T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2016-DR-007

Q-CALCULUS'UN ÖZEL FONKSİYONLARA UYGULAMALARI

Emrah YILDIRIM

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. İnci EGE

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Emrah YILDIRIM tarafından hazırlanan "Q-Calculus'un Özel Fonksiyonlara Uygulamaları" başlıklı tez, 04.11.2016 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ	Hacettepe Fen Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Doç. Dr. Rasim DERMEZ	AKÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Doç. Dr. Ümit TOTUR	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Doç. Dr. İnci EGE	ADÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

04.11.2016

Emrah YILDIRIM

ÖZET

Q-CALCULUS'UN ÖZEL FONKSİYONLARA UYGULAMALARI

Emrah YILDIRIM

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. İnci EGE
2016, 86 sayfa

Bu tezin amacı, klasik analizde verilen bazı özel fonksiyonların q-analoglarını tüm gerçel değerlere genişletmek ve bu fonksiyonların tanım kümeleri üzerinde geçerli olan özellikleri tüm gerçel değerlere taşımaktır. Bunun için Van der Corput tarafından geliştirilen neutrix ve neutrix limit kavramlarından yararlanılmıştır.
Çalışma sekiz bölümünden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra ikinci bölümde, quantum calculus ile ilgili tezin diğer bölümlerinde sıklıkla kullanılacak bilgilere ve üçüncü bölümde ise neutrix ve neutrix limit kavramları ile örneklerine yer verilmiştir.
Dördüncü bölümden itibaren çalışmada elde edilen sonuçlar yer almaktadır.
Dördüncü bölümde, klasik gama fonksiyonunun q-analoğu olan q-gama fonksiyonu $\Gamma_q(x)$ için tüm gerçel değerlerde sağlanan özellikler verilmektedir.
Beşinci bölümde, $\gamma_q^{(n)}(\alpha,x)$ tam olmayan q-gama fonksiyonunun birinci mertebeden türeviyle beraber neutrix limit yardımıyla elde edilen sonuçlar bulunmaktadır.
Altıncı bölümde, polygama fonksiyonunun q-genişlemesi $\psi_{q,n}(x)$, neutrix ve neutrix limit kavramlarından yararlanılarak tüm gerçel değerlere genişletilmiştir.
Yedinci bölümde, q-beta fonksiyonunun normalde tanımlı olmadığı negatif tamsayılar ve sıfır değerlerinde neutrix limit ile elde edilen tanımından yararlanılarak bulunan bazı sonuçlar yer almaktadır.
Sekizinci ve son bölümde beta fonksiyonu $B(x,y)$ ve q-beta fonksiyonu $B_q(x,y)$ için eşitsizlikler elde edilmektedir.

Anahtar Sözcükler: Neutrix, Neutrix Limit, q-türev, q-integral, q-Gama fonksiyonu, q-Beta Fonksiyonu, q-Polygama Fonksiyonu

ABSTRACT

APPLICATIONS OF q-CALCULUS TO SPECIAL FUNCTIONS

Emrah YILDIRIM

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assos. Prof. İnci EGE
2016, 86 pages

The objective of this thesis is to extend q-analogues of special functions at classical analysis and generalize some properties on the domains of these functions for all real numbers. For this purpose, the concepts of neutrix and neutrix limit, which was developed by Van der Corput, have been used.

This study consists of eight sections. In the second section after introduction , some definitions and properties which will be used frequently in the other sections about quantum calculus and then in the third section, definitions of neutrix and neutrix limit with their examples are given.

From the forth section, the results obtained in this study is presented.

In the forth section, the properties on q-gamma function $\Gamma_q(x)$ which is the q-analogue of classical gamma function are given.

The fifth section consists of some results on incomplete q-gamma function and its first derivative obtained by using neutrix and neutrix limit.

In the sixth section, q-analogue of polygamma function $\psi_{q,n}(x)$ is extended for all real numbers by the aid of neutrix and neutrix limit.

In the seventh section, some results which are obtained by using neutrix limit of q-beta function at zero and negative integers for which this function is not definite actually are presented.

In the eight and last section, some inequalities for beta function $B(x,y)$ and q-beta function $B_q(x,y)$ functions are given.

Key Words: Neutrices, Neutrix Limit, q-derivative, q-integral, q-Gamma Function, q-Beta Function, q-Polygamma Function

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşturulmasında derin bilgi ve birikiminden faydalandığım, değerli görüşlerini ve yardımlarını esirgemeyen ve ayrıca beni ailesinden biri olarak görüp her türlü zorlukta yanımda olan danışmanım sayın Doç. Dr. İnci EGE'ye (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) yürekten teşekkür ederim. Hayatıma girdiğinden beri her koşulda yanımda olan, bu çalışma süresince hayatımı kolaylaştıran sevgili Dr. Yasemin KEMER'e (Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü) göstermiş olduğu sabır ve anlayışından ötürü şükranlarımı sunarım. Aydın'a ilk geldiğimde tanıştığım ve o günden beri hep yanımda olan Dr. Emre ERDAN'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Arkeoloji Bölümü) teşekkür ederim. Tezin oluşmasındaki katkılarından dolayı Tez İzleme Komitesi Sunumu üyeleri Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ (Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü)ve Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu FEF-14011 kod numaralı bilimsel araştırma projesi tarafından desteklenmiştir.

Emrah YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$[x]$	Bir x sayısının q-analoğu
$[n]!$	Bir n pozitif tamsayısının q-analoğunun faktöriyeli
$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$	q-kombinasyon
$(x-a)_q^n$	$(x-a)^n$ ifadesinin q-analoğu
$d_q f$	f fonksiyonunun q-diferansiyeli
$D_q f$	f fonksiyonun q-türevi
e_q^x	e^x klasik üstel fonksiyonunun bir q-genişlemesi
E_q^x	e^x klasik üstel fonksiyonunun bir q-genişlemesi
$\int f(x) d_q x$	Bir f fonksiyonunun q-integrali
$\mathcal{N}$	Neutrix
$H(x)$	Heaviside fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$\Gamma_q(x)$	Gama fonksiyonunun q-analoğu
$B(x,y)$	Beta fonksiyonu
$B_q(x,y)$	Beta fonksiyonunun q-analoğu
$\gamma(\alpha,x)$	Tam olmayan gama fonksiyonu
$\gamma_q(\alpha,x)$	Tam olmayan gama fonksiyonunun q-analoğu
$\psi_q(x)$	q-digama veya q-psi fonksiyonu
$\psi_{q,n}(x)$	Polygama fonksiyonunun q-analoğu
$C[a,b]$	[a,b] kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$\square$	Kanıtın bittiğini gösteren simge
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Jackson'ın Quantum calculusu veya kısaca q-calculusu sistematik olarak geliştirmesi ile beraber bir çok matematikçi, analizdeki yapıları bu yeni calculusa taşımaya başlamıştır. Araştırmacılar; özellikle son yıllarda, özel fonksiyonların q-analoglarının genelleştirilmesi, eşitlikleri, eşitsizlikleri ve monotonlukları üzerine sonuçlar elde etmektedirler. Bu tezin amacı, Van der Corput tarafından tanımlanan neutrix ve neutrix limit kavramları yardımıyla q-özel fonksiyonların tanım kümelerinin tüm gerçel sayılara genişletilip genişletilemeyeceği ve bu fonksiyonların bazı özelliklerinin de tüm gerçel değerler için sağlanıp sağlamayacağını araştırmaktır. Tez sekiz bölümden oluşmakta olup ikinci ve üçüncü bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde sıklıkla kullanılacak olan temel bilgilere ve diğer beş bölümde ise elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, q-calculus ile ilgili, tezin sonraki bölümlerinde yararlanılacak olan bilgiler, konunun anlaşılması ve okuyucunun istediği bilgiye daha rahat ulaşması amacıyla beş alt bölüme ayrılmıştır. Bu ve diğer bölümlerde $q \in (0,1)$ olarak alınacaktır. Bir $\mathcal{M}$ matematiksel nesnesinin $\mathcal{M}_q$ q-analoğunun kesin bir tanımı olmamakla beraber, genel kabul $q \to 1$ iken $\mathcal{M}_q$ q-analoğunun $\mathcal{M}$ matematiksel nesnesine yakınsamasıdır. Bu nedenle bir matematiksel nesnenin birden fazla q-analoğu olabilir.

İlk olarak bir sayının, faktöriyelin, kombinasyonun ve $(x-a)_q^n$ ifadesinin q-analoğu tanımları ve özellikleri verildikten sonra q-diferansiyel ve q-türev yapılarından bahsedilecektir. Ardından q-Taylor formülü verildikten sonra biraz önce bahsedilen matematiksel nesnenin birden fazla q-analoğu olabileceğine örnek olarak e^x üstel fonksiyonu ele alınacaktır. Daha sonra q-ters türevi, Jackson integrali ve bu integralin geometrik yorumu, belirli ve belirsiz q-integralinin tanımı, integraller için analizin temel teoremi verilecektir. Son olarak, q-özel fonksiyonlarından q-gamma $\Gamma_q(x)$ ile q-beta $B_q(x,y)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonların özelliklerine yer verilecektir.

Üçüncü bölümde, Van der Corput [35] tarafından geliştirilen neutrix ve neutrix limit kavramları örnekler ile açıklandıktan sonra q-calculustaki özel fonksiyonlara uygulamasına örnek olarak q-gama fonksiyonunun herhangi bir mertebeden türevi $\Gamma_q^{(n)}(x)$ verilecektir [27].

Salem'in $\Gamma_q^{(n)}(x)$ fonksiyonun tüm gerçel değerler için verdiği tanımdan yararlanarak dördüncü bölümde q-gama fonksiyonu ve birinci türevi $\Gamma'_q(x)$ için tüm gerçel değerlerde geçerli bazı sonuçlar elde edilecektir [27]. Elde edilen sonuçlar, $q \to 1$ iken Fisher ve Kuribayashi [12, 14] tarafından gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ için verilen sonuçlarla aynıdır.

Beşinci bölümde, Salem'in 2012 yılındaki [28] çalışmasında verilen $\gamma_q^{(n)}(x,\alpha)$ tam olmayan q-gama fonksiyonun tanımından yararlanarak bu fonksiyonun birinci mertebeden türeviyle beraber tüm gerçel değerlerde geçerli eşitlikler elde edilecektir. Ayrıca bu bölümde elde edilen sonuçlar, $x \to \infty$ iken dördüncü bölümdeki sonuçlarla, $q \to 1$ iken Özçağ ve diğerleri [25] tarafından elde edilen sonuçlarla aynıdır. Böylece dördüncü bölümdeki sonuçlar ile birlikte, $\Gamma(x)$ gama, $\gamma(x,\alpha)$ tam olmayan gama, $\Gamma_q(x)$ q-gama ve $\gamma_q(x,\alpha)$ tam olmayan q-gama fonksiyonları için

$$\begin{array}{ccc} \gamma_q(x,\alpha) & \xrightarrow{\alpha\to\frac{1}{1-q}} & \Gamma_q(x) \\ {\scriptstyle q\to1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q\to1} \\ \gamma(x,\alpha) & \xrightarrow{\alpha\to\infty} & \Gamma(x) \end{array}$$

şeklinde değişmeli diyagramı elde edilmektedir.

q-Polygama fonksiyonu, $x > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ değerleri için q-integrali ile

$$\psi_{q,n}(x) = \frac{\ln q}{1-q}\int_0^q \frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t} d_q t$$

ile tanımlanmaktadır [19]. Bu fonksiyon neutrix limit yardımıyla altıncı bölümde x'in tüm gerçel değerlerine genişletilecektir. Bu sonuçlar, $q \to 1$ iken [23], [24] ve [30] çalışmalarında verilen sonuçlara yakınsadığından, $\psi_{q,n}(x)$ fonksiyonu $\psi(x)$

polygama fonksiyonunun bir q-genişlemesidir.

Yedinci bölümde, Ege [5] tarafından neutrix limit yardımyla tüm x, y gerçel değerleri için tanımlanan $B_q(x,y)$ q-beta fonksiyonunun x ve y değişkenlerinin pozitif olmayan tamsayı değerlerinde kendisi ile ifade edilebileceğini gösteren bazı eşitlikler verilecektir. Bu sonuçlar, $q \to 1$ iken [1], [2], [3], [10] çalışmalarındaki sonuca yakınsamaktadır.

Mercer 2006 yılında yaptığı çalışmada iki sürekli fonksiyonun bileşkesine pozitif lineer bir operatöre etki ettirerek eşitsizlik elde etmiş ve bu özelliği, analizdeki özel fonksiyonlara uygulamıştır [22]. Son bölümde ilk olarak bu teknik ispatlarıyla beraber verildikten sonra neutrix limit yardımyla tanımlanan $B(x,y)$ beta fonksiyonunun hem birinci parametresi hem de ikinci parametresi için bu tekniğin uygulanabildiği gösterilecektir. Ardından $B_q(x,y)$ q-beta fonksiyonun birinci parametresi için monotonluk sonucu elde edilecektir.

2. QUANTUM CALCULUS

Bu bölümde, F. H. Jackson tarafından sistematik olarak geliştirilen ve son zamanlarda matematik, fizik ve istatistik gibi bir çok alanda kullanılan quantum calculus veya kısaca q-calculus ile igili tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı kavramlar ve özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1. Bir sayının q-analoğu, q-faktoriyel, q-kombinasyon

Quantum calculusta türev, integral gibi kavramlara geçmeden önce bu kısımda sayı, faktoriyel gibi temel yapıların q-analoglarının tanımı ve bunların özellikleri verilip matematiksel analizdeki özelliklerin hangilerinin q-calculusa taşınabildiğinden bahsedilecektir. İlk olarak bir sayının q-analoğunun tanımı ile başlayalım.

Tanım 2.1. [17] Bir x gerçel sayının q-analoğu $[x]_q$ yada kısaca $[x]$ ile gösterilir ve

$$[x] = \frac{q^x - 1}{q - 1} \tag{2.1.1}$$

ile tanımlanır. $q \to 1$ iken $[x] \to x$ olur.

Örnek 2.2.

1.
$$[0] = \frac{q^0 - 1}{q - 1} = 0.$$

2.
$$[-n] = \frac{q^{-n} - 1}{q - 1} = -q^{-n}\frac{q^n - 1}{q - 1} = -q^{-n}[n], \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

3.
$$[\infty] = 1 + q + q^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Yukarıdaki tanım herhangi bir pozitif tamsayı için de geçerli olduğundan faktoriyel ve kombinasyonun q-analoglarının tanımları klasiktekine benzer şekilde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.3. [17] Bir pozitif n tamsayısının q-faktoriyeli,

$$[n]! = [1][2]\ldots[n] \tag{2.1.2}$$

ile tanımlanır ve $[n]!$ ile gösterilir. $n = 0$ için $[0]! = 1$ olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.4. [17] $n,\ j \in \mathbb{Z}^+$ ve $n > j$ olmak üzere n'nin j. q-kombinasyonu

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}$$

ile tanımlanır.

q-Kombinasyonun özelliklerinden biri

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

olmasıdır. Bu kombinasyon özelliği ile örtüşmesine rağmen, kombinasyondaki Pascal kuralı

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

q-kombinasyonda birebir sağlanmamaktadır. Aşağıdaki önermede, Pascal kuralının q-analoğu verilmiştir.

Önerme 2.5. [17] $1 \leq j \leq n-1$ *olmak üzere, q-Pascal kuralı*

1.

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir.

İspat: $1 \leq j \leq n-1$ değeri için

$$\begin{aligned} [n] &= 1 + q + \ldots + q^{n-1} \\ &= (1 + q + \ldots + q^{j-1}) + q^j(1 + q + \ldots + q^{n-j-1}) \\ &= [j] + q^j[n-j] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \frac{[n-1]![n]}{[j]![n-j]!} \\
&= \frac{[n-1]!([j]+q^j[n-j]}{[j]![n-j]!} \\
&= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-1]!}{[j]![n-j-1]!} \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.1.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. □

Tanım 2.6. [17] $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere; $(x-a)^n$ ifadesinin q-analoğu

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (x-a)(x-qa)\ldots(x-q^{n-1}a), & n \geq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanım, bize klasikteki ile arasında bazı farklılıkların olabileceğini göstermektedir. Örneğin $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$ biçimindedir. Gerçekten herhangi iki pozitif m ve n tamsayısı için

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^{m+n} &= \underbrace{(x-a)(x-qa)\ldots(x-q^{m-1}a)}_{(x-a)_q^m}.(x-q^m a)(x-q^{m+1}a)\ldots(x-q^{m+n-1}a) \\
&= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Bu eşitlikte m yerine $-n$ yazıldığında

$$(x-a)_q^{-n+n} = (x-a)_q^{-n}(x-q^{-n}a)_q^n$$

ve buradan da

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \tag{2.1.5}$$

bağıntısına ulaşılır.

Bu analoğun klasikten bir diğer farkı da $(a-x)_q^n \neq (-1)^n(x-a)_q^n$ olmasıdır. n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} (a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)\dots(a-q^{n-1}x) \\ &= (-1)^n(x-a)q(x-q^{-1}a)\dots q^{n-1}(x-q^{-n+1}a) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)_q^n \tag{2.1.6}$$

elde edilir.

2.2. q-Diferansiyel ve q-Türev

Analizde, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ifadesi için x değerleri x_0 noktasına yaklaşırken limiti var ise bu limit değeri, f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevini vermektedir. Fakat $q \neq 1$ olmak üzere $x = qx_0$ alındığında $q \to 1$ iken bu ifadenin limiti hesaplanamayacaktır. Burada q-türevi tanımı ortaya çıkmıştır. q-Türevi tanımını vermeden önce bu türevin tanımında kullanılacak olan q-diferansiyeli kavramından bahsedelim.

Tanım 2.7. [17] $I \subset \mathbb{R}$ aralığı, $x \in I$ iken $qx \in I$ koşulunu sağlamak üzere f, I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun f fonksiyonun q-diferansiyeli

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{2.2.7}$$

ile tanımlanır.

Örneğin; $I(x) = x$ birim fonksiyonunun q-diferansiyeli

$$d_q x = qx - x = (q-1)x$$

olur.

İki fonksiyonun çarpımının q-diferansiyeli, analizdeki gibi simetrik değildir. Gerçekten, keyfi f ve g fonksiyonları için tanımdan;

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx)-f(x)g(qx)+f(x)g(qx)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)(g(qx)-g(x))+(f(qx)-f(x))g(x) \\ &= d_qf(x)g(qx)+f(x)d_qg(x) \qquad (2.2.8) \end{aligned}$$

elde edilebileceğimiz gibi

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx)-f(qx)g(x)+f(qx)g(x)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)d_qg(x)+d_qf(x)g(x) \qquad (2.2.9) \end{aligned}$$

sonucuna da ulaşabiliriz.

Şimdi Tanım 2.7 yardımı ile q-türev tanımını verelim.

Tanım 2.8. [17] $I \subset \mathbb{R}$ aralığı, $x \in I$ iken $qx \in I$ koşulunu sağlamak üzere f, I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun q-türevi

$$D_qf(x)=\frac{d_qf(x)}{d_qx}=\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}, \quad x\neq 0 \qquad (2.2.10)$$

ve $f'(0)$ var ise

$$D_qf(0)=f'(0)$$

ile tanımlanır.

Eğer $f(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{q\to 1} D_qf(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

olur.

Normal türev gibi q-türevi de lineer bir operatördür. Yani, keyfi $a,b \in \mathbb{R}$ sabitleri ve f, g fonksiyonları için

$$\begin{aligned} D_q(af(x)+bg(x)) &= \frac{af(qx)+bg(qx)-af(x)-bg(x)}{(q-1)x} \\ &= a\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}+b\frac{g(qx)-g(x)}{(q-1)x} \\ &= aD_qf(x)+bD_qg(x) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Örnek 2.9.

1.
$$D_qx^\alpha = \frac{(qx)^\alpha - x^\alpha}{(q-1)x} = \frac{q^\alpha - 1}{q-1}x^{\alpha-1} = [\alpha]x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.2.11}$$

2.
$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.2.12}$$

3.
$$D_q\frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^na)_q^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.2.13}$$

4.
$$D_q(a-x)_q^n = -[n](a-q^nx)_q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.2.14}$$

5.
$$D_q\frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.2.15}$$

İki fonksiyonun çarpımının q-diferansiyeli simetrik olmadığından fonksiyonların çarpımının veya bölümünün q-türevi de simetrik değildir. Dolayısıyla hem çarpımın hem de bölümün q-türevi iki farklı şekilde ifade edilebilir.

Önerme 2.10. ***q-Türevin Özellikleri*** [17]

1.
$$D_q(f(x)g(x)) = D_qf(x)g(qx)+f(x)D_qg(x). \tag{2.2.16}$$

2.

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x). \qquad (2.2.17)$$

3.

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(qx)D_qf(x) - f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}, \quad g(x) \neq 0. \qquad (2.2.18)$$

4.

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}, \quad g(x) \neq 0. \qquad (2.2.19)$$

İspat:

(2.2.16) eşitliği, (2.2.8) eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{d_q(f(x)g(x))}{d_qx} = \frac{d_qf(x)g(qx) + f(x)d_qg(x)}{(q-1)x} \\ &= D_qf(x)g(qx) + f(x)D_qg(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2.2.18) eşitliğini elde etmek için,

$$g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$$

eşitliğininin her iki tarafının q-türevi alınıp eşitliğin sol tarafı için (2.2.16) eşitliği uygulanırsa

$$D_qg(x)\frac{f(qx)}{g(qx)} + g(x)D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = D_qf(x)$$

bulunur ve buradan da

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(qx)D_qf(x) - f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2.2.17) eşitliğini elde etmek için (2.2.9)eşitliğinden ve (2.2.19) eşitliğini elde etmek için (2.2.17) eşitliğinden yararlanıldığında istenilen sonuçlara ulaşılabilir. □

Bu kısımda son olarak, iki fonksiyonun bileşkesinin q-türevi için özel durumlar dışında neden genel bir zincir kuralı verilemeyeceğini örnek ile gösterelim.

$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$ sabitleri için $u(x) = \alpha x^\beta$ ile keyfi bir f fonksiyonunun $f(u(x))$ bileşkesinin q-türevini hesaplayalım. Türev tanımından

$$\begin{aligned} D_q\Big[f(u(x))\Big] &= D_q\Big[f(\alpha x^\beta))\Big] = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}\frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(q^\beta u(x)) - f(u(x))}{q^\beta u(x) - u(x)}\frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} \end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk ifade f fonksiyounun $u(x)$'deki q^β-türevine ve ikinci ifade ise u fonksiyonunun q-türevine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla bu bileşke fonksiyonun q-zincir kuralını

$$D_q\Big[f(u(x))\Big] = \Big(D_{q^\beta} f\Big)(u(x))D_q u(x) \tag{2.2.20}$$

şeklinde elde ediriz. Buradaki bileşke fonksiyonun q-türevinin elde edilmesindeki etken, $u(qx)$ değerinin $u(x)$ cinsinden ifade edilebilmesidir. Ancak $u(x) = x + x^2$ veya $u(x) = \sin x$ gibi fonksiyonları düşünüldüğünde $u(qx)$ ifadesi $u(x)$ fonksiyonu ile ifade edilemeyeceğinden bu tip fonksiyonlar için genel bir q-zincir kuralı oluşturamayız.

2.3. q-Taylor Formülü ve Üstel Fonksiyonun q-Analogları

Giriş bölümünde bir matematiksel nesnenin q-analoğunun birden fazla olabileceğinden bahsedilmişti. Buna örnek olarak; tezin sonraki kısımlarında da sıkça kullanacağımız üstel fonksiyonun iki q-analoğunun tanımlarını vereceğiz. Bu tanımları elde edebilmek için işe öncelikle Taylor serisinin q-genişlemesinin tanımı ile başlayalım.

Tanım 2.11. [17] Mertebesi N olan bir $f(x)$ polinomu ve $c \in \mathbb{R}$ sayısı için q-Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{2.3.21}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.12. a bir gerçel sayı ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $f(x) = (x+a)_q^n$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında q-Taylor seri açılımını elde edelim. Bunun için ilk olarak Örnek 2.9'daki (2.2.12) eşitliğinden yararlanarak $j \leq n$ için f fonksiyonun j. ci q-türevi hesaplanarak

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1]\ldots[n-j+1](x+a)_q^{n-j}$$

eşitliği elde edilir ve buradan Tanım 2.6'dan yararlanarak $x = 0$ için

$$(D_q^j f)(0) = [n][n-1]\ldots[n-j+1]q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j}$$

bulunur. Böylece f fonksiyonunun q-Taylor formülü

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j} x^j \tag{2.3.22}$$

olarak elde edilir.

Son ifadede j yerine $n-j$ yazılıp düzenlediği takdirde

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j} \tag{2.3.23}$$

halini alır. Bu yeni ifadeye *"Gauss binominal formülü"* denir.

Gauss binominal formülünde x ve a yerine sırasıyla 1 ve x alındığında

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j$$

olur. $n \to \infty$ iken q-kombinasyonun limiti

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

ve buradan

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

olduğu görülür. O halde;

$$\begin{aligned}(1+x)_q^{\infty} &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[1][2]\ldots[j]}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte x yerine $(1-q)x$ yazarak

$$(1+(1-q)x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!}$$

sonucuna ulaşılır. $q \to 1$ iken $[j]! \to j!$ olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki ifade e^x üstel fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımına yakınsamaktadır. Böylece aşağıdaki tanım elde edilmiştir.

Tanım 2.13. [17] e^x üstel fonksiyonunun bir q-genişlemesi

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty} \tag{2.3.24}$$

şeklinde tanımlanır.

E_q^x fonksiyonunun q-türevi

$$\begin{aligned}D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{(j-1)(j-2)}{2}} q^{j-1} \frac{x^j}{[j]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{q^j x^j}{[j]!}\end{aligned}$$

olur. Böylece e^x üstel fonksiyonun normal türevinden farklı olarak

$$D_q E_q^x = E_q^{qx}$$

elde edilir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)_q^n}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki q-Taylor seri açılımı

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{[n][n+1]\dots[n+j-1]}{[j]!} x^j. \tag{2.3.25}$$

biçimindedir. (2.3.25) formülü *"Heine binominal formülü"* olarak adlandırılır. Gauss binominal formülünde yapılan işlemlerin benzeri Heine binominal formülü için yapılarak

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!}$$

ve

$$\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}$$

elde edilir. Son seriye bakıldığında üstel fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımından elde edilen ifadelerin q-analoglarına karşılık geldiği görülmektedir. Buradan üstel fonksiyonun bir başka q-analoğu tanımına ulaşılmıştır.

Tanım 2.14. [17] Üstel e^x fonksiyonunun bir q-analoğu

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} \tag{2.3.26}$$

ile tanımlanır.

Bu q-analoğunun q-türevi

$$D_q e_q^x = e_q^x \tag{2.3.27}$$

klasikteki ile aynıdır.

2.4. q-Ters Türev ve q-İntegrali

Bu kısımda ilk olarak q-ters türevi tanımı verildikten sonra hangi koşullar altında bu ters türevin teklikle belirli olduğundan bahsedilecektir. Ardından, 2.2 alt bölümünde özel bir durum için verilen q-zincir kuralından yararlanarak bileşke fonksiyonun q-ters türevi hesaplanıp bu özel durum için değişken değiştirme kuralı elde edilecektir. Daha sonra 1910 yılında Jackson tarafından verilen q-integral tanımının geometrik seri yardımı ile nasıl verildiği ve bu serinin hangi koşullar altında integrand fonksiyonunun q-ters türevine yakınsadığı verilecektir. Jackson integrali tanımından yararlanılarak belirli q-integralleri ve genelleştirilmiş q-integrali tanımları verildikten sonra analizin temel teoreminin quantum calculusta da geçerli olduğundan ve son olarak tezin sonraki bölümlerinde sıklıkla kullanacağımız q-kısmi integrasyon kurallarından bahsedilecektir.

Tanım 2.15. [17] Eğer $D_qF(x) = f(x)$ ise $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun bir *"q-ters türevi"* denir ve

$$\int f(x)d_qx \tag{2.4.28}$$

ile gösterilir.

Analizde bir fonksiyonun türevinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonun sabit fonksiyon olması gerektiğinden ters türevin tekliği eklenen sabite bağlıdır. Fakat q-türevinin tanımından $D_q\varphi(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(qx) = \varphi(x)$ olduğundan φ fonksiyonun sabit bir fonksiyon olması gerekmediği görülür. Bu nedenle bir fonksiyonun q-ters türevinin tekliği aşağıdaki teorem ile sağlanmaktadır.

Teorem 2.16. [17] *Keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olan ve bir sabit kadar farkeden en fazla bir q-ters türevi vardır.*

Önceki kısımda q-zincir kuralının özel durumlar dışında verilemeyeceği gösterilmişti. Buna bağlı olarak değişken değiştirme kuralının q-analoğu için genel bir kural bulunmamaktadır.

Şimdi değişken değiştirmenin yapılabildiği bir örnek verelim.

Örnek 2.17. [17]α, β sabit olmak üzere $u(x) = \alpha x^{\beta}$ ve $f(x)$ fonksiyonunun q-ters türevi $F(x)$ olsun. O halde

$$\int f(u)d_q u = F(u) = F(u(x)) \tag{2.4.29}$$

olur. Herhangi bir $q' \in (0,1)$ için (2.2.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F(u(x)) &= \int D_{q'} F(u(x)) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^{\beta}} F)(u(x)) D_{q'} u(x) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^{\beta}} F)(u(x)) d_{q'} u(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $q' = q^{1/\beta}$ seçilirse $D_{q'^{\beta}} F = D_q F = f$ olduğundan

$$\int f(u)d_q u = \int f(u(x)) d_{q^{1/\beta}} u(x) \tag{2.4.30}$$

bulunur. Bu formül $f(u(x))D_{q^{1/\beta}} u(x)$ ifadesinin $f(u)$ fonksiyonunun bir q-ters türevi olduğunu gösterir.

Şimdi Jackson integralin tanımı elde edebilmek için; polinomlar uzayı üzerindeki $\hat{M}_q$ lineer operatörünü

$$\hat{M}_q \Big[f(x) \Big] = f(qx)$$

biçiminde tanımlayalım. Keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunun q-ters türevini bulmak için q-türev tanımından yararlanarak

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x)$$

yazabiliriz. Operatörlerin aralarında değişmeli olmadığını gözönüne alarak q-ters türevi

$$F(x) = \frac{1}{1 - \hat{M}_q}\Big((1-q)xf(x)\Big)$$

ile ifade edilebilir ve $\dfrac{1}{1-\hat{M}_q}$ ifadesinin geometrik seri açılımından

$$F(x) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\hat{M}_q^j\Big(xf(x)\Big)$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.18. [17]

$$\int f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx) \tag{2.4.31}$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun *"Jackson integrali"* veya *"q-integrali"* denir.

Bu serinin hangi koşullar altında q-ters türevine yakınsadığı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.19. [17] $|f(x)x^{\alpha}|$ *fonksiyonu,* $0 \leq \alpha < 1$ *için* $(0,A]$ *aralığında sınırlı ise o zaman* (2.4.31) *eşitliği ile tanımlı Jackson integrali,* $(0,A]$ *aralığında tanımlı* $f(x)$*'in bir q-ters türevi olan* $F(x)$ *fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca* $F(0) = 0$ *ise* $F(x)$ *fonksiyonu* $x = 0$ *noktasında süreklidir.*

İspat: $(0,A]$ aralığında $|f(x)x^{\alpha}| < M$ olduğunu varsayalım. Keyfi $0 < x \leq A$ ve $j \geq 0$ değerleri için

$$|f(g^jx)| < M(q^jx)^{-\alpha}$$

olur. Böylece

$$|q^jf(q^jx)| < Mq^j(q^jx)^{-\alpha} = Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j \tag{2.4.32}$$

olur. $1-\alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olduğundan (2.4.32) eşitsizliğinden $\sum_{j\geq 0}|q^jf(q^jx)|$ serisi yakınsak bir geometrik seri ile üstten sınırlıdır. Bu nedenle, (2.4.31) eşitliğinin sağ tarafı $F(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. Ayrıca (2.4.31) eşitliğinden $F(0) = 0$ olur. (2.4.32) eşitsizliğini kullanarak

$$\left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx)\right| < \frac{M(1-q)x^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}, \quad 0 < x \leq A$$

eşitsizliği yazılabileceğinden $x \to 0$ iken $F(x)$ fonksiyonunun sıfıra yakınsadığı, yani $F(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olduğu elde edilir.
$F(x)$ fonksiyonun $f(x)$ fonksiyonunun bir q-ters türevi olduğunu göstermek için $F(x)$ fonksiyonun q-türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} D_qF(x) &= \frac{1}{(1-q)x}\left((1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - (1-q)qx\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^{j+1}x)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1} f(q^{j+1}x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=1}^{\infty} q^j f(q^j x) = f(x) \end{aligned}$$

olduğundan istenilen sonuca ulaşılır. □

Verilen bir f fonksiyonunun q-ters türevi mevcut olsa bile Teorem 2.19'daki koşulları sağlamadığı takdirde Jackson integralinin yakınsamadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 2.20. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu alınsın.

$$D_q \log x = \frac{\log(qx) - \log x}{(q-1)x} = \frac{\log q}{q-1}\frac{1}{x}$$

olduğundan, q-ters türev tanımından yararlanarak

$$\int \frac{1}{x} d_qx = \frac{q-1}{\log q} \log x$$

elde edilir. Fakat Jackson integrali tanımından

$$\int \frac{1}{x} d_qx = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty$$

bulunur. Herhangi bir $0 \leq \alpha < 1$ değeri için $f(x)x^{\alpha}$ fonksiyonu sınırlı olmadığından (2.4.31) eşitliği ile verilen Jackson integrali, f'nin bir q-ters türevine yakınsamaz. Ayrıca $\log x$, $x = 0$ noktasında sürekli değildir.

Şimdi, (2.4.31) eşitliği ile verilen Jackson integrali yardımıyla elde edilen belirli q-integrali tanımını verelim.

Tanım 2.21. [17] $0 < a < b$ olmak üzere belirli q-integrali

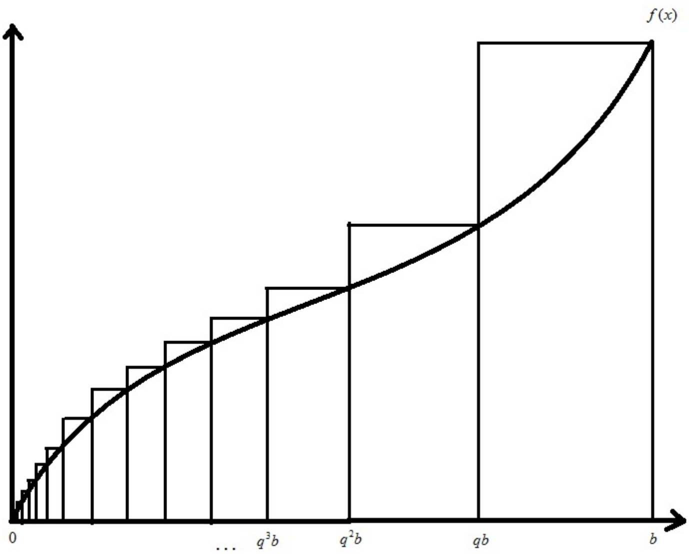
$$\int_0^b f(x)d_qx = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{2.4.33}$$

ve

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx \tag{2.4.34}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.4.33) eşitliği ile verilen belirli q-integralini geometrik olarak inceleyelim.



Şekilde görüldüğü üzere (2.4.33) eşitliğinin sağ tarafı sonsuz sayıda dikdörtgenin alanları toplamına karşılık gelmektedir. Yeterince küçük ε pozitif sayısı için bu toplam, $[\varepsilon, b]$ aralığında sonlu tane dikdörtgenin alanlarını toplamı yani bir Riemann toplamıdır. Böylece $q \to 1$ iken dikdörtgenlerin enleri sıfıra ve toplam da $[\varepsilon, b]$ aralığında Riemann integraline yakınsayacaktır. ε keyfi olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu, $[0, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$\lim_{q\to 1} \int_0^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)dx$$

olur.

Tanım 2.22. [17] $[0,+\infty)$ üzerinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonunun has olmayan q-integrali

$$\int_0^{\infty} f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx \tag{2.4.35}$$

ile tanımlanır.

Not 2.23. *Eğer $\alpha < 1$ için $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda ve $\alpha > 1$ ve yeterince büyük x değerleri için $x^{\alpha} f(x)$ fonksiyonu sınırlı ise yukarıdaki* (2.4.35) *eşitliği ile verilen has olmayan q-integrali yakınsaktır.*

Teorem 2.24 (q-Calculusun Temel Teoremi)**.** [17] *$F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun bir q-ters türevi ve $F(x)$ fonksiyonu, $x = 0$ noktasında sürekli ise, $0 \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere*

$$\int_a^b f(x)d_qx = F(b) - F(a) \tag{2.4.36}$$

biçimindedir.

Sonuç 2.25. [17] *$f(x)$ fonksiyonunun adi türevi $f'(x)$ ile gösterilsin. Eğer $f'(x)$ fonksiyonu, $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda var ve bu noktada sürekli ise,*

$$\int_a^b D_qf(x)d_qx = f(b) - f(a) \tag{2.4.37}$$

olur.

Bu sonuç yardımı ile q-kısmi integrasyon kurallarını elde edelim. $f'(x)$ ve $g'(x)$ adi türevleri $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda mevcut ve bu noktada sürekli olsun. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımının q-türevi kuralından

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x)$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının q-integrali alınırsa

$$\int_a^b D_q(f(x)g(x))d_qx = \int_a^b f(x)D_qg(x)d_qx + \int_a^b g(qx)D_qf(x)d_qx$$

elde edilir. Analizde türevlenebilir iki fonksiyonun çarpımın da türevlenebilir olduğundan Sonuç 2.25 uygulanırsa

$$f(b)g(b)-f(a)g(a) = \int_a^b f(x)D_q g(x)d_q x+\int_a^b g(qx)D_q f(x)d_q x$$

eşitliği ve buradan da

$$\int_a^b f(x)d_q g(x) = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(qx)d_q f(x) \qquad (2.4.38)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (2.4.38) eşitliği, bir kısmi q-integral formülüdür.
Ayrıca, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımının q-türevi için bir diğer kural

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x)+g(x)D_q f(x)$$

eşitliği ile de verilmişti. Bu eşitliğin her iki tarafının q-integrali alındığında diğer q-kısmi integrasyonunun

$$\int_a^b f(qx)d_q g(x) = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x)d_q f(x) \qquad (2.4.39)$$

şeklinde de ifade edilebileceği görülür.
Tezin ilerleyen bölümlerinde çoğunlukla (2.4.39) eşitliği kullanılmakla beraber (2.4.38) eşitliği ile elde edilen sonuçlara da yer verilecektir.

2.5. q-Gama ve q-Beta Fonksiyonları

Euler tarafından tanımlanan ve

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x>0, \qquad (2.5.40)$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x,y>0 \qquad (2.5.41)$$

eşitlikleri ile verilen fonksiyonlar sırasıyla *"gama fonksiyonu"* ve *"beta fonksiyonu"* olarak adlandırılır. (2.5.40) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanarak $x>0$ değeri için

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliğine ulaşılır. Daha genel olarak, pozitif bir n tamsayı için

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots x\Gamma(x), \quad x > 0 \tag{2.5.42}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $\Gamma(1) = 1$ olacağından (2.5.42) eşitliğinde $x = 1$ alınırsa

$$\Gamma(n+1) = n!$$

özelliği elde edilir.

(2.5.41) eşitliği ile tanımlanan beta fonksiyonunda $t = 1-u$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$B(x,y) = B(y,x)$$

olur. Böylece beta fonksiyonu x ve y parametrelerine göre simetriktir. Ayrıca beta ve gama fonksiyonları arasında

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y > 0$$

eşitliği geçerlidir.

Bu alt bölümde sırasıyla (2.5.40) ve (2.5.41) eşitlikleri ile tanımlanan gama ve beta fonksiyonlarının q-analoglarının tanımları q-integral yardımıyla yapılacak ve bazı özellikleri verilecektir. İlk olarak gama fonksiyonunun q-analoğu ile başlayalım. Koornwinder [18], 1994 yılında yaptığı çalışmada q-gama fonksiyonunun q-integrali ile tanımlanabileceğini göstermiştir.

Tanım 2.26 (q-Gama Fonksiyonu). [18] $\forall x > 0$ gerçel değerleri için

$$\Gamma_q(x) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1} E_q^{-qt} d_q t \tag{2.5.43}$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona *"q-gama fonksiyonu"* denir.

q-gama fonksiyonunda (2.4.38) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyonu uyguladığımız takdirde;

$$\int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1} E_q^{-qt} d_q t = -\int_0^{\frac{1}{1-q}} t^x d_q E_q^{-t} = [x] \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1} E_q^{-qt} d_q t$$

elde ederiz. Böylece herhangi bir pozitif x gerçel değeri için

$$\Gamma_q(x+1) = [x]\Gamma_q(x) \tag{2.5.44}$$

olur. Ayrıca

$$\Gamma_q(1) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} E_q^{-qt} d_q t = E_q^0 - E_q^{-1/1-q} = 1$$

olduğundan, herhangi bir pozitif n tamsayısı için tümevarım yöntemi yardımıyla

$$\Gamma_q(n+1) = [n]! \tag{2.5.45}$$

elde edilir.

Gama fonksiyonu ile q-gama fonksiyonu arasındaki benzerlik bu özelliklerle sınırlı kalmamaktadır. Ayrıca gama fonksiyonunun, Weierstrass tarafından, sonsuz çarpım ile tanımlanabileceği gösterilmiştir. q-gama fonksiyonu, $x > 0$ gerçel değeri için

$$(1-q)_q^\infty = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) \quad \text{ve} \quad (1-q^x)_q^\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^x q^k)$$

olmak üzere;

$$\Gamma_q(x) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^x)_q^\infty (1-q)^{x-1}} \tag{2.5.46}$$

şeklinde de tanımlanmıştır [17].

Tanım 2.27 (q-Beta Fonksiyonu). [18] $\forall x, y > 0$ gerçel değerleri için *"q-Beta fonksiyonu"*

$$B_q(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-qt)_q^{y-1} d_q t \tag{2.5.47}$$

ile tanımlanır. Burada

$$(1-qt)_q^{y-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \begin{bmatrix} y-1 \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{q(q+1)}{2}} t^j = \frac{(1-qt)_q^\infty}{(1-q^s t)_q^\infty} = \frac{\prod_{j=0}^{\infty}(1-q^j t)}{\prod_{j=0}^{\infty}(1-q^{j+s} t)}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

Tanım 2.21 ve Tanım 2.22'den ve herhangi bir j negatif tamsayısı için $(1-q^{j+1})_q^\infty = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}B_q(x,\infty) &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^j)^{x-1}(1-q^{j+1})_q^\infty \\ &= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} (q^j)^x (1-q^{j+1})_q^\infty \\ &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}(1-qt)_q^\infty d_qt\end{aligned}$$

yazılır. $E_q^t = (1+(1-q)t)_q^\infty$ olduğundan

$$B_q(x,\infty) = \int_0^\infty t^{x-1} E_q^{\frac{-qt}{1-q}} d_qt$$

tanımı elde edilir. $t(x) = \alpha u^\beta$ fonksiyonunda özel olarak $\alpha = 1-q$ ve $\beta = 1$ alarak (2.4.30) eşitliği ile verilen değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$B_q(x,\infty) = (1-q)^x \int_0^{\frac{1}{1-q}} u^{x-1} E_q^{-qu} d_qu$$

elde edilir. Buradan q-gama ve q-beta fonksiyonları arasındaki

$$\Gamma_q(x) = \frac{B_q(x,\infty)}{(1-q)^x}$$

eşitliğini elde ederiz.

(2.5.46) eşitliği kullanılırsa, o zaman $\forall x,y > 0$ gerçel değerleri için q-Beta fonksiyonu

$$B_q(x,y) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{x+y})_q^\infty}{(1-q^x)_q^\infty (1-q^y)_q^\infty} \tag{2.5.48}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. (2.5.47) ile (2.5.48) eşitlikleri arasındaki bağıntıyı Koornwinder elde etmiştir [18].

Beta fonksiyonu x ve y parametrelerine göre simetriktir. (2.5.48) eşitliğini kullanarak, q-beta fonksiyonunun da simetrik, yani

$$B_q(x,y) = B_q(y,x)$$

olduğunu göstermek, (2.5.47) eşitliğinden yaralanarak göstermekten daha kolaydır. Dahası (2.5.48) yardımıyla q-beta fonksiyonun q-gama fonksiyonu arasındaki ilişkinin

$$B_q(x,y) = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} \tag{2.5.49}$$

gama ve beta arasındaki ilişkiyle benzer olduğu görülmektedir.

3. NEUTRIX CALCULUS

Uygun şekilde tanımlanmış sonsuz değerli parçaların ihmal edilmesi tekniği Hadamard tarafından bulunmuştur, ve ıraksak integralden sonlu parçanın çıkarılması "Hadamard sonlu toplamı" olarak adlandırılır. Hadamard sonlu toplamın elde edilmesinde kullanılan metot, Van der Corput tarafından geliştirilen neutrix calculus'un bir uygulaması niteliğindedir. 2.5 alt bölümünde tanımları verilen q-gama ve q-beta fonksiyonları türevleriyle beraber tüm gerçel değerlere sırasıyla Salem [27] ve Ege [5] tarafından neutrix kavramından yararlanılarak genişletilmiştir.
Bu bölümde ilk olarak neutrix ve neutrix limit kavramlarını örnekler de vererek açıkladıktan sonra neutrix calculus'un bir uygulaması olarak q-gama fonksiyonunun tüm gerçel değerlere nasıl genişletildiğinden bahsedilecektir.

3.1. Neutrix ve Neutrix Limit Kavramları

Tanım 3.1. [35] N' boştan farklı bir küme ve N'' toplamsal değişmeli bir grup olsun. N' kümesinden N'' grubuna olan fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli grubu $\mathcal{N}$ ile gösterelim.
Eğer $\mathcal{N}$ içindeki tek sabit fonksiyon sıfır fonksiyonu ise $\mathcal{N}$ grubuna *"neutrix"* denir ve $\mathcal{N}$ grubuna ait olan her bir fonksiyona da *"ihmal edilebilir fonksiyon"* adı verilir.
Böylece,

$$\text{"}\forall x \in N' \quad \text{için} \quad f(x) = c \quad \text{ise} \quad c = 0\text{"}$$

olur.

Örnek 3.2. $\mathcal{N}$ kümesi; tanım kümesi $N' = [0,1]$ kapalı aralığı, değer kümesi gerçel sayılar kümesi olmak üzere keyfi bir b gerçel sayısı için

$$b\left\{\log\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}^2$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu değişmeli grup olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir.

Gerçekten $\forall x \in N'$ için

$$b\left\{\log\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}^2 = c \text{ (sabit)} \Rightarrow b = 0 \text{ ve buradan } c = 0 \text{ olur.}$$

Not 3.3. *İki neutrixin eşit olması Van der Corput tarafından, her iki neutrixin aynı tanım kümesine, aynı ihmal edilebilir fonksiyonlara ve aynı değişkene sahip olmaları şeklinde tanımlanmıştır. İki neutrixin eşit olması için bu neutrixlere ait ihmal edilebilir fonsiyonların değer kümelerinin aynı olması şart değildir.*

Tanım 3.4. [35] N', X topolojik bir uzayın alt kümesi ve $b \notin N'$ olmak üzere; b, N' kümesinin bir limit noktası olsun. Eğer N' üzerinde tanımlı gerçel değerli bir f fonksiyonu için $f(x) - l \in \mathcal{N}$ olacak şekilde bir l gerçel sayısı bulunabiliyorsa o zaman l sayısına $f(x)$ fonksiyonunun *"neutrix limiti"* denir ve

$$\mathrm{N}-\lim_{x \to b} f(x) = l$$

ile gösterilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun neutrix limiti var ise tektir. Gerçekten $f(x) - l_1 \in \mathcal{N}$ ve $f(x) - l_2 \in \mathcal{N}$ ise $l_1 - l_2 \in \mathcal{N}$ olduğundan $l_1 = l_2$ elde edilir.

Örnek 3.5. $\mathcal{N}$ kümesi, Tanım 3.4'teki koşulu sağlayan bir N' kümesi üzerinde tanımlı ve $x \to b$ iken $f(x) \to 0$ fonksiyonların oluşturduğu bir küme olsun. Bu durumda $\mathcal{N}$ bir neutrixtir.

Bu neutrixe göre eğer bir fonksiyonun normal limiti var ise bu neutrix limit ile aynıdır.

Örnek 3.6. Tanım kümesi $N' = (0,1)$ açık aralığı, değer kümesi $N'' = \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$ ve $O(x)$, $x \to 0$ için sıfıra yakınsayan fonksiyonlar olmak üzere

$$a \ln^2 x^{-1} + b \ln x^{-1} + O(x)$$

biçimde tanımlanan neutrix $\mathcal{N}_1$ olsun.

$$f(x) = x^2 + (\ln x^{-1} + 1)^2$$

fonksiyonu için

$$\mathrm{N}_1 - \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

bulunur. Fakat eğer $\mathcal{N}_2$ ve $\mathcal{N}_3$ neutrixleri sırasıyla

$$\mathcal{N}_2 = \{f | f : (0,1) \to \mathbb{R}, \, f(x) = a(\ln x^{-1} + 1)^2 + O(x), \, a \in \mathbb{R}\}$$

ve

$$\mathcal{N}_3 = \{f | f : (0,1) \to \mathbb{R}, \, f(x) = a \ln^3 x^3 + b \ln^2 x^{-1} + O(x), \, a, b \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde alınırsa o zaman f fonksiyonu için

$$\mathrm{N}_2 - \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

olmasına rağmen

$$\mathrm{N}_3 - \lim_{x \to 0} f(x)$$

neutrix limiti mevcut değildir.

3.2. q-Gama Fonksiyonuna Neutrix Limitin Uygulanması

(2.5.43) eşitliği ile tanımlanan q-gama $\Gamma_q(x)$ fonksiyonunu türevleriyle birlikte tüm gerçel sayılarda tanımlayalım. Bunun için $\mathcal{N}$ neutrixi, tanım kümesi $N' = (0, \infty)$ açık aralığı, görüntü kümesi $N'' = \mathbb{R}$ olan ve $\lambda < 0$ ve $r = 1, 2, \ldots$ değerleri için

$$\varepsilon^{\lambda} \ln^{r-1} \varepsilon, \quad \ln^r \varepsilon \tag{3.2.1}$$

fonksiyonları ile $\varepsilon \to 0$ iken sıfıra yakınsayan tüm $O(\varepsilon)$ fonksiyonlarının sonlu lineer toplamlarını ihmal edilebilir fonksiyonlar olarak kabul eden küme olsun [27]. q-gama fonksiyonu, (2.3.24) eşitliği ile verilen q-üstel fonksiyonundan dolayı tüm $x>0$ değerleri için mutlak yakınsaktır. Dahası q-üstel E_q^x fonksiyonunun tanımındaki serinin ilk m teriminin çıkarılması, q-gama fonksiyonunun tanımının $x>-m$ değerlerine genişletilmesini sağlayacaktır. Bundan sonraki işlemlerde bu yöntemden yararlanılacaktır. İlk olarak tamsayı olmayan negatif reel değerler için neutrix limitin varlığını gösterelim.

Teorem 3.7. [27] *$x>-n$, $n=1,2,\ldots$, $x\neq 0,-1,-2,\ldots,-n+1$ olmak üzere*

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt$$

q-integralinin $\varepsilon\to 0$ iken neutrix limiti mevcuttur ve

$$\begin{aligned}
\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_{0}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}\left[E_q^{-qt}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt\\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!\,[x+j](1-q)^{x+j}}
\end{aligned}$$

eşittir.

İspat: (2.4.38) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon kuralını kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}\left[E_q^{-qt}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt\\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x+j-1}d_qt\\
&= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}\left[E_q^{-qt}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt\\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!\,[x+j]}\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)^{x+j}-\varepsilon^{x+j}\right]
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin iki tarafının neutrix limiti alındığı takdirde seri içindeki ε^{x+j} ifadesi $x+j<0$ olduğundan ihmal edilebilir bir fonksiyondur ve eşitliğin sağ tarafındaki integralin neutrix limiti normal limite dönüşür. Böylece istenilen elde edilir. $\square$

Örnek 3.5'te $\varepsilon\to b$ iken normal anlamda sıfıra yakınsayan fonksiyonların ihmal edilebilir fonksiyon olması durumunda neutrix limit ile normal limitin çakıştığı gösterilmişti. Dolayısıyla $x>0$ değerleri için

$$\begin{aligned} \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt \\ &= \Gamma_q(x) \end{aligned}$$

olacaktır. Bu bize q-gama fonksiyonunun neutrix limit yardımıyla $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$$\Gamma_q(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt \tag{3.2.2}$$

ile tanımlanabileceği fikrini vermektedir.

$x=0,-1,-2,\ldots$ değerleri için neutrix limitin varlığını göstermeden önce işlemlerimizde kullanacağımız aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.8. [27] *$a,b>0$ olmak üzere*

$$\int_a^b \frac{d_qt}{t} = \frac{q-1}{\ln q}(\ln b - \ln a).$$

İspat:

$$D_q \ln t = \frac{\ln qt - \ln t}{(q-1)t} = \frac{\ln q + \ln t - \ln t}{(q-1)t} = \frac{\ln q}{q-1}\frac{1}{t}$$

olduğundan q-ters türev tanımından yararlanarak istenilen elde edilir. □

Teorem 3.9. [27] *$n=0,1,2,\ldots$ olmak üzere*

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}E_q^{-qt}d_qt$$

q-integralinin neutrix limiti mevcuttur ve

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}E_q^{-qt}d_qt = \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}\left[E_q^{-qt}-1\right]d_qt + \frac{(1-q)\ln(1-q)}{\ln q} \tag{3.2.3}$$

ve

$$\begin{aligned} \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![j-m]}\frac{1}{(1-q)^{j-m}} + \frac{(-1)^n q^{\frac{m(m+1)}{2}}(1-q)\ln(1-q)}{[m]!\ln q} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Lemma 3.8'den yararlanarak

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}\left[E_q^{-qt}-1\right]d_qt+\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}d_qt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}\left[E_q^{-qt}-1\right]d_qt+\frac{q-1}{\ln q}(\ln(1-q)^{-1}-\ln\varepsilon)\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\varepsilon\to 0$ iken neutrix limiti alındığında

$$\begin{aligned}\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}E_q^{-qt}d_qt &= \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}\left[E_q^{-qt}-1\right]d_qt \\ &+ \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{q-1}{\ln q}(\ln(1-q)^{-1}-\ln\varepsilon) \\ \Gamma_q(0) &= \int_{0}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}\left[E_q^{-qt}-1\right]d_qt+\frac{(1-q)\ln(1-q)}{\ln q}\end{aligned}$$

istenilen elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}\left[E_q^{-qt}-\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{j-n-1}d_qt+\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[j]!}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-1}d_qt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}\left[E_q^{-qt}-\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![j-m]}\left(\frac{1}{(1-q)^{j-m}}-\varepsilon^{j-n}\right) \\ &+ \frac{(-1)^n q^{\frac{m(m+1)}{2}}\ln(1-q)}{[m]!}\left(\frac{(1-q)}{\ln q}\ln(1-q)-\frac{(q-1)}{\ln q}\varepsilon^{-n}\right)\end{aligned}$$

olduğundan neutrix limiti hesaplandığında istenilen sonuca ulaşılır. □

Tanım 3.10. [27] q-gama fonksiyonu neutrix limit yardımıyla tüm x gerçel değerleri için

$$\Gamma_q(x)=\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}E_q^{-qt}d_qt \tag{3.2.5}$$

ile tanımlıdır.

Lemma 3.11. *$a,b>0$ olmak üzere tüm α reel değerleri ve $r=1,2,\ldots$ için*

$$\int_a^b t^{\alpha-1}\ln^r t d_qt = \begin{cases} \dfrac{(q-1)(\ln^{r+1}-\ln^{r+1}a)}{(r+1)\ln q} - & \alpha=0 \\ \quad -\dfrac{\ln^r q}{r+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r+1}{k}\ln^{-k}q\int_a^b \frac{\ln^k t}{t}d_qt, & \\ \dfrac{b^\alpha \ln^r b - a^\alpha \ln^r a}{[\alpha]} + \dfrac{q^\alpha \ln^r q}{1-q^\alpha}\times & \alpha\neq 0 \\ \quad \times\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{k}\ln^{-k}q\int_a^b t^{\alpha-1}\ln^k t d_qt & \end{cases}$$

İspat: İspat tümevarım yöntemi ile elde edilir. □

Lemma 3.11 yardımıyla A. Salem gama fonksiyonun türevleriyle birlikte q-analoğunun tüm gerçel değerler için neutrix limit ile aşağıdaki şekilde tanımlanabileceğini göstermiştir.

Tanım 3.12. [27] Tüm x gerçel değerleri ve $r=0,1,2,\ldots$ için q-gama fonksiyonun r. türevi

$$\Gamma_q^{(r)}(x) = \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{x-1}\ln^r t E_q^{-qt} d_qt \qquad (3.2.6)$$

ile tanımlanır.

4. q-GAMA FONKSİYONU ÜZERİNE BAZI EŞİTLİKLER

Bu bölümde (3.2.6) eşitliği ile tanımlanan q-gama fonksiyonunu ve birinci mertebeden türevini içeren bazı eşitlikler verilecektir. Ardından q-digama fonksiyonunun negatif tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanabileceğinden bahsedilecektir.

Burada $\mathcal{N}$ neutrixi olarak, tanım kümesi $N' = \{\varepsilon : 0 < \varepsilon < (1-q)^{-1}\}$, değer kümesi $N'' = \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \to 0$ iken normal anlamda sıfıra yakınsayan fonksiyonlar $O(\varepsilon)$ olmak üzere, $\lambda < 0$, $r = 1, 2, ...$ için

$$\varepsilon^{\lambda} \ln^{r-1} \varepsilon,\ [\varepsilon]^{\lambda}, \ln^{r} \varepsilon, O(\varepsilon) \tag{4.0.1}$$

fonksiyonlarının sonlu lineer toplamları ile tanımlanan ihmal edilebilir fonksiyonlar alınacaktır.

4.1. Teoremler ve Sonuçlar

Genel sonuçlara geçmeden önce aşağıdaki özellikleri gösterelim.

Lemma 4.1. [7]

$$\Gamma_q(0) = \frac{q-1}{lnq}\Gamma_q'(1).$$

İspat: $g(qx) = E_q^{-qt}$ ve $d_q(f(x)) = t^{-1}$ alınarak (2.4.39) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_q(0) &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1/1-q} t^{-1}E_q^{-qt}d_qt \\ &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{q-1}{\ln q}\ln\frac{1}{1-q}E_q^{-\frac{1}{1-q}} - \frac{q-1}{\ln q}\ln\varepsilon E_q^{-q\varepsilon} + \frac{q-1}{\ln q}\int_{\varepsilon}^{1/1-q}\ln t E_q^{-qt}d_qt\right\}\end{aligned}$$

olur. $E_q^{-\frac{1}{1-q}} = (1+(1-q)(-\frac{1}{1-q}))_q^{\infty} = (1-1)_q^{\infty} = 0$ olduğundan, eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfır olacaktır. Böylece istenilen elde edilir. $\square$

Lemma 4.2. [7] *$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;*

$$\Gamma_q(-n) = \frac{1}{[-n]}\Gamma_q(-n+1) + \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n][n]!}.$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $x = -n$ için (3.2.4) ve (3.2.5) eşitliklerinden yararlanarak (3.2.4) eşitliğinde (2.4.39) q-kısmi integrasyonu uygulandığında

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(-n) &= \frac{1}{[-n]}\left\{\int_1^{1/1-q} t^{-n}E_q^{-qt}d_qt + \int_0^1 t^{-n}\left[E_q^{-t} - \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt\right\} \\
&- \frac{E_q^{-1}}{[-n]} + \frac{1}{[-n]}\left[E_q^{-1} - \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}}{[j]!}\right] + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![-n+j]} \\
&= \frac{1}{[-n]}\left\{\int_1^{1/1-q} t^{-n}E_q^{-qt}d_qt + \int_0^1 t^{-n}\left[E_q^{-t} - \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt\right. \\
&+ \left.\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![-n+j+1]}\right\} - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[-n][n]!} \\
&= \frac{1}{[-n]}\Gamma_q(-n+1) + \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n][n]!}
\end{aligned}$$

istenilen sonuca ulaşılır. □

φ_q fonksiyonu

$$\varphi_q(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{[j]}, & n = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{4.1.2}$$

olmak üzere; Lemma 4.1 ve Lemma 4.2'den tümevarım yöntemi kullanılırsa $n = 0,-1,-2,\ldots$ değerleri için

$$\Gamma_q(-n) = \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\Big(\varphi_q(n) + \Gamma_q(0)\Big) \tag{4.1.3}$$

bulunur ve bu sonuç $q \to 1$ iken

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}, & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

olmak üzere;

$$\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}\Big[\phi(n) - \Gamma(0)\Big]$$

eşitliğine yakınsar [12].

Heaviside fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ile tanımlanır. Şimdi bu fonksiyon yardımı ile q-gama fonksiyonunu negatif tamsayı değerlerinde tanımlayalım.

Teorem 4.3. [6] $n = 0, 1, 2, \ldots$ *değerleri için*

$$\begin{aligned} \Gamma_q(-n) &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]_q!}t^i - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]_q!}t^n H(1-t)\Big]d_qt \\ &+ (1-q)^{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{(1-q)_q^i(1-q^{i-n})} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

ile tanımlıdır.

İspat:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]_q!}t^i - \\ &- \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]_q!}t^n H(1-t)\Big]d_qt \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]_q!}\int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{-n+i-1}d_qt - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]_q!}\int_\varepsilon^1 t^{-1}d_qt \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki son iki integral hesaplanıp her iki tarafın neutrix limiti alındığı takdirde istenilen elde edilir. □

Benzer şekilde $\Gamma_q(x)$ fonksiyonunun birinci merteden türevini negatif tamsayılarda tanımlayalım.

Teorem 4.4. [7] $n = 0, 1, 2, \ldots$ *değerleri için*

$$\begin{aligned}
\Gamma'_q(-n) &= \int_0^{1/1-q} t^{-n-1} \ln t \Big[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} t^j - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} t^n H(1-t) \Big] d_q t \\
&+ \ln q^{-1} (1-q)^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![-n+j]} (1-q)^{n-j} \\
&+ \frac{\ln q^{-1}}{q-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![-n+j]^2} (1-q)^{n-j} \qquad (4.1.5)
\end{aligned}$$

ile tanımlıdır.

İspat: Tanımdan

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1} \ln t E_q^{-qt} d_q t &= \int_\varepsilon^{1/1-q} t^{-n-1} \ln t \Big[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} t^j - \\
&- \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} t^n H(1-t) \Big] d_q t \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} \int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{-n+j-1} \ln t d_q t \\
&+ \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} \int_\varepsilon^1 t^{-1} \ln t d_q t
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki son iki integral hesaplanıp her iki tarafın neutrix limiti alındığında

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1} \ln t E_q^{-qt} d_q t &= \int_0^{1/1-q} t^{-n-1} \ln t \Big[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} t^j - \\
&- \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} t^n H(1-t) \Big] d_q t \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} \Big\{ \frac{(1-q)^{n-j} \ln(q^{-1}(1-q)^{-1})}{[-n+j]} + \\
&+ \frac{\ln q^{-1} (1-q)^{n-j}}{(q-1)[-n+j]^2} \Big\}
\end{aligned}$$

istenilen elde edilir. $\square$

Bu sonuçlar yardımıyla aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.5. [7] *Tüm x gerçel değerleri ve $r = 0,1$ için*

$$\Gamma_q^{(r)}(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\,\Gamma_q^{(r)}(x+\varepsilon)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\Gamma_q^{(r)}(x)$ fonksiyonu, $x \neq 0,-1,-2,\ldots$ değerleri için sürekli olduğundan neutrix limiti normal limite eşit olup istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi $r = 0$ ve $n = 1,2,\ldots$ olmak üzere Teorem 3.7 kullanılırsa $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(-n+\varepsilon) &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j\right]d_qt \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!\,[-n+\varepsilon+j]\,(1-q)^{-n+\varepsilon+j}} \\
&= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}t^n H(1-t)\right]d_qt \\
&+ \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\int_0^1 t^{\varepsilon-1}d_qt + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!\,[-n+\varepsilon+j]\,(1-q)^{-n+\varepsilon+j}} \\
&= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^j - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}t^n H(1-t)\right]d_qt \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!\,[-n+\varepsilon+j]\,(1-q)^{-n+\varepsilon+j}} + \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\frac{1}{[\varepsilon]}
\end{aligned}$$

olur. Burada her iki tarafın neutrix limiti alındığında son ifade ihmal edilebilir bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}}\,\Gamma_q(-n+\varepsilon) &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-1}\ln^r t\left[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}t^i - \right. \\
&- \left.\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]}t^n H(1-t)\right]d_qt + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!}\frac{(1-q)^{n-j}}{[-n+i]} \\
&= \Gamma_q(-n)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\Gamma_q(-n-\varepsilon) &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-\varepsilon-1}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i - \\
&-\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}t^n[H(1-t)+H(t-1)]\Big]d_qt + \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\frac{(1-q)^{n-i+\varepsilon}}{[-n-\varepsilon+i]} \\
&= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-\varepsilon-1}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}t^n H(1-t)\Big]d_qt \\
&-\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-\varepsilon-1}H(t-1)d_qt + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\frac{(1-q)^{n-i+\varepsilon}}{[-n-\varepsilon+i]} \\
&+\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\frac{(1-q)^{\varepsilon}}{[-\varepsilon]} \\
&= \int_0^{\frac{1}{1-q}} t^{-n-\varepsilon-1}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}t^n H(1-t)\Big]d_qt \\
&-\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\Big[\frac{(1-q)^{\varepsilon}}{[-\varepsilon]} - \frac{1}{[-\varepsilon]}\Big] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\frac{(1-q)^{n-i+\varepsilon}}{[-n-\varepsilon+i]} \\
&+\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\frac{(1-q)^{\varepsilon}}{[-\varepsilon]}
\end{aligned}
$$

yazılır ve her iki tarafın neutrix limiti alındığında $[-\varepsilon] = q^{-\varepsilon}[\varepsilon]$ eşitliği kullanılarak

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_q(-n-\varepsilon) = \Gamma_q(-n)$$

olduğu görülür.

$r = 1$ için, benzer olarak $\Gamma_q'(-n+\varepsilon)$ ve $\Gamma_q'(-n-\varepsilon)$ ifadeleri yazılır ve neutrix limitlere geçilirse

$$\Gamma_q'(-n) = \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_q'(-n+\varepsilon)$$

olduğu görülür. □

$x > 0$ değerleri için

$$\Gamma_q(x+1) = [x]\Gamma_q(x)$$

eşitliğinin sağladığını bölüm 2.5'te görmüştük. Şimdi pozitif olmayan x değerleri için de bu eşitliğin neutrix limit yardımıyla sağlandığını gösterelim.

Teorem 4.6. [6] *Tüm x gerçel değerleri için*

$$\Gamma_q(x+1) = \mathrm{N}{-}\lim_{\varepsilon\to 0}[x+\varepsilon]\Gamma_q(x+\varepsilon) \tag{4.1.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x \neq 0,-1,-2,\ldots$ değerleri için $\Gamma_q(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan bu değerler için istenilen sağlanır. $0<\varepsilon<1$ için (3.2.5) eşitliğinden

$$\Gamma_q(x+\varepsilon+1) = \mathrm{N}{-}\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{\frac{1}{1-q}} t^{x+\varepsilon}E_q^{-qt}d_qt$$

yazabiliriz. Şimdi

$$\begin{aligned} D_qg(t) = E_q^{-qt} \quad &\Rightarrow \quad D_q\Big(-E_q^{-t}\Big) = E_q^{-qt} \\ f(t) = t^{x+\varepsilon} \quad &\Rightarrow \quad D_qt^{x+\varepsilon} = [x+\varepsilon]t^{x+\varepsilon-1} \end{aligned}$$

olduğundan (2.4.38) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned} \Gamma_q(x+\varepsilon+1) &= \mathrm{N}{-}\lim_{\delta\to 0}\Big((1-q)^{-x-\varepsilon}E_q^{-(1-q)^{-1}} + \delta^{x+\varepsilon}E_q^{-\delta} + \\ &\quad +[x+\varepsilon]\int_\delta^{\frac{1}{1-q}} t^{x+\varepsilon-1}E_q^{-qt}d_qt\Big) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\delta^{x+\varepsilon}E_q^{-\delta}$ ihmal edilebilir bir fonksiyon olduğundan

$$E_q^{-(1-q)^{-1}} = \Big(1+(1-q)(-(1-q)^{-1})\Big)_q^\infty = (1-1)_q^\infty = 0$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \Gamma_q(x+\varepsilon+1) &= \mathrm{N}{-}\lim_{\delta\to 0}[x+\varepsilon]\int_\delta^{\frac{1}{1-q}} t^{x+\varepsilon-1}E_q^{-qt}d_qt \\ &= [x+\varepsilon]\Gamma_q(x+\varepsilon) \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının neutrix limitini alır ve Teorem 4.5'den yaralanırsak

$$\Gamma_q(x+1) = \mathrm{N}{-}\lim_{\varepsilon\to 0}[x+\varepsilon]\Gamma_q(x+\varepsilon)$$

eşitliği elde edilir. $\square$

$r=q^n$ olmak üzere Gauss çarpım formülünün q-analoğu $x>0$ değerleri için

$$\Gamma_q(nx)\Gamma_r\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma_r\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{n-1}{n}\right)=$$
$$=\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)^{nx-1}\Gamma_r(x)\Gamma_r\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(x+\frac{n-1}{n}\right) \quad (4.1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Tüm x gerçel değerleri için neutrix limit yardımı ile bu formülün nasıl sağlanacağını görelim.

Teorem 4.7. [6] *Tüm x değerleri için*

$$\Gamma_q(nx)\Gamma_r\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma_r\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{n-1}{n}\right)=$$
$$=\operatorname*{N-lim}_{\varepsilon\to 0}\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)^{nx+n\varepsilon-1}\Gamma_r(x+\varepsilon)\Gamma_r\left(x+\varepsilon+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(x+\varepsilon+\frac{n-1}{n}\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $nx\neq 0,-1,-2,...$ için $\Gamma_q(nx)$ fonksiyonu sürekli olduğundan bu değerler için istenen sağlanır. $nx=-m$ ve $m=1,2,\ldots$ olduğu durumda $0<|\varepsilon|<\frac{1}{n}$ değerleri için (4.1.7) eşitliğinden

$$\Gamma_q(-m+n\varepsilon)\Gamma_r\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{n-1}{n}\right)=$$
$$=\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)^{-m+n\varepsilon-1}\Gamma_r\left(\frac{-m}{n}+\varepsilon\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{-m}{n}+\varepsilon+\frac{n-1}{n}\right)$$

olur. Teorem 4.5 kullanılarak

$$\Gamma_r\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{n-1}{n}\right)\operatorname*{N-lim}_{\varepsilon\to 0}\Gamma_q(-m+n\varepsilon)=$$
$$=\operatorname*{N-lim}_{\varepsilon\to 0}\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)^{-m+n\varepsilon-1}\Gamma_r\left(\frac{-m}{n}+\varepsilon\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{-m}{n}+\varepsilon+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\Gamma_r\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma_q(-m)=$$
$$=\operatorname*{N-lim}_{\varepsilon\to 0}\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)^{-m+n\varepsilon-1}\Gamma_r\left(\frac{-m}{n}+\varepsilon\right)\ldots\Gamma_r\left(\frac{-m}{n}+\varepsilon+\frac{n-1}{n}\right)$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki teoremde, q-gama fonksiyonunun birinci türevinin negatif tamsayı değerinde kendisi ile ifade edilebileceği gösterilecektir.

Sonuç 4.8. [7] $n = 1, 2, \ldots$ *değerleri için*

$$\Gamma'_q(-n) = \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n]}\Gamma_q(-n) + \frac{\ln q^{-1}}{[-n]}\Gamma_q(-n+1) + \frac{1}{[-n]}\Gamma'_q(-n+1) \quad (4.1.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (2.4.39) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı, (4.1.5) eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma'_q(-n) = {} & \frac{\ln q^{-1}}{[-n](q-1)} \int_0^{1/1-q} t^{-n-1}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} t^j - \\
& \qquad - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} t^n H(1-t)\Big] d_q t \\
& + \frac{\ln q^{-1}}{[-n]} \int_0^{1/1-q} t^{-n}\Big[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} t^j - \frac{(-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n-1]!} t^{n-1} H(1-t)\Big] d_q t \\
& + \frac{1}{[-n]} \int_0^{1/1-q} t^{-n}\ln t\Big[E_q^{-qt} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]!} t^j - \frac{(-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n-1]!} t^{n-1} H(1-t)\Big] d_q t \\
& + \ln q^{-1}(1-q)^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![-n+j]}(1-q)^{n-j} + \frac{\ln q^{-1}}{q-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}}{[j]![-n+j]^2}(1-q)^{n-j} \\
& - \frac{\ln q^{-1}}{[-n]} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}}{[j]!}(1-q)^{n-j} - \frac{\ln(1-q)^{-1}}{[-n]} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}}{[j]!}(1-q)^{n-j}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk üç ifade sırasıyla $\Gamma_q(-n)$, $\Gamma_q(-n+1)$, $\Gamma'_q(-n+1)$ fonksiyonlarının tanımının integral ifadelerine karşılık gelmektedir. Bu nedenle, yukarıdaki eşitlikte eksik olan (4.1.4) ve (4.1.5) eşitliklerindeki seri kısımlarının eklenip çıkarıldığında elde edilen yeni ifadedeki kalan serilerin toplamının sıfır olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. □

(2.5.44) eşitliğinin $x > 0$ için geçerli olduğu ve bu eşitliğin tüm x gerçel değerlerine nasıl genişleticeği (4.1.6) eşitliğinde verilmişti.

Eğer (2.5.44) eşitliğinin türevi alınırsa, $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ değerleri için

$$\Gamma'_q(x+1) = \frac{-q^x \ln q}{1-q}\Gamma_q(x) + [x]\Gamma'_q(x)$$

eşitliği geçerli olacaktır. Şimdi bu eşitliği, neutrix limit yardımıyla tüm gerçel değerlere genişletelim:

Teorem 4.9. [7] *Tüm x gerçel değerleri için*

$$\Gamma_q'(x+1) = \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{q^{x+\varepsilon}\ln q}{1-q}\Gamma_q(x+\varepsilon) + [x+\varepsilon]\Gamma_q'(x+\varepsilon)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x \neq 0,-1,-2,\ldots$ ve $x > 0$ değerleri için $\Gamma_q'(x)$ fonksiyonu sürekli olacağından istenilen sağlanır. $n = 1,2,\ldots$ için (4.1.8) eşitliği

$$\Gamma_q'(-n+1) = [-n]\Gamma_q'(-n) - \frac{\ln q^{-1}}{q-1}\Gamma_q(-n) - \ln q^{-1}\Gamma_q(-n+1)$$

şeklinde düzenlenirse, Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_q'(-n+\varepsilon+1) = {} & \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}[-n+\varepsilon]\Gamma_q'(-n+\varepsilon) - \frac{\ln q^{-1}}{q-1}\Gamma_q(-n+\varepsilon)\\ & -\ln q^{-1}\Gamma_q(-n+\varepsilon+1)\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\Gamma_q'(-n+1) &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}[-n+\varepsilon]\Gamma_q'(-n+\varepsilon) + \frac{\ln q}{q-1}\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_q(-n+\varepsilon)\\ &\quad + \ln q\,\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_q(-n+\varepsilon+1)\\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}[-n+\varepsilon]\Gamma_q'(-n+\varepsilon) + \frac{\ln q}{q-1}\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[1+(q-1)[-n+\varepsilon]\Big]\Gamma_q(-n+\varepsilon)\\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}[-n+\varepsilon]\Gamma_q'(-n+\varepsilon) + \frac{\ln q}{q-1}\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[1+q^{-n+\varepsilon}-1\Big]\Gamma_q(-n+\varepsilon)\\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-q^{-n+\varepsilon}\ln q}{1-q}\Gamma_q(-n+\varepsilon) + [-n+\varepsilon]\Gamma_q'(-n+\varepsilon)\end{aligned}$$

elde edilir. □

$x \neq 0,-1,-2,\ldots$ değerleri için q-digama fonksiyonu $\psi_q(x)$

$$\psi_q(x) = \Big(\ln\Gamma_q(x)\Big)' = \frac{\Gamma_q'(x)}{\Gamma_q(x)}$$

eşitliği ile tanımlanır [20]. Biraz önce elde edilen sonuçlar, bize $x = 0,-1,-2,\ldots$ değerleri için $\psi_q(x)$ fonksiyonunun

$$\psi_q(-n) = \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma_q'(-n+\varepsilon)}{\Gamma_q(-n+\varepsilon)}$$

şeklinde tanımlanabileceği fikrini vermektedir.

Şimdi $n = 0,1,2,\ldots$ değerleri için $\psi_q(-n)$ fonksiyonunun varlığını gösterelim:

Teorem 4.10. [7] $n = 0,1,2,\ldots$ *için,*

$$\psi_q(-n) = \psi_q(1) + \frac{\ln q}{q-1}\varphi_q(n)$$

biçimindedir. Burada φ_q, (4.1.2) *ile tanımlı fonksiyondur.*

İspat:$0 < |\varepsilon| < 1$ ve $k = 0$ seçelim.

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_q'(\varepsilon)}{\Gamma_q(\varepsilon)} &= \frac{\Gamma_q'(\varepsilon+1) + \frac{q^\varepsilon \ln q}{1-q}\Gamma_q(\varepsilon)}{[\varepsilon]\Gamma_q(\varepsilon)} \\ &= \frac{\Gamma_q'(\varepsilon+1)}{\Gamma_q(\varepsilon+1)} + \frac{q^\varepsilon \ln q}{(1-q)[\varepsilon]}\end{aligned}$$

ve buradan eşitliğin her iki tarafının neutrix limitini aldığımızda

$$\begin{aligned}\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma_q'(\varepsilon)}{\Gamma_q(\varepsilon)} &= \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma_q'(\varepsilon+1)}{\Gamma_q(\varepsilon+1)} + \frac{q^\varepsilon \ln q}{(1-q)[\varepsilon]} \\ &= \frac{\Gamma_q'(1)}{\Gamma_q(1)} = \psi_q(1).\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\psi_q(0) = \psi_q(1)$ olur. Böylece $k = 0$ için eşitliğin doğru olduğu görülür.

Şimdi $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $k = n-1$ değeri için

$$\psi_q(-n+1) = \psi_q(1) + \frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{[j]}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $k = n$ değeri için

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_q'(-n+\varepsilon)}{\Gamma_q(-n+\varepsilon)} &= \frac{\Gamma_q'(-n+\varepsilon+1) + \frac{q^{-n+\varepsilon}\ln q}{1-q}\Gamma_q(-n+\varepsilon)}{[-n+\varepsilon]\Gamma_q(-n+\varepsilon)} \\ &= \frac{\Gamma_q'(-n+\varepsilon+1)}{\Gamma_q(-n+\varepsilon+1)} + \frac{q^{-n+\varepsilon}\ln q}{(1-q)[-n+\varepsilon]}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma_q'(-n+\varepsilon)}{\Gamma_q(-n+\varepsilon)} = \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma_q'(-n+\varepsilon+1)}{\Gamma_q(-n+\varepsilon+1)} + \frac{q^{-n+\varepsilon}\ln q}{(1-q)[-n+\varepsilon]},$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\psi_q(-n) &= \psi_q(-n+1)+\frac{\ln q}{(1-q)[n]}\\ &= \psi_q(1)+\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{[j]}+\frac{\ln q}{(1-q)[n]}\\ &= \psi_q(1)+\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{[j]}\\ &= \psi_q(1)+\frac{\ln q}{q-1}\varphi_q(n)\end{aligned}$$

istenilen elde edilir. □

Burada elde edilen tüm sonuçlar $q \to 1$ iken [12], [14] ve [16] çalışmalarındaki sonuçlara yakınsamaktadır. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar, gama fonksiyonunun bir q-genişlemesidir.

5. TAM OLMAYAN q-GAMA FONKSİYONU $\gamma_q(\alpha,x)$ VE ÜZERİNE BAZI EŞİTLİKLER

5.1. Tam Olmayan Gama Fonksiyonunun Bir q-Genişlemesi

Tam olmayan gama fonksiyonu $\gamma(\alpha,x)$

$$\gamma(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt \quad \alpha>0, x>0$$

integrali ile tanımlıdır.

Fisher tüm $\alpha>0$ değerleri ve $x>0$ için $\gamma(\alpha,x)$ fonksiyonunu neutrix limit yardımıyla

$$\gamma(\alpha,x)=\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

eşitliği ile tanımlamıştır [11]. Ayrıca $n=0,1,2,\ldots$ değerleri için

$$\lim_{x\to\infty}\gamma(-n,x)=\Gamma(-n)$$

biçimindedir.

Tam olmayan q-gama fonksiyonu $\gamma_q(\alpha,x)$ $\alpha>0$ ve $x>0$ gerçel değerleri için

$$\gamma_q(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}E_q^{-qt}d_qt \tag{5.1.1}$$

q-integrali ile tanımlıdır [9]. Bu q-integrali $\alpha\leq 0$ değerleri için ıraksaktır. $\alpha>0$ için (2.4.38) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralını kullanarak

$$\gamma_q(\alpha+1,x)=[\alpha]\gamma_q(\alpha,x)-x^\alpha E_q^{-x} \tag{5.1.2}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin yardımıyla $\gamma_q(\alpha,x)$ fonksiyonu α'nın negatif, tamsayı olmayan değerleri için tanımlanabilir.

Özel olarak, eğer $-1<\alpha<0$ ise

$$\begin{aligned}\gamma_q(\alpha,x) &= [\alpha]^{-1}\gamma_q(\alpha+1,x)+[\alpha]^{-1}x^\alpha e_q^{-x}\\ &= -[\alpha]^{-1}\int_0^x t^\alpha D_q\left(E_q^{-t}-1\right)d_qt+[\alpha]^{-1}x^\alpha E_q^{-x}\end{aligned}$$

yazılarak

$$\gamma_q(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}\left(E_q^{-qt}-1\right)d_qt+[\alpha]^{-1}x^{\alpha} \tag{5.1.3}$$

eşitliği elde edilir.

Tümevarım yöntemiyle (5.1.3) eşitliğinin $-m<\alpha<-m+1$, $m=1,2,\ldots$ ve $x>0$ değerleri için

$$\gamma_q(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}\left(E_q^{-qt}-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}t^i}{[i]!}\right)d_qt+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}x^{i+\alpha}}{[i+\alpha][i]!}$$

biçimde olacağı görülebilir [28].

$\gamma_q(\alpha,x)$ tam olmayan q-gama fonksiyonunu türevleriyle birlikte, $\alpha\in\mathbb{R}$, $r=0,1,2,\ldots$ ve $x>0$ değerleri için q-integral gösterimi ve neutrix limit yardımıyla

$$\gamma_q^{(r)}(\alpha,x)=\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x t^{\alpha-1}\ln^r t E_q^{-qt}d_qt \tag{5.1.4}$$

şeklinde tanımlanmıştır [28].

Bu bölümde, tam olmayan q-gama fonksiyonu ve türevi için bazı sonuçlar elde edilecektir. $\mathcal{N}$ neutrixi olarak, tanım kümesi $N'=(0,\infty)$ açık aralığı olmak üzere 4. bölümde kullandığımız neutrix alınacaktır.

5.2. Teoremler

İlk olarak daha sonra işlemlerimizde kullanacağımız iki özelliği ispatlayalım.

Lemma 5.1. [8] $x>0$ *olmak üzere*

$$\gamma_q(0,x)=\frac{q-1}{\ln q}\gamma_q'(1,x)+\frac{(q-1)\ln x}{\ln q}E_q^{-x} \tag{5.2.5}$$

ve

$$\gamma_q'(0,x)=\frac{q-1}{2\ln q}\ln x\ln q^{-1}xE_q^{-x}+\frac{q-1}{2}\gamma_q'(1,x)+\frac{q-1}{2\ln q}\gamma_q''(1,x) \tag{5.2.6}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\int_{\varepsilon}^{x} t^{-1} E_q^{-qt} d_q t$$

q-integraline (2.4.39) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralını uygularsak (5.1.4) eşitliğinden (5.2.5) eşitliği elde edilir.

q-Türev tanımından

$$\begin{aligned}
D_q \ln t \ln q^{-1} t &= \frac{\ln qt \ln t - \ln t \ln q^{-1} t}{(q-1)t} \\
&= \frac{(\ln q + \ln t)\ln t - \ln t(\ln q^{-1} + \ln t)}{(q-1)t} \\
&= \frac{\ln q \ln t + \ln^2 t + \ln q \ln t - \ln^2 t}{(q-1)t} \\
&= \frac{2\ln q}{q-1} t^{-1} \ln t
\end{aligned}$$

olur. (2.4.39) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyonu ile

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{x} t^{-1} \ln t E_q^{-qt} d_q t &= \frac{q-1}{2\ln q} \ln x \ln q^{-1} x E_q^{-x} - \frac{q-1}{2\ln q} \ln \varepsilon \ln q^{-1} \varepsilon E_q^{-\varepsilon} \\
&+ \frac{q-1}{2\ln q} \int_{\varepsilon}^{x} \ln t \ln q^{-1} t E_q^{-qt} d_q t \\
&= \frac{q-1}{2\ln q} \ln x \ln q^{-1} x E_q^{-x} - \frac{q-1}{2\ln q} \ln \varepsilon \ln q^{-1} \varepsilon E_q^{-\varepsilon} \\
&- \frac{q-1}{2} \int_{\varepsilon}^{x} \ln t E_q^{-qt} d_q t + \frac{q-1}{2\ln q} \int_{\varepsilon}^{x} \ln^2 t E_q^{-qt} d_q t
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa (5.1.4) eşitliğinden istenilen elde edilir. □

Tam olmayan q-gama fonksiyonunun negatif tamsayı değerleri için;

$$\begin{aligned}
\gamma_q(-n,x) &= \int_{1}^{x} t^{-n-1} E_q^{-qt} d_q t + \int_{0}^{1} t^{-n-1} \left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i \right] d_q t \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]}
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

eşitliği ile verilebileceği gösterilmiştir [28]. Bu sonuçtan yararlanarak $\gamma_q(\alpha,x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği verebiliriz.

Teorem 5.2. [8] *$x > 0$ olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için*

$$\gamma_q(-n,x) = \frac{1}{[-n]}\gamma_q(-n+1,x) + \frac{x^{-n}E_q^{-x}}{[-n]} - \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[-n][n]!} \tag{5.2.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (5.2.7) eşitliğinde (2.4.39) eşitliği ile tanımlanan q-kısmi integrasyonu uygulandığında

$$\begin{aligned}\gamma_q(-n,x) &= \frac{1}{[-n]}\left\{\int_1^x t^{-n}E_q^{-qt}d_qt + \int_0^1 t^{-n}\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt\right\}\\ &+ \frac{x^{-n}E_q^{-x}}{[-n]} - \frac{E_q^{-1}}{[-n]} + \frac{E_q^{-1}}{[-n]} - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[-n][i]!} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]}\end{aligned}$$

olur. Elde edilen son iki seri düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[i]!}\left\{\frac{q^i}{[i-n]} - \frac{1}{[-n]}\right\} &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}(1-q)}{[i]!}\\ &\quad \left\{\frac{q^{i-n} - q^i - q^{i-n} + 1}{(1-q^{i-n})(1-q^{-n})}\right\}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[i]!}\frac{[i]}{[i-n][-n]}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[i-1]![i-n][-n]}\\ &= \frac{1}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise tam olmayan q-gama fonksiyonun $\alpha = -n+1$ noktasındaki değerinin seri ifadesi kısmıdır. Böylece istenilen sonuca ulaşılır. □

Salem, $x > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ değerleri için (2.4.38) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyonu kullanarak

$$\gamma_q(-n,x) + \frac{q^n}{[n]}\gamma_q(-n+1,qx) = \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n][n!]} - \frac{q^{-n}}{[n]}x^{-n}E_q^{-qn} \tag{5.2.9}$$

formülünü elde etmiştir [28]. (5.2.8) ve (5.2.9) eşitliklerini, Özçağ ve diğerlerinin [25] tam olmayan gama fonksiyonu için elde ettiği

$$\gamma(-n,x) + \frac{1}{n}\gamma(-n+1,x) = \frac{(-1)^n}{nn!} - \frac{1}{n}e^{-x}x^{-n} \tag{5.2.10}$$

formülü ile karşılaştıracak olursak elde edilen her iki sonuç da (5.2.10) eşitliğinin bir q-analoğudur. Burada iki farklı sonucun oluşmasının nedeni, (5.2.9) eşitliği elde edilirken (2.4.38) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon kuralından yararlanılmış ve yeni elde edilen integral ile $\gamma_q(-n+1,qx)$ ifadesindeki integralinin birbirine denk olduğu gösterilmiştir. Fakat biraz önce yapılan ispatta (2.4.39) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon formülü kullanılarak yeni elde edilecek integralin yine tam olmayan q-gama fonksiyonunun tanımda kullanılan integralin integrandı ile aynı olması sağlanmıştır. Bununla beraber (5.2.8) ve (5.2.9) eşitlikleri $q \to 1$ iken (5.2.10) eşitliğini verir.

Ayrıca (5.2.8) eşitliğinden yararlanarak tümevarım yöntemi kullanılarak $n = 1,2,\ldots$ değerleri için;

$$\gamma_q(-n,x) = \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\left[\varphi_q(n)+\gamma(0,x)\right]+\mu_q(n)E_q^{-x}.$$

elde edilir. Burada μ fonksiyonu,

$$\mu_q(n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\eta_q(i)x^{-n+i}$$

ve η_q ile φ_q fonksiyonları sırasıyla

$$\varphi_q(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{[n]} \quad , \quad \eta_q(i) = \prod_{j=0}^{i}\frac{q^{n-j}}{[n-j]}$$

biçimindedir.

Lemma 5.3.

1.

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} t^{i-1}\ln t\, d_qt = 0$$

2.

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} t^{\alpha-1}\ln t\, d_qt = \frac{\ln q^{-1}}{[\alpha]}+\frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[\alpha]^2}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

İspat: Bu özellikler q-kısmi integrasyon kuralı ve neutrix limit yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir. □

Lemma 5.3 yardımıyla $\gamma_q(\alpha,x)$ fonksiyonun birinci türeviyle birlikte negatif gerçel değerlerde aşağıdaki gibi tanımlanabileceğini gösterelim.

Lemma 5.4. [8] *$n = 1,2,\ldots$ olmak üzere $-n < \alpha < -n+1$, $x > 0$ değerleri için*

$$\begin{aligned}\gamma_q(\alpha,x) &= \int_1^x t^{\alpha-1}E_q^{-qt}d_qt + \int_0^1 t^{\alpha-1}\left(E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right)d_qt \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i+\alpha][i]!} \qquad (5.2.11)\end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned}\gamma_q'(\alpha,x) &= \int_1^x t^{\alpha-1}\ln t E_q^{-qt}d_qt + \int_0^1 t^{\alpha-1}\ln t\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left[\frac{\ln q^{-1}}{[\alpha+i]} + \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[\alpha+i]^2}\right] \qquad (5.2.12)\end{aligned}$$

ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$\begin{aligned}\gamma_q'(-n,x) &= \int_1^x t^{-n-1}\ln t E_q^{-qt}d_qt + \int_0^1 t^{-n-1}\ln t\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left[\frac{\ln q^{-1}}{[i-n]} + \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n+i]^2}\right] \qquad (5.2.13)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x t^{\alpha-1}E_q^{-qt}d_qt &= \int_1^x t^{\alpha-1}E_q^{-qt}d_qt + \int_\varepsilon^1 t^{\alpha-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left[\frac{1}{[\alpha+i]} - \frac{\varepsilon^{\alpha+i}}{[\alpha+i]}\right].\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alındığında $\varepsilon^{\alpha+i}$ ihmal edilebilir bir fonksiyon olduğundan (5.2.11) eşitliğine ulaşılır.

(5.2.12) eşitliğinin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

(5.2.13) eşitliği için, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{x} t^{-n-1}\ln t E_q^{-qt} d_qt &= \int_{1}^{x} t^{-n-1}\ln t E_q^{-qt} d_qt \\ &+ \int_{\varepsilon}^{1} t^{-n-1}\ln t \left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i\right] d_qt \\ &+ \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} \int_{\varepsilon}^{1} t^{-n+i-1}\ln t d_qt\end{aligned}$$

biçiminde yazılır ve Lemma 5.3 kullanıldığında istenilen sonuca ulaşılır. □

Teorem 5.5. [8] *Her α gerçel değeri ve $r = 0,1$ için;*

$$\gamma_q^{(r)}(\alpha,x) = \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_q^{(r)}(\alpha+\varepsilon,x)$$

biçimindedir.

İspat: $0 < \varepsilon < 1$ olsun. $\alpha \neq 0,-1,\ldots$ değerleri için tam olmayan q-gama fonksiyonu sürekli olduğundan istenilen sağlanır. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $r = 0$ değeri için;

$$\begin{aligned}\gamma_q(-n+\varepsilon,x) &= \int_{1}^{x} t^{-n+\varepsilon-1} E_q^{-qt} d_qt + \int_{0}^{1} t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i\right] d_qt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i-n+\varepsilon][i]!} \\ &= \int_{1}^{x} t^{-n+\varepsilon-1} E_q^{-qt} d_qt + \int_{0}^{1} t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i\right] d_qt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i-n+\varepsilon][i]!} + \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} \int_{0}^{1} t^{\varepsilon-1} d_qt \\ &= \int_{1}^{x} t^{-n+\varepsilon-1} E_q^{-qt} d_qt + \int_{0}^{1} t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i\right] d_qt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i-n+\varepsilon][i]!} + \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} \frac{1}{[\varepsilon]}.\end{aligned}$$

olup eşitliğin sağ tarafındaki son ifade neutrixin elemanı olduğundan

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_q(-n+\varepsilon,x) = \gamma_q(-n,x)$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}\gamma_q(-n-\varepsilon,x) &= \int_1^x t^{-n+\varepsilon-1}E_q^{-qt}d_qt+\int_0^1 t^{-n+\varepsilon-1}\left[E_q^{-qt}-\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i-n+\varepsilon][i]!}+\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]![-\varepsilon]}\end{aligned}$$

olur. $[-\varepsilon]=-q^{\varepsilon}[\varepsilon]$ bağıntısını kullanır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limitini alırsak

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_q(-n-\varepsilon,x)=\gamma_q(-n,x)$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi $r=1$ değeri için $0<\varepsilon<1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\gamma_q'(-n+\varepsilon,x) &= \int_1^x t^{-n+\varepsilon-1}\ln t E_q^{-qt}d_qt\\ &+ \int_0^1 t^{-n+\varepsilon-1}\ln t\left[E_q^{-qt}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt\\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left[\frac{\ln q^{-1}}{[-n+\varepsilon+i]}+\frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n+\varepsilon+i]^2}\right]\\ &= \int_1^x t^{-n+\varepsilon-1}\ln t E_q^{-qt}d_qt\\ &+ \int_0^1 t^{-n+\varepsilon-1}\ln t\left[E_q^{-qt}-\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right]d_qt\\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left[\frac{\ln q^{-1}}{[-n+\varepsilon+i]}+\frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n+\varepsilon+i]^2}\right]\\ &+ \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!}\int_0^1 t^{\varepsilon-1}\ln t d_qt\end{aligned}$$

olup son integral hesaplandığında neutrixin elemanı olduğu görülür. Böylece negatif tamsayıya sağdan yaklaşırken istenilen elde edilir. Soldan yaklaşıldığında;

$$\begin{aligned}
\gamma_q'(-n-\varepsilon,x) &= \int_1^x t^{-n-\varepsilon-1}\ln t E_q^{-qt} d_q t \\
&+ \int_0^1 t^{-n-\varepsilon-1}\ln t \left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i\right] d_q t \\
&+ \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} \left[\frac{\ln q^{-1}}{[-n+\varepsilon+i]} + \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n+\varepsilon+i]^2}\right] \\
&= \int_1^x t^{-n-\varepsilon-1}\ln t E_q^{-qt} d_q t \\
&+ \int_0^1 t^{-n-\varepsilon-1}\ln t \left[E_q^{-qt} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} t^i\right] d_q t \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!} \left[\frac{\ln q^{-1}}{[-n+\varepsilon+i]} + \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n+\varepsilon+i]^2}\right] \\
&+ \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} \left[\frac{\ln q^{-1}}{[\varepsilon]} + \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[\varepsilon]^2}\right].
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa (5.2.13) eşitliğinden istenilen elde edilir. □

$\alpha > 0$ ve $x > 0$ değerleri için tam olmayan q-gama fonksiyonunun (5.1.2) formülünü sağladığını göstermiştik. Aşağıdaki teorem ile (5.1.2) eşitliği tüm $\alpha \in \mathbb{R}$ değerlerine genişletilecektir.

Teorem 5.6. [8] *Tüm α gerçel değerleri için aşağıdaki eşitlik sağlanır,*

$$\gamma_q(\alpha+1,x) = \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big([\alpha+\varepsilon]\gamma_q(\alpha+\varepsilon,x) - x^{\alpha+\varepsilon}E_q^{-x}\Big).$$

İspat: $\alpha \neq 0,-1,-2,\ldots$ değerleri için $\gamma_q(\alpha,x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan eşitlik gerçeklenir. $0 < \varepsilon < 1$ için (5.1.2) eşitliğinden

$$\gamma_q(-n+\varepsilon+1,x) = [-n+\varepsilon]\gamma_q(-n+\varepsilon,x) - x^{-n+\varepsilon}E_q^{-x}$$

yazabiliriz. Teorem 5.5'den yararlanarak

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_q(-n+\varepsilon+1,x) = \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big([-n+\varepsilon]\gamma_q(-n+\varepsilon,x) - x^{-n+\varepsilon}E_q^{-x}\Big)$$

ve buradan

$$\gamma_q(-n+1,x) \quad = \quad \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\left([-n+\varepsilon]\gamma_q(\alpha+\varepsilon,x)-x^{-n+\varepsilon}E_q^{-x}\right)$$

olduğu görülür. □

Bu bölümde son olarak $\gamma_q(\alpha,x)$ fonksiyonun birinci türevinin negatif tamsayı değerlerde kendisi ile ifade edilebileceği gösterilecektir. Bunun için (5.2.13) eşitliğinde (2.4.39) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı uygulandığında;

$$\begin{aligned}
\gamma_q'(-n,x) =& \frac{x^{-n}\ln\left(q^{-1}x\right)E_q^{-x}}{[-n]} - \frac{\ln q^{-1}}{[-n]}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[i]!} + \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]!}\frac{\ln q^{-1}}{[-n]} \\
&+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left[\frac{\ln q^{-1}}{[i-n]}+\frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n+i]^2}\right] \\
&+\frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n]}\left\{\int_1^x t^{-n-1}E_q^{-qt}d_qt+\int_0^1 t^{-n-1}\left(E_q^{-qt}+\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right)d_qt\right\} \\
&+\frac{\ln q^{-1}}{[-n]}\left\{\int_1^x t^{-n}E_q^{-qt}d_qt+\int_0^1 t^{-n}\left(E_q^{-qt}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right)d_qt\right\} \\
&+\frac{1}{[-n]}\left\{\int_1^x t^{-n}\ln t E_q^{-qt}d_qt+\int_0^1 t^{-n-1}\ln t\left(E_q^{-qt}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}t^i\right)d_qt\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Parantez içindeki ifadelere baktığımızda bunlar sırasıyla $\gamma_q(-n,x)$, $\gamma_q(-n+1,x)$ ve $\gamma_q'(-n+1,x)$ ifadelerinin integral kısımlarıdır. Eğer bu ifadelerde eksik olan seri kısımları eklenip çıkarılırsa eşitlik

$$\begin{aligned}
\gamma_q'(-n,x) \quad =& \quad \frac{x^{-n}\ln q^{-1}xE_q^{-x}}{[-n]}+\frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n]}\gamma_q(-n,x)+\frac{\ln q^{-1}}{[-n]}\gamma_q(-n+1,x) \\
&+ \quad \frac{1}{[-n]}\gamma_q'(-n+1,x)+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[i]!} \\
&+ \quad \frac{\ln q}{(q-1)[-n]}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]}+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]} \\
&+ \quad \frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}+\frac{\ln q}{(q-1)[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]^2} \\
&- \quad \ln q\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]}-\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]^2}
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Buradaki birinci, dördüncü ve altıncı serileri hesapladığımızda

$$
\begin{aligned}
&\frac{\ln q}{[-n]}+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{[i]!}+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}-\frac{\ln q}{[-n]}-\ln q\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]}\\
&=-\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i+1]!}+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}+\ln q\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}}}{[i]![i-n+1]}\\
&=\ln q\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}\left\{-\frac{1}{[i+1][-n]}+\frac{q^{i+1}}{[i+1][-n+i+1]}+\frac{1}{[-n][-n+i+1]}\right\}\\
&=\ln q\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]!}(1-q)^2\left\{\frac{-1+q^{i-n+1}+q^{i+1}-q^{i-n+1}+1-q^{i+1}}{(1-q^{i+1})(1-q^{-n+i+1})(1-q^{-n})}\right\}=0
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Kalan seriler düzenlediğinde;

$$
\begin{aligned}
&\frac{\ln q}{(q-1)[-n]^2}+\frac{\ln q}{(q-1)[-n]}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]}+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}\\
&-\frac{\ln q}{(q-1)[-n]^2}-\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n]^2}+\frac{\ln q}{(q-1)[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]^2}\\
&=-\frac{\ln q}{(q-1)[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}}}{[i+1]![i-n+1]}+\frac{\ln q}{[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}\\
&+\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}}}{[i+1]![i-n+1]^2}+\frac{\ln q}{(q-1)[-n]}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]^2}\\
&=\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}\left\{-\frac{q^{i+1}}{[-n][i+1]}+\frac{q-1}{[-n]}+\frac{q^{i+1}}{[i+1][i-n+1]}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{[-n][-n+i+1]}\right\}\\
&=\frac{\ln q}{q-1}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}}}{[i]![i-n+1]}(1-q)^2\left\{\frac{-q^{i+1}+q^{-n+2i+2}-1+q^{i+1}+q^{-n+i+1}-q^{-n+2i+2}}{(1-q^{i+1})(1-q^{-n+i+1})(1-q^{-n})}\right.\\
&\qquad\left.\frac{+q^{i+1}-q^{-n+i+1}+1-q^{i+1}}{(1-q^{i+1})(1-q^{-n+i+1})(1-q^{-n})}\right\}\\
&=0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.7. [8] $n = 1, 2, \ldots$ *ve* $x > 0$ *değerleri için*

$$\begin{aligned} \gamma_q'(-n,x) &= \frac{x^{-n}\ln\left(q^{-1}x\right)E_q^{-x}}{[-n]} + \frac{\ln q^{-1}}{(q-1)[-n]}\gamma_q(-n,x) + \frac{\ln q^{-1}}{[-n]}\gamma_q(-n+1,x) \\ &+ \frac{1}{[-n]}\gamma_q'(-n+1,x) \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

eşitliği sağlanır.

6. q-DİGAMA VE q-POLYGAMA FONKSİYONLARI

6.1. Tanımlar ve Gösterimler

Gama fonksiyonunun logartimik türevi olarak tanımlanan fonksiyona *"digama fonksiyonu"* denir ve $\psi(x)$ ile gösterilir. Yani

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0$$

biçimindedir. $\psi(x)$ fonksiyonunun integral gösterimi $x > 0$ değerleri için

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt$$

biçimindedir.

Polygama fonksiyonu,

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\psi(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln\Gamma(x), \quad x > 0$$

ile ve integral gösterimi

$$\psi^{(n)}(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t}dt$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

Özçağ ve Ege [24], $\psi^{(n)}(x)$ polygama fonksiyonunun tüm gerçel değerlerde tanımını

$$\psi^{(n)}(x) = -\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\ln^n t(1-t)^{-1}dt \tag{6.1.1}$$

eşitliği ile vermişlerdir.

Bu bölümde, q-gama fonksiyonu $\Gamma_q(x)$ ile ilişkili olarak tanımlanan $\psi_{q,n}(x)$ q-polygama fonksiyonları neutrix calculus kullanılarak x'in tüm gerçel değerleri için tanımlanacaktır.

$\mathcal{N}$ neutrixi olarak tanım kümesi $N' = \{\varepsilon : 0 < \varepsilon < q\}$ olmak üzere 4. bölüm girişinde (4.0.1) ile verilen ihmal edilebilir fonksiyonlar alınacaktır.

İlk olarak q-digama (yada q-psi) fonksiyonu olarak adlandırılan $\psi_q(x)$ fonksiyonunun tanımını verelim. q-digama fonksiyonu $x > 0$ için

$$\psi_q(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma_q(x) = \frac{\Gamma_q'(x)}{\Gamma_q(x)} \tag{6.1.2}$$

ile tanımlıdır [15]. q-integrali yardımıyla q-digama fonksiyonu

$$\psi_q(x) = -\ln(1-q) + \frac{\ln q}{1-q}\int_0^q \frac{t^{x-1}}{1-t}d_qt, \quad x > 0 \tag{6.1.3}$$

eşitliği ile gösterilmiştir [15].

$\psi_q(x)$ fonksiyonun türevleri yardımıyla tanımlanan q-polygama fonksiyonu $\psi_{q,n}(x) = \psi_q^{(n)}(x)$ fonksiyonu

$$\psi_{q,n}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\psi_q(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln\Gamma_q(x) \tag{6.1.4}$$

ve integral gösterimi

$$\psi_{q,n}(x) = \frac{\ln q}{1-q}\int_0^q \frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t}d_qt, \quad x > 0 \tag{6.1.5}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır [19].

6.2. Teoremler

Öncelikle sonuçlarımızda yararlanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 6.1. [32] *x keyfi bir gerçel sayı olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ değerleri için*

$$\int_\varepsilon^q t^{x-1}\ln^n t\, d_qt$$

q-integralinin $\varepsilon \to 0$ iken neutrix limiti vardır.

İspat: İlk olarak $x = 0$ durumunu inceleyelim. $n = 1$ için (2.4.39) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^q t^{-1}\ln t\, d_qt &= \frac{q-1}{\ln q}\ln q\ln(q^{-1}q) - \frac{q-1}{\ln q}\ln\varepsilon\ln(q^{-1}\varepsilon) \\ &- \int_\varepsilon^q t^{-1}\ln t\, d_qt\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} t^{-1}\ln t d_q t \quad = \quad 0$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} t^{-1}\ln^n t d_q t = 0.$$

bulunur. Şimdi $x \neq 0$ ve n=1 olsun.

$$\int_{\varepsilon}^{q} t^{x-1}\ln t d_q t \quad = \quad \frac{q^x\ln(q^{-1}q)}{[x]} - \frac{\varepsilon^x\ln(q^{-1}\varepsilon)}{[x]} - \frac{\ln q}{(q-1)[x]}\int_{\varepsilon}^{q} t^{x-1} d_q t$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} t^{x-1}\ln t d_q t \quad = \quad \frac{\ln q^{-1}q^x}{(q-1)[x]^2}$$

elde edilir. $u, v \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $u < n$ ve $v \leq n$ değerleri için

$$\frac{q^x\ln^n q}{(q-1)^u[x]^v}$$

ifadelerin sonlu toplamları $A_{q,n}$ ile gösterilmek üzere tümevarım yöntemiyle

$$I_n = \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} t^{x-1}\ln^n t d_q t = A_{q,n} + \frac{(-1)^n n! q^x \ln^n q}{(q-1)^n[x]^{n+1}}$$

olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir. Ayrıca $q \to 1$ iken $A_{q,n}$ sıfıra yakınsar. Dolayısıyla $q \to 1$ iken I_n, $\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ fonksiyonuna yakınsayacaktır. $\square$

Teorem 6.2. [32] *$n, m = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $-m < x < -m+1$ olsun. O halde*

$$\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t} d_q t$$

neutrix limiti mevcuttur.

İspat:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t} d_q t &= \int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x-1}\ln^n t(1-t^m)}{1-t} d_q t + \int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x+m-1}\ln^n t}{1-t} d_q t \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{\varepsilon}^{q} t^{x+k-1}\ln^n t d_q t + \int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x+m-1}\ln^n t}{1-t} d_q t\end{aligned}$$

yazılır ve her iki tarafın neutrix limiti alınırsa, Lemma 6.1'den yararlanarak

$$\begin{aligned}
\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t}d_qt &= \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\varepsilon}^{q}t^{x+k-1}\ln^n t\,d_qt+\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{x+m-1}\ln^n t}{1-t}d_qt\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}t^{x+k-1}\ln^n t\,d_qt+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{x+m-1}\ln^n t}{1-t}d_qt\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}t^{x+k-1}\ln^n t\,d_qt+\frac{1-q}{\ln q}\psi_{q,n}(x+m)
\end{aligned}$$

olur. Böylece istenilen elde edilir. □

Lemma 6.1 ve Teorem 6.2, bize q-polygamma fonksiyonunun tüm x gerçel değerlerine neutrix limit yardımıyla

$$\psi_{q,n}(x)=\frac{\ln q}{1-q}\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{x-1}\ln^n t}{1-t}d_qt \tag{6.2.6}$$

eşitliği ile genişletilebileceği fikrini vermektedir.

Aşağıdaki teorem ile negatif tamsayı değerlerde (6.2.6) eşitliğinde geçen neutrix limitin varolduğunu gösterelim.

Teorem 6.3. [32] *$n\in\mathbb{Z}^+$ ve $m=1,2,\ldots$ değerleri için*

$$\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{-1}\ln^n t}{1-t}d_qt$$

ve

$$\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{-m-1}\ln^n t}{1-t}d_qt$$

q-integrallerinin $\varepsilon\to 0$ iken neutrix limiti vardır.

İspat:

$$\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{-1}\ln^n t}{1-t}d_qt=\int_{\varepsilon}^{q}t^{-1}\ln^n t\,d_qt+\int_{\varepsilon}^{q}\frac{\ln^n t}{1-t}d_qt$$

yazılabileceğinden eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alındığında ve Lemma 6.1 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}\frac{t^{-1}\ln^n t}{1-t}d_qt &= \mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}t^{-1}\ln^n t\,d_qt+\mathrm{N-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q}\frac{\ln^n t}{1-t}d_qt\\
&= \frac{1-q}{\ln q}\psi_{q,n}(1)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{-m-1}\ln^{n} t}{1-t} d_q t &= \int_{\varepsilon}^{q} t^{-m}\ln^{n} t\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}\right] d_q t \\
&= \int_{\varepsilon}^{q} t^{-m-1}\ln^{n} t\, d_q t+\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{-m}\ln^{n} t}{1-t} d_q t
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{-m-1}\ln^{n} t}{1-t} d_q t &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} t^{-m-1}\ln^{n} t\, d_q t \\
&\quad +\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{-m}\ln^{n} t}{1-t} d_q t \qquad (6.2.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.2.7) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk neutrix limitin varlığı Lemma 6.1'den görülür ve ikinci neutrix limitin varlığı ise tümevarım yöntemiyle elde edilebilir. □

$x > 0$ değerleri

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x-1}\ln^{n} t}{1-t} d_q t &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{q} \frac{t^{x-1}\ln^{n} t}{1-t} d_q t \\
&= \int_{0}^{q} \frac{t^{x-1}\ln^{n} t}{1-t} d_q t
\end{aligned}$$

olduğundan tüm x gerçel değerleri için $\psi_{q,n}(x)$ q-polygama fonksiyonu (6.2.6) eşitliği ile tanımlanabilir.

Lemma 6.1 ve Teorem 6.3 yardımıyla $\psi_{q,n}(x)$ q-polygama fonksiyonunun pozitif olmayan tamsayı değerlerinde

$$\begin{aligned}
\psi_{q,n}(0) &= \psi_{q,n}(1), \\
\psi_{q,n}(-m) &= \frac{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} q}{(q-1)^{n+1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{q^{-k}}{[-k]^{n+1}}+\psi_{q,n}(1)+\frac{\ln q}{1-q}\sum_{k=1}^{m} A_{q,k}
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. Burada $A_{q,k}$, $u, v \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $u < n$ ve $v \leq n$ değerleri için

$$\frac{q^{x}\ln^{k} q}{(q-1)^{u}[x]^{v}}$$

ifadelerinin sonlu toplamıdır.

7. q-BETA FONKSİYONU VE ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

7.1. q-Beta Fonksiyonunun Bir Genişlemesi

$B_q(x,y)$ q-beta fonksiyonu, $x,y>0$ değerleri için

$$B_q(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-qt)_q^{y-1}d_qt \tag{7.1.1}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır [18].

Neutrix limit kavramı kullanılarak q-beta fonksiyonu ve birinci parametreye göre kısmi türevleri tüm x, y gerçel değerlerinde

$$B_q^{(r,0)}(x,y)=\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{x-1}\ln^r t(1-qt)_q^{y-1}d_qt \tag{7.1.2}$$

ile tanımlanmıştır [5], [29].

Bu bölümde $\mathcal{N}$ neutrixi olarak 3.2 alt bölümünün girişinde verilen küme alınacaktır.

7.2. q-Beta Fonksiyonu Üzerine Teoremler

İlk olarak tümevarım yöntemiyle kolaylıkla ispatlanabilecek olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 7.1. [34] *$r=0,1,2,\ldots$ değerleri için*

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{-1}\ln^r t\,d_qt=0$$

biçimindedir. Ayrıca $j\neq -1$ için

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^j\ln^r t\,d_qt$$

q-integralinin $\varepsilon\to 0$ iken neutrix limiti vardır.

Teorem 7.2. [34] $r = 1, 2, ...$ *değerleri için*

$$B_q^{(r,0)}(0,1) = 0 \tag{7.2.3}$$

ve

$$B_q^{(r,0)}(0,0) = B_q^{(r,0)}(1,0) \tag{7.2.4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (7.2.3) eşitliği için, $r = 1$ olmak üzere (2.4.39) eşitliği ile tanımlı q-kısmi integrasyon kuralı kullanılarak

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln t d_q t = \frac{1}{2} \frac{q-1}{\ln q} \left[\ln(1-\varepsilon) \ln q^{-1}(1-\varepsilon) - \ln \varepsilon \ln q^{-1} \varepsilon \right]$$

bulunur. Böylece her iki tarafın neutrix limiti alındığında

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln t d_q t = 0$$

elde edilir. $r > 1$ olduğu durum tümevarım yöntemiyle elde edilebilir.
(7.2.4) eşitliği için $B_q^{(r,0)}(x,y)$'nin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(0,0) &= \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln^r t (1-qt)_q^{-1} d_q t \\ &= \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln^r t \frac{1}{1-t} d_q t \\ &= \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln^r t d_q t + \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\ln^r t}{1-t} d_q t \\ &= B_q^{(r,0)}(1,0) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenilen sonuçtur. □

Teorem 7.3. [34] $r, n = 1, 2, \ldots$ *değerleri için*

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(0,n+1) &= -(q^n - 1) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \ln^{r-j-1} q^{-1} B_q^{(j+1,0)}(1,n) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \ln^{r-j-1} q^{-1} B_q^{(j+1,0)}(0,n+1) \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

İspat: $f(qt) = \ln^r t(1-qt)_q^n$ ve $g(t) = \dfrac{q-1}{\ln q}\ln t$ olarak alınıp (2.4.39) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1}\ln^r t(1-qt)_q^n d_q t$$

integraline uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1}\ln^r t(1-qt)_q^n d_q t &= \frac{q-1}{\ln q}\ln(1-\varepsilon)\ln^r(q^{-1}(1-\varepsilon))(1-(1-\varepsilon))_q^n \\
&- \frac{q-1}{\ln q}\ln\varepsilon\ln^r(q^{-1}\varepsilon)(1-\varepsilon)_q^n \\
&- \frac{q-1}{\ln q}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\ln t\left[-[n]\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\ln^{r-j}q^{-1}\ln^j t(1-qt)_q^{n-1}\right. \\
&- \left.\frac{(1-qt)_q^n}{q-1}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\ln^{r-j}q^{-1}t^{-1}\ln^j t\right]d_q t
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alındığında (7.2.5) eşitliği elde edilir.

□

(2.1.4) özelliğinden yararlanarak $r,n = 1,2,\ldots$ değerleri için

$$\begin{aligned}
B_q^{(r,0)}(0,n) &= \underset{\varepsilon\to 0}{\text{N}-\lim}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1}\ln^r t(1-qt)_q^{n-1}d_q t \\
&= \underset{\varepsilon\to 0}{\text{N}-\lim}\int_{\varepsilon}^{1} t^{-1}\ln^r t(1-qt)_q^{n-1}d_q t \\
&= \underset{\varepsilon\to 0}{\text{N}-\lim}\int_{\varepsilon}^{1} t^{-1}\ln^r t(1-qt)_q^{n-2}(1-q^{n-1}t)d_q t \\
&= \underset{\varepsilon\to 0}{\text{N}-\lim}\int_{\varepsilon}^{1} t^{-1}\ln^r t(1-qt)_q^{n-2}d_q t - q^{n-1}\int_{\varepsilon}^{1}\ln^r t d_q t
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse

$$B_q^{(r,0)}(0,n) = \underset{\varepsilon\to 0}{\text{N}-\lim}\int_{\varepsilon}^{1} t^{-1}\ln^r t d_q t - \sum_{j=1}^{n-1} q^j\int_{\varepsilon}^{1}\ln^r t d_q t$$

sonucuna ulaşılır. Böylece Lemma 7.1'den

$$B_q^{(r,0)}(0,n) = -\sum_{j=1}^{n-1} q^j B_q^{(r,0)}(1,1) \tag{7.2.6}$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak

$$B_q^{(r,0)}(1,n) = B_q^{(r,0)}(1,1) - \sum_{j=1}^{n-1} q^j B_q^{(r,0)}(2,1) \tag{7.2.7}$$

olduğu görülür.

Teorem 7.4. [34] $r = 1,2,\ldots$ *değerleri için*

$$B_q^{(r,0)}(-1,0) = B_q^{(r,0)}(-1,1) + B_q^{(r,0)}(1,0) \tag{7.2.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (7.1.2) eşitliğinde $x = -1$ yazarsak

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(-1,0) &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-2} \ln^r t (1-qt)_q^{-1} d_q t \\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-2} \ln^r t \frac{1}{1-t} d_q t \\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-2} \ln^r t d_q t + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln^r t d_q t \right. \\ &+ \left. \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \ln^r t \frac{1}{1-t} d_q t \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitlikteki ikinci integralin neutrix limiti sıfır olduğundan

$$B_q^{(r,0)}(-1,0) = B_q^{(r,0)}(-1,1) + B_q^{(r,0)}(1,0)$$

sonucuna ulaşılır. □

Özel olarak $r = 1$ için

$$\begin{aligned} B_q^{(1,0)}(-1,0) &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-2} \ln t (1-qt)_q^{-1} d_q t \\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-2} \ln t \frac{1}{1-t} d_q t \\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-2} \ln t d_q t + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-1} \ln t d_q t \right. \\ &+ \left. \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \ln t \frac{1}{1-t} d_q t \right\} \\ &= -\frac{q \ln q}{[1]^2 (q-1)} + B_q^{(1,0)}(1,0) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 7.5. [34] *$r,n=1,2,\ldots$ değerleri için*

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(-n-1,1) &= \frac{1}{q^{-n-1}-1}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\ln^{r-j}q^{-1}B_q^{(j,0)}(-n-1,1) \\ &+ \frac{\ln^r q^{-1}}{[-n-1]} \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f(qt)=ln^r q^{-1}t$ ve $g(t)=\dfrac{t^{-n-1}}{[-n-1]}$ olarak alınarak (2.4.39) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyonu uygulandığı takdirde

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(-n-1,1) &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-n-2}\ln^r q^{-1}t d_q t \\ &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{(1-\varepsilon)^{-n-1}}{[-n-1]}\ln^r q^{-1}(1-\varepsilon)-\frac{\varepsilon^{-n-1}}{[-n-1]}\ln^r q^{-1}\varepsilon\right. \\ &+ \left.\frac{1}{[-n-1](q-1)}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\ln^{r-j}q^{-1}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}t^{-n-2}\ln^j t d_q t\right\} \end{aligned}$$

eşitliği ile istenilen sonuca ulaşılır. □

Ayrıca $f(t)=\ln^r t$ ve $g(t)=\frac{t^{-n-1}}{[-n-1]}$ olarak seçilip (2.4.38) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{-n-2}\ln^r q^{-1}t d_q t &= \frac{(1-\varepsilon)^{-n-1}}{[-n-1]}\ln^r(1-\varepsilon)-\frac{\varepsilon^{-n-1}\ln^r\varepsilon}{[-n-1]} \\ &- \frac{1}{[-n-1](q-1)}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\ln^{r-j}q\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(qt)^{-n-1}t^{-1}\ln^j t d_q t \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın neutrix limiti alındığında $B_q^{(r,0)}(-n-1,1)$ fonksiyonunun $r,n=1,2,\ldots$ değerleri için

$$B_q^{(r,0)}(-n-1,1)=\frac{1}{q^{n+1}-1}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\ln^{r-j}qB_q^{(j,0)}(-n-1,1) \tag{7.2.10}$$

biçiminde de ifade edilebileceği görülür.

Şimdi (7.2.8) eşitliğini genelleştirelim.

Teorem 7.6. [34] *$r,n=1,2,\ldots$ değerleri için*

$$B_q^{(r,0)}(-n,0)=B_q^{(r,0)}(1,0)+\sum_{j=2}^{n+1}B_q^{(r,0)}(-j+1,1) \tag{7.2.11}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(-n,0) &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{-n-1}\ln^r t(1-qt)_q^{-1}d_qt \\ &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{-n-1}\ln^r t\frac{1}{1-t}d_qt \\ &= \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\ln^r t(1-qt)_q^{-1}d_qt\right. \\ &+ \left.\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{-1}\ln^r t d_qt+\sum_{j=2}^{n+1}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{-j}\ln^r t d_qt\right\} \end{aligned}$$

olup lemma 7.1'den istenilen elde edilir. □

Bir sonraki teoremde

$$(1-\varepsilon)^{n-1}\ln^r(1-\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}c_{r,n}(i)\varepsilon^i$$

ifadesinin seri açılımındaki $c_{r,n}(m)$ sabitleri, $r,m=1,2,\ldots$ olmak üzere

$$c_{r,n}(m)=\begin{cases} 0, & m<r \\ (-1)^m & m=r \\ n-m & m>r+1 \end{cases}$$

ile gösterilecektir.

Teorem 7.7. [34] *$r,m=1,2,\ldots$ ve $n=2,3,\ldots$ değerleri için*

$$\begin{aligned} B_q^{(r,0)}(n,-m) &= \frac{c_{r,n}(m)}{m}+\frac{[n-1]}{[-m]}B_q^{(r,0)}(n-1,-m+1) \\ &+ \frac{q^{n-1}}{[-m]}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}\ln^{r-k}qB_q^{(k,0)}(n-1,-m+1) \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

biçimindedir.

İspat: (2.4.39) ile verilen q-kısmi integrasyon kuralı

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{n-1}\ln^r t(1-qt)_q^{-m-1}d_qt$$

integraline uygulandığında

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{n-1}\ln^r t(1-qt)_q^{-m-1}d_qt &= -\frac{(1-\varepsilon)^{n-1}\ln^r(1-\varepsilon)\varepsilon^{-m}}{[-m]}+\frac{\varepsilon^{n-1}\ln^r\varepsilon(1-\varepsilon)_q^{-m}}{[-m]} \\ &+ \frac{[n-1]}{[-m]}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{n-2}\ln^r t(1-qt)_q^{-m}d_qt \\ &+ \frac{q^{n-1}}{[-m]}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}\ln^{r-k}t\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{n-1}\ln^k t(1-qt)_q^{-m}d_qt \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınması ile ispat tamamlanır. □

Burada elde edilen tüm sonuçlar $q \to 1$ iken [1], [2], [3], [10], [26]'da verilen sonuçlara yakınsamaktadır.

8. BETA FONKSİYONU VE q-ANALOĞU ÜZERİNE BAZI EŞİTSİZLİKLER

İki sürekli fonksiyonun bileşkesi üzerine pozitif bir lineer operatör etki ettirerek eşitsizlik elde etme fikri Mercer [22] tarafından 2006 yılında ortaya atılmış ve gama, beta ve zeta fonksiyonlarına uygulanmıştır. Bu teknik daha sonra Sellami vd. [31] tarafından q-özel fonksiyonlarına ve 2013 yılında Ege [4] tarafından neutrix limit yardımıyla elde edilen gama fonksiyonuna uygulanmıştır.

Bu bölümde öncelikle Mercer tarafından geliştirilen teknik verilecek ve daha sonra $B(x,y)$ beta fonksiyonun hem birinci hemde ikinci parametresinde neutrix limit yardımıyla bu tekniğin kullanılabileceği gösterilecektir. Son olarak (7.1.2) eşitliği ile tanımlanan q-beta $B_q(x,y)$ fonksiyonunun birinci parametresi için eşitsizlikler elde edilecektir.

8.1. Tanımlar, Gösterimler ve Teoremler

$f(x)$ ve $g(x)$, $[0,\infty)$ aralığında kesin artan, sürekli fonksiyonlar olsun ve $x \to 0^+$ iken $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ ve f/g kesin artan olduğunu kabul edelim. $0 \leq a < b$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ olsun. $C[a,b]$ uzayı üzerinde tanımlı pozitif, doğrusal fonksiyonel $L_{a,b}$ veya kısaca L ile gösterelim. F fonksiyonu, f ve g fonksiyonlarının görüntü kümeleri üzerinde tanımlı olsun. Son olarak φ fonksiyonu

$$\varphi = g\frac{L(f)}{L(g)} \tag{8.1.1}$$

ile tanımlansın.

Not 8.1. *Aksi belirtilmedikçe, bu bölümde yukarıda verilen koşullar geçerli olacaktır.*

Teorem 8.2. [22]

Eğer F' artan ise

$$L[F(f)] \geq L[F(\varphi)] \tag{8.1.2}$$

ve F' azalan ise

$$L[F(f)] \leq L[F(\varphi)] \tag{8.1.3}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Öncelikle Teorem 8.2'nin ispatında yararlanacağımız aşağıdaki özellikleri verelim.

Lemma 8.3. [21] *$p,q \in C[a,b]$ ve L, $C[a,b]$ üzerinde tanımlı pozitif lineer bir fonksiyonel olsun. $L(p)=0$ olduğunu ve $p(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında negatiften pozitife bir kez işaret değiştirdiğini varsayalım. Ayrıca q, $[a,b]$ aralığında artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$L(pq) \geq 0 \tag{8.1.4}$$

eşitsizliği doğrudur. Eğer q azalan ise (8.1.4) *eşitsizliğinin tersi geçerlidir.*

İspat: Eğer $q(x)$, sabit bir fonksiyon ise (8.1.4) eşitliğinin geçerli olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $q(x)$ fonksiyonunun sabit olmadığı durumu inceleyelim. Kabulümüzden $p(\gamma)=0$ olacak şekilde bir $\gamma \in [a,b]$ vardır. $[a,b]$ aralığında

$$p_1(x) = min\{0, p(x)\} \quad \text{ve} \quad p_2(x) = max\{0, p(x)\}$$

ile $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Buradan, $q(x)$ fonksiyonunun artan bir fonksiyon olmasından yararlanarak

$$x \in [a,\gamma) \text{ için} \quad p_1(x)q(x) \geq p_1(x)q(\gamma)$$

ve

$$x \in [\gamma,b] \text{ için} \quad p_2(x)q(x) \geq p_2(x)q(\gamma)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} L(pq) &= L(p_1q)+L(p_2q) \\ &\geq L(p_1q(\gamma))+L(p_2q(\gamma)) \\ &= q(\gamma)L(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Not 8.4. *φ fonksiyonunun tanımı ve L fonksiyonelinin lineer olması kullanılarak*

$$L(f)-L(\varphi)=L(f)-L\Big(g\frac{L(f)}{L(g)}\Big)=0 \tag{8.1.5}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $[a,b]$ aralığı üzerindeki tüm x gerçel değerleri için

$$f(x)-\varphi(x)>0 \quad \textit{veya} \quad f(x)-\varphi(x)<0$$

olamaz. Yani $f-\varphi$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında işaret değiştirir. f ile f/g fonksiyonları kesin artan olduğundan $f-\varphi=f-g\frac{L(f)}{L(g)}$ fonksiyonu da kesin artandır ve böylece $f-\varphi$ fonksiyonun işaret değişimi negatiften pozitife doğrudur.

Şimdi Lemma 8.3 ve Not 8.4 yardımıyla Teorem 8.2'yi ispatlayalım.

Teoremin İspatı:

$$Q(x)=\frac{1}{f(x)-\varphi(x)}\int_{\varphi(x)}^{f(x)}F'(t)dt$$

olmak üzere F fonksiyonu

$$F(f(x))-F(\varphi(x))=[f(x)-\varphi(x)]Q(x)$$

biçiminde tanımlansın. Süreklilikten $Q(x)$ fonksiyonu, $f(x)-\varphi(x)$ fonksiyonunun kökünde tanımlıdır. x arttıkça $(f(x),\varphi(x))$ ve $(\varphi(x),f(x))$ aralıklarının bitiş noktaları sağa doğru hareket eder ve $Q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta artan F'

fonksiyonun ortalaması olduğundan $Q(x)$ fonksiyonunun da artan olduğu görülür. Böylece $p = f - \varphi$ ve $q = Q$ alındığında Not 8.4 ve Lemma 8.3'ten istenilen elde edilir. $\square$

Şimdi Teorem 8.2'yi özel fonksiyonlara uygulayabilmek için F fonksiyonunu

$$F(u) = u^{\alpha}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda F' fonksiyonu $\alpha < 0$ veya $\alpha > 1$ değerleri için artan, $0 < \alpha < 1$ değeri için azalan bir fonksiyondur. Böylece artanlık ve azalanlık durumlarında teoremdeki (8.1.2) ve (8.1.3) eşitsizlikleri sırasıyla

$$L(f^{\alpha}) > L(\varphi^{\alpha}), \qquad L(f^{\alpha}) < L(\varphi^{\alpha})$$

halini alır. $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ durumlarında ise eşitlik elde edilir.
(8.1.1) eşiliği ile verilen φ fonksiyonunun tanımından

$$\frac{[L(g)]^{\alpha}}{L(g^{\alpha})} > \frac{[L(f)]^{\alpha}}{L(f^{\alpha})}, \quad \alpha < 0 \vee \alpha > 1 \tag{8.1.6}$$

ve

$$\frac{[L(g)]^{\alpha}}{L(g^{\alpha})} < \frac{[L(f)]^{\alpha}}{L(f^{\alpha})}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{8.1.7}$$

bulunur. Son olarak $f(x) = x^{\beta}$ ve $g(x) = x^{\delta}$ alalım. f ve g fonksiyonları ile f/g fonksiyonun kesin artan olması gerektiğinden $\beta > \delta > 0$ olarak şeçilmelidir. Buradan (8.1.6) ve (8.1.7) eşitsizlikleri sırasıyla

$$\frac{[L(x^{\delta})]^{\alpha}}{L(x^{\delta\alpha})} > \frac{[L(x^{\beta})]^{\alpha}}{L(x^{\beta\alpha})}, \quad \alpha < 0 \vee \alpha > 1 \tag{8.1.8}$$

ve

$$\frac{[L(x^{\delta})]^{\alpha}}{L(x^{\delta\alpha})} < \frac{[L(x^{\beta})]^{\alpha}}{L(x^{\beta\alpha})}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{8.1.9}$$

eşitsizliklerine dönüşür.

8.2. Beta ve q-Beta Fonksiyonlarına Uygulamalar

$B(x,y)$ beta fonksiyonu x, $y>0$ değerleri için

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{8.2.10}$$

integrali ile tanımlanmıştı. $\mathcal{N}$ neutrix'i, tanım kümesi $N'=(0,1/2)$ aralığı, görüntü kümesi $N''=\mathbb{R}$ olan ve $\lambda<0$, $r=1,2,\ldots$ değerleri için

$$\varepsilon^{\lambda}\ln^{r-1}\varepsilon, \quad \ln^{r}\varepsilon$$

fonksiyonları ile $\varepsilon\to 0$ iken sıfıra yakınsayan tüm $O(\varepsilon)$ fonksiyonlarının sonlu lineer toplamını ihmal edilebilir fonksiyonlar olarak kabul eden küme olmak üzere beta fonksiyonu tüm x ve y gerçel değerleri için neutrix limit yardımıyla

$$B(x,y)=\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{8.2.11}$$

ile tanımlıdır [13].

Önceki bölümde ayrıntıları ile verilen tekniği, (8.2.11) eşitliği ile verilen $B(x,y)$ fonksiyonuna uygulayalım.

Teorem 8.5. [33] *$y>0$ için f fonksiyonu*

$$f(x)=\frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)}$$

ile tanımlansın. O halde $0<\alpha<1$ için f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında artan ve $\alpha\notin(0,1)$ için f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında azalandır.

İspat: $y>0$ ve $w\in C[0,1]$ için L fonksiyonelini

$$L(w)=\mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} w(t)(1-t)^{y-1}dt$$

ile tanımlayalım. Böylece $0<\alpha<1$ değeri için (8.1.9) eşitsizliğinden $\beta>\delta>0$ olmak üzere $\alpha\beta>-1$ ve $\alpha\delta>-1$ değerleri için

$$\frac{[B(1+\beta,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha\beta,y)}>\frac{[B(1+\delta,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha\delta,y)} \tag{8.2.12}$$

ve buradan

$$f(\beta) > f(\delta)$$

bulunur. Bu ise f fonksiyonun artan olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\alpha \notin (0,1)$ değeri için f fonksiyonunun azalan olduğu gösterilebilir. □

Teorem 8.5 yardımıyla $B(x,y)$ beta fonksiyonunun oranıyla ilgili aşağıdaki eşitsizliği gösterelim.

Sonuç 8.6. [33] *$\forall x \in [0,1]$, $y > 0$ ve $\alpha \geq 1$ değerleri için*

$$\frac{y+\alpha}{\alpha y^{\alpha}(y+1)^{\alpha}B(\alpha,y)} \leq \frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)} \leq \frac{1}{y^{\alpha-1}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\delta = 0$ ve $\beta = x$ için (8.2.12) eşitsizliğinden $B(1,y) = \dfrac{1}{y}$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{B(1,y)^{\alpha}}{B(1,y)} &\geq \frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)} \\ \frac{1/y^{\alpha}}{1/y} &\geq \frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\frac{1}{y^{\alpha-1}} \geq \frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $B(x,y) = B(y,x)$ ve $B(1+x,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$ özelliklerini kullanarak (8.2.12) eşitsizliğinden $\beta = 1$ ve $\delta = x$ değerleri için

$$\frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)} \geq \frac{[B(2,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha,y)}$$

eşitsizliğinden

$$\frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)} \geq \frac{\left(\frac{1}{y(y+1)}\right)^{\alpha}}{\frac{\alpha}{y+\alpha}B(\alpha,y)}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{y+\alpha}{\alpha y^{\alpha}(y+1)^{\alpha}B(\alpha,y)} \leq \frac{[B(1+x,y)]^{\alpha}}{B(1+\alpha x,y)}$$

olur. $\square$

Beta fonksiyonunun ikinci parametresinde bu tekniği uygulayabilmek için $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarını sırasıyla $t \in (0,1)$ değerleri için

$$f(t) = (1-t)^{\beta}, \quad g(t) = (1-t)^{\delta}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonlar verilen aralıkta kesin pozitif ve sürekli fonksiyonlardır. $\beta < \delta < 0$ seçildiğinde f, g ve f/g kesin artan fonksiyonlar olur. Bu nedenle, (8.2.10) eşitliği ile tanımlanan beta fonksiyonunun ikinci parametresi için bu teknik uygulanamaz. Fakat (8.2.11) eşitliğiyle verilen beta fonksiyonunun tüm gerçel değerlerde tanımlı olması bu tekniğin uygulanabilmesini sağlamaktadır. Bunun için $x > 0$ ve $w \in C[0,1]$ olmak üzere L fonksiyoneli

$$L(w) = \mathrm{N}\!-\!\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{x-1} w(t)\,dt$$

biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyonel $[-1,0]$ aralığında lineer ve pozitiftir. Böylece (8.1.2) ve (8.1.3) eşitsizliklerden sırasıyla

$$\frac{[L((1-t)^{\delta})]^{\alpha}}{L((1-t)^{\delta\alpha})} > \frac{[L((1-t)^{\beta})]^{\alpha}}{L((1-t)^{\beta\alpha})} \quad \alpha < 0 \vee \alpha > 1 \tag{8.2.13}$$

ve

$$\frac{[L((1-t)^{\delta})]^{\alpha}}{L((1-t)^{\delta\alpha})} < \frac{[L((1-t)^{\beta})]^{\alpha}}{L((1-t)^{\beta\alpha})} \quad 0 < \alpha < 1 \tag{8.2.14}$$

elde edilir.

Sonuç 8.7. [33] *$\beta < \delta$ olacak şekilde $\beta, \delta \in [-1,0]$ olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $\alpha \leq 0$ değerleri için*

$$\frac{\left[-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\right]^{\alpha}}{B(n, 1-\alpha)} < \frac{[B(n,1+y)]^{\alpha}}{B(n,1+\alpha y)} < n^{1-\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\delta = y$ ve $\beta = -1$ alalım. (8.2.13) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\frac{[B(n,0)]^{\alpha}}{B(n,1-\alpha)} < \frac{[B(n,1+y)]^{\alpha}}{B(n,1+\alpha y)} \tag{8.2.15}$$

bulunur. (8.2.11) eşitliği ile tanımlanan beta fonksiyonundan yararlanılarak $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $x = n$ ve $y = 0$ değerleri için

$$B(n,0) = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \tag{8.2.16}$$

olduğu gösterilmiştir [13]. (8.2.16) eşitliğini, (8.2.15) eşitsizliğinde kullanarak

$$\frac{\left[-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\right]^{\alpha}}{B(n,1-\alpha)} \leq \frac{[B(n,1+y)]^{\alpha}}{B(n,1+\alpha y)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için $B(n,1) = \dfrac{1}{n}$ olduğundan yararlanarak $\delta = 0$ ve $\beta = y$ değerleri için

$$\frac{[B(n,1+y)]^{\alpha}}{B(n,1+\alpha y)} \leq \frac{[B(n,1)]^{\alpha}}{B(n,1)}$$

ve böylece

$$\frac{[B(n,1+y)]^{\alpha}}{B(n,1+\alpha y)} \leq n^{1-\alpha}$$

bulunur. □

Şimdi ise, (7.1.2) eşitliğiyle verilen $B_q(x,y)$ q-beta fonksiyonunun birinci parametresi için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 8.8. [33] *$y > 0$ için f fonksiyonu*

$$f(x) = \frac{[B_q(1+x,y)]^{\alpha}}{B_q(1+\alpha x,y)}$$

ile tanımlansın.

Eğer $0 < \alpha < 1$ ise f, $[0,\infty)$ aralığında artan fonksiyondur.

Eğer $\alpha > 1$ ise f, $[0,\infty)$ aralığında azalan fonksiyondur.

İspat: $w \in C[0,1]$ ve $y > 0$ için,

$$L(w) = \mathrm{N}{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} w(t)(1-qt)_q^{y-1} d_q t$$

ile tanımlanan fonksiyonel iyi tanımlı, pozitif ve lineerdir.

Örnek 3.5 yardımıyla $\beta > \delta > 0$ değerleri için (8.1.8) ile (8.1.9) eşitsizliklerinden sırayla

$$\frac{[B_q(1+\delta,y)]^{\alpha}}{B_q(1+\alpha\delta,y)} > \frac{[B_q(1+\beta,y)]^{\alpha}}{B_q(1+\alpha\beta,y)}, \quad \alpha > 1$$

ve

$$\frac{[B_q(1+\delta,y)]^{\alpha}}{B_q(1+\alpha\delta,y)} < \frac{[B_q(1+\beta,y)]^{\alpha}}{B_q(1+\alpha\beta,y)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

elde edilir. Bu ise $0 < \alpha < 1$ değeri için $f(x)$ fonksiyonunun artan, $\alpha > 1$ değeri için $f(x)$ fonksiyonunun azalan olduğunu göstermektedir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Al-Sirehy, F. ve Fisher, B., 2013. Further results on the beta function and the incomplete beta function. **Applied Mathematical Sciences**, 7(70): 3489-3495.

[2] Al-Sirehy, F. ve Fisher B., 2013. Results on The beta function and the incomplete beta function. **International Journal of Applied Mathematics**, 26(2): 191-201.

[3] Al-Sirehy, F.ve Fisher B., 2013. Evaluation of the beta function. **International Journal of Applied Mathematics**, 26(1): 59-70.

[4] Ege, İ. 2013. On some inequalities for the gamma function. **Applied Mathematical Sciences**, 7(32): 1569-1574.

[5] Ege, İ. 2013. On defining the q-beta function for negative integers. **Filomat**, 27.2: 247-256.

[6] Ege, İ. ve Yıldırım ,E. 2012. Some generalized equalities for the q-gamma function. **Filomat**, 26(6), 1227-1232.

[7] Ege, İ. ve Yıldırım, E. 2016. Some equalities on q-gamma function. **Filomat**, basım aşamasında.

[8] Ege, İ. ve Yıldırım, E. 2016. Some results on the incomplete q-gamma function and its first derivative. **Journal of Physics: Conference Series (JCPS)** [Electronic Journal], 766(1).

[9] El-Shahed, M. ve Salem, A. 2008. On q-analogue of the incomplete gamma function. **Int. J. Pure Appl. Math**, 44: 773-780.

[10] Fisher, B. 2013. Results on the beta function. **Sarajevo Journal Of Mathematics**, 9(21): 101-108.

[11] Fisher, B., Jolevsaka-Tuneska, B. ve Kılıçman, A. 2003. On defining the incomplete gamma function. **Integral Transforms and Special Functions**, 14(4): 293-299.

[12] Fisher, B. ve Kuribayashi, Y. 1987. Neutrices and the gamma function. **J. Fac. Ed. Tottori Univ**, 36(1-2): 1-7.

[13] Fisher, B. ve Kuribayashi, Y. 1987. Neutrices and the beta function. **Rostock Math Kolloq.**, 32: 1-22.

[14] Fisher, B. ve Kuribayashi, Y. 1988. Some results on the gamma function. **J. Fac. Ed. Tottori Univ**, 37.2: 111-117.

[15] Ismail, M.E. ve Muldoon, M.E. 1994. Inequalities and monotonicity properties for gamma and q-gamma functions. **In Approximation and Computation: A Festschrift in Honor of Walter Gautschi**, 309-323.

[16] Jolevska-Tuneska, B. ve Jolevski, I. 2013. Some results on the digamma function. **Appl. Math. Inform. Sci**, 7(1): 167-170.

[17] Kac, V. ve Cheung P. 2002. Quantum Calculus. Springer, 113, USA.

[18] Koornwinder, T. H. 1994. q-Special functions: a tutorial. University of Amsterdam, Department of Mathematics and Computer Science, 48, Holland.

[19] Krasniqi, V., Mansour, T. ve Shabani, A. Sh. 2010. Some inequalities for q-polygamma function and ζ_q-Riemann zeta functions. **Ann. Math. Inform.**, 37: 95-100.

[20] Mansour, T. 2008. Some inequalities for the q-Gamma Function. **J. Ineq. Pure Appl. Math**, 9(1) article: 18.

[21] Mercer, A.M., 2014. A correction to the paper Some new inequalities for the Gamma, Beta and Zeta functions which appeared in JIPAM. **Research Group in Mathematical Inequalities and Applications (RGMIA)** [Electronic Journal], 17: 100.

[22] Mercer, A. McD. 2006. Some new inequalities for the gamma, beta and zeta Functions. **J. Ineq. Pure and Appl. Math.**, 7(1): 29.

[23] Özçağ, E. 2014. Applications of Neutrix Calculus to Special Functions in Conjunction with Polygamma Functions. **arXiv preprint**, arXiv:1405.0507.

[24] Özçağ, E. ve Ege, İ. 2016. Remarks on polygamma and incomplete gamma type functions. **Journal of Number Theory**, 169: 369-387.

[25] Özçağ, E., Ege, İ., Gürçay, H., ve Jolevska-Tuneska, B. 2007. Some remarks on the incomplete gamma function. **In Mathematical Methods in Engineering**, Springer, 97-108, Hollanda.

[26] Özçağ, E. ve Fisher, B. 1991. On partial derivatives of the beta function. **Rostock Math Kolloq.**, 32: 1-22.

[27] Salem, A. 2010. The neutrix limit of the q-Gamma function and its derivatives. **Applied Mathematics Letters**, 23: 1262-1268.

[28] Salem, A. 2012. Existence of the neutrix limit of the q-analogue of the incomplete gamma function and its derivatives. **Applied Mathematics Letters**, 25.3: 363-368.

[29] Salem, A. 2013. Generalized q-integrals via neutrices: Application to the q-beta function. **Filomat**, 27.8: 1473-1783.

[30] Salem, A. ve Kılıçman, A. 2013. Estimating the polygamma functions for negative integers. **Journal of Inequalities and applications**, 1: 1-8.

[31] Sellami M., Ibrahim K. ve Bettaibi N. 2007. New inequalities for some special and q-special functions. **J. Ineq. Pure and Appl. Math.**, 8(2): 47.

[32] Yıldırım, E. ve Ege, İ. 2014. A generalization of defining the q-polygamma functions, **Ukrainian Mathematical Journal**, gönderildi.

[33] Yıldırım E., Ege İ. 2015. Beta ve q-Beta Fonksiyonu Üzerine Bazı Eşitsizlikler, **XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu**, pp.27, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, Türkiye.

[34] Yıldırım, E. ve Ege, İ. 2016. Some results on the q-beta function. **Mathematica Moravica**, 20(1): 51-57.

[35] Van der Corput, J. G. 1959-1960. Introduction to the neutrix calculus. **J. Analyse Math.**, 7: 291-398.

DİZİN

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Emrah YILDIRIM
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Muğla, 12.03.1986

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI :

Ege İ., Yıldırım E. 2012. Some generalized equalities for the q-gamma function, **Filomat**, 26(6), pp.1227-1232.

Ege İ., Yıldırım E. Some equalities on q-gamma and q-digamma functions, **Filomat**, in press.

Ege, İ. ve Yıldırım, E. 2016. Some results on the incomplete q-gamma function and its first derivative, **Journal of Physics: Conference Series**, 766(1).

-Diğer (MathSciNet) :

Yıldırım E., Ege İ. 2016. Some results on the q-Beta function, **Mathematica Moravica**, 20(1): 51-57.

b) Bildiriler

-Uluslararası :

Yıldırım E., Ege İ. 2014. Some properties associated with the incomplete q-gamma function, Karatekin Mathematics Days.

Ege İ., Yıldırım E. 2016. Some results on the incomplete q-gamma function and its first derivative, International Conference on Quantum Science and Applications.

Yıldırım E., Ege İ. 2016. Some monotonicity results on k-gamma and q,k-gamma functions, International Conference on Applied Mathematics and Analysis.

Ege İ., Yıldırım E. 2016. Some inequalities for q-gamma function, International Conference on Analysis and Its Applications.

-Ulusal :

Yıldırım E., Ege İ. 2015. Beta ve q-Beta Fonksiyonu Üzerine Bazı Eşitsizlikler, XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu.

c) Katıldığı Projeler

Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri FEF-14011, Araştırmacı.

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	: Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. (2010 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi	: emrahyildirim@adu.edu.tr
Tarih	: 04.11.2016