabul edelim. [1, Corollary 10.13] den her sonlu F kümesi için $G^{(F)}$ Artin modül olur. Eğer M sonlu üretilmiş bir modül ise [1, Proposition 10.1.(d)] gereğince M sonlu bir F kümesi için $G^{(F)}$ nin bir bölüm modülüne izomorf olur. Önerme 5.1.3 gereğince M Artin modül olur.

$(3) \Rightarrow (4)$. [1, Proposition 10.10 $((a) \Rightarrow (b))$] gereğince sonlu üreteçli bir R modülü kabulden Artin modül olduğu için sonlu eş-üretilmiş olur.

$(4) \Rightarrow (1)$. $_RR$ sonlu üreteçli olsun. $_RR$ nin her bölüm modülü de sonlu üreteçlidir. Hipotezden bölüm modülü sonlu eş-üretilmiş olur. [1, Proposition 10.10 $((b) \Rightarrow (a))$] gereğince $_RR$ Artin modül olur. □

6. SONLU EŞ-ÜRETEÇLİ MODÜLLER İÇİN İLERİ KARAKTERİZASYON VE UYGULAMALARI

Bu bölümde sonlu eş-üreteçli modüllerin farklı uygulama alanları çalışılmıştır [2], [3], [4], [5], [7], [8], [10], [11].

6.1. Sonlu Eş-Üreteçli Modüller ve n-Copresented Modüller

Tanım 6.1.1. [2] R bir halka ve n bir pozitif tamsayı olsun.
Eğer $i = 0, 1, ..., n$ için I_i injektif ve sonlu eş-üretilmiş olmak üzere R-modüllerin

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 ... \to I_n$$

tam dizisi varsa M ye *n-copresented* denir. Eğer M her pozitif n tamsayısı için n-copresented ise M ye *infinitely copresented* denir. Eğer bazı pozitif n tamsayıları için M nin n-copresented olması göz ardı edilirse o zaman M ye *(-1)-copresented* denir.

Her $m \leq n$ pozitif tamsayısı için her n-copresented modülün m-copresented modül olduğu açıktır. Her injektif ve sonlu eş-üretiliş I modülü infinitely copresented olur. Aşağıdaki önermede 0-copresented modülün sonlu eş-üretilmiş modül ile denkliği verilmektedir.

Önerme 6.1.2. [2] *R bir halka olsun. Bir R-modülün* 0*-copresented modül olması için gerek ve yeter koşul modülün sonlu eş-üretilmiş olmasıdır.*

İspat: Sonlu eş-üretilmiş modülün her altmodülü de sonlu eş-üretilmiş modül olduğundan 0-copresented modüller de sonlu eş-üretilmiştir.
Karşıt olarak M modülü sonlu eş-üretilmiş olsun. O zaman M bir $E(S_1) \bigoplus E(S_2) \bigoplus ... \bigoplus E(S_n)$ nin bir altmodülüne izomorf olacak şekilde basit R-modüllerin bir sonlu $\{S_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ kümesi vardır.

$0 \rightarrow M \rightarrow E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus ... \oplus E(S_n) \rightarrow ... \rightarrow E(S_1)$ dizisi basit (simple) modüllerin her bir $i = 1,2,...,n$ için, $E(S_1)$ injektif ve eş-üretilmiş olduğundan $E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus ... \oplus E(S_n)$ toplamı injektif ve eş-üretilmiş olduğu için M 0-copresented modül olur. □

6.2. Solu Eş-Üreteçli Modül Uygulaması

R bir halka, M bir sol R-modül olsun. Eğer M nin bir sonlu üretilmiş essential socle varsa *M ye sonlu eş-üretilmiş modül* denir.

Önerme 6.2.1. [5] *R bir halka, M bir sol R-modül N, M nin bir altmodülü ve $x_1, x_2, ..., x_n \in M - N$ olsun.M nin N yi içeren ve M/P sonlu eş-üretilmiş modül olacak şekilde x_i lerin hiçbirini içermeyen bir P altmodülü vardır.*

İspat: $\delta = \{P \leq M \mid N \leq P, x_i \notin P\}$ ailesini tanımlayalım. $N \in \delta$ olduğundan $\delta \neq \varnothing$ dır. Zorn's Lemma ile δ ailesinde bir P maksimal altmodülü vardır. Bu durumda M/P basit modül olduğundan M/P sonlu eş-üretilmiş modül olur. Buradan istenilen ispatlanmış olur. □

6.3. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Artin Modüller için bir Uygulaması

Genelde her Artin modül sonlu eş-üretilmiş modüldür. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Aşağıda verilen teorem bu durumu açıklamaktadır.

Teorem 6.3.1. [11] *R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M, bir M-injektif yarı-basit modül ile bir Artin modülün bir direkt toplamıdır.*

(2) *M nin her altmodülü, bir M-injektif modül ve bir Artin modülün bir direkt toplamıdır.*

(3) *M nin her essential altmodülü bir M-injektif modül ile bir Artin modülün bir*

direkt toplamıdır.

Bu denk koşullar altında eğer M sonlu eş-üretilmiş bir modül ise M Artin modüldür.

İspat: M sonlu eş-üretilmiş olsun. Teorem 4.1.10 gereğince $SocM$ sonlu eş-üretilmiş olur. Ancak $SocM$ yarı-basit olduğundan Önerme 4.1.12 gereğince $SocM$ sonlu üretilmiş olur. O zaman $SocM = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ parçalanamaz (indecomposible) M_i altmodüllerin bir ayrışımı direk olarak yazılabilir.
Diğer yandan M_i sonlu eş-üretilmiş iken $SocM \leq_e M$ olduğundan
$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ indecomposible altmodüllerin bir ayrışımı olarak yazılabilir. Böylece M_i ler basit olduğundan M_i ler yarı-basit ve M_i ler sonlu eş-üretilmiş olduğundan M_i ler Artin modül olur. Buradan M, Artin olur. □

6.4. Sonlu Eş-Üreteçli Modüllerin Ore Bölgesi için bir Uygulaması

Tanım 6.4.1. [4] Bir M modülü sonlu eş-üretilmiş değil fakat sıfırdan farklı her N altmodülü için M/N sonlu eş-üretilmiş ise *M ye hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (almost finitely cogenerated) (a.f.cog) modül* denir.

Tanım 6.4.2. [4] M bir sol R-modül olsun. M nin Krull boyutunu $| M |$ ile gösterelim. Eğer $M = 0$ ise $| M | = -1$ olarak alınır.
Eğer α bir ordinal sayısı ve $| M | \not< \alpha$ ise ve eğer $i = 1, 2, ...$ için
$| M_{i-1}/M_i | \not< \alpha$ olacak şekilde $M_0 = M \gneqq M_1 \gneqq M_2 \gneqq ...$ sonsuz altmodüller zinciri yoksa $| M | = \alpha$ denir. Böyle bir α sayısı yoksa *M nin Krull boyutu yoktur* denir.

Tanım 6.4.3. [4] M bir modül ve $M \leq N$ olsun. Bir α ordinali için
$\alpha = K\text{-}dim(M/N)$ (M nin Krull boyutu) ise ve sıfırdan farklı bir $M \leq N$ için
$\alpha > K\text{-}dim(M/N)$ ise M ye *α-critical modül* denir.

Tanım 6.4.4. [4] Bir M modülünün her altmodülü essential ise M ye *uniform modül* denir.

Önerme 6.4.5. [4] *Bir R-modül M için aşağıdakiler denktir:*

(1) *M bir hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (a.f.cog) modüldür.*

(2) *M, Artin modül değildir fakat M nin sıfırdan farklı her N altmodülü için M/N Artin modüldür.*

(3) *M,* 1*-critical modüldür.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. Tanımdan açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$. Önerme 5.1.3 den açıktır.

$(2) \Leftrightarrow (3)$. [8] □

Önerme 6.4.6. [4] *M bir hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (a.f.cog) R-modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler vardır:*

(1) *M uniform bir modüldür.*

(2) *M nin sıfırdan farklı her altmodülü hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (a.f.cog) modüldür.*

(3) *Her $f \in End_R M$ için, $f = 0$ ya da $Ker f = 0$ ve eğer $f(M) \neq M$ ise, o zaman $\bigcap\limits_{n\geq 1} f^n(M) = 0$ dır.*

İspat: (1). ve (2). [8, Lemma 6.2.11]

(3). $f \in End_R M$ olsun. $f(M) \cong M/Ker f$ (1. İzomorfizma teoremi) olduğundan $Ker f \neq 0$ ise hipotezden $f(M) = 0$ olur. Buradan $\bigcap\limits_{n\geq 1} f^n(M) = 0$ olduğu açıktır. Diğer yandan $N := \bigcap\limits_{n\geq 1} f^n(M)$ ve $N \neq 0$ olsun. Hipotezden $Ker f = 0$ ve M/N Artin modüldür. O zaman $f^{n+1}(M) = f^n(M)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir n tamsayısı vardır. Buradan $f(M) = M$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Öyle ise $\bigcap\limits_{n\geq 1} f^n(M) = 0$ dır. □

Tanım 6.4.7. [3] Bir sağ Ore domain bir integral domain R dir. Öyleki a, b sıfırdan farklı R nin iki elemanı olmak üzere $aR \cap bR \neq 0$ dır. Böylece bir integral bölgesinin bir sağ Ore domain olması için gerek ve yeter koşul R_R nin uniform olmasıdır. Her komitatif integral domain sağ Ore domaindir. Benzer şekilde sol Ore domain tanımı da yapılır.

Önerme 6.4.8. [4] *Eğer bir R halkası sol R-modül olarak hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (a.f.cog) modül ise o zaman aşağıdaki özellikler vardır:*

(1) *R, sol Ore domaindir.*

(2) *R, nin her sıfırdan farklı sol ideali maksimaldir.*

İspat: (1). Önerme 6.4.6 gereğince R nin elemanları ile sağdan çarpma ile R bir domain olur. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $(x,y) \in R^2$ ve $I = Rx + Ry$ olsun. Hipotezden ve Önerme 6.4.6 den I uniform olduğundan $Rx \cap Ry \neq 0$ dır. Buradan R Ore domain olur.

(2). [10, Proposition 3.5.45] □

Önerme 6.4.9. [4] *Bir R halkası için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *R bir sol R-modül olarak hemen hemen sonlu eş-üreteçli (a.f.cog) modüldür.*

(2) *R, Krull boyutu* 1 *olan bir integral domain(tamlık bölesi)dir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. Tanımdan ve Önerme 6.4.5 den açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$. [10, Proposition 3.5.45] den $s \in R$ sol regüler olsun.

Eğer $K\text{-}dimR = \alpha$ ise o zaman $K\text{-}dim(R/Rs) < \alpha$ dır. Özel olarak $\alpha = 1$ ise o zaman (R/Rs) Artin modüldür. Önerme 6.4.5 gereğince R Artin modül değildir ve R nin sıfırdan farklı I ideali için [10, Proposition 3.5.45] gereğince R/I Artin R-modül olur. Buradan R hemen hemen sonlu eş-üretilmiş (a.f.cog) modül olur. □

Teorem 6.4.10. *(Hopkins Levitzki Teoremi) R bir birimli sol Artin halka olsun. O zaman R bir sol Noetherdir.*

Önerme 6.4.11. [4] *R bir değişmeli halka olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *R bir hemen hemen sonlu eş-üreteçli (a.f.cog) R-modüldür.*

(2) *R boyutu* 1 *olan bir Noether tamlık bölgesidir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. Önerme 6.4.8 ve Hopkins Levitzki teoreminden açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$. [7, Lemma 8.4] gereğince R Artin değildir ve R nin sıfırdan farklı her x elemanı için R/Rx Artindir. Buradan istenilen ispatlanmış olur. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F. W., Fuller, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Math., No:13, Springer Verlag, New York.

[2] Bennis, D., Bouzraa, H. and Kaed, A. Q. 2012. On n-Copresented Modules and n-Co-Coherent Rings. **International Electronic Journal of Algebra**, Vol.12, 162-174.

[3] Bhattacharya, P. B., Jain, S.K., Nagpaul, S.R. 1994. Basic Abstract Algebra. Cambridge University Press.

[4] Essanouni, H. and Kaed, A.Q. 2010. Modules of Which All Proper Factor Modules are Finitely Cogenerated. **Applied Mathematical Sciences**, Vol.4, No:1, 13-20.

[5] Fakhruddin, Syed M. 1981. Finitely Cogenerated Modules. **Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli**, Vol.30, No:2, 119-123.

[6] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph no.17.

[7] Malliavin, M. P. 1985. Algèbre Commutative. Masson.

[8] McConnel, J.C. and Robson, J.C. 2001. Noncommutative Notherian Rings. GSM, V.30.

[9] Robert, W. 1991. Foundations of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research. Gordon and Breach Science Publishers, Phildelphie.

[10] Roven, L. H. 1988. Ring Theory. V.1, Academic Press. Newyork.

[11] Tung, N.S. 1994 . A characterization of Artinian Modules. **Jornal of Mathematics**, 22 (3&4), 110-113.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Nazlı BABACAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Denizli, 18.01.1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	nzlbabacan.2015@gmail.com
Tarih	:	19.01.2018