T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2017-DR-004

RICCI SOLİTONLAR

Dilek AÇIKGÖZ KAYA

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Leyla ONAT

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Dilek AÇIKGÖZ KAYA tarafından hazırlanan "Ricci Solitonlar" başlıklı tez, 30.06.2017 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI	Gazi Üniv.	
Üye	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	:	Doç. Dr. Leyla ONAT	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	:	Doç. Dr. İnci EGE	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI	Çanakkale Onsekiz Mart Üniv.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

30.06.2017

Dilek AÇIKGÖZ KAYA

ÖZET

RICCI SOLİTONLAR

Dilek AÇIKGÖZ KAYA

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Leyla ONAT
2017, 75 sayfa

Diferensiyel geometride, Ricci solitonlar Ricci flow denkleminin bir çözümü olan Riemann manifoldları olarak bilinir. Bu tez çalışmasında, Ricci soliton manifoldlarının özellikleri incelenmiş ve potansiyel vektör alanı concircular vektör alanı olan kompakt almost Ricci solitonun S^n küresine izometrik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, potansiyel vektör alanı concircular ya da concurrent vektör alanı olan tam(complete) m-quasi-Einstein manifoldunun Einstein manifoldu olması için karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş olarak ayrılmıştır. İkinci ve üçüncü bölümde diferensiyel geometride sık sık kullanılan bazı temel kavramlar verilmiş ve konuyla ilgili yapılmış bazı güncel çalışmalar yer almıştır.

Almost Ricci solitonlar ile ilgili elde edilen yeni sonuçlar dördüncü bölümde verilmiştir.

Ricci solitonların bir genellemesi olan m-quasi-Einstein manifoldları beşinci bölümde verilerek, bu konuyla ilgili elde edilen bazı yeni sonuçlar son bölümde yer almıştır.

Anahtar Sözcükler: Ricci soliton, gradiyent Ricci soliton, almost Ricci soliton, m-quasi-Einstein manifold, potansiyel alanı, concircular vektör alanı.

ABSTRACT

RICCI SOLITONS

Dilek AÇIKGÖZ KAYA

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Leyla ONAT
2017, 75 pages

In differential geometry, Ricci solitons are known as Riemannian manifolds which are solutions of the Ricci flow equation. In this thesis, some properties of Ricci soliton manifolds are examined and it is shown that the compact almost Ricci solitons with concircular potential vector field is isometric to S^n. Moreover, some characterizations of the complete m-quasi-Einstein manifold whose potential vector field concircular or concurrent to become an Einstein manifold are obtained.

This work consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second and third chapters, fundamental operators are summarized and some current studies are introduced.

The new results that are obtained for almost Ricci solitons are given in the fourth chapter.

m-quasi-Einstein manifolds which are a generalization of the Ricci solitons are introduced in the fifth chapter and also some new results on this subject are given in the last chapter.

Key Words: Ricci soliton, gradient Ricci soliton, almost Ricci soliton, m-quasi-Einstein manifold, potential vector field, concircular vector field.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Leyla ONAT'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) bana gösterdiği destek ve anlayış için sonsuz teşekkür ederim. Yine, tezin yazım aşamasında desteklerini gördüğüm değerli arkadaşlarım Araş. Gör. Dr. Berna ARSLAN (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) ve Araş. Gör. Seçkin GÜNSEN'e (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, her koşulda yanımda olan sevgili eşim Harun KAYA'ya ve tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim anne ve babama göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Bu tez, Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından FEF-17006 kod numaralı bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Dilek AÇIKGÖZ KAYA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M^n	n- boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$\chi(M)$	M üzerindeki vektör alanlarının kümesi
$\chi^*(M)$	M üzerindeki 1- formların kümesi
$\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$	M manifoldu üzerindeki koordinat çatı alanı
$\{dx^1, \ldots, dx^n\}$	M manifoldu üzerindeki dual çatı alanı
$\{E_{1_p}, \ldots, E_{n_p}\}$	$T_p(M)$nin koordinat çatısı
∇	M manifoldu üzerinde konneksiyon
$divA$	A tensör alanının divergensi
$Hessf$	f fonksiyonunun hessiyanı
$\nabla^2 f$	f fonksiyonunun hessiyanı
Δf	f fonksiyonunun laplasiyanı
Ric	M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü
R	M manifoldunun skalar eğriliği
$\nabla^2 \omega$	ω 1- formunun ikinci kovaryant diferensiyeli

1. GİRİŞ

Manifoldlar metrik tensörün özelliklerine göre isim alırlar. Riemann manifoldu, Einstein manifoldu, Semi-Riemann manifoldu gibi.

Özel olarak, (M,g) n- boyutlu Riemann manifoldu üzerinde $\varphi_t : M^n \to M^n$,

$t \in [0,\varepsilon)$ ve $\varepsilon > 0$ için diffeomorfizmlerin 1- parametreli ailesi olmak üzere $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma(t) = 2\lambda(1-t)$ için elde edilen $g(t) = \sigma(t)\varphi_t^* g_0$ metrik tensörlerinin

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}$$

$$g(0) = g_0$$

Ricci flow(akış) denklemini sağlayan bir çözümüne Ricci soliton manifoldu denir.

Ricci flow denklemini ilk olarak 1982 yılında Hamilton [21] vermiştir. Buna göre (M^n,g) Ricci soliton manifoldu, $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(p,0) = \frac{X_p}{2\lambda(1-t)}$ olacak şekilde 1- parametreli etkinin belirlediği vektör alanı ve $\lambda(p) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sigma(t)$ sabit sayısı için,

$$Ric + \frac{1}{2} L_X g = \lambda g$$

eşitliği ile verilebilir. Burada, X vektör alanına potansiyel vektör alanı denir. $L_X g$ ise, g metrik tensörünün X vektör alanına göre Lie türevini göstermektedir. Ricci soliton denkleminde $f : M^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $X = \nabla f$ ise,

$$Ric + Hessf = \lambda g$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği sağlayan (M^n,g) manifolduna gradiyent Ricci soliton denir [7, 14–16].

Ricci solitonlar konusundaki çalışmalar genel olarak iki kısıma ayrılır. Bunlardan ilki, Riemann manifoldun Ricci soliton yapısının manifoldun topolojisi üzerindeki etkilerini incelemek, diğeri ise manifoldun geometrisi üzerindeki etkilerini incelemektir.

M manifoldunun kompakt olması durumunda Perelman [27], X potansiyel vektör alanının gradiyent ve Killing vektör alanlarının toplamı olarak yazılabileceğini göstererek her kompakt Ricci soliton manifoldunun gradiyent Ricci soliton olduğunu göstermiştir.

Özel olarak, Ricci soliton denkleminde potansiyel vektör alanının Killing vektör alanı olması durumunda M^n Ricci solitonunun Einstein manifoldu olduğu görülür.

Einstein manifoldları, Ricci solitonların rijit olmasının çalışılması açısından önemlidir. Petersen ve Wylie [28] 2009 yılında yaptıkları çalışmada gradiyent Ricci solitonun rijit olmasını tanımlamışlardır. Buna göre, bir gradiyent Ricci solitona N Einstein manifoldu olmak üzere $N \times_f \mathbb{R}^k$ warped çarpım manifold tipinde ise rijit denir. Yani, manifoldun rijit oluşu kısaca onun Einstein manifoldu olması demektir. Bu konuda önemli bir karakterizasyon kompakt manifoldun skalar eğriliğin sabit olduğunda rijit olduğudur [17].

Kompakt solitonların rijit olması incelenirken skalar eğriliğin sabit olması durumu günümüze kadar yapılan çalışmaların temelini oluşturmaktadır [12, 19].

Ricci solitonlar konusunda çalışmalar devam ederken 2011 yılında Pigola, Rigoli, Rimoldi ve Setti Ricci soliton denklemindeki λ sabitinin fonksiyon olduğu durumu incelemişlerdir [29].

Ricci solitonların aksine kompakt almost Ricci solitonların gradiyent Ricci soliton olması için skalar eğriliğin sabit olması gerekmektedir [3].

Ayrıca, almost Ricci solitonların rijit olmasının çalışılmasında da Einstein manifoldları önemli yer tutar. Barros ve Ribeiro 2012 yılında yaptıkları çalışmada almost Ricci solitonun potansiyel vektör alanı konformal vektör alanı ise, manifoldun $\mathbb{S}^n$ küresine izometrik olduğunu göstermiştir [2].

Diğer taraftan, Ricci soliton manifoldunun potansiyel vektör alanının concircular vektör alanı olduğu durumu Chen 2015 yılında incelemiştir. Ayrıca, Chen ilk olarak

Ricci solitonların alt manifold olması durumunu concircular vektör alanlarından yararlanarak çalışmıştır [10].

M^n manifoldunun kompakt olduğu durumda potansiyel vektör alanı concircular vektör alanı olan almost Ricci solitonlar incelenerek bu manifoldların küreye izometrik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, almost Ricci solitonların alt manifold olduğu durumlar incelenmiştir [1].

Catino [9], Riemann metriklerinin genelleştirilmiş quasi-Einstein metrikleri olarak adlandırılan yeni bir sınıfını vermiştir. Genelleştirilmiş m-quasi-Einstein metrikleri warped çarpım manifoldları ile yakından ilgilidir. Açık olarak, m-quasi-Einstein manifoldları $(n+m)$-boyutlu Einstein warped çarpım manifoldunun n-boyutlu taban manifoldudur. m-quasi-Einstein manifoldlarının rijit olması ile ilgili yapılan çalışmalarda manifoldun kompakt oluşu integral eşitliklerinin kullanılması açısından önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin, skalar eğriliği sabit kompakt m-quasi-Einstein manifoldları aşikar(trivial)dir [8].

M^n manifoldunun tam(complete) olduğu durumda potansiyel vektör alanının concircular vektör alanı olan m-quasi-Einstein manifoldlarının rijit olma durumları incelenerek potansiyel vektör alanının concurrent olması durumunda m-quasi-Einstein manifoldunun skalar eğriliğinin sabit olduğu gösterilmiştir [25].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diferensiyel geometride sıklıkla kullanılan temel kavramların yanısıra, tez konusuyla ilgili literatürde yer alan bazı önemli tanım ve teoremler de ayrıntılarıyla verilecektir.

2.1. Tensör Alanları

M^n n- boyutlu manifold, (U,ξ), M^n için bir koordinat komşuluğu,

$\xi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ bu koordinat komşuluğundan elde edilen koordinat sistemi,

$1 \le i \le n$ için, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ olmak üzere, $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ koordinat çatı alanı ve bu çatı alanının duali $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ olsun.

M^n üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$, M üzerindeki $1-$ formların kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1. [26] $r,s \ge 0$ tamsayıları için

$$A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

$\mathfrak{F}(M)-$ çoklineer dönüşümüne, M^n manifoldu üzerinde (r,s)- *tipinde tensör alanı* denir.

$p \in M^n$ olmak üzere, $A_p : (T_p^*(M))^r \times (T_p(M))^s \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$- çoklineer dönüşümüne $T_p(M)$ uzayı üzerinde (r,s)- tipinde bir *tensör* denir.

Lemma 2.1.2. [26] $A : \chi(M)^s \longrightarrow \chi(M)$ *$\mathfrak{F}(M)-$ çoklineer dönüşümü verilsin. Her $\theta \in \chi^*(M)$, $X_i \in \chi(M)$, $(1 \le i \le s)$ için*

$$\overline{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)) \tag{2.1}$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$\overline{A} : \chi^*(M) \times \chi(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

dönüşümü M manifoldu üzerinde $(1,s)$ tipinde tensör alanıdır.

(2.1) eşitliğine göre, A çoklineer dönüşümü de $(1,s)$ tipinde bir tensör alanı olarak düşünülebilir.

Tanım 2.1.3. [26] $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olmak üzere,

$$A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} = A(dx^{i_1}, \ldots dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots \partial_{j_s})$$

fonksiyonlarına A tensör alanının *bileşenleri* denir.

Buna göre, A tensör alanı

$$A = \sum A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

eşitliğiyle belirlidir.

Tanım 2.1.4. [26] M^n manifoldunun her bir p noktasına

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonunu karşılık getiren fonksiyona M^n manifoldu üzerinde metrik tensör alanı denir ve g ile gösterilir. Bu metrik tensör alanı ile birlikte M^n manifolduna *Riemann manifoldu* denir. g metrik tensör alanı

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ fonksiyonları g metrik tensör alanının bileşenleridir.

Bu tez çalışmasında M^n manifoldu denildiğinde M^n nin Riemann manifoldu olduğu anlaşılacaktır. Yine bu tez çalışmasında g metrik tensör alanı çoğunlukla $\langle , \rangle$ biçiminde gösterilecektir.

Örnek 2.1.5. $A : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$ dönüşümünün $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ koordinat çatı alanına göre bileşenleri $A(\partial_j) = \sum\limits_k A_j^k \partial_k$ eşitliğiyle belirli olan A_j^k fonksiyonları olmak üzere,

$$\overline{A} : \chi^*(M) \times \chi(M) \to \mathfrak{F}(M), \quad \overline{A}(\theta, X) = \theta(A(X))$$

eşitliğiyle tanımlanan $(1,1)$- tipindeki $\overline{A}$ tensör alanının bileşenleri

$$\overline{A}_j^i = \overline{A}(dx^i, \partial_j) = dx^i(A(\partial_j)) = dx^i(\sum_k A_j^k \partial_k) = \sum_k A_j^k dx^i(\partial_k) = A_j^i$$

fonksiyonlarıdır. Buna göre, A lineer dönüşümü de $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır.

Lemma 2.1.6. [26] *$X \in \chi(M)$, $\theta \in \chi^*(M)$ için, $\boldsymbol{C}(X \otimes \theta) = \theta X$ eşitliği ile tanımlı $\mathfrak{F}(M)-$ lineer bir tek $\boldsymbol{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü vardır. Bu dönüşüme $(1,1)$- tipinde daraltma denir.*

$A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ için,

$$\mathbf{C}(A) = \sum_i A_i^i$$

dir.

Şimdi, $\mathbf{C}$ $(1,1)$- tipinde daraltma ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olsun.

$$(C_j^i A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) = \mathbf{C}(A(\theta^1, \ldots, \cdot, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, \cdot, \ldots, X_{s-1}))$$

eşitliğiyle tanımlı $C_j^i A$ fonksiyonuna, A tensör alanının (i,j)- *tipinde daraltması* denir.

Örnek 2.1.7. $A \in \mathfrak{T}_2^2(M)$ olsun. Bu durumda $C_2^1(A)$,

$$(C_2^1 A)(\theta, X) = \mathbf{C}(A(\cdot, \theta, X, \cdot))$$

eşitliğiyle verilen $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır. $C_2^1 A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ tensör alanının bileşenleri ise,

$$\begin{aligned}(C_2^1 A)(dx^i, \partial_j) &= \mathbf{C}(A(\cdot, dx^i, \partial_j, \cdot)) \\ &= \sum_{i,j,k} A(dx^k, dx^i, \partial_j, \partial_k) \\ &= \sum_{i,j,k} A_{jk}^{ki}\end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.8. [26] A ve B herhangi tipte iki tensör ve C daraltma fonksiyonu olsun. Aşağıdaki iki eşitliği sağlayacak biçimdeki $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$ $\mathbb{R}$- lineer dönüşümüne, M^n manifoldu üzerinde *tensör türevi* denir.

(i) $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$

(ii) $\mathcal{D}(CA) = C(\mathcal{D}A)$.

Önerme 2.1.9. [26, Önerme 2.13] (Çarpım Kuralı) *$\mathcal{D}$, M üzerinde bir tensör türevi ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)) &= (\mathcal{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathcal{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \mathcal{D}X_j, \ldots, X_s)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.10. [26] *$V \in \chi(M)$ ve*

$$\delta(fX) = Vf.X + f\delta(X)$$

eşitliği ile tanımlı $\delta : \chi(M) \to \chi(M)$ $\mathbb{R}$- lineer dönüşümü verilsin. Bu durumda,

$\mathcal{D}_0^0 = V : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ *ve* $\mathcal{D}_0^1 = \delta$

olacak şekilde M üzerinde bir tek $\mathcal{D}$ tensör türevi vardır.

Tanım 2.1.11. [26] $V \in \chi(M)$ olsun.

$L_V f = Vf$,

$L_V(X) = [V,X]$

eşitliği ile belirli olan L_V tensör türevine V vektör alanına göre *Lie türevi* denir.

Önerme 2.1.12. [26] L_V *Lie türevi için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(i) $L_{aV+bW} = aL_V + bL_W$

(ii) $[L_V, L_W] = L_{[V,W]}$

(iii) $L_V(df) = d(Vf)$.

İspat: Her $Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} L_{aV+bW}Z = [aV+bW,Z] &= a[V,Z]+b[W,Z] \\ &= aL_VZ+bL_WZ \\ &= (aL_V+bL_W)Z \end{aligned}$$

olduğundan (i) eşitliğinin ispatı açıktır.

$L_{[V,W]}$, $[V,W]$ vektör alanına göre Lie türevi olduğundan ve Lie çarpımının Jakobi eşitliğini sağladığından yararlanılarak,

$$\begin{aligned} [L_V, L_W]Z &= L_V(L_WZ) - L_W(L_VZ) \\ &= [V,[W,Z]] - [W,[V,Z]] \\ &= L_{[V,W]}Z \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca her $Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(L_V(df))Z &= L_V(df(Z)) - df(L_V Z) \\ &= V(df(Z)) - (L_V Z)f \\ &= V(Zf) - [V,Z]f \\ &= Z(Vf) \\ &= (d(Vf))Z\end{aligned}$$

olduğundan (iii) eşitliği sağlanır. □

2.2. Bir Vektör Alanının Akışı

Tanım 2.2.1. [26] $\mathbb{R}$ nin M^n manifoldu üstünde bir φ *etkisi* aşağıdaki iki önermeyi doğrulayan bir $\varphi : \mathbb{R} \times M^n \to M^n$ dönüşümüdür.

(1) Her $p \in M^n$ için, $\varphi_0(p) = p$.

(2) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $p \in M^n$ için, $\varphi(a, \varphi(b, p)) = \varphi(a + b, p)$.

$\mathbb{R}$ nin M^n manifoldu üstünde bir φ etkisine, M^n üstünde 1- *parametreli grup etkisi* denir. $p \in M^n$ olmak üzere $\{\varphi_s(p) | s \in \mathbb{R}\}$ kümesine p noktasının *yörüngesi* denir.

Teorem 2.2.2. [26] *φ, $\mathbb{R}$ nin M^n manifoldu üstünde bir etki olsun.*

$$X_p f = lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [f(\varphi_s(p)) - f(\varphi_0(p))] \tag{2.2}$$

eşitliğiyle tanımlanan $X_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, M^n manifoldunun p noktasında bir tanjant vektördür.

(2.2) eşitliğine göre, X_p vektörü p noktasında φ etkisindeki yörüngesinin $\varphi_0(p)$ noktasındaki yani başlangıç noktasındaki hız vektörüdür. Gerçekten, $\varphi_s : M^n \to M^n$ diffeomorfizm ve $p \in M^n$ noktasının yörüngesi $\{\varphi_s(p) | s \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere,

$\alpha(s) = \varphi_s(p)$ olsun. Her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)f &= \alpha_*(\frac{d}{dt}|_0)f \\
&= (f \circ \alpha)'(0) \\
&= lim_{h \to 0}[(f \circ \alpha)(h) - (f \circ \alpha)(0)] \\
&= lim_{h \to 0}[f(\varphi_h(p)) - f(\varphi_0(p))] \\
&= X_{\varphi_0(p)} f
\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha'(0) = X_{\varphi_0(p)}$ dir.

Tanım 2.2.3. [26] $X \in \chi(M)$ olsun. X, 1- parametreli grup etkisinin belirlediği vektör alanı ise, X vektör alanına *tam(complete) vektör alanı* denir.

Tanım 2.2.4. [26] $V \in \chi(M)$ tam(complete) vektör alanı olsun. α_p, X vektör alanının maksimal integral eğrisi olmak üzere,

$$\psi(p,t) = \alpha_p(t)$$

eşitliği ile belirli $\psi : M^n \times \mathbb{R} \to M^n$ dönüşümüne V *vektör alanının akışı* denir.

Lemma 2.2.5. [26] *ψ, bir tam vektör alanının akışı olsun. Bu durumda,*

1. ψ_0, M nin birim dönüşümüdür,

2. $\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

3. $\psi_t^{-1} = \psi_{-t}$

özellikleri sağlanır.

Önerme 2.2.6. [26] *V ve W, M^n manifoldu üzerinde vektör alanları ve ψ, V vektör alanının p noktası komşuluğunda lokal akışı olsun. Bu durumda,*

$$[V,W]_p = lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[d\psi_{-t}(W_{\psi_t p}) - W_p]$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 2.2.7. [26] *$X \in \chi(M)$, $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ ve ψ_t, X vektör alanının akışı olmak üzere, A tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi*

$$L_X A = lim_{t\to 0}[\psi_t^*(A) - A]$$

eşitliği ile belirlidir.

İspat: $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ ve her $V,W \in \chi(M)$ için L_X tensör türevi olduğundan,

$$(L_X A(V,W) = X(A(V,W)) - A([X,V],W) - A(V,[X,W])$$

eşitliği sağlanır. Kolaylık olması amacıyla $lim_{t=0}\frac{1}{t} = \mathcal{L}$ olmak üzere ve her $p \in M^n$ noktası için,

$$\mathcal{L}(\psi_t^* A - A)(V_p,W_p) = \mathcal{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_p,W_p)\}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}) + A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}) - A(V_p,W_p)\} \\ &= \mathcal{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p})\} + \mathcal{L}\{A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}) - A(V_p,W_p)\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$I = \mathcal{L}\{A(d\psi_t(V_p), d\psi_t(W_p)) - A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p})\}$ ve

$II = \mathcal{L}\{A(V_{\psi_t p}, W_{\psi_t p}) - A(V_p,W_p)\}$

olsun. α, X vektör alanının p noktasından geçen integral eğrisi olmak üzere, II eşitliği

$$II = (d/dt)A(V_\alpha, W_\alpha)|_0 = \alpha'(0)A(V,W) = X_p A(V,W)$$

şeklinde yazılabilir.

A, bir V vektör uzayı üzerinde bir bilineer dönüşüm olmak üzere her $v,v',w,w' \in V$ için, $A(v',w') - A(v,w) = A(v'-v,w') - A(v,w'-w)$ eşitliği teleskoping özdeşliği olarak bilinir. Bu özdeşlikten yararlanılarak I eşitliği

$I = \mathcal{L}\{A(d\psi_t(V_p) - V_{\psi_t p}, d\psi_t(W_p))\} + \mathcal{L}\{A(V_{\psi_t p}, d\psi_t(W_p) - W_{\psi_t p})\}$

şeklinde yazılır. Bu eşitlikteki ilk terimin Önerme 2.2.6 dan yararlanılarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{A(d\psi_t(V_p - d\psi_{-t}(V_{\psi_t p})))\} &= -A(d\psi_t\mathcal{L}\{d\psi_{-t}(V_{\psi_t p}) - V_p\}, \mathcal{L}\{d\psi_t(W_{\psi_t p})\}) \\ &= -A([X,V]_p, W_p)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Benzer şekilde ikinci terim yerine de $-A(V_p, [X,W]_p)$ sayısı yazılabilir. Böylece, $I + II = (L_X A)(V_p, W_p)$ olduğu kolaylıkla görülür. □

Önerme 2.2.8. [14] *$X \in \chi(M)$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,*

(i) $(L_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$

(ii) $(L_{\nabla f} g)_{ij} = 2\nabla_i \nabla_j f$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $L_X g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ olduğundan $L_X g$ tensör alanının koordinat vektör alanlarına göre bileşenleri,

$$\begin{aligned}(L_X g)_{ij} &= (L_X g)(\partial_i, \partial_j) \\ &= L_X(g(\partial_i, \partial_j)) - g(L_X \partial_i, \partial_j) - g(\partial_i, L_X \partial_j) \\ &= X(g_{ij}) - g([X, \partial_i], \partial_j) - g(\partial_i, [X, \partial_j])\end{aligned}$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca,

$$[X, \partial_i] = [X_k \partial_k, \partial_i] = X_k[\partial_k, \partial_i] - \partial_i(X_k)\partial_k$$

olduğundan $i = k$ ve $j = k$ için,

$$(L_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$$

eşitliği elde edilir.

(ii) eşitliğinin ispatı için (i) eşitliğinde $X = \nabla f$ alınarak,

$$(L_{\nabla f} g)_{ij} = \nabla_i \nabla_j f + \nabla_j \nabla_i f = 2\nabla_i \nabla_j f$$

olarak elde edilir. □

Önerme 2.2.8 e göre, g metrik tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi $L_X g$, her $V,W \in \chi(M)$ için

$$(L_X g)(V,W) = \langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle$$

eşitliği ile belirlidir. Eğer $L_X g = 0$ ise, X vektör alanına *Killing vektör alanı* denir. $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \neq 0$ fonksiyonu için $L_X g = 2\varphi g$ ise, X vektör alanına *konformal vektör alanı* denir.

2.3. Diferensiyel Operatörler

Tanım 2.3.1. [26] M^n Riemann manifoldu olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (V,W) &\to \nabla_V W \end{aligned}$$

dönüşümüne, M^n manifoldu üzerinde bir *konneksiyon* ya da *kovaryant türev operatörü* denir.

(1) $\nabla_V W$, V vektör alanına göre $\mathfrak{F}(M)-$ lineer,

(2) $\nabla_V W$, W vektör alanına göre $\mathbb{R}-$ lineer,

(3) $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W, \qquad f \in \mathfrak{F}(M).$

$\nabla_V W$ vektör alanına W vektör alanının V vektör alanına göre kovaryant türevi denir.

Önerme 2.3.2. [26] *(M^n, g) Riemann manifoldu ve her $V \in \chi(M)$ için, M^n üzerinde*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle, \qquad \forall\, X \in \chi(M)$$

eşitliği ile bir V^* $1-$ formu tanımlansın. Bu durumda,

$$\varphi : \chi(M) \to \chi^*(M), \qquad \varphi(V) = V^*$$

dönüşümü $\mathfrak{F}(M)-$ lineer izomorfizmdir.

İspat: V^*, bir 1- form olduğundan φ dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)$- lineer olduğu açıktır.

Her $V,W \in \chi(M)$ için, $\varphi(V) = \varphi(W)$ olsun. Her $X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} (\varphi(V))(X) = (\varphi(W))(X) \quad &\Rightarrow \quad V^*(X) = W^*(X) \\ &\Rightarrow \quad \langle V,X\rangle = \langle W,X\rangle \\ &\Rightarrow \quad \langle V-W,X\rangle = 0 \end{aligned}$$

$\langle,\rangle$ nondejenere olduğundan, $V = W$ dir.

Şimdi, φ dönüşümünün örten olduğu gösterilecektir.

$\theta = \sum\limits_i \theta(\partial_i)dx^i$ 1- formu ve $V = \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$ vektör alanı için,

$\langle V,\partial_k\rangle = \langle \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j,\partial_k\rangle = \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle\partial_j,\partial_k\rangle\theta_k = \theta(\partial_k)$

dır. Ayrıca,

$(\varphi(V))(\partial_k) = V^*(\partial_k) = \langle V,\partial_k\rangle$ olduğundan φ örtendir.

Böylece, φ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. □

Teorem 2.3.3. [26] *M^n Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanacak şekilde bir tek ∇ konneksiyonu vardır. ∇ konneksiyonuna M^n manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir.*

(4) $[V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V$.

(5) $X\langle V,W\rangle = \langle\nabla_X V,W\rangle + \langle V,\nabla_X W\rangle$.

Tanım 2.3.4. [26] M^n Riemann manifoldu üzerindeki bir V vektör alanı için, $D_V f = Vf$, $f \in \mathfrak{F}(M)$

ve her $W \in \chi(M)$ için $D_V W = \nabla_V W$ olacak şekilde bir tek D_V tensör türevine *kovaryant türev operatörü* denir. Burada $\nabla_V W$, W vektör alanının V vektör alanına göre Levi-Civita kovaryant türevidir.

Tanım 2.3.5. [26] A, M^n manifoldu üzerinde (r,s)- tipinde bir tensör alanı olsun. Her $V,X_i \in \chi(M)$ ve her $\theta^j \in \chi^*(M)$ için,

$$(DA)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s,V) = (D_V A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)$$

eşitliğiyle belirli $(r,s+1)$ tipindeki DA tensör alanına A tensör alanının *kovaryant diferensiyeli* denir.

Tanım 2.3.6. [26] ∇, M^n Riemann manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

eşitliği ile verilen

$$R : \chi(M)^3 \to \chi(M)$$

dönüşümüne M^n manifoldunun *Riemann eğrilik tensörü* denir. Bu tensör alanı M^n manifoldu üzerinde $(1,3)$- tipinde bir tensör alanıdır.

$\{x^1,x^2,\ldots,x^n\}$ koordinat sistemine göre, R Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R^i_{jkl} = R(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$$

fonksiyonlarıdır.

M^n manifoldu üzerinde bir 1- formun ikinci kovaryant diferensiyellerinin farkı ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.7. [18] *M^n Riemann manifoldu, $X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\omega \in \chi^*(M)$ olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} \nabla^2_{XY}\omega(Z) - \nabla^2_{YX}\omega(Z) &= (\nabla^2\omega)(X,Y,Z) - (\nabla^2\omega)(Y,X,Z) \\ &= \omega(R(X,Y)Z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

İspat: $(\nabla^2\omega)(X,Y,Z)-(\nabla^2\omega)(Y,X,Z)$

$$\begin{aligned}
&= (\nabla(\nabla\omega))(X,Y,Z)-(\nabla(\nabla\omega))(Y,X,Z)\\
&= (\nabla_X\nabla\omega)(Y,Z)-(\nabla_Y\nabla\omega)(X,Z)\\
&= \nabla_X(\nabla\omega(Y,Z))-\nabla\omega(\nabla_XY,Z)-\nabla\omega(Y,\nabla_XZ)\\
&- \nabla_Y(\nabla\omega(X,Z))+\nabla\omega(\nabla_YX,Z)+\nabla\omega(X,\nabla_YZ)\\
&= \nabla_X((\nabla_Y\omega)Z)-(\nabla_{\nabla_XY}\omega)(Z)-(\nabla_Y\omega)(\nabla_XZ)\\
&- \nabla_Y((\nabla_X\omega)Z)+(\nabla_{\nabla_YX}\omega)(Z)+(\nabla_X\omega)(\nabla_YZ)\\
&= \nabla_X\nabla_Y\omega(Z)-\nabla_Y\nabla_X\omega(Z)-\nabla_{\nabla_XY}\omega(Z)+\nabla_{\nabla_YX}\omega(Z)\\
&+ \omega(\nabla_{\nabla_XY}Z-\nabla_{\nabla_YX}Z+\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_X\nabla_YZ)\\
&= XY(\omega(Z))-YX(\omega(Z))-\nabla_XY(\omega(Z))+\nabla_YX(\omega(Z))\\
&+ \omega(\nabla_{[X,Y]}Z-[\nabla_X,\nabla_Y]Z)\\
&= \omega(R(X,Y)Z).
\end{aligned}$$

□

Ayrıca, M^n manifoldu üzerinde $\{\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n\}$ koordinat çatı alanına göre (2.3) eşitliği

$$\nabla_i\nabla_k\nabla_s f-\nabla_k\nabla_i\nabla_s f=R_{iksl}\nabla^l f$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.3.8. [26] $A\in\mathfrak{T}^r_s(M)$ ve $1\le a\le r$, $1\le b\le s$ tamsayılar olsun. X_b^*, X_b vektör alanına karşılık gelen 1- form olmak üzere,

$$(\downarrow^a_b A)(\theta^1,\ldots,\theta^{r-1},X_1,\ldots,X_{s+1})=A(\theta^1,\ldots,X_b^*,\ldots,\theta^{r-1},X_1,\ldots,X_{b-1},X_{b+1},\ldots,X_{s+1})$$

eşitliği ile tanımlı

$$\downarrow^a_b\colon \mathfrak{T}^r_s(M)\to\mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}(M)$$

dönüşümü ve θ^a 1- formuna karşılık gelen V vektör alanı için,

$$(\uparrow_b^a A)(\theta^1,\ldots,\theta^{r+1},X_1,\ldots,X_{s-1}) = A(\theta^1,\ldots,\theta^{a-1},\theta^{a+1},\ldots,\theta^{r+1},X_1,\ldots,V,\ldots,X_{s-1})$$

eşitliği ile tanımlı

$$\uparrow_b^a : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(M)$$

dönüşümü verilsin.

Verilen bir A tensör alanınından yukarıdaki işlemler ile elde edilen bütün tensör alanlarına A tensör alanına *metrikçe denk tensör alanları* denir.

df 1- formunun bileşenleri $\nabla_i f$ olmak üzere,

$$\nabla_i f = \sum_k g_{ik} \nabla^k f$$

dir. Burada, $\nabla^k f$, df 1- formuna karşılık gelen vektör alanının bileşenleridir. Benzer olarak,

$$\nabla^k f = \sum_i g^{ik} \nabla_i f$$

dir. Hatta, çalışmalarda kolaylık sağlaması amacıyla bazen yukarıdaki eşitliklerde toplam sembolü kaldırılacaktır.

Örnek 2.3.9. $A \in \mathfrak{T}_1^2(M)$ olsun. Bu durumda, $B = \downarrow_1^2 A$ tensör alanı M^n manifoldu üzerinde her $\theta \in \chi^*(M)$, $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$B(\theta,X,Y) = (\downarrow_1^2 A)(\theta,X,Y) = A(\theta,X^*,Y)$$

eşitliğiyle belirli $(1,2)$- tipinde tensör alanıdır. Burada X^*, X vektör alanına karşılık gelen 1- formdur.

B tensör alanının bileşenleri,

$$\begin{aligned} B^i_{jk} = B(dx^i,\partial_j,\partial_k) &= (\downarrow_1^2 A)(dx^i,\partial_j,\partial_k) \\ &= A(dx^i, \sum_m g_{jm} dx^m, \partial_k) \\ &= \sum_m g_{jm} A(dx^i, dx^m, \partial_k) \\ &= \sum_m g_{jm} A^{im}_k \end{aligned}$$

eşitliği ile belirli fonksiyonlardır.

Örnek 2.3.10. $R : \chi(M)^3 \to \chi(M)$ Riemann eğrilik tensörü verildiğinde, $\overline{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R(X,Y,Z))$ eşitliği ile R nin $(1,3)$- tipinde tensör alanı olarak alınabileceği biliniyor.

Bu durumda, $\downarrow_1^1 \overline{R} \in \mathfrak{T}_4^0(M)$ tensör alanının bileşenleri,

$$\begin{aligned}(\downarrow_1^1 \overline{R})(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) &= \overline{R}(\sum_m g_{im} dx^m, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= \sum_m g_{im} \overline{R}_{jkl}^m\end{aligned}$$

eşitliğiyle belirlidir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_m g_{im} \overline{R}(dx^m, \partial_j, \partial_k, \partial_l) &= \sum_m g_{im} dx^m(R(\partial_j, \partial_k, \partial_l)) \\ &= \sum_m g_{im} \langle \sum_p g^{pm} \partial_p, R(\partial_j, \partial_k, \partial_l) \rangle \\ &= \sum_{m,p} g_{im} g^{pm} \langle \partial_p, R(\partial_j, \partial_k, \partial_l) \rangle \\ &= \delta_{ip} \langle \partial_p, R(\partial_j, \partial_k, \partial_l) \rangle \\ &= R_{ijkl}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}R_{ijkl} = (\downarrow_1^1 \overline{R})(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) &= \langle \partial_i, R(\partial_j, \partial_k, \partial_l) \rangle \\ &= \sum_m g_{im} R_{jkl}^m\end{aligned}$$

dir.

Buna göre, $(1,3)$- tipindeki Riemann eğrilik tensörü ile $(0,4)$- tipindeki $\downarrow_1^1 \overline{R}$ tensör alanı metrikçe denktir.

Tanım 2.3.11. [26] $A = \sum A_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_n}$ olmak üzere M^n manifoldu üzerinde (r,s)- tipinde bir A tensör alanı verilsin.

$1 \le a < b \le s$, $r \in \mathbb{Z}^+$ için $C_{ab} = C_a^1 \uparrow_b^1$ olmak üzere,

$$(C_{ab}A)_{j_1 \ldots j_{s-2}}^{i_1 \ldots i_r} = \sum_{p,q} g_{pq} A_{j_1 \ldots p \ldots q \ldots j_{s-2}}^{i_1 \ldots i_r}$$

eşitliğiyle tanımlı $C_{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-2}^r(M)$ $\mathfrak{F}(M)$- lineer dönüşümüne *metrik daraltma dönüşümü*, $C_{ab}A \in \mathfrak{T}_{s-2}^r(M)$ tensör alanına da A tensör alanının *metrik daraltması* denir.

Benzer olarak, $1 \leq a < b \leq r$ ve $s \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$C^{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^{r-2}(M)$$

dönüşümü

$$(C^{ab}A)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-2}} = \sum_{p,q} g_{pq} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots p \dots q \dots i_{r-2}}$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Örnek 2.3.12. $A \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ tensör alanının C_{12} metrik daraltması $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır. $C_{12}A$ tensör alanının koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$\begin{aligned}
(C_{12}A)_j^i = (C_1^1(\uparrow_2^1 A))_j^i = (C_1^1(\uparrow_2^1 A))(dx^i, \partial_j) &= \mathbf{C}(\uparrow_2^1 A(\cdot, dx^i, \cdot, \partial_j)) \\
&= \sum_p (\uparrow_2^1 A)(dx^p, dx^i, \partial_p, \partial_j) \\
&= \sum_p A(dx^i, \partial_p, \sum_q g^{pq} \partial_q, \partial_j)) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} A(dx^i, \partial_p, \partial_q, \partial_j) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} A_{pqj}^i
\end{aligned}$$

fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.3.13. [26] $f \in \mathfrak{F}(M)$ için $df \in \chi^*(M)$ 1- formuna metrikçe denk olan vektör alanı $grad f$ olmak üzere, $grad f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$ dir. $grad f$ vektör alanına f fonksiyonunun *gradiyenti* denir. f fonksiyonunun gradiyenti ∇f ile de gösterilir.

Ayrıca her $X \in \chi(M)$ için,

$$df(X) = \langle \nabla f, X \rangle = Xf$$

dir.

Tanım 2.3.14. [26] M^n manifoldu üzerinde $(0,2)$- tipinde simetrik A tensör alanının kovaryant diferensiyeli DA olmak üzere, $C_{13}(DA)$ 1- formuna A tensör alanının *divergensi* denir ve $div\,A$ ile gösterilir.

$divA$ 1- formunun koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$\begin{aligned}
(div\,A)_i = (C_{13}(DA))_i = (C_1^1 \uparrow_3^1)(DA)(\partial_i) &= C_1^1(\uparrow_3^1 (DA))(\partial_i) \\
&= \mathbf{C}(\uparrow_3^1 (DA)(\cdot,\cdot,\partial_i)) \\
&= \sum_p (\uparrow_3^1 (DA)(dx^p,\partial_p,\partial_i)) \\
&= \sum_p (DA)(\partial_p,\partial_i,\sum_q g^{pq}\partial_q) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq}(DA)(\partial_p,\partial_i,\partial_q) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq}(D_{\partial_q})(\partial_p,\partial_i) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq}A_{pi;q}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Özel olarak $V \in \chi(M)$ için, $divV = \mathbf{C}(DV)$ dir. Buna göre, $V = \sum_k V^k\partial_k$ için

$$\begin{aligned}
div\,V = \mathbf{C}(DV) = C_1^1(DV) &= \mathbf{C}((DV)(\cdot,\cdot)) \\
&= \sum_p (DV)(dx^p,\partial_p) \\
&= \sum_p (D_{\partial_p}V)(dx^p) \\
&= \sum_p \langle \sum_q g^{pq}\partial_q, D_{\partial_p}V\rangle \\
&= \sum_p \langle \sum_q g^{pq}\partial_q, D_{\partial_p}(\sum_k V^k\partial_k)\rangle \\
&= \sum_p \langle \sum_q g^{pq}\partial_q, \sum_k [\partial_p(V^k)\partial_k + V^k D_{\partial_p}\partial_k]\rangle \\
&= \sum_{p,q} g^{pq}g_{qk}\partial_p(V^k) + \sum_{p,q,k,s} g^{pq}g_{qs}V^k\Gamma_{pk}^s \\
&= \sum_p \partial_p(V^p) + \sum_{p,k} V^k\Gamma_{pk}^p
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.3.15. [26] $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere bir f fonksiyonunun *Hessiyanı* $Hess f = D(Df)$ eşitliği ile tanımlı olan tensör alanıdır.

Lemma 2.3.16. [26, Lemma 3.49] *$f \in \mathfrak{F}(M)$ için, $Hess\, f$, $(0,2)$ tipinde, simetrik tensör alanıdır. Ayrıca, f fonksiyonunun gradiyenti ∇f olmak üzere,*

$$Hess f(X,Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} Hess\ f(X,Y) = (D(Df))(X,Y) &= (D_Y Df)(X) \\ &= D_Y((Df)(X)) - Df(\nabla_Y X) \\ &= D_Y(Xf) - (\nabla_Y X)f \\ &= Y(Xf) - (\nabla_Y X)f \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$X\langle \nabla f, Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle$

ve

$X\langle \nabla f, Y \rangle = X(Yf)$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle &= X(Yf) - (\nabla_X Y)f \\ &= Hess\ f(Y,X) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$Hess\ f(X,Y) = \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle$$

dir. Ayrıca, $XY - YX = [X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olduğundan

$Hess\ f(X,Y) = Hess\ f(Y,X)$

eşitliği bulunur. □

Tanım 2.3.17. [26] $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere, $div(\nabla f)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *Laplasiyanı* denir ve Δf ile gösterilir.

Laplasiyan operatörü Δ koordinat çatı alanına göre,

$$\Delta = tr\nabla^2 = g^{ij}\nabla_i\nabla_j = \nabla_i\nabla_i$$

eşitliği ile verilebilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\Delta f = div(\nabla f) = \mathbf{C}(D(\nabla f)) &= \mathbf{C}D(\uparrow_1^1 df) \\
&= (\mathbf{C}\uparrow_1^1)(D(df)) \\
&= (\mathbf{C}\uparrow_1^1)(Hess\ f) \\
&= C_{12}(Hess\ f)
\end{aligned}$$

dir. Buradan, $(0,2)$- tipindeki $Hessf$ tensör alanının bileşenleri H_{ij} olmak üzere, $\Delta f = g^{ij}H_{ij}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3.18. [14] (M^n, g) Riemann manifoldu üzerinde bir φ fonksiyonu

$\lambda \in \mathbb{R}$ için $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ eşitliğini sağlıyorsa φ fonksiyonuna laplasiyanın öz(eigen) fonksiyonu ve λ reel sayısına da *laplasiyanın öz(eigen) değeri* denir.

Tanım 2.3.19. [26] M^n manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R nin $(1,3)$-daraltması olan C_3^1R tensör alanına, M^n manifoldunun *Ricci eğrilik tensörü* denir. Ricci eğrilik tensörü Ric ile gösterilir.

Ricci eğrilik tensörünün koordinat çatı alanına göre bileşenleri R_{ij} olmak üzere,

$$\begin{aligned}
R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j) = (C_3^1R)(\partial_i, \partial_j) &= \mathbf{C}\{R(\cdot, \partial_i, \partial_j, \cdot)\} \\
&= \sum_m R(dx^m, \partial_i, \partial_j, \partial_m) \\
&= \sum_m R_{ijm}^m
\end{aligned}$$

eşitliği ile verilebilir.

Ayrıca, Ric tensör alanı $(1,1)$ tipinde düşünüldüğünde onun bileşenleri R^i_j olmak üzere,

$$R^i_j = g^{im} R_{jm}$$

ve

$$R_{ij} = g_{im} R^j_m$$

olarak da yazılabilir.

Tanım 2.3.20. [26] M manifoldunun Ricci eğrilik tensörünün $\mathbf{C}(Ric)$ metrik daraltmasına M^n manifoldunun *skalar eğriliği* denir ve R ile gösterilir. R skalar eğriliği

$$\begin{aligned} R = C_{12}(Ric) = (C^1_1 \uparrow^1_2)(Ric) &= \mathbf{C}\{(\uparrow^1_2 Ric)(\cdot,\cdot)\} \\ &= \sum_p (\uparrow^1_2 Ric)(dx^p, \partial_p) \\ &= \sum_p Ric(\partial_p, \sum_q g^{pq} \partial_q) \\ &= \sum_{p,q} g^{pq} Ric(\partial_p, \partial_q) \\ &= \sum_{p,q} g^{pq} R_{pq} \\ &= \sum_{p,q,k} g^{pq} R^k_{pqk} \end{aligned}$$

eşitliği ile belirli fonksiyondur.

Şimdi, bir M^n Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ve skalar eğriliği ile ilgili olan ve çalışmalarda sık sık kullanılan daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği ispatlanacaktır.

Lemma 2.3.21. [28] (M^n, g) *Riemann manifoldu üzerinde*

$$2divRic = dR$$

dir.

İspat: $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, $p \in M^n$ manifoldu üzerinde ortonormal çatı alanı ve W, $\nabla W(p) = 0$ olacak şekilde M^n üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda, Riemann eğrilik tensörünün özellikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
(dR)W = D_W R &= D_W \sum_i \langle Ric(E_i), E_i \rangle \\
&= D_W \sum_i \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_W (R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_i \langle (\nabla_W R)(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle \\
&= -\sum_i \langle (\nabla_{E_j} R)(W, E_i)E_j, E_i \rangle - \sum_i \langle (\nabla_{E_i} R)(E_j, W)E_j, E_i \rangle \\
&= -\sum_i (\nabla_{E_j} R)(W, E_i, E_j, E_i) - \sum_i (\nabla_{E_i} R)(E_j, W, E_j, E_i) \\
&= \sum_i (\nabla_{E_j} R)(E_j, E_i, E_i, W) - \sum_i (\nabla_{E_i} R)(E_i, E_j, E_j, W) \\
&= 2\sum_i (\nabla_{E_j} R)(E_j, E_i, E_i, W) \\
&= 2\sum_i \nabla_{E_j} (R(E_j, E_i, E_i, W)) \\
&= 2\sum_i \nabla_{E_j} \langle Ric(E_j), W) \rangle \\
&= 2\sum_i \nabla_{E_j} \langle Ric(W), E_j \rangle \\
&= 2\sum_i \langle \nabla_{E_j} (Ric(W)), E_j \rangle \\
&= 2\sum_i \langle (\nabla_{E_j} Ric)(W), E_j \rangle \\
&= 2div(Ric)(W)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. □

Tensör alanları ile ilgili yapılan çalışmalarda işlem kısalığı sağlamak için özellikle $(0,2)$- tipinden simetrik tensör alanlarının $(1,1)$- gösterimi sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem aşağıdaki gibidir:

B, M^n manifoldu üzerinde $(0,2)$- tipinde simetrik tensör alanı olmak üzere,

$\overline{A} = \uparrow_1^1 B$ olsun. $\overline{A} \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ dir. (2.1) eşitliğine göre,

$$\overline{A}(\theta, X) = \theta A(X) = \langle Y, A(X) \rangle \tag{2.4}$$

dir. Burada Y, θ 1- formuna karşılık gelen vektör alanı ve $A : \chi(M) \to \chi(M)$ lineer dönüşümdür. Diğer yandan,

$$(\uparrow_1^1 B)(\theta, X) = B(Y, X) \tag{2.5}$$

olduğundan (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden

$$B(Y, X) = \langle A(X), Y \rangle \tag{2.6}$$

eşitliği elde edilir. (2.6) eşitliğine göre, $(0,2)$- tipindeki simetrik B tensör alanına $(1,1)$- tipinde A tensör alanı karşılık gelir.

Özel olarak, T, M manifoldu üzerinde simetrik $(0,2)$- tipinde tensör alanı olmak üzere, T tensör alanına karşılık gelen $(1,1)$- tipindeki tensör alanı yine T ile gösterilecektir. Yani,

$$T(X, Y) = \langle T(X), Y \rangle$$

dir.

Örneğin, M^n manifoldu üzerinde Ric tensörü $(0,2)$- tipinde ve simetriktir.

$$Ric(X, Y) = \langle Ric(X), Y \rangle$$

eşitliği ile Ric tensörü $(1,1)$- tipinde $Ric : \chi(M) \to \chi(M)$ lineer dönüşüm olarak düşünülebilir.

Benzer olarak bir f fonksiyonunun Hessiyanı için,

$$Hessf(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$$

eşitliği ile tanımlı $S : \chi(M) \to \chi(M)$ lineer dönüşümü için $S(X) = \nabla_X \nabla f$ dir. Bu eşitlik kısaca $S(\cdot) = \nabla.\nabla f$ olarak da yazılabilir.

Lemma 2.3.22. [20] *(M^n, g) Riemann manifoldu ve T, M^n manifoldu üzerinde simetrik $(0,2)$- tipinde tensör alanı olsun. Bu durumda her $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$\begin{aligned} div(\varphi T) &= \varphi divT + T(\nabla\varphi, \cdot) \\ \nabla(\varphi T) &= \varphi\nabla T + d\varphi \otimes T \\ \frac{1}{2}d|\nabla\varphi|^2 &= \nabla^2\varphi(\nabla\varphi, \cdot) \\ div\nabla^2\varphi &= Ric(\nabla\varphi, \cdot) + d\Delta\varphi. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Lemma 2.3.23. [20] *(M^n, g) Riemann manifoldu ve T, M^n manifoldu üzerinde simetrik $(0,2)$- tipinde tensör alanı olsun. Bu durumda, her $Z \in \chi(M)$ ve her $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ için*

$$div(T(\varphi Z)) = \varphi(divT)(Z) + \varphi\langle\nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Her $Z \in \chi(M)$ ve her $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ için T tensör alanının $(1,1)$- tipindeki gösterimi kullanılarak,

$$\begin{aligned} div(T(\varphi Z)) &= div(\varphi T(Z)) \\ &= T(Z)\varphi + \varphi divT(Z) \\ &= \langle\nabla\varphi, T(Z)\rangle + \varphi divT(Z) \\ &= T(\nabla\varphi, Z) + \varphi divT(Z) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan, T simetrik olduğundan $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, M^n üzerinde ortonormal çatı alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} (divT)(Z) &= \sum_i (\nabla_{E_i}T)(Z, E_i) \\ &= \sum_i \langle(\nabla_{E_i}T)(Z), E_i\rangle \\ &= \sum_i \langle\nabla_{E_i}T(Z) - T(\nabla_{E_i}Z), E_i\rangle \\ &= div(T(Z)) - \sum_i \langle(\nabla_{E_i}Z), T(E_i)\rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} div(T(\varphi Z)) &= T(\nabla\varphi, Z) + \varphi((divT)(Z) + \sum_i \langle(\nabla_{E_i} Z), T(E_i)\rangle) \\ &= T(\nabla\varphi, Z) + \varphi((divT)(Z) + \varphi\langle\nabla Z, T\rangle \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

Lemma 2.3.24. [14] (M^n, g) *Riemann manifoldu olsun Bu durumda,*

$$\Delta\nabla_i f = \nabla_i \Delta f + R_{ij}\nabla_j f \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla_i\nabla_j f|^2 + R_{ij}\nabla_i f\nabla_j f + \nabla_i f\nabla_i(\Delta f) \tag{2.9}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $\nabla^k = g^{kj}\nabla_j$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \Delta\nabla_i f &= \nabla_j\nabla_j\nabla_i f \\ &= \nabla_j\nabla_i\nabla_j f \\ &= \nabla_i\nabla_j\nabla_j f + R_{jijk}\nabla^k f \\ &= \nabla_i\Delta f + R_{ik}g^{kj}\nabla_j f \\ &= \nabla_i\Delta f + R_{ij}\nabla_j f \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik fonksiyonlar üzerinde Δ ve ∇ operatörlerinin Ric tensörü farkıyla değişimli olduğunu gösterir. $|\nabla f|^2$ için Bochner formülü olarak bilinen (2.9) eşitliğinin ispatı için (2.8) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \Delta|\nabla f|^2 &= \nabla_i\nabla_i(\nabla_j f)^2 \\ &= 2\nabla_i((\nabla_i\nabla_j f)(\nabla_j f)) \\ &= 2((\nabla_i\nabla_i\nabla_j f)(\nabla_j f) + (\nabla_i\nabla_j f)(\nabla_i\nabla_j f)) \\ &= 2(\Delta\nabla_j f)(\nabla_j f) + 2(\nabla_i\nabla_j f)^2 \\ &= 2(\nabla_j\Delta f + R_{ij}\nabla_i f)(\nabla_j f) + 2(\nabla_i\nabla_j f)^2 \\ &= 2(\nabla_j\Delta f)(\nabla_j f) + 2R_{ij}\nabla_i f\nabla_j f + 2(\nabla_i\nabla_j f)^2 \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. (2.9) eşitliği

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hessf|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle$$

olarak da yazılır. □

Lemma 2.3.25. [28] (M^n, g) *Riemann manifoldu üzerinde*

$$div(L_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + D_X divX \qquad (2.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$, p noktasında paralel ortonormal çatı alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
div(L_X g)(X) &= (\nabla_{E_i} L_X g)(E_i, X) \\
&= \nabla_{E_i}(L_X g(E_i, X)) - L_X g(E_i, \nabla_{E_i} X) \\
&= \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i} X, X) + g(E_i, \nabla_X X)) - g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) \\
&- g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i X}} X) \\
&= \Delta \frac{1}{2}|X|^2 + \nabla_{E_i} g(E_i, \nabla_X X) - |\nabla X|^2 \\
&- g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i X}} X) \\
&= \Delta \frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + g(\nabla^2_{E_i, X} X, E_i) \\
&= \Delta \frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + g(\nabla^2_{X, E_i} X, E_i) \\
&= \Delta \frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + D_X divX
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. □

Yukarıdaki lemmada (2.10) eşitliği $X = \nabla f$ için,

$$\begin{aligned}
D_X divX = X divX &= \langle \nabla divX, X \rangle \\
&= \langle \nabla div \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{2} L_X g = 2Hessf$$

olduğundan

$$2(divHessf)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |Hessf|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \quad (2.11)$$

eşitliğine dönüşür. Ayrıca (2.11) eşitliğinin $(1,1)$- tensör gösterimi

$$div\nabla\nabla f = Ric\nabla f + \nabla\Delta f \quad (2.12)$$

eşitliği gibidir.

3. RICCI SOLİTONLARLA İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Ricci Solitonlar

(M^n, g) Riemann manifoldu üzerinde λ reel sayısı için $Ric = \lambda g$ eşitliği sağlanıyorsa g metrik tensörüne Einsteindır denir. Einstein metriği ile verilen (M^n, g) Riemann manifolduna Einstein manifoldu denir. Ricci solitonlar ilk olarak 1982 yılında Hamilton tarafından Einstein manifoldlarının bir genellemesi olarak verilmiştir [21].

Tanım 3.1.1. [28] (M^n, g) tam(complete) Riemann manifoldu olsun. (M^n, g) manifoldu üzerinde λ reel sayısı için,

$$Ric + \frac{1}{2} L_X g = \lambda g \tag{3.1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir X vektör alanı varsa M^n manifolduna *Ricci soliton* denir. Ricci soliton manifoldu kısaca (M^n, g, X, λ) ile gösterilir. Burada, X vektör alanına *potansiyel vektör alanı* denir.

$f \in \mathfrak{F}(M)$ için $X = \nabla f$ ise, M^n manifolduna *gradiyent Ricci soliton* denir. Bu durumda,

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g \tag{3.2}$$

dir. Bu eşitlikte, $\nabla^2 f = Hessf$ dir.

$\lambda = 0$ için, Ricci soliton manifolduna *durgun (steady)* denir. Ayrıca $\lambda > 0$ veya

$\lambda < 0$ durumları için sırasıyla *büzülen (shrinking)* veya *genişleyen (expanding) Ricci soliton* denir.

Gradiyent Ricci soliton için f fonksiyonuna Ricci soliton manifoldunun potansiyel fonksiyonu denir.

Örnek 3.1.2. $(\mathbb{R}^n, g_0)$ Öklidyen g_0 metrik tensörü ile verilmiş Öklid uzayı olsun. $\nabla g_0 = 0$ olduğundan $\mathbb{R}^n$ düz(flat) manifolddur. $f = \frac{|x|^2}{4}$ potansiyel fonksiyonu için, $(\mathbb{R}^n, g_0, \nabla f, \frac{1}{2})$ dörtlüsü $Ric + \nabla^2 f = \frac{1}{2} g_0$ eşitliğini sağladığından büzülen(shrinking) gradiyent Ricci solitondur.

Tanım 3.1.3. [28] (M^n, g, X, λ) Ricci soliton manifoldu üzerinde X Killing vektör alanı ya da $X = \nabla f$ için f sabit fonksiyon ise, (M^n, g) Einstein manifoldudur. Bu durumda, (M^n, g, X, λ) Ricci soliton manifolduna *aşikar(trivial) soliton* denir.

Örnek 3.1.4. [13] $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında r yarıçaplı $S^n(r)$ küresinin kesitsel eğriliği $K = \frac{1}{r^2}$ ve skalar eğriliği $R = \frac{n(n-1)}{r^2}$ dir. Buradan $S^n(r)$ küresi için $Ric = \frac{n-1}{r^2} g$ olduğundan $S^n(r)$ küresi Einstein manifoldu yani aşikar(trivial) Ricci solitondur.

Lemma 3.1.5. [22] $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *tam(complete) gradiyent Ricci soliton olsun. R, M^n manifoldunun skalar eğriliği olmak üzere C sabiti için*

$$R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = C \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.2) eşitliğinin her iki yanının divergensi alındığında,

$$divRic + div\nabla^2 f = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte sırasıyla daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği ve Bochner formülü kullanılarak,

$$\frac{\nabla R}{2} + Ric\nabla f + \nabla\Delta f = 0 \tag{3.4}$$

bulunur. Ayrıca, (3.2) eşitliğinin her iki yanının izi alınarak

$$R + \Delta f = n\lambda \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Ricci soliton denkleminin $(1,1)$ gösterimi

$$Ric\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla f = \lambda\nabla f$$

eşitliğindeki gibidir. Burada $\nabla_{\nabla f}\nabla f = \frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2$ dir. Buradan,

$$Ric\nabla f = \lambda\nabla f - \frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2 \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri (3.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = 0$$

dir. Yani, $R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = sabit$ olarak elde edilir □

Önerme 3.1.6. [22, 23] $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *kompakt durgun(steady) ya da genişleyen(expanding) gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda,* (M^n, g) *Einstein manifoldudur.*

İspat: (3.3) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\Delta f - |\nabla f|^2 + 2\lambda f = n\lambda - C$$

eşitliği elde edilir. M^n kompakt ve $\lambda \leq 0$ için, maksimum değer ilkesinden f fonksiyonu sabittir. Buradan M^n Einstein manifoldudur. □

Perelman'a göre kompakt Riemann manifoldu üzerinde her Ricci soliton gradiyent Ricci solitondur [27]. Buradan, her kompakt durgun(steady) ya da genişleyen(expanding) Ricci soliton Einstein manifoldudur [7].

Teorem 3.1.7. [17] $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(1) $\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla^j f$

(2) $\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = R_{ijks}\nabla^s f$

(3) $\Delta R_{ij} = \langle\nabla R_{ij}, \nabla f\rangle + 2\lambda R_{ij} - 2R_{ikjs}R^{ks}$

(4) $\Delta R = \langle\nabla R, \nabla f\rangle + 2\lambda R - 2|Ric|^2$

İspat: (1) eşitliğinin ispatı için, Lemma 2.3.21 den $2divRic = \nabla R$ olduğundan $\frac{1}{2}\nabla_i R = (divRic)_i$ dir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
(divRic)_i = (divRic)(\partial_i) &= (C_{13}\nabla Ric)(\partial_i) \\
&= \sum_j (\nabla Ric)(\partial_j, \partial_i, \sum_k g^{jk}\partial_k) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk}(\nabla Ric)(\partial_j, \partial_i, \partial_k) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_{\partial_k} Ric)(\partial_j, \partial_i) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k R_{ij} \\
&= \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k(\lambda g_{ij} - \nabla^2_{ij} f) \\
&= -\sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k \nabla_i \nabla_j f \\
&= -\sum_{j,k} g^{jk}\nabla^2_{ki}\nabla_j f \\
&= -\sum_{j,k} g^{jk}(\nabla^2_{ik}\nabla_j f + \nabla f(R(\partial_k, \partial_i)\partial_j)) \\
&= -\sum_{j,k} g^{jk}\nabla_i\nabla_k\nabla_j f - \sum_{j,k} g^{jk}\nabla f(R(\partial_k, \partial_i)\partial_j)) \\
&= -\nabla_i \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k\nabla_j f - \sum_{j,k,s} g^{jk} R_{kijs}\nabla^s f \\
&= -\nabla_i \Delta f - \sum_s R_{is}\nabla^s f
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_i R = -\nabla_i\Delta f - \sum_s R_{is}\nabla^s f &= -\nabla_i(n\lambda - R) - \sum_s R_{is}\nabla^s f \\
&= -\nabla_i R - \sum_s R_{is}\nabla^s f
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\nabla_i R = \sum_s 2R_{is}\nabla^s f$$

dir. (1) eşitliğinin ispatına benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} &= -\nabla_j \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_j \nabla_k f \\
&= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f + \nabla_j \nabla_i \nabla_k f \\
&= \nabla^2_{ij} \nabla_k f + \nabla^2_{ji} \nabla_k f \\
&= (\nabla f)(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k) \\
&= \sum_s R_{ijks} \nabla^s f
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3) eşitliğinin ispatı için (2) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} = \nabla^j \nabla_j R_{jk} &= \nabla^j (\nabla_i R_{jk} + R_{ijks} \nabla^s f) \\
&= \nabla^j \nabla_i R_{jk} + (\nabla^j R_{ijks}) \nabla^s f + R_{ijks} (\nabla^j \nabla^s f)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. İkinci Bianchi eşitliğinden yararlanarak,

$$(\nabla^j R_{ijks}) \nabla^s f = \nabla_k R^j_{sij} \nabla^s f - \nabla_s R^j_{kij} \nabla^s f$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \nabla_i \nabla^j R_{jk} + R^j_{ijs} R^s_k + R^j_{iks} R^s_j \\
&+ \nabla_k R^j_{sij} \nabla^s f - \nabla_s R^j_{kij} \nabla^s f + R_{ijks} \nabla^j \nabla^s f \\
&= \nabla_i \nabla^j R_{jk} + R_{is} R^s_k + R^j_{iks} R^s_j \\
&- \nabla_k R_{si} \nabla^s f + \nabla_s R_{ki} \nabla^s f + R_{ijks} \nabla^j \nabla^s f
\end{aligned}$$

ve

$\nabla_i \nabla^j R_{jk} = \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_k R$,

$\langle \nabla R_{ik}, \nabla f \rangle = \nabla_s R_{ki} \nabla^s f$,

$R_{ijks} \nabla^j \nabla^s f = -R_{ijks} R^{js} + \lambda R_{ik}$ ve

$\frac{1}{2} \nabla_i \nabla_k R + R^j_{iks} R^s_j = -R_{ijks} R^{js} + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i R$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_k R + R_{is}R^s_k + R^j_{iks}R^s_j \\
&- \nabla_k R_{si}\nabla^s f + \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle - R_{ijks}R^{js} + \lambda R_{ik} \\
&= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + \lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + R_{is}R^s_k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i R - \nabla_k R_{is}\nabla^s f
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yine, (1) eşitliğinin türevi alınır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\Delta R_{ij} = \langle \nabla R_{ij}, \nabla f\rangle + 2\lambda R_{ij} - 2R_{ikjs}R^{ks}$$

olduğu görülür.

(3) eşitliğinin g metriği ile daraltması alınarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} g^{ij}\Delta R_{ij} &= \sum_{i,j} g^{ij}(\langle \nabla R_{ij}, \nabla f\rangle + 2\lambda R_{ij} - 2R_{ikjs}R^{ks}) \\
\Delta R &= \langle \nabla R, \nabla f\rangle + 2\lambda R - 2R_{ks}R^{ks} \\
&= \langle \nabla R, \nabla f\rangle + 2\lambda R - 2|Ric|^2
\end{aligned}$$

(4) eşitliği kolaylıkla gösterilmiş olur. □

Lemma 3.1.8. [28] (M^n, g, X, λ) *Ricci solitonu üzerinde*

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric(X,X)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.1) eşitliğinin izi alınırsa,

$$R + divX = n\lambda \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. (3.7) eşitliğinde sırasıyla X vektör alanına göre türev alınarak, daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği ve Lemma 2.3.25 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
-D_X divX &= D_X R \\
&= 2divRic(X) \\
&= -div(L_X g)(X) \\
&= -(\frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + D_X divX)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric(X,X)$$

olarak bulunur. □

Önerme 3.1.9. [28] (M^n,g), *μ Einstein sabiti ile verilen Einstein manifoldu olmak üzere $(M^n,g,\nabla f,\lambda)$ bir gradiyent Ricci Soliton olsun. Bu durumda, M^n üzerinde $Hessf = 0$ ya da M^n bir Gaussian solitondur.*

İspat: (M^n,g) Einstein manifoldu gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda,

$$\mu g + Hessf = \lambda g$$

dir. Buradan, $\mu = \lambda$ ise $Hessf = 0$ dır. Aksi durumda, $Hessf = (\lambda - \mu)g$ olur. Burada, f fonksiyonu bir sabit ile çarpılırsa $Hessf = g$ eşitliği elde edilir. Böylece, f konveks fonksiyondur. Şimdi, f fonksiyonuna uygun bir sabit eklenirse,

$$r = \sqrt{f}$$

fonksiyonunun f in minimum değerine olan uzaklık fonksiyonu olduğu görülür. Buradan, radyal eğriliklerin sıfır olduğu ve M^n manifoldunun düz(flat) olduğu kolaylıkla gösterilir. Böylece, M^n bir Gaussian solitondur. □

Teorem 3.1.10. [28] (M^n,g,X,λ) *kompakt Ricci soliton olsun.* $Ric(X,X) \leq 0$ *ise, M^n bir Einstein manifoldudur.*

İspat: M^n kompakt olduğundan Lemma 3.1.8 deki eşitliğin her iki tarafının M^n manifoldu üzerinden integrali alınarak divergens teoreminden

$$\nabla X = 0$$

olduğu görülür. Buradan M^n bir Einstein manifoldudur. □

3.2. Almost Ricci Solitonlar

(M^n, g_0) tam(complete) Riemann manifoldu olmak üzere $g(t)$, Ricci flow denkleminin $[0,\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ aralığı üzerinde φ_t diffeomorfizmlerin 1- parametreli ailesi için $g(t) = \tau(p,t)\varphi_t^* g_0(p)$ olacak şekilde bir çözümü olsun. Burada, $p \in M^n$ için $\tau : M^n \times [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyondur. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)|_p = \frac{\partial}{\partial t}\tau(p,t)\varphi_t^* g_0(p) + \tau(p,t)\varphi_t^* L_{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(p,t)} g_0(p) \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir. $\varphi(0) = I$ ve $g(0) = g_0$ olduğundan $\tau(p,0) = 1$ dir. (3.8) eşitliğinden

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2} L_X g_0 = \lambda g_0$$

olarak elde edilir. Burada, $\lambda(p) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\tau(p,0)$ ve $X = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(p,0)$ dır. Böylelikle, Ricci soliton denklemindeki sabit λ sayısının $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ fonksiyon olabileceği gösterilmiştir [2, 29].

Tanım 3.2.1. [2] (M^n, g) diferensiyellenebilir Riemann manifoldu olsun.

$$Ric + \frac{1}{2} L_X g = \lambda g$$

eşitliği sağlanacak şekilde X vektör alanı ve $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa M^n manifolduna *almost Ricci soliton* denir.

X vektör alanı bir $f : M^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun gradiyenti ise M^n ye gradiyent almost Ricci soliton denir. Bu durumda, Ricci soliton denklemi

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g$$

eşitliğindeki gibidir.

Yine Ricci soliton metriğinde olduğu gibi almost Ricci solitonlar da λ fonksiyonuna göre isim alır.

Örnek 3.2.2. [2] $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında $\mathbb{S}^n$ küresinin Ricci tensörü $Ric = (n-1)g_0$ ve skalar eğriliği $R = n(n-1)$ dir. $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayı üzerindeki sabit bir $\widetilde{X}$ vektör alanının

$\mathbb{S}^n$ küresi üzerindeki izdüşümü yani, $\widetilde{X}$ vektör alanının $\mathbb{S}^n$ küresine teğet bileşeni X için, $\lambda = ndivX - R$ olmak üzere her $V,W \in \chi(\mathbb{S}^n)$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L_X g_0(V,W) &= \frac{1}{2}[\langle \nabla_V X, W\rangle + \langle \nabla_W X, V\rangle] \\ &= \langle V,W\rangle\end{aligned}$$

olduğundan $\frac{1}{2}L_X g_0 = g_0$ dır. Buradan X konformal vektör alanıdır. Ayrıca, $divX = n$ dir. Dolayısıyla bu değerler kullanılarak,

$$\lambda = ndivX - R = n.n - n(n-1) = n$$

olduğu görülür. $\lambda = n$ değeri $Ric_{\mathbb{S}^n} + \frac{1}{2}L_X g_0 = \lambda g_0$ denklemini sağlar. Sonuç olarak, $(\mathbb{S}^n, g_0, X, \lambda)$ dörtlüsü almost Ricci solitondur.

Ricci soliton manifoldunda λ nın sabit olması nedeniyle $\nabla\lambda = 0$ dır. Bu özellik konuyla ilgili yapılan çalışmalarda işlem kolaylığı sağlamaktadır. Fakat almost Ricci soliton manifoldları için durum böyle değildir. Ayrıca, kompakt Ricci solitonların aksine almost Ricci soliton manifoldlarının gradiyent almost Ricci soliton olması için skalar eğriliklerinin sabit olması gerekmektedir [3]. Bu kısımda almost Ricci solitonlarla ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalardan bazıları verilecektir.

Önerme 3.2.3. [2] $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *almost gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(1) $R + \Delta f = n\lambda$

(2) $\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla^j f + 2(n-1)\nabla_i\lambda$

(3) $\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} - R_{ijks}\nabla^s f = (\nabla_j\lambda)g_{ik} - (\nabla_i\lambda)g_{jk}$

(4) $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda\nabla f.$

İspat:

(1) eşitliğinin ispatı için skalar eğrilik ve bir fonksiyonun laplasiyanı tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} R+\Delta f &= \sum_{ij} g^{ij}R_{ij} + \sum_{ij} g^{ij}\nabla^2_{ij}f \\ &= \sum_{ij} g^{ij}R_{ij} + \sum_{ij} g^{ij}(\lambda g_{ij} - R_{ij}) \\ &= n\lambda \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(2) eşitliğinin ispatı için tekrar $\frac{1}{2}\nabla_i R = (divRic)_i$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} (divRic)_i &= \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k R_{ij} \\ &= \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k(\lambda g_{ij} - \nabla^2_{ij}f) \\ &= \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k(\lambda g_{ij}) - \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k\nabla_i\nabla_j f \\ &= \sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_k\lambda)g_{ij} - \sum_{j,k} g^{jk}\nabla^2_{ki}\nabla_j f \\ &= \nabla_i\lambda - \sum_{j,k} g^{jk}(\nabla^2_{ik}\nabla_j f + \nabla f(R(\partial_k,\partial_i)\partial_j)) \\ &= \nabla_i\lambda - \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_i\nabla_k\nabla_j f - \sum_{j,k} g^{jk}\nabla f(R(\partial_k,\partial_i)\partial_j)) \\ &= \nabla_i\lambda - \nabla_i\sum_{j,k} g^{jk}\nabla_k\nabla_j f - \sum_{j,k,s} g^{jk}R_{kijs}\nabla^s f \\ &= \nabla_i\lambda - \nabla_i\Delta f - \sum_s R_{is}\nabla^s f \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla_i R &= \nabla_i\lambda - \nabla_i\Delta f - \sum_s R_{is}\nabla^s f \\ &= \nabla_i\lambda - \nabla_i(n\lambda - R) - \sum_s R_{is}\nabla^s f \\ &= (1-n)\nabla_i\lambda + \nabla_i R - \sum_s R_{is}\nabla^s f \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\nabla_i R = \sum_s 2R_{is}\nabla^s f + 2(n-1)\nabla_i \lambda$$

dır. (3) eşitliğinin ispatı için (2) eşitliğinin ispatında kullanılan tensör cebiri işlemlerine benzer işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned}
\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} &= (\nabla_j \lambda) g_{ik} - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f - (\nabla_i \lambda) g_{jk} + \nabla_i \nabla_j \nabla_k f \\
&= (\nabla_j \lambda) g_{ik} - (\nabla_i \lambda) g_{jk} + \nabla^2_{ij} \nabla_k f - \nabla^2_{ji} \nabla_k f \\
&= (\nabla_j \lambda) g_{ik} - (\nabla_i \lambda) g_{jk} + (\nabla f)(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k) \\
&= (\nabla_j \lambda) g_{ik} - (\nabla_i \lambda) g_{jk} + \sum_s R_{ijks} \nabla^s f
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Almost Ricci solitonların $(1,1)$- tensör gösteriminden ve (3) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla(R + |\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\nabla R + \frac{1}{2}\nabla |\nabla f|^2 \\
&= Ric(\nabla f) + (n-1)\nabla \lambda + \nabla_{\nabla f} \nabla f \\
&= \lambda \nabla f + (n-1)\nabla \lambda
\end{aligned}$$

(4) eşitliği sağlanır. □

Lemma 3.2.4. [2] (M^n, g, X, λ) *almost Ricci soliton olsun. Bu durumda,*

(1) $\frac{1}{2}\Delta |X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric(X,X) - (n-2) g(\nabla \lambda, X)$,

(2) $\frac{1}{2}(\Delta - D_X)|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda |X|^2 - (n-2) g(\nabla \lambda, X)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $Ric + \frac{1}{2} L_X g = \lambda g$ eşitliğinin her iki yanının divergensi alınarak,

$$2 div Ric + div(L_X g) = 2\nabla \lambda \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $R+divX=n\lambda$ olduğundan her $Z\in\chi(M)$ için,

$$D_ZR+D_ZdivX=nD_Z(\lambda)$$

dır. Diğer taraftan, daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği, Lemma 2.3.25 ve (3.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
D_XdivX &= nD_X(\lambda)-D_XR\\
&= ng(\nabla\lambda,X)-D_XR\\
&= ng(\nabla\lambda,X)-2divRic(X)\\
&= ng(\nabla\lambda,X)+div(L_Xg)(X)-2g(\nabla\lambda,X)\\
&= (n-2)g(\nabla\lambda,X)+(\frac{1}{2}\Delta|X|^2-|\nabla X|^2+Ric(X,X)+D_XdivX)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilerek

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2=|\nabla X|^2-Ric(X,X)-(n-2)g(\nabla\lambda,X)$$

olarak bulunur.

Şimdi (2) eşitliğinin ispatı için, (1) eşitliğinde $Ric(X,X)$ yerine

$Ric(X,X)=\lambda|X|^2-\frac{1}{2}L_Xg(X,X)$ fonksiyonu yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= |\nabla X|^2-\lambda|X|^2+\frac{1}{2}L_Xg(X,X)-(n-2)g(\nabla\lambda,X)\\
&= |\nabla X|^2-\lambda|X|^2+\frac{1}{2}D_X|X|^2-(n-2)g(\nabla\lambda,X)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 3.2.5. [2] *$n\geq 3$ olmak üzere, (M^n,g,X,λ) kompakt almost Ricci soliton ve $\int_M(Ric(X,X)+(n-2)g(\nabla\lambda,X))dM\leq 0$ olsun. Bu durumda, X Killing vektör alanıdır. Böylece M^n aşikar(trivial) Ricci solitondur.*

İspat: Yukarıdaki lemmanın (1) eşitliğinde her iki yanının M^n kompakt manifoldu üzerinden integrali alınarak,

$$\int_M|\nabla X|^2dM=\int_M(Ric(X,X)+(n-2)g(\nabla\lambda,X))dM$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı sıfırdan küçük eşit olduğundan $\nabla X = 0$ dır. Buradan X Killing vektör alanıdır. Yani, M^n Einstein manifoldudur. □

Teorem 3.2.6. [2] *$n \geq 3$ olmak üzere, (M^n, g, X, λ) kompakt almost Ricci soliton olsun. X vektör alanı aşikar olmayan(non-trivial) konformal vektör alanı ise, M^n manifoldu $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine izometriktir.*

İspat: X vektör alanı aşikar(trivial) vektör alanı olmadığından $\psi \neq 0$ olmak üzere, $L_X g = 2\psi g$ dir. Bu eşitlik almost Ricci soliton denkleminde yerine yazıldığında $Ric = (\lambda - \psi)g$ elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının izi alınarak, R skalar eğriliği $R = n(\lambda - \psi)$ olarak bulunur. $\lambda - \psi$ sabit olduğundan R skalar eğriliği sabittir.

Ayrıca, $\psi \neq 0$ olduğundan $R > 0$ (Lemma (2.3), [32]) dır. Buradan, $R \neq 0$ dır. Ric tensörünün X vektör alanına göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned} L_X Ric &= L_X((\lambda - \psi)g) \\ &= (\lambda - \psi) L_X g \\ &= 2(\lambda - \psi)\psi g \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda, M^n manifoldu Öklidyen küresine izometriktir (Teorem 4.2, [32]). □

3.3. Ricci Solitonlar ve Concircular Vektör Alanları

M^n Riemann manifoldu üzerinde bir X vektör alanına

$$\nabla_Y X = \mu Y, \qquad \forall Y \in \chi(M) \tag{3.10}$$

önermesi sağlanacak şekilde sıfırdan farklı bir $\mu : M^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa *concircular vektör alanı* denir [10]. Chen'in 2015 yılında yapmış olduğu çalışmada soliton potansiyel vektör alanının concircular vektör alanı olması durumu incelenmiştir [10].

Bu kısımda, bu çalışmadaki bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Lemma 3.3.1. [10] *(M^n, g) Riemann manifoldu ve f, M^n manifoldu üzerinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda, ∇f gradiyent vektör alanının concircular vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul her $X,Y \in \chi(M)$ ve μ fonksiyonu için,*

$$Hessf(X,Y) = \mu g(X,Y) \tag{3.11}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: f, M^n üzerinde bir fonksiyon olmak üzere, her $X,Y \in \chi(M)$ için (3.11) eşitliği sağlansın. Bu durumda,

$$Hessf(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$$

olduğundan $\nabla_X \nabla f = \mu X$ dir. Buradan, ∇f concircular vektör alanıdır.

Karşıt olarak, ∇f concircular vektör alanı olsun. Bu durumda, sıfırdan farklı μ fonksiyonu ve her $X \in \chi(M)$ için $\nabla_X \nabla f = \mu X$ dir. Buradan, $Hessf = \mu g$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. □

Bir Riemann manifoldu üzerinde sıfırdan farklı concircular vektör alanı varsa Riemann manifoldunun warped çarpım manifoldu olduğunu veren teorem aşağıdadır.

Teorem 3.3.2. [10] *Eğer, (M^n, g) Riemann manifoldu üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan concircular vektör alanı varsa bu durumda, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sıfırdan farklı fonksiyon ve F, $(n-1)$- boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere,*

M manifoldu $I \times_{\varphi(s)} F$ warped çarpım manifoldudur.

Teorem 3.3.3. [10] *$n \geq 3$ olmak üzere, (M^n, g, X, λ) Ricci soliton olsun. X vektör alanının concircular vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç koşulun sağlanmasıdır.*

(a) *(3.10) eşitliğindeki μ fonksiyonu sıfırdan farklı bir b sabitidir.*

(b) *$\lambda = b$ dir.*

(c) *$I \subseteq \mathbb{R}$ yay uzunluğu s olan bir açık aralık, c bir sabit ve F, $Ric_F = (n-2)b^2 g_F$ için $(n-1)$- boyutlu Einstein manifoldu olmak üzere, $M = I \times_{bs+c} F$ warped çarpım manifoldudur.*

İspat: (M^n, g, X, λ) Ricci soliton ve X concircular vektör alanı olsun. Bu durumda, her $V, W \in \chi(M)$ için

$$(L_X g)(V,W) = g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) = 2\mu g(V,W)$$

olduğundan bu eşitlik Ricci soliton denkleminde yerine yazılarak

$$Ric(V,W) = (\lambda - \mu) g(V,W) \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, M^n nin Einstein manifoldu olduğu görülür. $n \geq 3$ ve M^n Einstein manifoldu olduğundan M^n nin skalar eğriliği sabittir. Yani,

$R = n(\lambda - \mu)$ olduğundan μ sıfırdan farklı bir sabittir. Bu sabit b ile gösterilsin.

$\mu = b$ için, $\nabla_V X = bV$ ve X vektör alanına normal her V vektör alanı için $R(V,X)X = 0$ eşitliği elde edilir. Buradan, $Ric(X,X) = 0$ dır. Dolayısıyla, M^n Ricci flat manifolddur. M^n manifoldunun Ricci flat oluşu (3.12) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde $\lambda = b$ olduğu görülür.

Şimdi, (c) nin doğru olduğu gösterilecektir. Teorem 3.3.2 ye göre, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve F, $(n-1)$- boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere M^n, $I \times_{\varphi(s)} F$ warped çarpım manifoldudur. Ayrıca, $\mu = b$ ve Teorem 3.3.2 den $\varphi'(s) = \mu = b$ olarak bulunur. Buradan, c sabit olmak üzere $\varphi(s) = bs + c$ biçimindedir. Böylece,

$M = I \times_{bs+c} F$ warped çarpım manifoldudur. M^n manifoldu Ricci flat olduğundan (3.12) eşitliğinden $\lambda = \mu = b$ dir. Buna göre F manifoldu, Ricci tensörü

$Ric = (n-2)b^2 g_F$ eşitliğini sağlayan Einstein manifoldudur ([6]; (9.109) eşitlik).

Tersine, (a) dan X vektör alanının concircular vektör alanı olduğu görülür. $\square$

4. ALMOST RICCI SOLİTONLAR VE CONCİRCULAR VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde, potansiyel vektör alanı concircular vektör alanı olan almost Ricci solitonlar ve almost Ricci solitonun alt manifold olduğu durumlar için elde edilen yeni sonuçlar verilecektir [1].

4.1. Almost Ricci Solitonlar ve Concircular Vektör Alanları

Barros ve Ribeiro Jr. [2] de (M^n, g) kompakt almost Ricci soliton manifoldunun rijit olması ile ilgili yaptıkları çalışmada Ricci soliton manifoldunun potansiyel vektör alanı konformal vektör alanı olduğunda (M^n, g) Ricci soliton manifoldunun $\mathbb{S}^n$ küresine izometrik olduğunu göstermiştir. Potansiyel vektör alanı concircular vektör alanı olan M^n almost Ricci soliton için de benzer sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.1.1. [1] *$n \geq 3$ olmak üzere, (M^n, g, v, λ) kompakt almost Ricci soliton olsun. v concircular vektör alanı ise bu durumda, M^n manifoldu $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine izometriktir.*

İspat: v vektör alanı concircular olduğundan sıfırdan faklı μ fonksiyonu ve her $X \in \chi(M)$ vektör alanı için, $\nabla_v X = \mu X$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(L_v g)(Y,Z) &= \frac{1}{2}[g(\nabla_Y v, Z) + g(\nabla_Z v, Y)] \\ &= \mu g(Y,Z) \end{aligned}$$

dir. Böylece, Ricci soliton denkleminde

$$Ric(Y,Z) = (\lambda - \mu) g(Y,Z)$$

eşitliği elde edilir. $n \geq 3$ olduğundan $\lambda - \mu$ sabittir. $\lambda - \mu$ sabit olduğundan,

$$\begin{aligned} L_v Ric &= L_v((\lambda - \mu) g) \\ &= (\lambda - \mu) L_v g \\ &= (\lambda - \mu) \mu g \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, M^n manifoldu $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine izometriktir (Teorem 4.2, [32]). $\square$

Bu teoremin bir sonucu olarak, concircular vektör alanları ve kapalı(closed) konformal vektör alanları arasındaki ilgi aşağıdaki gibidir.

Koszul formülünden her $Y,Z \in \chi(M)$ için $\theta = g(v,\cdot)$, v vektör alanının g metriğine göre kovaryant formu olmak üzere

$$2g(\nabla_Y v, Z) = (L_v g)(Y,Z) + d\theta(Y,Z)$$

eşitliği yazılabilir. μ, M manifoldu üzerinde bir fonksiyon olmak üzere,

$L_v g = 2\mu g$ ve $d\theta = 0$ ise v vektör alanına kapalı (closed) konformal vektör alanı denir [31]. Bu durumda, kapalı(closed) konformal vektör alanının concircular vektör alanı olduğu açıktır.

Sonuç 4.1.2. [1] *$n \geq 3$ olmak üzere, (M^n, g, v, λ) kompakt almost Ricci soliton olsun. v kapalı konformal vektör alanı ise, M^n manifoldu $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine izometriktir.*

4.2. Almost Ricci Solitonun Alt Manifold Olduğu Durumlar

Ricci solitonların alt manifold olması durumunu ilk olarak 2015 yılında Chen concircular vektör alanlarından yararlanarak çalışmıştır [10]. Bu çalışma almost Ricci solitonların alt manifold olması durumunun çalışılmasını motive etmiştir. Gauss ve Weingarten formülleri [11] alt manifold teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu kısımda öncelikle alt manifold teorisi ile ilgili özellikler kısaca hatırlatılarak almost Ricci solitonların alt manifold olması durumunda elde edilen yeni sonuçlar verilecektir.

$(N^m, \widetilde{g})$, m- boyutlu Riemann manifoldu ve $\phi : M^n \to N^m$ izometrik immersiyon olsun. M^n ve N^m manifoldları üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilsin.

M^n manifolduna teğet X, Y vektör alanları ve M^n manifolduna normal vektör alanı ξ verildiğinde, sırasıyla Gauss ve Weingarten formülleri

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{4.1}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{4.2}$$

eşitlikleriyle tanımlıdır. Burada, $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla $\widetilde{\nabla}_X Y$ vektör alanının teğet ve normal bileşenleri ve benzer şekilde $-A_\xi X$ ve $D_X \xi$ vektör alanları da $\widetilde{\nabla}_X \xi$ vektör alanının teğet ve normal bileşenleridir. Burada, h, A ve D sırasıyla (M^n, g) alt manifoldunun ikinci temel formu, şekil operatörü ve normal konneksiyonudur. Buna göre,

$$\widetilde{g}(h(X,Y), \xi) = g(A_\xi X, Y)$$

eşitliği sağlanır.

Bu kısımda, N^m manifoldu üzerinde v vektör alanı verildiğinde v vektör alanının M^n manifolduna teğet ve normal bileşenleri sırasıyla v^T ve v^N ile gösterilecektir. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak, aşağıdaki lemma verilebilir.

Not 4.2.1. Bir (M^n, g) Riemann alt manifoldunun ξ normal vektör alanına göre şekil operatörü A_ξ olmak üzere, $A_\xi = \varphi I$ eşitliği sağlanıyor ise M^n alt manifolduna ξ- umbilik denir. Burada φ, M^n üzerinde bir fonksiyon ve I da M^n üzerinde özdeşlik dönüşümüdür.

Lemma 4.2.2. [1] *M^n, N^m manifoldunun alt manifoldu ve v, N^m üzerinde concircular vektör alanı olsun. M^n manifoldunun totally umbilik ya da düz(flat) olması için gerek ve yeter koşul v^T vektörünün M^n manifoldu üzerinde concircular vektör alanı olmasıdır.*

İspat: M^n alt manifoldu düz(flat) ya da totally umbilik olsun. v, N^m manifoldu üzerinde concircular vektör alanı olduğundan $\widetilde{\nabla}_X v = \mu X$ olacak şekilde N^m üzerinde μ fonksiyonu vardır. Bu durumda, (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden yararlanılarak her $X \in \chi(M)$ için,

$$\mu X = \nabla_X v^T + h(X, v^T) - A_{v^N}X + D_X v^N$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin tanjant ve normal kısımları ayrılırsa,

$$\nabla_X v^T = A_{v^N}X + \mu X \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir. Böylece v^T, M manifoldu üzerinde concircular vektör alanıdır.

Karşıt olarak, eğer v^T M^n manifoldu üzerinde concircular vektör alanı ise, bu durumda her $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X v^T = \eta X$$

olacak şekilde M^n üzerinde sıfırdan farklı bir η fonksiyonu vardır. Bu durumda, (4.3) eşitliğinden

$$A_{v^N}X = (\eta - \mu)X$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $\eta = \mu$ ise M^n düz(flat) manifolddur. Aksi durumda M^n totally umbiliktir. $\square$

Bu lemmadan yararlanılarak, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.3. [1] *M^n, N^m Riemann manifoldunun totally umbilik alt manifoldu ve (M^n, g, v^T, λ) almost Ricci soliton olsun. Bu durumda, M^n manifoldu $\mathbb{S}^n$ küresine izometriktir.*

İspat: M^n, N^m Riemann manifoldunun totally umbilik alt manifoldu ve (M^n, g, v^T, λ) almost Ricci soliton olsun. Bu durumda, Lemma 4.2.2 den v^T, M^n manifoldu üzerinde concircular vektör alanıdır. Açık olarak, $\nabla_X v^T = \mu X$ olacak şekilde M^n manifoldu üzerinde sıfırdan farklı μ fonksiyonu vardır. Buradan, Lie türevinin tanımı kullanılarak her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} L_{v^T} g(X,Y) &= g(\nabla_X v^T, Y) + g(\nabla_Y v^T, X) \\ &= 2\mu g(X,Y) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu eşitlik almost Ricci soliton denkleminde yerine yazılırsa,

$$Ric(X,Y) = (\lambda - \mu)g(X,Y)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, $R = n(\lambda - \mu)$ olduğundan, Teorem 4.1.1 in ispatına benzer olarak M^n manifoldunun $\mathbb{S}^n$ küresine izometrik olduğu kolaylıkla gösterilir.
□

Teorem 4.2.4. [1] *M^n, N^m Riemann manifoldunun alt manifoldu olsun. (M^n, g, v^T, λ) dörtlüsünün almost Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul her $X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$Ric(X,Y) = (\lambda - \mu)g(X,Y) - \widetilde{g}(h(X,Y), v^N)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $v \in \chi(N)$ concircular vektör alanı olduğundan Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak her $X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\mu X = \widetilde{\nabla}_X v &= \overline{\nabla}_X (v^T + v^N) \\
&= \nabla_X v^T + h(X, v^T) - A_{v^N} X + D_X v^N
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, teğet ve normal kısımları ayrılırsa

$$\nabla_X v^T = A_{v^N} X + \mu X$$

$$h(X, v^T) = -D_X v^N$$

olur. Böylece, her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
(L_{v^T} g)(X,Y) &= g(\nabla_X v^T, Y) + (\nabla_Y v^T, X) \\
&= 2\mu g(X,Y) + 2g(A_{v^N} X, Y) \\
&= 2\mu g(X,Y) + 2\widetilde{g}(h(X,Y), v^N)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre, (M^n, g, v^T, λ) dörtlüsünün almost Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$Ric(X,Y) + \mu g(X,Y) + \widetilde{g}(h(X,Y), v^N) = \lambda g(X,Y)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. □

Bu teoremden yararlanılarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.2.5. [1] $n \geq 3$ *olmak üzere* M^n, N^m *Riemann manifoldunun alt manifoldu ve* (M^n, g, v^T, λ) *almost Ricci soliton olsun.* M^n *manifoldunun aşikar(trivial) soliton olması için gerek ve yeter koşul* M^n *manifoldunun* v^N*- umbilik olmasıdır.*

İspat: (M^n, g, v^T, λ) almost Ricci solitonu aşikar(trivial) soliton olsun. Bu durumda, her $X, Y \in \chi(M)$ için $(L_{v^T} g)(X,Y) = 0$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (L_{v^T} g)(X,Y) &= g(\nabla_X v^T, Y) + (\nabla_Y v^T, X) \\ &= 2\mu g(X,Y) + 2g(A_{v^N} X, Y) \end{aligned}$$

eşitliğine göre $g(\mu X + A_{v^N} X, Y) = 0$ dır. Buradan, $A_{v^N} X = -\mu X$ olarak elde edilir. Yani, M^n manifoldu v^N- umbiliktir. □

Sonuç 4.2.6. [1] M^n, N^m *Riemann manifoldunun totally umbilik alt manifoldu ve* (M^n, g, v^T, λ) *almost Ricci soliton olsun. Bu durumda,* M^n *aşikar(trivial) Ricci solitondur.*

[30] da Sharma (M^n, g, v, λ) almost Ricci solitonunun Ricci tensörü paralel ise, v vektör alanının konformal vektör alanı olduğunu göstermiştir. Buradan yararlanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.7. [1] M^n, N^m *Riemann manifoldunun alt manifoldu ve* (M^n, g, v^T, λ)*, Ricci tensörü paralel olan kompakt almost Ricci soliton olsun. Bu durumda,* M^n *manifoldu* $\mathbb{S}^n$ *küresine izometriktir.*

5. QUASI-EINSTEIN MANİFOLDLARININ RİJİT OLMA DURUMLARI

Einstein metrikleri ve bu metriklerin genellemesi hem matematikte hem de fizikte önemli bir rol oynamaktadır. Catino [9] Einstein metriklerinin bir genellemesi olarak Riemann metriklerinin genelleştirilmiş quasi-Einstein metrikleri olarak isimlendirilen yeni bir sınıfını vermiştir. Bu kısımda, genelleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldlarının warped çarpım manifoldları ile ilgisi verilecektir.

5.1. Genelleştirilmiş m-Quasi-Einstein Manifoldları

$B = (B^n, g_B)$ ve $F = (F^m, g_F)$ Riemann manifoldları olmak üzere, sırasıyla π ve σ dönüşümleri $B^n \times F^m$ manifoldundan B^n ve F^m manifoldlarına izdüşüm fonksiyonları olsun. $f : B^n \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyon olmak üzere $B^n \times_f F^m$ manifolduna $g = \pi^*(g_B) + f^2\sigma^*(g_F)$ metrik tensörü ile verilmiş warped çarpım manifoldu denir. Burada, f fonksiyonuna warping fonksiyonu denir. Ric_B ve Ric_F tensörleri sırasıyla B^n ve F^m manifoldlarının Ricci tensörlerinin $B^n \times_f F^m$ manifolduna kaldırılmışları (liftleri) olmak üzere, konu ile ilgili ilk önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme 5.1.1. [26] *B^n ve F^m Riemann manifoldları olmak üzere, $B^n \times_f F^m$ warped çarpım manifoldu üzerinde X,Y yatay, V,W düşey vektör alanları ve $m = dimF > 1$ için, $B^n \times_f F^m$ manifoldunun Ricci tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

1. $Ric(X,Y) = Ric_B(X,Y) - \frac{m}{f}Hessf(X,Y)$
2. $Ric(X,V) = 0$
3. $Ric(V,W) = Ric_F(V,W) - (-\frac{\Delta f}{f} + \frac{|\nabla f|^2}{f^2}(m-1))g(V,W)$

Bu önermeden yararlanarak, Einstein eşitlikleri aşağıdaki gibidir.

Sonuç 5.1.2. [24] *$B^n \times_f F^m$ warped çarpım manifoldunun $Ric = \lambda g$ olacak şekilde Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.*

(1) $Ric_B = \lambda g_B + \frac{m}{f} Hessf$

(2) (F, g_F) *manifoldu,* $Ric_F = \mu g_F$ *olacak şekilde Einstein manifoldudur.*

(3) $-f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2 = \mu.$

Tanım 5.1.3. [9] $n \geq 2$ için, (M^n, g) tam(complete) Riemann manifoldu olmak üzere $0 < m \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g \tag{5.1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde M^n üzerinde f ve λ fonksiyonları varsa, M^n manifolduna *genelleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldu* denir. Burada,

$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df$ tensörüne Bakry-Emery Ricci tensörü denir.

(5.1) eşitliğinde $\lambda \in \mathbb{R}$ için elde edilen $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ dörtlüsüne *m-quasi-Einstein manifoldu* denir.

Özel olarak $m = \infty$ için, (5.1) eşitliği gradiyent almost Ricci soliton denklemini verir. Ayrıca, $\lambda \in \mathbb{R}$ olması durumunda m-quasi-Einstein manifoldunun gradiyent Ricci soliton manifoldu olduğu açıktır.

Şimdi, $B^n \times F^m$ çarpım manifoldu $u : B^n \to \mathbb{R}$, $u = e^{-\frac{f}{m}}$ fonksiyonu için

$g = g_B + u^2 g_F$ metrik tensörü ile verildiğinde $B \times_u F$ warped çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Bu durumda,

$\nabla u = -\frac{1}{m} e^{-\frac{f}{m}} \nabla f$

$\frac{m}{u} Hessu = -Hessf + \frac{1}{m} df \otimes df$

olduğundan λ reel sayısı için m-quasi-Einstein manifoldunu karakterize eden

$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g$ eşitliği

$$Ric_B - \frac{m}{u} Hessu = \lambda g_B \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Açık olarak, (5.2) eşitliği Sonuç 5.1.2 nin (1) önermesinde verilen eşitliktir. Dolayısıyla, m-quasi-Einstein manifoldları $(n+m)$- boyutlu Einstein warped çarpım manifoldunun n- boyutlu taban manifoldudur. Yani, (B^n, g_B) taban manifoldu (M^n, g_M) m-quasi-Einstein manifoldudur. Bundan sonra, m-quasi-Einstein manifoldu denildiğinde $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için

$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g$ eşitliğini sağlayan $(n+m)-$ boyutlu $M^n \times_u F^m$ Einstein manifoldunun M^n taban manifoldu anlaşılacaktır.

(5.2) eşitliğinde $h = -\frac{m}{u}$ olmak üzere, $(M^n, g, \nabla u, h, \lambda)$ yapısıyla verilen M^n Riemann manifolduna gradiyent h- Ricci soliton denir. Buna göre, her m-quasi-Einstein manifoldu gradiyent $(-\frac{m}{u})$- Ricci solitondur. Eğer u sabit fonksiyon ise, m-quasi-Einstein manifoldu aşikar(trivial)dir denir.

(M^n, g) manifoldunun kompakt olması durumunda h- almost Ricci solitonların ve h- Ricci solitonların rijit olması aşağıdaki teoremlerle karakterize edilmiştir.

Lemma 5.1.4. [20] *$(M^n, g, \nabla u, -\frac{m}{u}, \lambda)$ gradiyent $(-\frac{m}{u})$- almost Ricci soliton olsun. Bu durumda,*

$$d(\frac{n-2}{m} u^2 \lambda - u\Delta u - (m-1)|\nabla u|^2) - \frac{m+n-2}{m} \lambda du^2 = 0 \tag{5.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(M, g, \nabla u, -\frac{m}{u}, \lambda)$ gradiyent $(-\frac{m}{u})$- almost Ricci soliton olsun. Bu durumda, $Ric - \frac{m}{u} \nabla^2 u - \lambda g = 0$ eşitliğinin her iki yanının divergensi alınarak ve

$R = n\lambda + \frac{m}{u}\Delta u$ ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
0 &= divRic - \frac{m}{u}div\nabla^2 u + \nabla^2 u(\nabla(-\frac{m}{u}),\cdot) - d\lambda \\
&= \frac{1}{2}d(n\lambda + \frac{m}{u}\Delta u) - \frac{m}{u}(Ric(\nabla u,\cdot) + d\Delta u) + \frac{m}{u^2}\nabla^2 u(\nabla u,\cdot) - d\lambda \\
&= \frac{n-2}{2}d\lambda + \frac{1}{2}d(\frac{m}{u}\Delta u) - \frac{m}{u}d\Delta u - \frac{m}{u}(\lambda du + \frac{m}{u}\nabla^2 u(\nabla u,\cdot)) + \frac{m}{2u^2}d|\nabla u|^2 \\
&= \frac{n-2}{2}d\lambda - \frac{m}{2u^2}(ud\Delta u + \Delta u du) - \frac{m}{u^2}\lambda u du - \frac{m^2}{2u^2}d|\nabla u|^2 + \frac{m}{2u^2}d|\nabla u|^2 \\
&= \frac{n-2}{2}d\lambda - \frac{m}{2u^2}\lambda du^2 - \frac{m}{2u^2}d(u\Delta u) - \frac{m^2}{2u^2}d|\nabla u|^2 + \frac{m}{2u^2}d|\nabla u|^2
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin her iki yanı $\frac{2u^2}{m}$ ile çarpılırsa (5.3) eşitliği elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.5. [20] *(M^n, g, X, h, λ) kompakt aşikar olmayan(non-trivial) h- almost Ricci soliton, M^n nin skalar eğriliği R sabit ve $h > 0$ veya $h < 0$ olsun. Bu durumda, M^n manifoldu $\mathbb{S}^n(r)$ küresine izometriktir. Ayrıca, M^n manifoldu gradiyenttir ve potansiyel fonksiyonu $\mathbb{S}^n(r)$ küresinin birinci öz değerine ait öz fonksiyondur.*

İspat: T, simetrik $(0,2)$ tipinde tensör olsun. T nin traceless tensörü $\overset{\circ}{T}$ olmak üzere, $\overset{\circ}{T} = T - \frac{tr(T)}{n}g$ dir. Burada teoremin ispatı, hipotezdeki R skalar eğriliğinin sabit olması koşulunun yerine daha zayıf bir koşul olan $h > 0$ için $\langle X, \nabla R\rangle \leq 0$ ve $h < 0$ için $\langle X, \nabla R\rangle \geq 0$ koşulu altında yapılacaktır.

$S = \frac{1}{2}L_X g$ olsun. Bu durumda, h- almost Ricci soliton denkleminden

$$\overset{\circ}{Ric} = -h\overset{\circ}{S} \tag{5.4}$$

dir. Diğer taraftan Lemma 2.3.23 de $T = \overset{\circ}{Ric}$, $\varphi = 1$ ve $Z = X$ alınarak,

$$div(\overset{\circ}{Ric}(X)) = (div\overset{\circ}{Ric})(X) + \langle \nabla X, \overset{\circ}{Ric}\rangle \tag{5.5}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Burada, daraltılmış ikinci Bianchi eşitliğinden

$$div(\overset{\circ}{Ric}(X)) = \frac{n-2}{2n}\langle \nabla R, X\rangle \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\langle \nabla X, \overset{\circ}{Ric} \rangle = \langle \overset{\circ}{Ric}, \overset{\circ}{S} \rangle = -h|\overset{\circ}{S}|^2 \tag{5.7}$$

dır. Böylece, (5.4)-(5.7) eşitliklerinden,

$$div(\overset{\circ}{Ric}(X)) = \frac{n-2}{2n}\langle \nabla R, X \rangle - h|\overset{\circ}{S}|^2 \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir. (5.8) eşitliğinin M^n manifoldu üzerinden integrali alınarak, $\overset{\circ}{S} = 0$ olarak bulunur. Böylece, X nonhomotetik konformal vektör alanıdır ve (5.4) eşitliğinden M^n Einstein manifoldudur.

Şimdi, X nonhomotetik konformal vektör alanı olduğundan $L_X g = 2\rho g$ olacak şekilde sabit olmayan bir ρ fonksiyonu vardır. h- almost Ricci soliton denkleminden,

$$\rho = \frac{divX}{n} = \frac{1}{h}(\lambda - \frac{R}{n})$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, ρ fonksiyonu

$$\nabla^2 \rho = -\frac{R}{n(n-1)}\rho g$$

eşitliğini sağlar. ρ sabit olmadığından $\frac{R}{n-1}$, ρ fonksiyonun laplasiyanın non-trivial öz değeridir ve $R > 0$ dır. Buradan M, $\mathbb{S}^n(r)$ küresine izometriktir. Bu durumda ρ, $\mathbb{S}^n(r)$ küresinin $\lambda_1 = R/(n-1)$ birinci öz değerine karşılık gelen öz fonksiyonudur.

$$u = -\frac{n(n-1)}{R}\rho$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2}L_{\nabla u} g = \nabla^2 u = -\frac{n(n-1)}{R}\nabla^2 \rho = \rho g = \frac{1}{2}L_X g$$

eşitliği elde edilir. Buradan, M^n manifoldunun gradiyent h- almost Ricci soliton olduğu görülür. $\square$

Teorem 5.1.6. [20] *u, M^n üzerinde pozitif fonksiyon ve m sıfırdan farklı sabit tam sayısı için, $(M^n, g, \lambda, (-\frac{m}{u}), \lambda)$ gradiyent $(-\frac{m}{u})$ Ricci soliton olsun. Bu durumda,*

(i) *μ sabit reel sayı olmak üzere,*

$$\lambda u^2 + u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = \mu \tag{5.9}$$

dir.

(ii) *Kompakt durgun(steady) veya genişleyen(expanding) gradiyent $(-\frac{m}{u})$- Ricci soliton aşikar(trivial) solitondur.*

İspat: (5.3) eşitliğinde λ sabit alınarak, (5.9) eşitliği elde edilir.

(ii) nin ispatı için M^n kompakt olduğundan,

$$u(p) = \max_{x\in M} u(x), \qquad u(q) = \min_{x\in M} u(x)$$

olacak şekilde $p, q \in M^n$ noktaları vardır. Bu durumda,

$$u(p) > 0,\ u(q) > 0,\ \nabla u(p) = \nabla u(q) = 0, \qquad \Delta u(p) \leq 0 \leq \Delta u(q) \tag{5.10}$$

olduğu görülür. M^n manifoldunun durgun(steady) olması durumunda (5.9) eşitliğinden,

$$u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = \mu \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (5.10) ile birlikte göz önüne alınarak,

$$0 \geq u(p)\Delta u(p) = \mu = u(q)\Delta u(q) \geq 0$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan, $\mu = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak, (5.11) eşitliğinden,

$$u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 = 0 \tag{5.12}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin M^n üzerinden integrali alınarak,

$$(m-2)\int_M |\nabla u|^2 = 0 \tag{5.13}$$

olduğu görülür. Burada $m \neq 2$ ise, (5.13) eşitliğinden u fonksiyonu sabittir. Diğer taraftan, $m = 2$ ise (5.12) eşitliğinden

$$\frac{1}{2}\Delta u^2 = u\Delta u + |\nabla u|^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan, u fonksiyonunun sabit olduğu görülür.

Şimdi M^n manifoldunun genişleyen(expanding) olduğu durum yani, $\lambda < 0$ durumu için, (5.9) eşitliği ve (5.10) dan

$$\lambda u^2(p) \geq \mu \geq \lambda u^2(q)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $u^2(p) \leq u^2(q)$ sonucuna varılır. Dolayısıyla, u fonksiyonu sabittir. Böylece her iki durumda da u fonksiyonu sabit olduğundan M^n aşikar(trivial) solitondur. $\square$

Şimdi de $(-\frac{m}{u})$- Ricci soliton manifoldunun warped çarpım manifoldları ile ilgisini veren sonuç verilecektir.

Sonuç 5.1.7. [20] $(M^n, g_B, \nabla u, -\frac{m}{u}, \lambda)$ *gradiyent* $(-\frac{m}{u})$- *Ricci soliton,* μ*, (5.9) eşitliğini sağlayan bir sabit ve* $(F^m, \langle,\rangle)$*,* $m > 1$ *olmak üzere m- boyutlu ve Ricci tensörü* $Ric_F = \mu\langle,\rangle$ *eşitliğini sağlayan Riemann manifoldu olsun.* M^n *manifoldu kompakt olduğunda* $\lambda > 0$ *kabul edilsin. Bu durumda,* $g = g_M + u^2\langle,\rangle$ *metriği ile verilen* $M^n \times_u F^m$ *manifoldu Einstein manifoldudur.*

İspat: $(M^n, g_M, \nabla u, -\frac{m}{u}, \lambda)$ kompakt gradiyent $(-\frac{m}{u})$- Ricci soliton ve $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$Ric_M(X,Y) - \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g$$

eşitliği Önerme 5.1.1 deki (1) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, $V, W \in \chi(F)$ olsun. Bu durumda, Önerme 5.1.1 deki (3) eşitliği ve (5.9) eşitliği birlikte göz önüne alınarak,

$$Ric(V,W) = \lambda g(V,W)$$

olduğu görülür. Böylece $M^n \times_u F^m$ manifoldu Einsteindır. $\square$

Her aşikar(trivial) gradiyent $(-\frac{m}{u})$- Ricci solitonun Einstein manifoldu olduğu açıktır. Fakat tersi genellikle doğru değildir. Bu durum aşağıdaki örneklerle verilebilir.

Örnek 5.1.8. [5] $n \geq 2$ için $(\mathbb{S}^n, g_0)$ birim küresi üzerinde $\tau = (1/n, +\infty)$ reel parametre ve $h_v(x) = \langle x, v\rangle$, $v \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sabit birim vektörüne göre yükseklik fonksiyonu olmak üzere,

$$f = -mln(\tau - \frac{h_v}{n})$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda $u = e^{-\frac{f}{m}} = \tau - \frac{h_v}{n}$ için,

$$\nabla^2 u = \nabla^2(\tau - \frac{h_v}{n}) = -\frac{1}{n}\nabla^2 h_v$$

olarak bulunur. $\nabla h_v = v$ olduğundan her $Y, W \in \chi(\mathbb{S}^n)$ için,

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_v(Y,W) &= \langle \nabla_W \nabla h_v, Y\rangle \\ &= \langle \nabla_W v, Y\rangle \\ &= -\langle A(W), Y\rangle \end{aligned} \tag{5.14}$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan, $\mathbb{S}^n$ küresi totally umbilik olduğundan

$$II(W,Y) = \langle A(W), Y\rangle v$$

dir. Buradan, $\mathbb{S}^n$ küresinin birim küre olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \langle II(W,Y), X\rangle &= \langle A(W), Y\rangle\langle v, X\rangle \\ &= -\langle W, Y\rangle\langle v, X\rangle \end{aligned} \tag{5.15}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $II(W,Y) = \langle A(W), Y\rangle X$ olduğundan

$$\langle II(W,Y), X\rangle = \langle A(W), Y\rangle\langle X, X\rangle = \langle A(W), Y\rangle \tag{5.16}$$

olarak elde edilir. (5.14), (5.15) ve (5.16) eşitliklerine göre,

$$\begin{aligned}\nabla^2 h_v(Y,W) = -\langle A(W),Y\rangle &= -\langle II(W,Y),X\rangle \\ &= -\langle W,Y\rangle\langle v,X\rangle \\ &= -g_0(W,Y)h_v(x)\end{aligned}$$

olduğundan $\nabla^2 h_v = -h_v g_0$ eşitliği elde edilir. Böylece, $u = e^{-\frac{f}{m}}$ için

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -\frac{m}{u}\nabla^2 u = -\frac{m}{u}\frac{h_v}{n} g_0 = -\frac{m}{u}(\tau - u)g_0$$

olarak bulunur. Ayrıca, $\mathbb{S}^n$ küresinin Ricci tensörü $Ric = (n-1)g_0$ olduğundan $\lambda = (n-1) - m\frac{\tau-u}{u}$ için, $\mathbb{S}^n$ küresi aşikar olmayan(non-trivial) $(-\frac{m}{u})$- gradiyent almost Ricci solitondur.

Örnek 5.1.9. [5] $n \geq 2$ için $(\mathbb{R}^n, g_0)$ Öklid uzayında τ bir reel parametre olmak üzere, $f = -mln(\tau + |x|^2)$ olsun. Bu durumda, $u = e^{-\frac{f}{m}} = \tau + |x|^2$ dir. Buradan,

$$\nabla^2 u = \nabla^2(\tau + |x|^2) = \nabla^2 |x|^2$$

ve her $Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla^2|x|^2)(Y,Z) &= (\nabla_Z \nabla |x|^2)(Y) \\ &= \nabla_Z(\nabla|x|^2(Y)) - \nabla|x|^2(\nabla_Z Y) \\ &= \nabla_Z\langle\nabla|x|^2, Y\rangle - \langle\nabla_Z Y, \nabla|x|^2\rangle \\ &= \langle\nabla_Z\nabla|x|^2, Y\rangle\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Diğer taraftan, $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ olduğundan $\nabla|x|^2 = 2x$ dir. Buradan, $\nabla_Z\nabla|x|^2 = 2Z$ ve

$(\nabla^2|x|^2)(Y,Z) = \langle\nabla_Z\nabla|x|^2, Y\rangle = 2\langle Z, Y\rangle$

olarak bulunur. Buradan, $\nabla^2|x|^2 = 2g_0$ dır. Böylece,

$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -\frac{m}{u}\nabla^2 u$ olduğundan

$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -2\frac{m}{u} g_0$ olarak bulunur. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ uzayı Ricci flat olduğundan, $\lambda = -2\frac{m}{u}$ için $(\mathbb{R}^n, g_0)$ uzayı aşikar olmayan(non-trivial) $-(\frac{m}{u})$- gradiyent almost Ricci solitondur.

5.2. Quasi-Einstein Manifoldları Üzerinde İntegral Formülleri

Barros ve Ribeiro 2012 yılında yaptıkları çalışmada m-quasi-Einstein manifoldunda bir f fonksiyonunun gradiyenti ∇f yerine bir X vektör alanı alarak m-Bakry-Emery tensörünü

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2} L_X g - \frac{1}{m} X^\flat \otimes X^\flat$$

eşitliğiyle tanımlamışlardır [4]. Burada $X^\flat$, X vektör alanına karşılık gelen 1-formdur. Buna göre, λ reel sayısı için m-quasi-Einstein manifoldu (M^n, g, X, λ)

$$Ric + \frac{1}{2} L_X g - \frac{1}{m} X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g \tag{5.17}$$

eşitliğiyle verilebilir.

Buradan, $X \in \chi(M)$ için $X^\flat(X) = \langle X, X\rangle$ olduğundan

$$Ric(X,X) + \langle \nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda |X|^2 \tag{5.18}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, (5.17) eşitliğinin izi alındığında

$$R + divX - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n$$

olarak bulunur.

Tanım 5.2.1. [4] (M^n, g, X, λ) dörtlüsüne, $X \equiv 0$ ise *aşikar(trivial) m-quasi-Einstein manifoldu* denir.

Yukarıdaki tanıma göre, bir m-quasi-Einstein manifoldunun aşikar(trivial) oluşu Einstein manifoldu olmasına denktir.

Bu kısımda m-quasi-Einstein manifoldları için integral formülleri verilerek bu manifoldların rijit olma durumları incelenecektir [4].

Lemma 5.2.2. [4] (M^n, g, X, λ) *m-quasi-Einstein manifoldu olsun. Bu durumda,*

(1) $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2 divX$

(2) $\frac{1}{2}(\Delta - D_X)|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 + \frac{1}{m}|X|^2(2divX - |X|^2)$

(3) M^n *kompakt ve* $\nabla X = 0$ *ise,* $X = 0$

özellikleri sağlanır.

İspat: (5.17) eşitliğinin her iki yanının divergensi alınarak,

$$divRic + \frac{1}{2}divL_X g - \frac{1}{m}div(X^\flat \otimes X^\flat) = 0$$

olur. Bu eşitlikte daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği kullanılarak,

$$\nabla R + divL_X g - \frac{2}{m}divXX^\flat - \frac{2}{m}(\nabla|X|^2)^\flat = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan, her $Z \in \chi(M)$ için

$$\langle \nabla R, Z\rangle + divL_X g(Z) - \frac{2}{m}X^\flat(Z)divX - \frac{2}{m}(\nabla|X|^2)^\flat(Z) = 0$$

elde edilir. Ayrıca $Z = X$ için,

$$div(L_X g)(X) = -\langle \nabla R, X\rangle + \frac{2}{m}divXX^\flat(X) + \frac{1}{m}(L_X g)(X,X) \qquad (5.19)$$

olduğu görülür. (5.19) eşitliğinde, $\nabla R + \nabla divX = \frac{1}{m}\nabla|X|^2$ eşitliği ve (2.10) eşitliği kullanılarak (1) eşitliği gösterilmiş olur.

Ayrıca, (1) eşitliğinde (5.18) eşitliği kullanılarak (2) eşitliği kolaylıkla gösterilir.

(3) ün ispatı için M^n kompakt ve $\nabla X = 0$ olsun. Bu durumda, $|X|$ sabit ve $divX = 0$ dır. Böylece, (1) eşitliğinden $Ric(X,X) = 0$ olur. Buradan, (5.18) eşitliği göz önüne alınarak

$$\frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2 = 0 \qquad (5.20)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\lambda \geq 0$ ise ispat açıktır. $\lambda < 0$ durumunda $X \neq 0$ olsun. Buna göre, (5.20) eşitliğinden $\lambda = -\frac{1}{m}|X|^2$ olarak bulunur. Böylece, her $Y \in \chi(M)$ için

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{m}X^\flat(X)X^\flat(Y) - \frac{1}{m}|X|^2 g(X,Y) = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan, M^n Ricci flat manifolddur.

Diğer taraftan, X vektör alanına dik sıfırdan farklı her Y vektör alanı için $Ric(Y,Y) = \frac{1}{m}(\langle X,Y\rangle^2 - |X|^2|Y|^2) = -\frac{1}{m}|X|^2|Y|^2 < 0$ olduğundan M^n manifoldunun Ricci flat olması ile çelişki elde edilir. Böylece, $\lambda < 0$ için $X = 0$ dır. □

Teorem 5.2.3. [4] *$n \geq 3$ olmak üzere, (M^n, g, X, λ) kompakt m-quasi-Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, aşağıdaki özelliklerin biri sağlanıyor ise M^n, Einstein manifoldudur.*

(1) $\int_M Ric(X,X)dM \leq \frac{2}{m}\int_M |X|^2 divXdM.$

(2) *X konformal vektör alanıdır ve* $\int_M Ric(X,X)dM \leq 0.$

(3) *$|X|$ fonksiyonu sabit ve* $\int_M Ric(X,X)dM \leq 0.$

İspat: Lemma 5.2.2 de (1) eşitliğinin M^n manifoldu üzerinden integrali alınırsa M^n manifoldu kompakt olduğundan,

$$\int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M Ric(X,X)dM - \frac{2}{m}\int_M |X|^2 divXdM \tag{5.21}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı sıfırdan küçük eşit olduğundan $\nabla X = 0$ olduğu görülür. Buna göre, Lemma 5.2.2 de (3) den M^n, Einstein manifoldudur.

(2) nin ispatında X vektör alanı konformal vektör alanı olduğundan

$$L_X g = 2\rho g \tag{5.22}$$

eşitliği sağlanacak şekilde M^n üzerinde ρ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır. Buradan $\langle \nabla_X X, X\rangle = \rho|X|^2$ eşitliği elde edilir. Ayrıca, (5.22) eşitliğinin her iki yanının izi alınarak

$$divX = n\rho$$

olarak bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} div(X|X|^2) &= |X|^2 divX + 2\langle \nabla_X X, X\rangle \\ &= (n+2)\rho|X|^2 \end{aligned}$$

dir. Burada Stokes teoreminden M^n manifoldu kompakt olduğundan

$$\int_M \rho|X|^2 dM = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan (5.21) eşitliği ve $\int_M Ric(X,X)dM \leq 0$ olduğundan $\nabla X = 0$ olarak bulunur. Böylece, M^n Einstein manifoldudur.

Son olarak $|X|$ fonksiyonu sabit olduğundan (5.21) eşitliğinden

$$\int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M Ric(X,X)dM$$

eşitliği elde edilir. Yine $\int_M Ric(X,X)dM \leq 0$ olduğu hipotezinden yararlanarak $\nabla X = 0$ olduğu görülür. Buradan, $X \equiv 0$ ve M^n Einstein manifoldudur. $\square$

6. *m*-QUASI-EINSTEİN MANİFOLDLARI VE CONCİRCULAR VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde, potansiyel vektör alanı ∇f concircular vektör alanı olan $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ m-quasi Einstein manifoldlarının rijit olması ile ilgili elde edilen bazı yeni sonuçlar verilecektir [25].

6.1. Giriş

(M^n, g) Riemann manifoldu üzerinde λ reel sayısı için $0 < m \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g \tag{6.1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde f fonksiyonu varsa, M^n manifolduna m-quasi-Einstein manifoldu denir.

$(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ m-quasi-Einstein manifoldu üzerinde $\nabla f = 0$ ise, M^n manifolduna aşikar(trivial) m-quasi-Einstein manifoldu denir.

(6.1) eşitliğinin her iki yanının izi alınarak,

$$R + \Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 = n\lambda \tag{6.2}$$

eşitliği elde edilir.

(M^n, g) Riemann manifoldu üzerinde her $Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_Y X = \mu Y \tag{6.3}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı μ fonksiyonu varsa X vektör alanına concircular vektör alanı olduğu biliniyor. Ayrıca, bir f fonksiyonunun gradiyenti için (3.11) eşitliğine göre,

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = \mu \nabla f$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının izi alınırsa,

$$\Delta f = n\mu$$

olduğu görülür. Buradan M^n manifoldu kompakt olduğunda μ fonksiyonunun sıfır olduğu açıktır. Bu yüzden bu kısımda M^n manifoldunun kompakt olma durumu ihmal edilecektir.

Özel olarak, (6.3) eşitliğinde $\mu = 1$ ise X vektör alanına concurrent vektör alanı denir [10].

Lemma 6.1.1. [25] $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, *potansiyel vektör alanı* ∇f *concircular vektör alanı olan m- quasi-Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{2n}{m}\mu|\nabla f|^2, \tag{6.4}$$

$$\frac{\nabla R}{2} = \frac{(m+n-1)}{m}Ric\nabla f - \frac{n-1}{m}((1-n)\lambda + n\mu + R)\nabla f, \tag{6.5}$$

$$\frac{\nabla R}{2} - (\frac{n+1}{m})\mu\nabla f + \nabla\mu = 0. \tag{6.6}$$

İspat: (2.11) eşitliğinde $\Delta f = n\mu$ yazılarak,

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = 2(div\nabla^2 f)\nabla f + |\nabla^2 f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - n\langle\nabla f, \nabla\mu\rangle \tag{6.7}$$

eşitliği elde edilir. (6.1) eşitliğinin divergensi alınırsa,

$$divRic + div\nabla^2 f - \frac{n}{m}\mu\nabla f - \frac{1}{m}\mu\nabla f = 0 \tag{6.8}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte Lemma 2.3.21 kullanılarak

$$2div\nabla^2 f(\nabla f) + \langle\nabla R, \nabla f\rangle - \frac{2n}{m}\mu|\nabla f|^2 - \frac{2}{m}\mu|\nabla f|^2 = 0 \tag{6.9}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, (6.2) eşitliğinin kovaryant türevi alınarak

$$\nabla R + n\nabla\mu - \frac{2}{m}\mu\nabla f = 0 \tag{6.10}$$

eşitliği bulunur. Böylece bu eşitlik, (6.9) ve (6.7) eşitlikleri ile birlikte göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \langle n\nabla\mu - \frac{2}{m}\mu\nabla f, \nabla f\rangle + \frac{2n}{m}\mu|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\mu|\nabla f|^2 \\
&+ |\nabla^2 f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - n\langle\nabla f, \nabla\mu\rangle \\
&= |\nabla^2 f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{2n}{m}\mu|\nabla f|^2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(6.5) eşitliğinin ispatı için, daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği, (6.8) ve (2.12) eşitlikleri birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla R &= 2divRic \\
&= -2div(\nabla^2 f) + 2(\frac{n+1}{m})\mu\nabla f \\
&= -2Ric\nabla f - 2n\nabla\mu + 2(\frac{n+1}{m})\mu\nabla f
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ve (6.10) eşitliğinden,

$$\nabla R = 2Ric\nabla f - 2(\frac{n-1}{m})\mu\nabla f \tag{6.11}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, m- quasi-Einstein manifoldunu karakterize eden denklemin $(1,1)$- tensör gösterimi

$$\mu\nabla f = \lambda\nabla f + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f - Ric\nabla f$$

olduğundan ve (6.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\nabla R &= 2Ric\nabla f - 2(\frac{n-1}{m})(\lambda\nabla f + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f - Ric\nabla f) \\
&= \frac{2}{m}(m+n-1)Ric\nabla f - 2(\frac{n-1}{m})((1-n)\lambda + n\mu + R)\nabla f
\end{aligned}$$

dir.

Son eşitliği göstermek için ∇f concircular vektör alanı olduğundan (3.11) eşitliği (6.1) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$Ric - \frac{1}{m}df\otimes df = (\lambda - \mu)g$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin iki yanının divergensi alınarak

$$divRic - \frac{1}{m}(\Delta f \nabla f) - \frac{1}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f = -\nabla\mu$$

eşitliği elde edilir. Burada, daraltılmış ikinci Bianchi eşitliği bir kez daha ve $R = n(\lambda - \mu) + \frac{1}{m}|\nabla f|^2$ eşitliği kullanılarak

$$\frac{\nabla R}{2} - \frac{n}{m}\mu\nabla f - \frac{1}{m}\mu\nabla f + \nabla\mu = 0$$

olarak bulunur. □

Not 6.1.2. [25] $|\nabla f|^2$ fonksiyonu sabit ve ∇f sıfırdan farklı concircular vektör alanı olduğunda $\nabla f = 0$ olmak zorundadır. Bu durumda, yukarıdaki lemmanın ilk eşitliğine göre $Ric(\nabla f, \nabla f) = 0$ olarak bulunur. Buradan, M^n Ricci flat manifolddur.

6.2. m-quasi-Einstein Manifoldları İçin Karakterizasyonlar

Teorem 6.2.1. [25] $n \geq 3$ *olmak üzere* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, ∇f *potansiyel vektör alanı,* μ *potansiyel fonksiyonu ile verilen concircular vektör alanı olan tam(complete) m-quasi-Einstein manifoldu olsun. Aşağıdaki özelliklerden biri sağlanıyor ise* M^n, *Einstein manifoldudur.*

1. μ *potansiyel fonksiyonu* $|\nabla f|^2$ *fonksiyonuna eşittir.*

2. $\langle \nabla\mu, \nabla f\rangle \neq 0$.

3. $\langle \nabla R, \nabla f\rangle = 0$.

İspat: ∇f concircular vektör alanı ve $\mu = |\nabla f|^2$ olduğundan,

$$\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) = |\nabla f|^2 g(\nabla f, \nabla f)$$

ve

$$(df \otimes df)(\nabla f, \nabla f) = |\nabla f|^2 g(\nabla f, \nabla f)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikler (6.1) eşitliğinde yerine yazılarak

$$Ric = (\lambda + (\frac{m+1}{m})\mu)g$$

eşitliği elde edilir. Böylece, M^n Einstein manifoldudur.

Şimdi $div\nabla^2 f = div(\mu g) = \nabla\mu$ olduğundan (2.12) eşitliği kullanılarak,

$$Ric\nabla f = (1-n)\nabla\mu \tag{6.12}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $Ric\nabla f = \lambda\nabla f + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f - \mu\nabla f$ ve (6.12) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(1-n)\nabla\mu = (\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \mu)\nabla f \tag{6.13}$$

olarak bulunur. Bu durumda (6.12) ve (6.13) eşitliklerinden sırasıyla,

$$(1-n)\langle\nabla\mu, \nabla f\rangle = Ric(\nabla f, \nabla f)$$

ve

$$(1-n)\langle\nabla\mu, \nabla f\rangle = (\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \mu)|\nabla f|^2$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\langle\nabla\mu, \nabla f\rangle \neq 0$ ise, bu durumda

$$Ric = (\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \mu)g$$

eşitliği elde edilir. Buradan M^n, Einstein manifoldudur.

Son önermenin ispatı için Lemma 6.1.1 de (6.6) eşitliği kullanılarak,

$$\langle\nabla R, \nabla f\rangle = \frac{2(n+1)}{m}\mu|\nabla f|^2 - 2\langle\nabla\mu, \nabla f\rangle$$

eşitliği elde edilir. $\langle\nabla R, \nabla f\rangle = 0$ kabulüne göre,

$$\nabla\mu = \frac{n+1}{m}\mu\nabla f$$

olarak bulunur. Bu durumda, (6.12) eşitliğinden

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = (1-n)\langle\frac{n+1}{m}\mu\nabla f, \nabla f\rangle$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$Ric = \frac{(1-n)(n+1)}{m}\mu g$$

dir. Böylece M^n Einstein manifoldudur. □

Önerme 6.2.2. [25] *$n \geq 3$ olmak üzere, $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ m-quasi-Einstein manifoldu ve ∇f potansiyel alanı concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda, M^n manifoldunun skalar eğriliği $R = n(\lambda - 1) + \frac{n}{m}|\nabla f|^2$ sabittir.*

İspat: ∇f potansiyel alanı concurrent vektör alanı olduğundan, $\nabla^2 f = g$ olduğu görülür. Bu durumda,

$$Ric = (\lambda - 1)g + \frac{1}{m} df \otimes df$$

ve

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = (\lambda - 1)g(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 g(\nabla f, \nabla f)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$Ric = (\lambda - 1 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2)g$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 3$ olduğundan Schur lemmadan

$R = n(\lambda - 1) + \frac{n}{m}|\nabla f|^2$ skalar eğriliği sabittir. □

Uyarı 6.2.3. [25] M^n manifoldu kompakt ve ∇f sıfırdan farklı concircular vektör alanı ise, bu durumda Stokes formülü kullanılırsa

$$0 = \int_M div \nabla f dM = n\mu vol(M)$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $\mu = 0$ dır. Sonuç olarak, ∇f Killing vektör alanıdır, yani $L_{\nabla f} g = 0$ dır. Bu durumda, $\frac{1}{2}\langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f \rangle = 0$ eşitliği elde edilir. Böylece, $\nabla f = 0$ veya $|\nabla f|^2$ sabit fonksiyondur. ∇f sıfırdan farklı vektör alanı olduğundan $|\nabla f|^2$ fonksiyonu sabittir.

Uyarı 6.2.4. [25] $n \geq 3$ olmak üzere, $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ aşikar olmayan(non-trivial) m-quasi-Einstein manifoldu olsun. Eğer $|\nabla f|^2$ fonksiyonu sabit ise, bu durumda $R = n\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2$ skalar eğriliği sabittir. Böylece, M^n manifoldu Einstein manifoldudur. Tersine, skalar eğriliğin sabit olması $|\nabla f|^2$ fonksiyonunun sabit olmasını gerektirmez. Bu durum için aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 6.2.5. [25] $n \geq 3$ *olmak üzere,* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *aşikar olmayan(non-trivial) m-quasi-Einstein manifoldu ve* M^n *manifoldunun skalar eğriliği sabit olsun.* $Ric(\nabla f)R = 0$ *ise bu durumda,* ∇f *potansiyel alanı concircular vektör alanıdır.*

İspat: (6.1) eşitliğine göre,

$$Ric(\nabla f, \nabla R) + \nabla^2 f(\nabla f, \nabla R) - \frac{1}{m} df \otimes df(\nabla f, \nabla R) = \lambda g(\nabla f, \nabla R) \qquad (6.14)$$

olarak yazılabilir. $Ric(\nabla f)R = Ric(\nabla f, \nabla R) = 0$ olduğundan (6.14) eşitliğinde, $(1,1)$- tensör gösterimi kullanılırsa,

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \nabla f = \lambda \nabla f$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $\mu = \lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2$ fonksiyonu sabittir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Açıkgöz Kaya, D., Onat, L. 2017. Almost Ricci Solitons and Concircular Vector Fields, **An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)** 63(1), basım aşamasında.

[2] Barros, A., Ribeiro Jr, E. 2011. Some Characterizations for Compact Almost Ricci Solitons, **Proc. Am. Math. Soc.** 140(3): 1033-1040.

[3] Barros, A., Batista, R., Ribeiro Jr, E. 2014. Compact Almost Ricci Solitons with constant scalar curvature are gradient, **Monatsh Math.** 174: 29-39.

[4] Barros, A., Ribeiro Jr, E. 2012. Integral Formulae On Quasi-Einstein Manifolds and Applications, **Glasgow Math. J.** 54: 213-223.

[5] Barros, A., Ribeiro Jr, E. 2014. Characterizations and Integral Formulae for Generalized m-Quasi-Einstein Metrics, **Bull. Braz. Math. Soc. New Series** 45(2): 325-341.

[6] Besse, A. 1987. Einstein Manifolds. Springer-Verlag, 510s, Berlin.

[7] Cao,H.-D. 2006. Geometry of Ricci Solitons, **Chinese Ann. of Math., Series B** 127(2): 121-142.

[8] Case, J., Shu, Y.-J., Wei, G. 2011. Rigidity of Quasi-Einstein Metrics, **Diff. Geom. and its Appl.** 29: 93-100.

[9] Catino, G. 2012. Generalized Quasi-Einstein Manifolds with Harmonic Weyl Tensor, **Math. Z.** 271: 751-756.

[10] Chen, B.-Y. 2015. Some Results on Concircular Vector Fields and Their Applications to Ricci Solitons, **Bull. Korean Math. Soc.** 52(5): 1535-1547.

[11] Chen, B.-Y. 1973. Geometry of submanifolds. Marcel Dekker, 298s, New York.

[12] Chen, B.-Y., Deshmukh, S. 2014. Geometry of Compact Shrinking Ricci Solitons, **Balkan J. of Geom. and its Appl.** 19(1): 13-21.

[13] Cho, J.T., Kimura, M. 2012. Ricci solitons on locally conformally flat hypersurfaces in space forms, **Journal of Geom. and Physics** 62: 1882-1891.

[14] Chow, B., Lu, P., Ni,L. 2006. Hamilton's Ricci Flow. American Mathematical Soc. 608s.

[15] Chow B., Knopf D. 2004. The Ricci Flow: An introduction. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., 325s, Providence, RI.

[16] Derdzinski, A. 2006. A Myers-type theorem and compact Ricci solitons, **Proc. Amer. Math. Soc.** 134(12) :3645-3648.

[17] Eminenti, M., La Nave, G., Mantegazza, C. 2008. Ricci solitons-the equation point of view, **Manuscripta Math.** 127: 345-367.

[18] Gallot, S., Hulin, D.,Lafontaine, J. 1990. Riemannian Geometry. Springer, 322s, New York.

[19] Fernandez-Lopez, M., Garcia-Rio, E. 2011. Rigidity of shrinking Ricci solitons, **Math. Z.** 269: 461-466.

[20] Gomes, J.N., Wang, Q., Xia, C. 2015. On the h- Almost Ricci Solitons. preprint, arXiv:1411.6416].

[21] Hamilton, R.S. 1982. Three-manifolds with positive Ricci curvature, **Differ. Geom.** 17(2):255-306.

[22] Hamilton, R.S. 1995. The formation of Singularities in the Ricci flow, Surveys in Differential Geometry, International Press, 2:7-136, Cambridge.

[23] Ivey, T. 1993. Ricci solitons on compact three-manifolds, **Differ. Geom. and its Appl.** 3: 301-307.

[24] Kim, D.-S., Kim, Y.H. 2003. Compact Einstein Warped Product Spaces with Nonpositive Scalar Curvature, **Proc. Amer. Math. Soc.** 131:2573-2576.

[25] Onat, L., Açıkgöz Kaya, D. 2017. m-Quasi-Einstein Manifoldları ve Concircular Vektör Alanları, inceleme aşamasında.

[26] O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relavity. Academic Press, 456s, London.

[27] Perelman, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, **arXiv:math. DG/0211159v1**.

[28] Petersen, P., Wylie, W. 2009. Rigidity of gradient Ricci solitons, **Pacific J. Math.** 241(2): 329-345.

[29] Pigola, S., Rigoli, M., Rimoldi, M., Setti, A. 2011. Ricci Almost Solitons, **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.** 10(4): 757-799.

[30] Sharma, R. 2014. Almost Ricci Solitons and K-contact Geometry, **Monatsh Math.** 175: 621-628.

[31] Tanno, S., Weber, W.1969. Closed Conformal Vector Fields, **J.Diff. Geom.** 3: 361-366.

[32] Yano, K. 1970. Integral Formulas in Riemannian Geometry. Marcel Dekker, Inc., New York.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Dilek AÇIKGÖZ KAYA
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Keçiören, 12.11.1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Doktora Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI :

Onat, L., Açıkgöz Kaya, D. 2017. m-Quasi-Einstein Manifoldları ve Concircular Vektör Alanları, submitted.

-Diğer :

Açıkgöz Kaya, D., Onat, L. 2017. Almost Ricci Solitons and Concircular Vector Fields, **An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)**, in print.

b) Bildiriler

-Uluslararası :

-Ulusal :

c) Katıldığı Projeler

Açıkgöz Kaya, D., Ricci Solitonlar, Lisansüstü Tez Projesi(Doktora), Araştırmacı, 2017-

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. (2009 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	dilek.acikgoz@adu.edu.tr
Tarih	:	