ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2014-DP-002-

ORTA ÖĞRETİMDE CEBİRSEL SOYUT KAVRAMLARIN GELİŞİMİ VE ÖĞRENCİLER TARAFINDAN SINIFLARA GÖRE ALGILARININ KARŞILAŞTIRILMASI

İlker ÖZŞINLAK

Proje Danışmanı:
Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi İlker ÖZŞINLAK tarafından hazırlanan "Orta Öğretimde Cebirsel Soyut Kavramların Gelişimi ve Öğrenciler Tarafından Sınıflara Göre Algıların Karşılaştırılması" başlıklı dönem projesi, 03.07.2014 tarihinde yapılan yeterlik sınavı sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. İnci EGE	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans Dönem Projesi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2014 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

03/07/2014

İlker ÖZŞINLAK

ÖZET

ORTA ÖĞRETİMDE CEBİRSEL SOYUT KAVRAMLARIN GELİŞİMİ VE ÖĞRENCİLER TARAFINDAN SINIFLARA GÖRE ALGILARININ KARŞILAŞTIRILMASI

İlker ÖZŞINLAK

Yüksek Lisans Dönem Projesi, Matematik Anabilim Dalı
Proje Danışmanı: Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2014, 59 sayfa

Bu çalışmada, 9. sınıfta verilen cebirsel kavramların 10, 11 ve 12. sınıflarda etkisi incelenmiştir. Bunun için kavramlar ilk 4 bölümde tanım ve temel özellikler düzeyinde verilerek 5. bölümde 9. sınıf düzeyinde bir cebir sınavı hazırlanarak bu Söke Yavuz Selim Anadolu Öğretmen Lisesi 9, 10, 11 ve 12. sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Ayrıca aynı gruplara bir anket uygulaması yapılarak konuların anlaşılmayan kısımları ve sebepleri araştırılmıştır. Son olarak anket sonuçlarına göre sınıf düzeyinde karşılaştırmalar yapılarak çözüm önerilerinde bulunulmuştur.

Anahtar Sözcükler
Önerme, mantık, küme, bağıntı, fonksiyon, ikili işlem

ABSTRACT

DEVELOPMENT OF ABSTRACT TERMS AT SECONDARY SCHOOL AND COMPARING PERCEPTIONS OF STUDENTS ACCORDING TO GRADE LEVELS

İlker ÖZŞINLAK

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Semra DOĞRUÖZ
JULY 2014, 59 pages

In this study, the effect of the abstract terms at the $10th$, $11th$ and $12th$ grade which are given at the $9th$ grade is studied. For this purpose, in the first 4 chapters we give definitions and basic properties and in the $5th$ chapter we gave an exam which is for all $9th$, $10th$, $11th$ and $12th$ in Soke Yavuz Selim Anatolian Teacher School in the $9th$ grade level. Also, a survey was done to know which parts are not understood and why it is not being understood. Finaly, advices of solutions were given acording to the results of the survey comparing the grades.

Key Words
Proposition, logic, set, relation, function, binary operation

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e; ders aşamasında dersime giren ve bu çalışmanın biçimlenmesinde emeği geçen değerli bölüm hocalarıma sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili teyzem Doç. Dr. Necla ACUN KAPIKIRAN, annem, babam ve kardeşime, göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

İlker ÖZŞINLAK

İÇİNDEKİLER

1. MANTIK

Yaklaşık 2500 sene önce doğan Aristo mantığı günümüze kadar ulaşmış; ancak bir türlü tartışmalardan arındırılamamıştır. Bu yüzden, 19. yüzyılın ortalarında, pozitif bilimlere zıt düşünmeyen matematiksel mantık (sembolik mantık) adı verilen modern mantık doğmuştur. Sembolik mantık, matematiğin dili olmuştur. Böylece matematiksel ifadeler ve matematiksel düşünme daha sistematik bir seviyeye erişmiştir [1]. Arapça bir sözcük olan mantık sözlükte karşılık olarak "Gerçeği ararken yapılan zihin işlemlerinden hangilerinin doğru ve hangilerinin yanlış yola çıktığını gösteren bilim " diye yazılıdır [6]. Buradan mantık için doğru ve sistemli düşünme kuralları bilimi tanımını yapabiliriz. 9. sınıfların ilk konusu olan Sembolik Mantık konularının iyi anlaşılması ve kavranması bundan sonraki matematik öğrenimini kolaylaştıracaktır.

Tanım 1.0.1 Bir bilim dalı içerisinde, o bilim dalına ait özel anlamları olan kelimelerin her birine *terim* denir. Matematikte kullandığımız terimlere de *matematiksel terim* denir. Örneğin çember, daire, rakam, arakesit birer matematik terimleridir [2].

1.1. Önermeler

Tanım 1.1.1 Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere *önerme* denir. Önermeler genellikle p, q, r, s, t,vb. gibi küçük harfler ile gösterilir [1].

Örnek 1.1.2 "$4 + 3 = 7$" ifadesi bir hüküm bildirdiğinden bir önermedir. "Ayşe kaç yaşındadır?" ifadesi doğru veya yanlış bir hüküm bildirmediğinden bir önerme değildir.

1.1.1. Önermelerin Doğruluk Değerleri ve Doğruluk Tablosu

Bir önermenin doğru ya da yanlış bir hüküm bildirmesi gerektiğini belirtmiştik. Buradan yola çıkarsak bir p önermesi doğru iken (kısaca) D veya 1, yanlış iken Y veya 0 biçiminde ifade edilir. Buradaki 1 veya 0' ın sayı değeri yoktur. 1 ile 0 önermenin doğru veya yanlış olduğunu gösteren sembollerdir. İşte bu önermelerin hükmünün doğru ya da yanlış olduğunu ifade eden 1 ve 0 sembollerine o önermenin *doğruluk değeri*; doğruluk değerlerini gösteren tabloya da *doğruluk tablosu* denir. Bu tanıma göre bir p önermesinin doğruluk değerleri tablosu aşağıdaki gibidir.

P
Doğru
Yanlış

P
D
Y

P
1
0

p ve q gibi herhangi iki önermeyi incelediğimizde ise p doğru iken q, doğru ya da yanlış olabilir. Benzer şekilde, p yanlış iken q, doğru ya da yanlış olabilir. Bu durumun da doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir;

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Örneklerden de görüleceği gibi bir önerme için 2^1, iki önerme için 2^2, üç önerme için 2^3 tane doğruluk değeri vardır. Buna göre n önerme için 2^n tane doğruluk değeri vardır.

1.1.2. Önermelerin Denkliği

Tanım 1.1.3 Doğruluk değeri aynı olan iki önermeye *eşdeğer önermeler* veya *denk önermeler* denir [2]. p ve q gibi iki önermenin doğruluk değeri aynı ise, $p \equiv q$ şeklinde yazar *"p önermesi q önermesine denktir"* diye okuruz. Doğruluk değeri aynı değil ise, $p \not\equiv q$ diye yazar, *"p denk değildir q"* diye okuruz.

Örnek 1.1.4 *p: "$3 + 4 = 7$", q: "*Bir yılda 12 ay vardır.*"*
Önermeleri doğru olduğu için p ve q'nun doğruluk değeri 1'dir; bunun için, p ve q önermeleri denktir. Yani $p \equiv q \equiv 1$'dir. Denk önermelerde önermenin içeriği önemli değildir. Önemli olan önermelerin doğruluk değeridir.

1.1.3. Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)

Tanım 1.1.5 Bir önermenin hükmünün değiştirilmesiyle elde edilen yeni önermeye bu önermenin *değili (olumsuzu)* denir. Bir p önermesinin olumsuzu $p', \sim p$ sembollerinden biri ile gösterilir ve *"p'nin değili"* diye okunur [2].

1.1.4. Bileşik Önermeler

Tanım 1.1.6 Önermeleri birbirine bağlayan *"ve","veya", "ise", "ancak ve ancak"* gibi terimlere *mantıksal bağlaç* denir. İki veya daha çok önermenin birbirine mantık bağlaçları ile bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye ise *bileşik önerme* denir.

Tanım 1.1.7 (Veya Bağlacı) p ve q herhangi iki önerme olmak üzere, bu iki önermeden, en az biri doğru (1) iken doğru, her ikisi de yanlış (0) iken yanlış olan önermeye p veya q *bileşik önermesi* denir ve "$p \vee q$" ile gösterilir. Doğruluk tablosu ise aşağıdaki gibidir;

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tanım 1.1.8 (Ve Bağlacı) p ve q herhangi iki önerme olmak üzere, bu iki önermenin her ikisi de doğru (1) olduğu durumda doğru, en az birinin yanlış (0) olduğu durumda yanlış olan önermeye *"p ve q" bileşik önermesi* denir ve $p \wedge q$ şeklinde gösterilir. Doğruluk tablosu ise aşağıdaki gibidir;

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Teorem 1.1.9 "veya" ve "ve" bağlaçları ile kurulan bileşik önermeleri için (p, q ve r önermeler olmak üzere) aşağıdaki özelikler sağlanır.

Tek Kuvvet özelliği: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

Değişme özelliği: $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Birleşme özelliği: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Dağılma özelliği: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morgan Kuralı: $(p \vee q)' = p' \wedge q'$ ve $(p \wedge q)' = p' \vee q'$

Önemli Kurallar: t değişkeni doğru , f değişkeni yanlış önermesini göstersin.

$p \vee t \equiv t$ ve $p \vee f \equiv p$ ($\vee$'nin özdeşlik özeliği)

$p \wedge t \equiv p$ ve $p \wedge f \equiv f$ ($\wedge$'nin özdeşlik özeliği)

$p \vee p' \equiv t$ ($\vee$'nin tamlama özeliği) $p \wedge p' \equiv f$ ($\wedge$'nin tamlama özeliği)

Tanım 1.1.10 (Koşullu önerme: İse bağlacı) p ve q herhangi iki önerme olmak üzere, p doğru, q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğru olan önermeye, *"p ise* *q" bileşik önermesi* veya *koşullu önerme* denir ve $p \Rightarrow q$ şeklinde gösterilir. Bu tanıma göre "$p \Rightarrow q$"'nun doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir;

p	q	p⇒q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

"$p \Rightarrow q$" koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye *gerektirme* denir.

"$p \Rightarrow q$" gerektirmesinde p' ye *yeter koşul*, q' ya da *gerek koşul* denir.

"$p \Rightarrow q$" koşullu önermesinde, p önermesine *hipotez*, q önermesine *hüküm* denir.

$p' \Rightarrow q'$ koşullu önermesine $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin *tersi* denir.

$q' \Rightarrow p'$ koşullu önermesine $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin *karşıt tersi* denir.

Bu tanımlardan yola çıkıldığında sonuç olarak; $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğru iken, bunun karşıtı olan $q \Rightarrow p$ önermesi doğru ya da yanlış olabilir. Fakat $p \Rightarrow q$ önermesi yanlış iken $q \Rightarrow p$ önermesi daima doğrudur.

Tanım 1.1.11 (Koşullu önerme: İki yönlü koşullu önerme) p ve q iki önerme olmak üzere, p ve q önermeleri aynı değerleri aldığında doğru, farklı değerler aldığında yanlış olan bileşik önermeye *iki yönlü koşullu önerme* denir ve $p \Leftrightarrow q$ biçiminde yazılarak " *p ancak ve ancak q*" diye okunur. Bu tanıma göre $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir;

p	q	p⇔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Teorem 1.1.12 p ve q iki önerme olmak üzere $(p \Rightarrow q)$ ile $(q \Rightarrow p)$ koşullu önermelerinin $\wedge$ işlemi ile birbirine bağlanmasından elde edilen; "$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$" bileşik önermesi "$p \Leftrightarrow q$" bileşik önermesine denktir. Yani, $p \Leftrightarrow q \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ dir. $p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu bileşik önermeye *çift gerektirme* denir ve "p ancak ve ancak q" şeklinde okunur.

1.1.5. Totoloji ve Çelişki

Tanım 1.1.13 Bir bileşik önerme, bileşenlerin tüm doğruluk değerleri için daima doğru oluyorsa *totoloji*, daima yanlış oluyorsa *çelişki* adı verilir.

p	p'	p∨p'
1	0	1
0	1	1

Totoloji

p	p'	p∧p'
1	0	0
0	1	0

Çelişki

1.1.6. Açık Önermeler

Tanım 1.1.14 İçinde değişken bulunan ve bu değişkenin alabileceği farklı değerler için doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere *açık önerme* veya *önerme fonksiyonu* denir. x değişken olmak üzere açık önerme $P(x)$ biçiminde gösterilir. x ve y değişken ise açık önerme $P(x, y)$ biçiminde gösterilir. Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine, açık *önermenin doğruluk kümesi* denir. Denklem ve eşitsizlikler açık önermelere birer örnektir [1].

Tanım 1.1.15 Önüne geldiği elemanların niceliğini (çokluğunu) belirten,"*her*" ve "*bazı*" sözcüklerine *niceleyici* adı verilir. "Her " ya da "Bütün " anlamına gelen

$\forall$ sembolüne *evrensel niceleyici*, "Bazı " ya da "En az bir" anlamına gelen $\exists$ sembolüne de *varlıksal niceleyici* denir.

$(\forall x, P(x))' \equiv (\exists x, P'(x))$ ve $(\exists x, P(x))' \equiv (\forall x, P'(x))$'dir.

Örnek 1.1.16 $(\exists x \in R, x + 3 > 0)' \equiv (\forall x \in R, x + 3 \leq 0)$ *dir.*
$(\forall x \in R, x^2 - 1 \geq 0)' \equiv (\exists x \in R, x^2 - 1 < 0)$

1.1.7. Bir Önermenin Doğruluğunu İspat Yöntemleri

Bu kısımda temel tanım ve özellikler için [1], [2] ve [6] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 1.1.17 Bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirtme veya açıklamaya *tanım* denir. Günlük hayatta "nedir?" sorusuna verilen cevaptır. Tanım sade ve açık olmalıdır. Doğruluğu ispatlanamayan ama doğru olduğu kabul edilen önermelere ise *aksiyom* denir. Örneğin "İki noktadan ancak bir doğru geçer "gibi. Doğruluğunu göstermek zorunda olduğumuz önermelere ise *teorem* denir. Teoremler de birer önermedir. p hipotezi doğru iken, "$p \Rightarrow q$" koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise teorem adını alır.
Bir önermenin doğru olduğunu göstermek için aşağıdaki yöntemleri verebiliriz.

Tanım 1.1.18 (Doğrudan İspat Yöntemi) $p \Rightarrow q$ teoremi için p nin doğru olduğunu kabul ederek q nun doğru olduğunu göstermeye *doğrudan ispat yöntemi* denir.

Tanım 1.1.19 (Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat) $p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan $p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme *olmayana ergi (karşıt ters) yöntemiyle* ispat denir.

Tanım 1.1.20 (Çelişki Yöntemi ile İspat) $p \Rightarrow q$ teoreminin doğruluğunu göstermek için $p \Rightarrow q$'nun değilinin yanlış olduğunu göstermeye dayanan ispat yöntemine *çelişki yöntemiyle* ispat denir. Bunun için $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ denkliğinden yararlanılır.

Tanım 1.1.21 (Deneme Yöntemi ile İspat) Deneme yöntemi ile ispat yöntemi , değişkeni farklı değerler alan bir önermede kullanılabilir. Bu değerler ayrı ayrı yerlerine yazılarak önermenin doğruluğu kontrol edilir.

Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için aşağıdaki yöntemleri verebiliriz [6].

Tanım 1.1.22 (Aksine örnek Vererek İspat Yöntemi) Verilen bir önermenin doğru olmadığını gösteren en az bir örnek bulunarak bu önermenin yanlış olduğunu ispatlanmış olur. Bu yöntem genellikle $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir önermenin yanlış olduğunu ispatlamak için kullanılır. Bunun için $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ denkliği gereğince $p \wedge q'$ önermesini doğru yapan bir örnek bulunur.

Tanım 1.1.23 (Çelişki Yöntemi) Verilen önermenin doğru olduğu kabul edilerek ispat içinde hipoteze yada daha önceki bir ifadeye çelişen ifadeler elde edilir. Bu durumda kabul yanlış yani önerme doğru değildir, böylece önerme yanlıştır denir.

2. KÜMELER

George CANTOR (1845-1918) kümeler kuramının kurucusudur. Kümeler arasında birebir eşlemenin önemini ortaya koymuş, "*Sonsuz Küme*" kavramına matematiksel bir tanım getirmiş ve gerçel sayıların sonsuzluğunun doğal sayıların sonsuzluğundan daha büyük olduğunu ispatlamıştır [1]. Daha öncede adına küme denilmese de, matematikçiler bu kavramları yer yer kullanmışlardır. Kümeler kuramının temellerine ilişkin kapsamlı sorular ortaya koymuştur. Buradan matematiğin temelleri incelenerek, araştırılmış, çıkmazları keşfedilmiş ve paradokslardan temizlenmiştir. Bu gelişmeler; matematiğin ve özellikle formalist akımın 20. yüzyılın ilk yarısında büyük ürünler vermesini sağlanmıştır [2]. Küme, bir takım elemanlar topluluğudur. Matematiksel anlamda tanımsız bir kavram olmasına karşın, "*Nesneler topluluğu*" şeklinde yorumlanabilir. Buradaki "*nesne*" soyut ya da somut bir şeyi ifade eder. Kümenin iyi tanımlı olması için kümeyi oluşturan nesneler herkes tarafından aynı şekilde anlaşılmalıdır, yani her hangi bir nesnenin o kümeye ait olup olmadığı kesin olarak bilinmelidir ve nesneler küme içinde bir kez temsil edilmelidir. O halde, matematikte ; "*İyi tanımlı nesnelerin bir topluluğuna küme*" denir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 Kümeyi oluşturan nesnelerden her birine *kümenin elemanı (ögesi)* denir. Kümeler genellikle A,B,C gibi büyük harflerle, elemanları ise genellikle a,b,c... gibi küçük harflerle gösterilir. Bir x elemanı A kümesine ait ise bunu; $x \in A$ şeklinde gösterir ve "x, A kümesinin elemanıdır" diye okuruz. Bir x nesnesi, A kümesinin elemanı değilse bunu; $x \notin A$ şeklinde gösterir ve "x, A kümesinin elemanı değildir" diye okuruz. Bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ veya $n(A)$ ile gösterilir.

2.2. Kümelerin Gösterilmesi

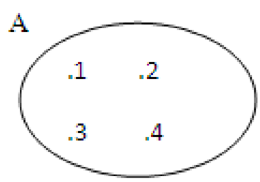
Bir küme üç farklı şekilde gösterilebilir:

Tanım 2.2.1 Kümenin elemanları, $\{\}$ parantezi içerisine, sıra gözetmeksizin aralarına virgül konularak yazılıp kümenin bu şekilde gösterilmesine *Liste Yöntemi* ile gösterimi denir.

Tanım 2.2.2 Bir kümenin elemanlarının kapalı bir eğri içine, her eleman bir nokta ile gösterilip noktanın yanına elemanın adı yazılarak gösterilimine *Venn Şeması Yöntemi* denir.

Tanım 2.2.3 Kümenin elemanlarının arasında ortak bir özelik varsa bu özelik belirtilerek kümenin gösterimine *Ortak Özelik Yöntemi* denir.
Buradaki "x| " sembolü "x:" biçiminde de gösterilebilir bu durumdaki küme ise;
$A = \{$ x: x, P(x) önermesini sağlar $\}$ biçiminde yazılır.

Örnek 2.2.4 1,2,3,4 nesnelerin oluşturacağı kümeyi verilen üç yöntemle gösterelim:
Liste Yöntemi ile gösterim: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
Venn şeması ile gösterim:



Ortak Özelik Yöntemi: $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 0 < x < 5\}$ şeklindedir. Liste yada Venn şeması ile gösterilen bir küme ortak özelik yöntemi ile gösterilemeye bilir.
Örneğin, $A = \{1, 2, \Delta, \diamondsuit\}$ olduğu gibi.

2.3. Sonlu ve Sonsuz Kümeler, Boş Küme

Tanım 2.3.1 Eleman sayısı belli olan ya da sayılabilir çoklukta elemanı olan kümelere *sonlu küme* denir. Sonlu olmayan kümelere de *sonsuz küme* denir. Sonsuz kümelerin elemanlarını sayarak belirtemeyiz. Hiç bir elemanı olmayan kümeye *boş küme* denir. Boş küme; $\emptyset$ ya da $\{\}$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.3.2 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin eleman sayısı $s(A) = 5$ olduğundan sonlu bir kümedir.
B={ x: x doğal sayı } kümesinin elemanları sayılamadığından bu küme sonsuz bir kümedir.
$C = \{x : x \in \mathbb{N} \, , x < 0\}$ kümesi boş kümedir.

2.4. Alt Küme, Özalt Küme, Denk Küme ve Eş Kümeler

Tanım 2.4.1 A ve B iki küme olmak üzere A'nın her elemanı B'nin de bir elemanı oluyorsa, "A'ya B'nin bir alt kümesi denir". "B'ye de A'nın kapsayan" kümesi denir. Bu durum $A \subseteq B$ veya $B \supseteq A$ şeklinde gösterilir. Her küme kendisinin bir alt kümesidir. Boş küme her kümenin bir alt kümesidir.

Örnek 2.4.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$,$D = \{\}$, $E = \{4\}$ kümeleri verilsin.

A, B, C, D, E kümelerin hepsi A'nın alt kümesidir.

Tanım 2.4.3 Bir kümenin kendisi hariç , tüm alt kümelerine o kümenin "*özalt kümeleri*" denir. A, B' nin bir öz alt kümesi ise $A \subset B$ yada $A \subsetneqq B$ biçiminde gösterilir. Alt küme ve özalt kümelerinin özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Her A kümesi için $\emptyset \subset A$
2. Her A kümesi için $A \subseteq A$

3. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$

4. n elemanlı bir kümenin tüm alt kümeleri sayısı : 2^n dir.

5. n elemanlı bir kümenin tüm özalt alt kümeleri sayısı : $2^n - 1$ dir.

6. n elemanlı bir kümenin r elemanlı $(n \geq r)$ alt kümeleri sayısı : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

7. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı; k elemanlı alt kümelerinin sayısına eşitse, $n = r + k$'dır.

Örnek 2.4.4 Bir kümenin 6 elemanlı alt kümelerinin sayısı 2 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Buna göre bu kümenin 4 elamanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

Çözüm. Bu kümenin eleman sayısı n olsun. Bu durumda;

$$\binom{n}{6} = \binom{n}{2}$$

olduğuna göre, $n = 6 + 2 = 8$ olur. 8 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{(8-4)!4!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!.4.3.2.1} = 70$$

□

Eleman sayıları eşit olan kümelere *"denk kümeler"* denir. A ile B denk kümeler ise bunu $A \equiv B$ şeklinde gösterilir. $A \equiv B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$ dir. Aynı elemanlardan oluşan kümelere ise *"eşit küme"* denir. A ile B eşit küme ise bu durum;
A=B şeklinde gösterilir. Buna göre; $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$'dir.

Örnek 2.4.5 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ kümelerini inceleyelim:
$S(A) = S(B) = 4$ olduğundan $A \equiv B$ dir. $A = \{n : n$ asal sayı $, 2 < n < 10\}$ ve $B = \{k : k$ tek sayı, $2 < k < 9\}$ kümeleri için $A = \{3, 5, 7\}$ ve $B = \{3, 5, 7\}$ olduğundan $A = B$ dir.

2.5. Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemi

Tanım 2.5.1 A ve B kümeleri için A kümesindeki ve B kümesindeki bütün elemanların oluşturduğu kümeye bu iki kümenin *birleşim kümesi* denir ve $A \cup B$ biçiminde gösterilir.

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ dir.

Birleşim kümesinin bazı temel özeliklerini aşağıdaki gibi verebiliriz. A, B ve C üç küme olmak üzere; aşağıdaki özellikler vardır.

1. $A \cup \varnothing = A$ (Etkisiz eleman özeliği)

2. $A \cup A = A$ (Tek Kuvvet Özeliği)

3. $A \cup B = B \cup A$ (Değişme Özeliği)

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Birleşme Özeliği)

A ve B kümesinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B'nin *kesişim kümesi* denir ve $A \cap B$ biçiminde gösterilir.

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ ve "$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$"dir. Herhangi bir A ve B kümesi için $A \cap B = \varnothing$ ise bu kümelere *ayrık küme* denir.

Kesişim kümesinin temel özeliklerini aşağıdaki gibi verebiliriz. A,B ve C üç küme olmak üzere

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (Yutan eleman özelliği)

2. $A \cap A = A$ (Tek kuvvet özelliği)

3. $A \cap B = B \cap A$ (Değişme özelliği)

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Birleşme özelliği)

A, B ve C üç küme olmak üzere $\cap$ ve $\cup$ işlemlerinin ortak özeliklerinden aşağıdaki özellikler verilebilir.

a) $\cap$ İşleminin $\cup$ işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (soldan dağılma)

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$(sağdan dağılma)

b) $\cup$ işleminin $\cap$ işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (soldan dağılma)

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (sağdan dağılma)

Yine A,B ve C üç küme olmak üzere kümelerde problem çözmede yardımcı olacak özellikler aşağıdaki gibidir:

a) $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$. Eğer burada A ile B ayrık kümeler ise, $s(A \cap B) = 0$ olacağından $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

b) $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ sağlanır.

2.6. Evrensel Küme ve Tümleme

Tanım 2.6.1 Üzerinde işlem yapılan, bütün elemanları kapsayacak biçimde seçilen kümeye *evrensel küme* denir ve E harfi ile gösterilir. Evrensel küme sonlu veya sonsuz küme olabilir. Evrensel küme sabit bir küme değildir. Her problemde değişebilir.

Örnek 2.6.2 Tam sayılarda çözülen problemler için evrensel küme, bütün tam sayılar kümesidir.

Evrensel kümenin özelikleri için aşağıdakinleri söyleyebiliriz:

E evrensel kümenin bir alt kümesi A olsun, bu durumda;

a) $A \subset E$

b) $A \cap E = A$ ve $A \cup E = E$'dir.

E evrensel kümenin bir alt kümesi A olsun. Evrensel kümenin elemanı olan fakat A'nın elemanı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye "*A' nın tümleyen kümesi*" denir ve A' ile gösterilir. $A' = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$'dir.

A, B herhangi iki küme, E evrensel küme ve A' kümesi A kümesinin, B' kümesi B Kümesinin tümleyeni ise tümleme işleminin aşağıdaki özelikleri vardır.

1. $(A')' = A$

2. $E' = \varnothing$

3. $\varnothing' = E$

4. $A \cap A' = \varnothing$

5. $A \cup A' = E$

6. $A \cup E = E$

7. $A \cap E = A$

8. $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

9. $s(A) + s(A') = s(E)$

2.7. De Morgan Kuralı

Tanım 2.7.1 A ve B herhangi iki küme olsun. Bu kümeler üzerinde yapılan birleşim, kesişim ve tümleme ifadeleri arasında De Morgan kuralları vardır. Bunlar:
a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ dir.

Örnek 2.7.2 E evrensel küme olmak üzere;
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ve $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$ kümeleri verilsin.$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ kümelerini bulalım.
Çözüm: A'=$\{8, 9, 10\}$ ve B'=$\{1, 3, 6, 10\}$ olduğundan
$(A \cup B)' = A' \cap B'$=$\{10\}$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$=$\{1, 3, 6, 8, 9, 10\}$ olur.

2.8. İki Küme Farkı

Tanım 2.8.1 A ve B iki küme olsun. A' da olup da B' de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye "*A fark B*" kümesi denir. Bu küme $A \setminus B$ ya da $A - B$ biçiminde gösterilir. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$'dir. A, B ve C herhangi üç küme ve E evrensel küme veriliyor. A kümesinin tümleyeni A', B kümesinin tümleyeni B' ise verilen kümelerde fark işleminin aşağıdaki özelikleri vardır.

1. $A \setminus A = \varnothing$

2. $A \setminus \varnothing = A$

3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$

4. $A \setminus B = A \cap B'$

5. $A \setminus B \neq B \setminus A$

6. $E \setminus A = A', E \setminus A' = A$

7. $A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$

8. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

9. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \setminus B = A$

10. $A \setminus A' = A, A' \setminus A = A'$

11. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

12. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \setminus B = A, B \setminus A = B$

13. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

14. $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$

15. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

16. $(A \setminus B)' = A' \cup B$

17. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

18. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

19. $s(A \cup B) = s(A) + s(B \setminus A)$

20. $s(A \cup B) = s(B) + s(A \setminus B)$

21. $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$

Örnek 2.8.2 $A = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ ve $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümeleri veriliyor. $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini liste yöntemi ile gösterelim. Verilen A ve B kümeleri için, $A \setminus B = \{2, 6, 8\}$ ve $B \setminus A = \{5, 7, 9\}$ olur.

3. BAĞINTI, FONKSİYON VE İŞLEM

Matematik dünyasında ortaya çıkışı çok eski çağlara dayanan fonksiyon kavramı, klasik ve modern matematik arasındaki ayırıcı özeliklerden biri olarak görülür. Matematikçiler tarafından çeşitli biçimlerde tanımlanarak gelişen kavram için "*fonksiyon*" adını ilk olarak Leibniz, matematiğin temel nesnelerinin geometrik eğriler olarak alındığı 17. yüzyılda kullanmıştır. Leibniz, teğetin bir eğri fonksiyonu olduğunu söylemiştir. 1748'de Euler fonksiyon kavramı için genel tanımı vermiştir. 1821'de, değişkenler arasında bağlılık kavramını fonksiyon tanımına alan Cauchy'nin de fonksiyon kavramını bir formül olarak düşündüğü görülmektedir. Gelişim sürecinde fonksiyon kavramını eğri ya da analitik ifadenin ötesinde bir eşleme olarak gören ilk matematikçi Dirichlet olmuştur. 1900'lerde, Drichlet'in tanımındaki eşlemenin hangi yolla kurulduğunun önemsizliğine karşı görüşler oluşmuş, Baire, Borel ve Lebesgue, fonksiyon tanımında eşlemenin kuralının belirli olmasının gerekliliğini vurgulamışlardır. 1939'da Bourbaki ise fonksiyon tanımını yapmış daha sonrada kartezyen çarpım kümesinin belli alt kümeleri olarak vermiştir. Bu gelişimin sonunda 1960'lardan sonra fonksiyon kavramı, Drichlet-Bourbaki tanımı ile ders kitapları ve öğretim programlarında yerini almıştır [3].

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1 a ve b her hangi iki eleman olmak üzere, a ve b ile oluşturulan (a,b) çiftine *sıralı ikili* veya kısaca *ikili* denir. Bunlardan a birinci bileşen b ise ikinci bileşendir. Sıralı ikili kavramında adından da anlaşılacağı gibi elemanların yazılış sırası önemlidir. Buna göre $a \neq b$ ise, $(a, b) \neq (b, a)$ dır. Buradan;
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$ dir.

Örnek 3.1.2 $(x + y, x - y) = (5, 7)$ ise (x, y) ikilisini bulalım?

Çözüm: $x+y=5 \wedge x-y=7$ ise $x=5-y$ ikinci denklemde yerine yazılırsa; $5-y-y=7$ $2x=12 \Rightarrow x=6$ dır. $6+y=5$ olduğundan $y=5-6=-1$ dir. $(x,y)=(6,-1)$ olur.

Tanım 3.1.3 Boş olmayan A ve B kümeleri için $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere bütün (x,y) ikililerin kümesine, A ile B'nin *kartezyen çarpımı* denir ve $A \times B$ biçiminde gösterilir.

$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$ veya $B \times A = \{(y,x) : x \in B \wedge y \in A\}$'dır.

Örnek 3.1.4 $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b\}$ için $A \times B$ ve $A \times B$ yazarak eleman sayılarını bulunuz?

Çözüm: $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ ise $s(A \times B) = 6$
$B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ ise $s(B \times A) = 6$ Buradan s(A)=3 s(B)=2 olduğu düşünülürse 6=3.2 , 6=2.3 olduğundan iki kümenin Kartezyen çarpımının eleman sayısı;
$s(A \times B) = s(A).s(B)$ veya $s(B \times A) = s(B).s(A)$ olur.
Kartezyen çarpımın özeliklerinide aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.
1. $A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$ (Kartezyen çarpımın değişme özelliği yoktur.)
2. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (Kartezyen çarpımın birleşme özelliği vardır.)
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (Kartezyen çarpımın, birleşme işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.)
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (Kartezyen çarpımın, kesişme işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.)
5. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ (Bir kümenin $\emptyset$ ile Kartezyen çarpımı $\emptyset$ dir.)
6. $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$
7. $A \subset B \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times C)$
8. $A \times (B - C) = A \times (B \cap C') = (A \times B) \cap (A \times C)$
9. $s(A \times A) = (s(A))^2$

3.2. Bağıntı

Tanım 3.2.1 A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A \times B$' nin her alt kümesine A' dan B' ye bir *ikili bağıntı* ya da kısaca *bağıntı* denir. Doğal olarak $B \times A$' nın her alt kümesine B' den A' ya bir bağıntı denir [2].

$\beta = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B\}, \beta \subset A \times B$ dir. $(x, y) \in \beta$ ise $y\beta x$ ile gösterilir ve "y, β bağıntısı ile x e bağlıdır" denir. $\beta \subset A \times A$ ise β, A da bir bağıntıdır denir.

Örnek 3.2.2 $A = \{1, 2, 3\}$ kümesine göre aşağıdakilerden hangisi A da bir bağıntı değildir?
a) $\beta_1 = \emptyset$ ***b)*** $\beta_2 = \{(1, 1)\}$ ***c)*** $\beta_3 = \{(1, 2)\}$ ***d)*** $\beta_4 = \{(2, 1)\}$ ***e)*** $\beta_5 = \{(1, 2), (4, 2)\}$

Çözüm:
$A = \{1, 2, 3\}$ ise$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ olur. $(4, 2) \notin A \times A$ olduğundan,$\{(1, 2), (4, 2)\} \notin A \times A$'dır. Buna göre β_5 A da bir bağıntı değildir.
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve β_4 kümeleri $A \times A$'nın birer alt kümesi olduklarından A' dan A'ya birer bağıntıdır.

Tanım 3.2.3 $s(A) = a, s(B) = b$ olsun. s(AxB) = s(A).s(B) = a.b dir. Buradan $A \times B$' nin her alt kümesi A' dan B' ye bir bağıntı olduğuna göre A' dan B' ye tanımlı *bağıntı sayısı* $A \times B$ kümesinin alt küme sayısı olan $2^{a.b}$ tanedir. B'den A'ya da yazıla bilecek *bağıntı sayısı* aynıdır. A' dan B' ye tanımlana bilen r elemanlı $(r \leq a.b)$ bağıntı sayısı ise;
$\binom{a.b}{r} = \frac{(a.b)!}{[(a.b)-r]!r!}$ şeklinde bulunur.

Örnek 3.2.4 $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{4, 5\}$ olmak üzere A dan B ye tanımlı kaç tane bağıntı vardır ?

Çözüm: $s(A) = 3$ ve $s(B) = 2$ ise $s(A \times B) = 3.2 = 6$ dır. A dan B ye tanımlı bağıntı sayısı $2^6 = 64$ tür.

Örnek 3.2.5 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi verilsin. β, A da tanımlı bir bağıntı olduğuna göre, 2 elemanlı kaç tane farklı β bağıntısı tanımlanabilir?

Çözüm: β , A da tanımlı bir bağıntı ise; $\beta \subset A \times A$'dır.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ise $s(A \times A) = s(A).s(A) = 4.4 = 16$ ' dır. 16 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı bağıntı (alt küme) sayısı ise;

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{[16-2]!2!} = \frac{16.15}{2} = 120$$

3.2.1. Bağıntının Gösterimi

Bağıntının gösterimi ;

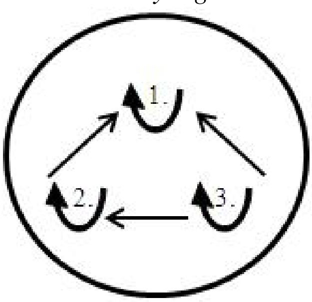
a) Listeleme Yöntemiyle **b)** Şema Yöntemiyle **c)** Grafik Yöntemiyle olmak üzere üç şekilde gösterilir.

Örnek 3.2.6 $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x, y) : x \geq y\}$ bağıntısını **a)** Listeleme Yöntemiyle **b)** Şema Yöntemiyle **c)** Grafik Yöntemiyle gösterelim.

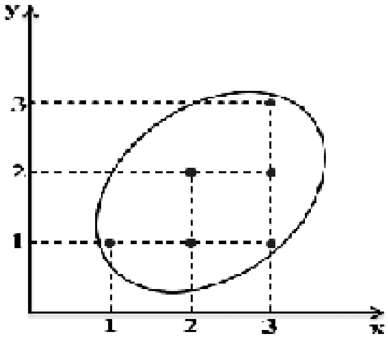
Çözüm: ***a)*** *Liste yöntemi ile gösterim*

$\beta = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ *tür.*

b) *Şema Yöntemiyle gösterimi*



***c)** Grafik Yöntemiyle gösterim*



3.2.2. Bağıntının Tersi

Tanım 3.2.7 A kümesinden B kümesine β = $\{(x, y)$: $x \in A$ ve $y \in B\}$ bağıntısı tanımlansın. β bağıntısındaki tüm ikililerin birinci bileşeni ile ikinci bileşeninin yeri değiştirilerek elde edilen bağıntıya, β *bağıntısının tersi* denir ve β^{-1} ile gösterilir.
$\beta^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \beta\}$ *dır.*

β bağıntısının tersi olan β^{-1} içinde aşağıdaki sonuçlar verilebilir.
i) $\beta \subset A \times B$ ise $\beta^{-1} \subset B \times A$ dır.
ii) $\beta(x) = y$ ise $\beta^{-1}(y) = x$ dir. (β ve β^{-1}) bağıntıları y=x doğrusuna göre simetriktir. (I.Açı ortay)
iii) $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$ dır.

Örnek 3.2.8 $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{b, c\}$ kümeleri için; β ve β^{-1} bağıntılarını bulunuz?

Çözüm: $A \times B = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$ kartezyen kümesi ile tanımlı $\beta = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ bağıntısının tersi
$\beta^{-1} = \{(b, a), (b, b), (c, b), (c, c)\}$ dir.

3.2.3. Bağıntının Özelikleri

1). Yansıma Özeliği

Tanım 3.2.9 β, A kümesinin üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. A kümesinin her x elemanı için $(x, x) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısına "*yansıma özeliği*" vardır, diğer bir ifade ile "β *yansıyandır*" denir.

Örnek 3.2.10 (i). $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi ile tanımlı $\beta_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, a)\}$ bağıntısı için $d \in A$ olduğu halde $(d, d) \notin \beta_1$ dir.
(ii). $A = \{a, b, c\}$ kümeleri ile tanımlı $\beta_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}$ bağıntısı yansıyandır. Çünkü $a, b, c \in A$ iken $(a, a) \in \beta_2$, $(b, b) \in \beta_2$, $(c, c) \in \beta_2$ dır.

Bu özellik içinde aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz;
a) $(x, x) \in \beta$ özeliğini sağlamayan en az bir $x \in A$ bulunuyorsa β bağıntısı A' da *yansıyan bir bağıntı değildir* denir.
b) $s(A) = n$ ise A kümesinde 2^{n^2-n} tane yansıyan bağıntı tanımlanabilir.
c) $\mathbb{R}$ 'da tanımlanan "eşitlik " bağıntısı yansıyan bir bağıntıdır.

2). Simetri Özeliği

Tanım 3.2.11 β, A kümesinin üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall x, y \in A$ için $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise,"β bağıntısının *simetri* özeliği vardır" veya "β" bağıntısı A kümesinde *simetrik* bir bağıntıdır denir.

Örnek 3.2.12 $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi ile tanımlı $\beta = \{(c, b), (b, c), (d, d)\}$ bağıntısı simetriktir ancak $\beta_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, d)\}$ bağıntısı simetrik değildir. Çünkü $(b, d) \in \beta_1$ olduğu halde $(d, b) \notin \beta_1$ dir.

Simetri özeliği içinde aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz;
a). Bağıntısının simetrik olması için elemanları köşelere göre (y=x doğrusuna

göre) simetrik olmalıdır.

b). $x, y \in A$ için $(x, y) \in \beta$ için en az bir $(y, x) \notin \beta$ buluna biliyorsa , bağıntısı A da *simetrik değil* veya *asimetrik bağıntı* denir.

c). $s(A) = n$ ise A kümesinde $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tane simetrik bağıntısı vardır.

d). Bir β bağıntısının simetrik olması için β^{-1}'in simetrik olması gerekir.

3). Ters Simetri Özeliği

Tanım 3.2.13 β bağıntısı, A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ iken $x = y$ oluyorsa ve her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ ise β bağıntısının "*ters simetri özeliği*" vardır veya β "$ters\ simetrik$" bir bağıntıdır denir.

Örnek 3.2.14 (i). $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı $\beta = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 2)\}$ olsun. Bu durumda $(2, 3) \in \beta$ ve $(3, 2) \in \beta$ olduğundan β ters simetri değildir.

(ii). $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesi ile tanımlı $\beta^{-1} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ bağıntısı ters simetriktir.

Ters simetri özeliği içinde aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz;

a). (x, x) şeklindeki ikililer β'nın nın ters simetrik özeliğini bozmaz.

b). Simetrik olmayan bir bağıntının (asimetrik) ters simetrik olacağı veya ters simetrik (anti simetrik) olmayan bir bağıntının simetrik olacağı kanaatine varılmamalıdır.

c). Bir bağıntının ters simetrik bir bağıntı olması için β' nın grafiğindeki (köşeğen üzerindeki elemanlar hariç) sıralı ikililerden hiç birinin köşegene göre simetrik olmaması gerekir.

4). Geçişme Özeliği

Tanım 3.2.15 β bağıntısı, A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer "$\forall(x,y) \in \beta$ ve $\forall(y,z) \in \beta$ için $(x,z) \in \beta$ oluyorsa" "*β bağıntısının geçişme özeliği*" vardır veya "β bağıntısı A kümesinde *geçişli* bir bağıntıdır" denir.

Örnek 3.2.16 (i). $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir $\beta = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ bağıntısı geçişkendir.
(ii). $\beta = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$ bağıntısı için $(1,2) \in \beta, (2,3) \in \beta$ fakat $(1,3) \notin \beta$ oldugundan β bağıntısı geçişli değildir.

Geçişme özeliği için de aşağıdaki sonuçları verebiliriz.
a). Bir elemanlı bağıntıların hepsi geçişken bir bağıntıdır.
b). Bir $(x,y) \in \beta$ iken birinci bileşeni y olan ikili yoksa ,bu durum geçişkenlik özeliğini bozmaz, yani bağıntı geçişli bir bağıntıdır.

3.2.4. Denklik Bağıntısı

Tanım 3.2.17 Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa bu bağıntıya *denklik bağıntısı* denir.

Örnek 3.2.18 A={a,b,c} kümesi için $\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$ olduğuna göre A kümesi üzerinde tanımlı β bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından denklik bağıntısıdır.

3.3. Fonksiyon

Tanım 3.3.1 $A \neq \phi$ ve $B \neq \phi$ olmak üzere A' dan B' ye tanımlı bir bağıntı f olsun. f bağıntısı A kümesinin her elemanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşliyorsa, bu bağıntıya, A kümesinden B kümesine bir *fonksiyon* denir.

A dan B ye bir f fonksiyonu $f : A \rightarrow B$ şeklinde gösterilir. Burada A, kümesine fonksiyonun "*tanım kümesi*", B kümesine de "*değer kümesi* "denir. A kümesinin eşlendiği elemanların oluşturduğu kümeye de, A kümesinin "*görüntü kümesi*" denir. $f(A)$ ile gösterilir ve $f(A) \subset B$' dir.

f bağıntısının bir fonksiyon olması için;

(i). Tanım kümesinde açıkta eleman kalmamalıdır.

(ii). Tanım kümesindeki her elemanın yalnız bir görüntüsü olmalıdır.

$x \in A$ ve $y \in B$ ise $(x, y) \in f$ yerine $y = f(x)$ biçiminde yazılır. Burada "x'e *bağımsız değişken*" "y'ye *bağımlı değişken*" denir.

Örnek 3.3.2 $A = \{a, b, c, d, e\}$ ile $B = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlı f_1 ve f_2 bağıntılarının fonksiyon olup olmadığını araştıralım.

(i). $f_1 = \{(a, -1), (b, -2), (c, -3), (d, -4), (e, -5)\}$

(ii).$f_2 = (a, -1), (b, -2), (c, -3), (d, -4)$

Çözüm: **(i).** A kümesinin her elemanın f_1 bağıntısına göre yalnız bir görüntüsü vardır. A kümesinin bir elemanı B' de birden fazla elemanla eşlenmemiştir. f_1 fonksiyondur.

(ii). f_2 bağıntısına göre $e \in A$ olmasına rağmen $f(e)$ tanımlı değildir yani,"e" B (değer) kümesinde ki hiçbir elemanla eşlenmemiştir. O halde f_2 fonksiyon değildir.

Not: Fonksiyonlar Kartezyen çarpımın alt kümesidir. O halde her fonksiyon bir bağıntıdır ama her bağıntı fonksiyon değildir.

3.3.1. Fonksiyonlarda Dört İşlem

f ve g birer fonksiyon olsun. Bu durumda $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. $(A \cap B) \neq \phi$ olmak üzere;

(i). $f \mp g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$

(ii). $f.g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$, $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

(iii). $\frac{f}{g} = A \cap B \to \mathbb{R}$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(iv). $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c.f : A \to \mathbb{R}$, $(c.f)(x) = c.f(x)$

Örnek 3.3.3 $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 1$ için $(f^2 - fg + 5g)(2) = ?$

Çözüm:$f(x) = 2x \Rightarrow f(2) = 2.2 = 4$, $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g(2) = 2^2 - 1 = 3$ dir.
$(f^2 - fg + 5g)(2) = f^2(2) - f(2).g(2) + 5.g(2) = 4^2 - 4.3 + 5.3 = 19$

3.3.2. Eşit Fonksiyonlar

Tanım 3.3.4 $f : A \to B$ ve $g : A \to B$ iki fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa,"f" ile "g" ye *eşit fonksiyonlar* denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

Örnek 3.3.5 $A = \{0, 2\}$ ve $B = \{0, 4\}$ olmak üzere ,
$f : A \to B$, $f(x) = 2x$ ve $g : A \to B$, $g(x) = x^2$ fonksiyonları için
$f(0) = 0$ ve $f(2) = 2.2 = 4$, $g(0) = 0^2 = 0$ ve $g(2) = 2^2 = 4$ dır.
$A = \{0, 2\}$ olmak üzere $f(0) = g(0)$ ve $f(2) = g(2)$ olduğundan $f = g$ dır.

3.3.3. Fonksiyon Çeşitleri

a) Bire Bir (1-1) Fonksiyon

Tanım 3.3.6 $f : A \to B$ fonksiyonunda tanım kümesinin farklı her iki elemanının f altındaki görüntüsü birbirinden farklı ise f fonksiyonuna *birebir fonksiyon* denir.

[$\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$] $\equiv$ [$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$] ise f fonksiyonuna bire bir (1-1) fonksiyon denir.

Örnek 3.3.7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 1 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$'dir. Böylece f fonksiyonu bire birdir.

b) Örten Fonksiyon

Tanım 3.3.8 $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. $\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in A$ varsa f ye *örten bir fonksiyon* denir. $f : A \to B$ ye bir fonksiyon olsun görüntü kümesi ile değer kümesi eşit ise yani $(f(A) = B))$ f ye'*örten fonksiyon* denir.

Örnek 3.3.9 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ fonksiyonu örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall$y$\in \mathbb{R}$ için $f(x) = y$ ise $3x = y$ olur. $x = \frac{y}{3} \in \mathbb{R}$ var olduğundan f fonksiyonu örtendir.

c) Bire Bir ve Örten Fonksiyon

Tanım 3.3.10 A ve B herhangi iki küme olmak üzere, $f : A \to B$ foksiyonu birebir ve örten ise f ye *bire bir ve örten* fonksiyon denir.

Tanım 3.3.11 A ve B sonlu iki küme olmak üzere, $f : A \to B$ foksiyonu için $s(A) = s(B) = s(f(A))$ ise f fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyondur.

Örnek 3.3.12 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ (1-1) ve örtendir. Çünkü $f(x) = f(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$ olduğundan f birebirdir. $\forall y \in \mathbb{R}$ için $x + 1 = y$ olduğundan $x = y - 1 \in \mathbb{R}$'dir. O halde f örtendir.

d) İçine Fonksiyon

Tanım 3.3.13 Örten olmayan fonksiyonlara "*içine fonksiyon*" denir. Fonksiyon örten ise görüntü kümesi, değer kümesine eşittir. $f : A \to B \Leftrightarrow f(A) \neq B$ ise içine fonksiyondur.

Örnek 3.3.14 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $f = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)\}$ ile tanımlanan f fonksiyonu B'den A' ya içine bir fonksiyondur.

e) Bire Bir ve İçine Fonksiyon

Tanım 3.3.15 $f : A \to B$ fonksiyonu hem bire bir hem de içine ise bu fonksiyona "*bire bir ve içine fonksiyon*" yada kısaca "*içerim*" fonksiyonu denir.

Örnek 3.3.16 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ için $f(x) = 2x + 6$ fonksiyonunu inceliyelim. f, her x doğal sayısını farklı bir y doğal sayısına eşler. Yani, f bire bir fonksiyondur. Fakat f'in değer kümesi bütün doğal sayıları oluşturmaz. Yani f içine fonksiyondur. f, hem bire bir hem de içine olduğu için içerim fonksiyonudur.

f) Birim (Özdeş-Etkisiz) Fonksiyon

Tanım 3.3.17 $f : A \to A$ ve $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ ile tanımlanan fonksiyonuna A' nın *birim fonksiyonu* denir. Birim (özdeşlik) fonksiyonu I ile gösterilir. $\forall x \in A$ için $I(x) = x$'dir.

Örnek 3.3.18 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$ birim fonksiyon ise; b nin değerini bulunuz?

Çözüm: f birim fonksiyon ise $f(x) = x$ kuralı sağlanır. $x + b = x$ olur. Bu durumda $b = 0$ dır.

g) Sabit Fonksiyon

Tanım 3.3.19 $f : A \to B$ ve $c \in B$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = c$ ise f fonksiyonuna bir *sabit fonksiyon* denir. Başka bir değişle tanım kümesinin her elemanını değer kümesinin sabit bir elemanına eşleyen fonksiyondur.

Örnek 3.3.20 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx - 2$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre a ve b nin değerlerini bulunuz?

Çözüm: f sabit bir fonksiyon ise, fonksiyon kuralı x değişkeninden bağımsız olmalıdır. Yani, x' li terimlerin katsayıları 0 (sıfır) olmalıdır. $a = 0$ ve $b = 0$ dır. f sabit fonksiyonu $f(x) = -2$ dir.

h) Sıfır Fonksiyonu

Tanım 3.3.21 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) = 0$ ise f fonksiyonuna $\mathbb{R}$'de *sıfır fonksiyonu* denir.

Örnek 3.3.22 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (n-4)x^2 + (m+2)x$ fonksiyonu sıfır fonksiyonu olabilmesi için n ve m ne olmalıdır?

Çözüm: $f(x) = 0$ olması için x^2 ve x in baş katsayılarının sıfır olması gerekir. Buna göre; $(n-4)x^2 = 0 \Rightarrow n-4 = 0 \Rightarrow n = 4$ dür. Diğer yandan; $(m+2)x = 0$ $m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$ dir.

ı) Doğrusal Fonksiyon(Lineer Fonksiyon)

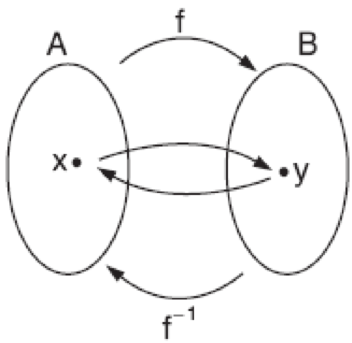
Tanım 3.3.23 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m, b \in \mathbb{R}$ için $f(x) = m.x + b$ şeklinde yazılabilen her fonksiyona "*doğrusal fonksiyon*" denir. Doğrusal fonksiyonun grafiği bize bir doğru verir.

Örnek 3.3.24 f doğrusal bir fonksiyon olmak üzere $f(1) = 4$ ve $f(7) = 10$ olduğuna göre $f(5)$ kaçtır?

Çözüm: f bir doğrusal fonksiyon $f(x) = mx + n$ olsun. $f(1) = 4$ ise $m + n = 4$ $(*)$ ve $f(7) = 10$ ise $7m + n = 4$ $(**)$ için $(*)$ ve $(**)$ ortak çözüm yapıldığında $m = 1$ ve $n = 3$ bulunur. Öyleyse $f(x) = x+3$ tür. Bu durumda $f(5) = 5+3 = 8$ olur.

3.3.4. Bir Fonksiyonun Tersi

Tanım 3.3.25 $f : A \to B$, $f = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$ bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere, $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$ fonksiyonuna f'nin *"ters fonksiyonu"* denir.
$\forall (x, y) \in f$ ise, $(y, x) \in f^{-1}$ olduğu için $y = f(x)$ ise, $x = f^{-1}(y)$' dir.

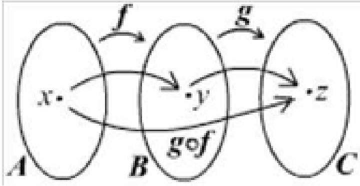


Örnek 3.3.26 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

Çözüm: $f(x) = 2x + 4$ ise $y = 2x + 4$'dir. Denklemden x yalnız bırakılır ise $x = \frac{y-4}{2}$ olur. Buradan da x ile y'ler yer değiştirir ise $y = \frac{x-4}{2}$ olur bu istenen ters fonksiyondur yani $f^{-1} = \frac{x-4}{2}$'dir.

3.3.5. Fonksiyonların Bileşkesi

Tanım 3.3.27 $f : A \to B$ için $x \to y = f(x)$ ve $g : B \to C$ için $y \to z = g(y)$ fonksiyonları verilmiş olsun. A'dan C'ye $z = g(y) = g(f(x))$ ile tanımlı gof : $A \to C$ fonksiyonuna f ile g nin *bileşke fonksiyonu* denir. gof, "g bileşke f" diye okunur.



Örnek 3.3.28 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x - 3$ olduğuna göre $(gof)(x)$ fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm:$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x) = 3(x^2 + 2x) - 3 = 3x^2 + 6x - 3$

a) Bileşke Fonksiyonunun Özellikleri

1) Fonksiyonlarda bileşke işleminin *değişme özelliği* yoktur.

2) $f : A \to B$, $g : B \to C$ ve $h : C \to D$ fonksiyonları için, bileşke işleminin *birleşme özelliği* vardır.

3) $f : A \to A$, $I : A \to A$ ve $I(x) = x$ olmak üzere $foI = Iof = f$ eşitliğini sağlayan I fonksiyonuna *bileşke işleminin birim fonsiyonu* denir.

4) $f : A \to A$ bire bir ve örten fonksiyon ise $f^{-1}of = fof^{-1} = I$ dır.

5) $f, g : A \to B$ bire bir ve örten fonksiyon ise $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ dir.

6) $fog = h$ ise $g = f^{-1}oh$ ve $fog = h$ ise $f = hog^{-1}$ dir.

7) $f : A \to B$ bire bir ve örten bir fonksiyon ise $(f^{-1})^{-1} = f$ dir.

3.3.6. Permütasyon

Tanım 3.3.29 Tanım ve değer kümeleri aynı olan bire bir ve örten fonksiyonlara *pemütasyon fonksiyon* denir. Örneğin $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $f : A \to A$, $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan, bir permitasyon fonksiyonudur.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Not: $s(A) = n$ ise A kümesinde tanımlı farklı permütasyon sayısı $n!$ kadardır.

3.4. İşlem

Tanım 3.4.1 $A \neq \emptyset$ bir küme, $A \times A$ nın alt kümelerinden A' ya tanımlanan her fonksiyona A'da bir *ikili işlem* denir. Toplama işlemi, çıkarma işlemi, çarpma işlemi ve bölme işlemi bu işlemlerin en temel dört tanesidir. İşlemler f yerine $\{+, -, \times, \div, \triangle, \circ\}$ gibi semboller ile gösterilir. $+$ işlemi için $f : A \times A \to A$ fonksiyonu $a, b \in A$ için $f(a, b) = a + b$ şeklinde gösterilir. İşlem işareti, ikilinin arasına yazılarak yapılır. Dört işlem dışında bir çok işlem tanımlanabilir.

3.4.1. İşlemlerin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

Tanım 3.4.2 Bir A kümesinde tanımlanan "o" işleminin görüntüsü her zaman A' da varsa A kümesine, *o* işlemine göre *kapalı bir küme* denir.

b) Değişme Özeliği

Tanım 3.4.3 Her a,b$\in$ A için, $aob = boa$ ise, *o* işleminin *değişme özeliği* vardır denir.

c) Birleşme Özeliği

Tanım 3.4.4 Her a,b,c$\in$ A için $ao(boc) = (aob)oc$ ise, *o* işleminin *birleşme özeliği* vardır denir.

d) Dağılma Özeliği

Tanım 3.4.5 o ve $*$ bir A kümesi üzerinde tanımlanan iki işlem olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için $ao(b * c) = (aob) * (aoc)$ oluyorsa o işleminin $*$ işlemi üzerine soldan dağılma özeliği vardır denir. Eğer $(b * c)oa = (boa) * (coa)$ oluyorsa o işleminin $*$ işlemi üzerine *sağdan dağılma özeliği* vardır denir. Hem sağdan hem de soldan dağılma özeliği varsa genel olarak *dağılma özeliği* vardır denir.

e) Birim (Etkisiz) Eleman Özeliği

Tanım 3.4.6 Her $x \in A$ için, $xoe = eox = x$ ise, e ye o işlemine göre A'nın *etkisiz (birim) elemanı* denir. $e \in A$ ise, o işlemine göre A kümesi birim eleman özelliğine sahiptir denir.

Not: Birim eleman varsa tektir.

f) Ters Eleman Özeliği

Tanım 3.4.7 Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlanan o işlemine göre etkisiz eleman e olsun. $x \in A$ için, $xoy = yox = e$ olacak biçim de A'da bir y elemanı varsa y elemanına "o" işlemine göre *x elemanının tersi* denir. Genellikle x^{-1}ile gösterilir. o işlemine göre A kümesinin her elemanının tersi var ise ve yine A kümesinin bir elemanı ise A kümesi o işlemine göre ters eleman özeliğine sahiptir denir.

Örnek 3.4.8 Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı o işlemi $aob = a + b + 3$ biçiminde tanımlanmış olsun. Buna göre 2 nin tersi kaçtır?

Çözüm: e birim eleman olmak üzere; $aoe = a$ ise $a + e + 3 = a$ için $e = -3$ bulunur. 2^{-1} : 2'nin tersi olsun. $2^{-1}o2 = e$ için $2 + 2^{-1} + 3 = -3$ olacağından $2^{-1} = 8$ bulunur.

Not: Birim elemanın tersi, daima kendisidir. Her elemanın tersi olmak zorunda değildir.

g) Yutan Eleman Özeliği

Tanım 3.4.9 Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlanan işlem o olsun; her $a \in A$ için $aoy = yoa = y$ olacak şekilde bir $y \in A$ varsa bu y elemanına A kümesinin o işlemine göre *yutan* elemanı denir. Yutan elemanın tersi yoktur. Fakat tersi olmayan her eleman yutan eleman değildir. Bir işlemde yutan eleman varsa bir tanedir. Bazı işlemlerde yutan eleman yoktur.

Örnek 3.4.10 $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $xoy = 2x + 2y + xy + 2$ işlemine göre yutan elemanını bulunuz?

Çözüm: o işleminin yutan elemanı y olsun. o işleminin değişme özelliği olduğundan sadece sağdan yutan elemanı bulmak yeterli olacaktır. $xoy = y$ $2x + 2y + xy + 2 = y$ ise $y(1 + x) = -2(1 + x)$ eşitliğinden $y = -2$'dir. Buna göre, verilen işlemin yutan elemanı -2'dir.

4. SAYILAR

İlkçağ insanları, sayılar için kil tabletler üzerine çizikler kazımaya ya da kesilmiş ağaç dalına çentik yapmaya başlamakla ilk kez sayıları yazılı olarak ifade etmiş oluyorlardı. Bu kullanılan işaretler, rakam ve sayıların ilk yazılı ifadeleridir. Bilinen en eski sayma sistemlerinden biri, Eski Mısırlılara ait olanıdır. Eski Mısırlıların kullandıkları resim yazısının (hiyeroglif) başlangıç tarihi M.Ö. 3300 yılına kadar geri gitmektedir. Mısırlılar yaklaşık 5300 yıl önce, milyona kadar olan sayıları kapsayan bir sistem geliştirmişlerdir. Mısırlılara ait sayma sistemi, İlk Çağ mağara insanının önceleri kullandığı sayma sisteminin gelişmiş şeklide diyebiliriz. Bu bilgiler zamanımıza kadar ulaşmış papirüs tomarlarından elde edilmektedir. M.Ö. 1900-1800 yılları için adlandırılan Kahun (Kaun) ve Berlin papirüsleri ile M.Ö. 1700 ile 1600 yılları için adlandırılan, Hiksoslar devrinden (M.Ö. 1788-1580) kalma Rhind (Rind) ve Moskova papirüsleridir. Eski Mısır'da rakam ve sayılar bazı sembollerin (şekillerin) yan yana gelmesiyle ortaya çıkıyordu. Bütün rakamlar, 7 değişik şeklin bir araya gelmesiyle ve yazım biçimi de, sağdan sola doğru ifade ediliyordu. Mezopotamyalılarda rakamlar, çivi yazısında görülen çivi ya da oduncu kamasına benzeyen şekillerden oluşmaktadır. Bu işaretlerin (sembollerin) uygun biçimde, yan yana ya da büyük sayıları gösterebilmek için toplu olarak yazılması suretiyle 60'a kadar ki sayıların gösterimi yapılabiliyordu. Bu tür yazım biçiminde, 0.1 ile 0.01 gibi rakamların arasındaki farkı anlamak bir hayli güçtü. Bunu anlayabilmek için metin ve konu yardımıyla sonuç çıkarma yollarına gidilirdi. Mezopotamyalılar, sıfır sembolünü kullanmamışlardır. Ancak astronomide bu amaçla özel bir sembol kullandıkları anlaşılmaktadır. M.Ö. 2000 yıllarında Mezopotamya'da yaşayan Babillilerin, bilimin birçok dalında oldukça ileri bir seviyeye ulaşmış oldukları bilinmektedir. Öyleki Babil şehrini zamanın bilim merkezi hâline getirmişlerdir. Özellikle matematik ve astronomide çok ilerlemişlerdir. Babilliler, 59'dan büyük sayıları da basamak düşüncesinden yararlanarak yazdılar. 60 sayısını taban olarak kullandılar. Gruplamalarını 60'lık olarak yani 60x2=120 ... şeklinde yaptılar. Böylece ilk kez sayılarda basamak düşüncesini geliştirmiş oldular. Babilliler, sayıları yazarken iki tane sembol ve bulunmayan basamakların yerini doldurmak için de ((:)) işaretini kullanmışlardır. Babil rakamları arasında da sıfır rakamını gösteren bir sembol yoktur. Buradan Babilliler'in rakamları sağdan sola doğru yazarak ifade ettikleri anlaşılmaktadır. Bilindiği gibi günümüzde, sayıları belirten standart hâlde rakam ve sözcükler vardır. Sayılar, hem 1, 2, 3, ... gibi sembollerle hem de bir, iki, üç, ... gibi kelimelerle ifade edilebilmektedir. Dört adet kalemi, "dört kalem" kelimesi ile belirtip "4" rakamı ile gösterebiliyoruz [1], [2].

4.1. Temel Kavramlar

Tanım 4.1.1 (**Rakam**) Sayıları yazmaya yarayan sembollerdir. Onluk sayma sisteminde $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ rakamları kullanılır.

Tanım 4.1.2 (**Sayı**) Bir çokluğu ifade edecek şekilde, rakamların tek başına ya da birlikte kullanılmasıyla oluşturulan ifadelerdir. $\{3,-4,12,0,\pi,e,\sqrt{5}\}$ ifadeleri birer sayıyı gösterir.

a) Doğal Sayılar

Tanım 4.1.3 Doğal sayılar "0" dan başlayarak sonsuza kadar giden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ sayılardır. Matematikte doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Doğal sayılar ismi bu sayıların doğada görüp tanıdığımız sayılar olduğu fikrinden ileri gelmektedir. Doğal sayılar kümesi "0" ve sayma sayıların birleşiminin oluşturduğu kümedir. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

b) Tam Sayılar

Tanım 4.1.4 Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}$=$\{$...,-n, ...,-2,-1, $0, 1, 2, ..., n, ...\}$ kümesinin her bir elemanına *tam sayı* denir. Tam sayılar kümesi negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^-$, pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ve sıfırı eleman kabul eden $\{0\}$ kümesinin birleşim kümesidir. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

c) Rasyonel Sayılar Kümesi

Tanım 4.1.5 Rasyonel sayılar kümesi iki tam sayının birbirine oranı ile ifade edilebilen sayıların oluşturduğu kümedir. Rasyonel sayılar tam sayıların bir genişlemesidir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0\}$ şeklindedir.

d) İrrasyonel Sayılar Kümesi

Tanım 4.1.6 Rasyonel olmayan sayılar kümesidir. $\mathbb{Q}^{'}$ ile gösterilir. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \pi, e, ...$ gibi sayılar irrasyonel sayılardır.

e) Reel (Gerçel) Sayılar Kümesi

Tanım 4.1.7 Rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların birleşimine *reel (gerçel) sayılar kümesi* denir. $\mathbb{R}$ ile gösterilir. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^{'}$ dir. Bu durumda $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}^{'} \subset \mathbb{R}$ dir.

4.2. Doğal Sayılarda İşlemler

a) Sayıların Çözümlenmesi

a, b, c, d birer rakam olmak üzere, $(ab) = 10a + b$, $(abc) = 100.a + 10.b + c$, $(abcd) = 1000.a + 100.b + 10.c + d$ biçiminde çözümlene bilir.

$abc = a.10^2 + b.10^1 + c \Rightarrow c = 10^0$ (Birler Basamağı) , $b = 10^1$ (Onlar Basamağı), $a = 10^2$ (Yüzler Basamağı)

Örnek 4.2.1 İki basamaklı bir sayı, rakamları toplamının iki katına eşit ise bu sayıyı bulunuz?

Çözüm: Sayımız ab olsun. $ab = 10a + b$ şeklinde yazarız. ab sayısı, rakamları toplamının iki katına eşit olduğuna göre, $10a + b = 2(a + b)$ buradanda $10a + b = 2a+2b$ ve $8a = b$'dir. a ve b rakam oldukları için $a = 1$ ve $b = 8$ olur. Bu durumda $ab = 18$ bulunur.

b) Taban Aritmetiği

Bir A doğal sayısı $a, b, c, d < x$ olmak üzere; $A = ax^3+bx^2+cx^1+dx^0 = (abcd)_x$ biçiminde yazıla biliyorsa A sayısı *x tabanına göre yazılmıştır* denir.

c) Asal Sayılar

1 den büyük, 1 ve kendisinden başka pozitif tam böleni olmayan doğal sayılara *asal sayı* denir. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$ asal sayılardır. En küçük asal sayı 2 dir. 2 den başka çift asal sayı yoktur. 1'den başka ortak pozitif böleni olmayan herhangi iki doğal sayıya *aralarında asal sayılar* denir. Sayıların aralarında asal olması için kendilerinin asal olma zorunluluğu yoktur.

Örnek 4.2.2 4 ile 9 ve 5 ile 7 doğal sayıları aralarında asalmıdır? Bulalım.

Çözüm: 4'ün pozitif bölenleri $\{1, 2, 4\}$,9'un pozitif bölenleri $\{1, 3, 9\}$ olduğuna göre 4 ile 9 aralarında asaldır. 4 ve 9 asal sayı olmadıkları halde aralarında asal oldu. 5'in pozitif bölenleri $\{1, 5\}$, 7'nin pozitif bölenleri $\{1, 7\}$ olduğuna göre 5 ve 7 aralarında asaldır.

d) En Küçük Ortak Kat (Ekok) ve En Büyük Ortak Bölen (Ebob)

En az birisi sıfırdan farklı olan iki yada daha çok tam sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne, bu sayıların *en büyük ortak böleni (Ebob)* denir. Hepsi sıfırdan farklı olan, iki ya da daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların *en küçük ortak katı (Ekok)* denir.

e) Modüler Aritmetik

a, b, m birer tam sayı ve $m > 1$ olmak üzere, tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan, $\beta = \{(a, b) : m, (a - b)$' yi tam böler$\}$ bağıntısı $\mathbb{Z}$'de bir denklik bağıntısıdır. β denklik bağıntısı olduğundan her $(a, b) \in \beta$ için, $a \equiv b(mod m)$

biçiminde yazılır ve "m modülüne göre a *sayısı* b*' ye denktir*", denir. Yani $a \equiv b(modm) \Leftrightarrow a - b = mk \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow a = mk + b$'dir. Genel olarak x'in denklik sınıfı β, A da bir denklik bağıntısı olmak üzere,

$\overline{x} = \{y : (x, y) \in \beta$ ve $y \in A\}$ biçiminde gösterilir. $m \in \mathbb{Z}^+$olmak üzere denklik sınıfları kümesi; $Z/m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$'dir.

4.3. Rasyonel Sayılarda İşlemler

a) Genişleme ve Sadeleşme

$\frac{x}{y}$ kesrinin pay ve paydası sıfırdan farklı bir a tam sayısı ile çarpıldığında veya bölündüğünde kesrin değeri değişmez.Yapılan bu işleme kesrin *genişlemesi* veya *sadeleşmesi* denir. $\frac{x}{y} = \frac{a.x}{a.y}$, $a \neq 0$ (kesrin genişlemesi), $\frac{x}{y} = \frac{a:x}{a:y}$, $a \neq 0$ (kesrin sadeleşmesi)

b) Denk Kesirler

$\frac{x}{y}$ ve $\frac{z}{t}$ iki kesir olmak üzere $\frac{x}{y} \equiv \frac{z}{t} \Leftrightarrow xt \equiv zy$'dir. İki rasyonel sayının denkliğini belirtmek için genellikle " $\equiv$ " yerine" $=$ " sembolü kullanılır.

c) Toplama ve Çıkarma İşlemi

Toplama ve çıkarma işleminde payda eşitlenecek biçimde kesirler genişletilir yada sadeştirilir. Oluşan kesirlerin payları toplanır, (ya da çıkarılır) ortak paydaya yazılır. $\frac{x}{y} \pm \frac{z}{t} = \frac{xt \pm yz}{yt}$

d) Çarpma ve Bölme İşlemi

$\frac{x}{y}.\frac{z}{t} = \frac{xz}{yt}$ ve $\frac{x}{y} : \frac{z}{t} = \frac{x}{y}.\frac{t}{z} = \frac{xt}{yz}$

e) İşlem Önceliği

Birden fazla işlemin bulunduğu rasyonel sayılarda işlem önceliği şu şekildedir; Parantezler ve kesir çizgisi işlemleri önce yapılır sonra üslü işlemler varsa sonuçlandırılır. Çarpma - bölme yapılır daha sonra toplama - çıkarma işlemleri yapılır.

4.4. Oran ve Orantı

a ve b reel sayılarının en az biri sıfırdan farklı olmak üzere, aynı cins iki çokluğun birbirine bölünerek karşılaştırılmasına *oran* denir. $\frac{a}{b}$ ye a'nın b'ye *oranı* denir. Bu oran $a : b$ şeklinde de gösterilebilir. Oranın birimi yoktur. Kesirlerde de olduğu gibi oranın payı ve paydası sıfırdan farklı bir sayı ile genişletilebilir veya sadeleştirilebilir. En az iki oranın eşitliğine de *orantı* denir. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ veya $a : b = c : d$ ikili orantısında b ve c ye *içler*, a ve d ye *dışlar* denir.

Orantının Özelikleri

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısında k orantı sabitidir.

2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $a.d = b.c$

3) $n \neq 0$ ve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $\frac{a.n}{b.n} = \frac{c}{d}$ veya $\frac{a:n}{b:n} = \frac{c}{d}$

4) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ ise $\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$

5) $m \neq 0$ ve $\neq 0$ ve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $\frac{m.a+n.c}{m.b+n.d} = k$

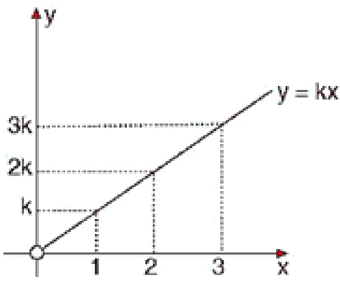
6) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $\frac{a.c}{b.d} = k^2$

7) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ orantısı $a : c : e = b : d : f$ biçiminde yazılabilir.

Doğru Orantı

Herhangi bir şekilde birbirlerine bağlı olan iki büyüklükten birisi değiştirildiğinde, ikisindeki değişme oranı da aynı ise bu iki büyüklüğe *doğru orantılıdır* ya da kısaca orantılıdır denir. Doğru orantılı iki büyüklükten biri artarken diğeride orantılı olarak artar veya biri azalırken diğeri de orantılı olarak azalır. $k > 0$ olmak üzere $\frac{y}{x} = k$ ise x ile y doğru orantılıdır. x ile y doğru orantılı ve $k \in \mathbb{R}^+$ ise $\frac{y}{x} = k$ veya $y = k.x$ (k orantı sabitidir.)

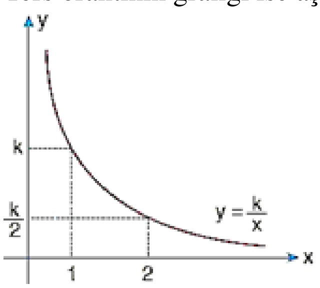
Doğru Orantının grafiği aşağıdaki gibidir.



Ters Orantı

x ve y her hangi iki büyüklük olsun. Eğer x ile $\frac{1}{y}$ doğru orantılı ise x ile y *ters orantılıdır* denir. $k \in \mathbb{R}^+$ ise x ile y ters orantılı ise $x.y = k$ veya $y = \frac{k}{x}$ dir. Ters orantılı iki büyüklükten biri artıkça diğeri azalır.

Ters orantının grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Bileşik Orantı

Bir orantının içinde hem doğru hem de ters orantı varsa bu orantıya *bileşik orantı* denir. x ile y doğru orantılı, x ile z ters orantılı ise $\frac{x.z}{y} = k$'dır.

Aritmetik Ortalama

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ gibi n tane reel sayının aritmetik ortalaması; $A = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

biçimindedir.

Geometrik Ortalama

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ gibi n tane reel sayının geometrik ortalaması;

$G = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$dir. $x = \sqrt{a.b}$ ifadesine a ile b nin *geometrik ortası* veya *orta orantısı* denir.

Harmonik Ortalama

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ gibi n tane pozitif tam sayının harmonik ortalaması;

$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}.(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n})$'dir. İki sayının aritmetik ortalaması A, geometrik ortalaması G, harmonik ortalaması H ise, $G^2 = A.H$ dir.

5. SINAV VE ANKET

5.1. Giriş

Bu bölümde verilen sınav soruları ve anket, Söke Yavuz Selim Anadolu Öğretmen Lisesi 9, 10, 11 ve 12. sınıf öğrencilerine; 9. sınıflardan 25 kişi, 10. sınıflardan 25 kişi, 11. sınıflardan 28 kişi ve 12. sınıflar 22 kişi olmak üzere toplam 100 kişiye uygulanmıştır. Bu anketin amacı, 9. sınıf temel düzeydeki cebirsel soyut kavramların sınıflar düzeyinde algıların karşılaştırılması ve öğrencilerin karşılaştıkları sorunların çözümü için önerilerde bulunmaktır. Sonuç ve öneriler kısmında ise 2013-2014 Eğitim - Öğretim yılında yapılan yeni müfredat değişiklikleri hakkında bilği verilmiştir. Anket kısmı ise iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde 9. sınıf cebir konularının öğretimi ile ilgili 20 maddelik başarısızlık nedenleri, ikinci bölümde ise, öğrencilerin temel cebir konularında en çok zorlandığı bölümler tespit edilmeye çalışıp çözüm önerilerinde bulunulmuştur.

5.2. Cebir Soruları, Soruların Cevapları ve Değerlendirilmesi

Soru (1). (a)

Önerme, Küme, Bağıntı, Kartezyen Çarpım, Fonksiyon, İşlem kavramlarını tanımlayınız.

(b) Aşağıda tanımları verilen ifadelere birer örnek yazınız.

• $f : A \to B$ fonksiyonunda tanım kümesinin her eleman çiftinin f altındaki görüntüleri de birbirinden farklı ise f fonksiyonuna *birebir fonksiyon* denir.

Diğer bir ifade ile $\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ veya $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna *bire bir (1-1) fonksiyon* denir.

• $\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in A$ varsa f ye *örten bir fonksiyon* denir. Yani $f : A \to B$' ye bir fonksiyon olsun. Görüntü kümesi ile değerler kümesi eşit ise (yani $f(A) = B$) f' ye*örten fonksiyon* denir.

• $A \neq 0$ olmak üzere $\triangle$ ikili işlemi verilsin. $\forall x \in A$ için, $x \triangle e = e \triangle x = x$ olacak şekilde $e \in A$ varsa "e" ye $\triangle$ işlemine göre A'nın *etkisiz (birim) elemanı* denir.

Soru (2). $p \wedge q^{'} \equiv 1$ olduğuna göre $p \wedge (q^{'} \vee p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz?

A) 1

B) 0

C) p

D) q

E) $p \wedge q$

Soru (3). A ve B herhangi iki küme olmak üzere $(A \backslash B) \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) A

B) B

C) $\emptyset$

D)$A \cup B$

E)$A \cap B$

Soru (4). $f^{-1} = \frac{x+1}{x-2}$, $g(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ olduğuna göre $(g^{-1}of)^{-1}(1)$ ifadesinin değeri nedir?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{7}{2}$

E) $\frac{9}{2}$

Soru (5). $\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı $aob = a + b - 2ab$ ikili işleminde 3 elemanının tersi nedir?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{1}{2}$

Soru (6). $OBEB(a, 40) = 5$ ve $OKEK(a, 40) = 120$ ise a pozitif tam sayısını bulunuz?

A) 4

B) 6

C) 8

D) 10

E) 15

Soru (7). Bir asker pazartesi günü nöbet tutmaya başlıyor, her 3 günde bir nöbet tuttuğuna göre 30'uncu nöbetini hangi gün tutar ?

A) Pazartesi

B) Salı

C) Çarşamba

D) Perşembe

E) Cuma

Soru (8). $a < 0$ olmak üzere $3a = 5b$ ve $2a = 3c$ ise a, b, c aralarındaki sıralama nedir?

A) $a < b < c$

B) $a < c < b$

C) $c < a < b$

D) $c < b < a$

E) $b < a < c$

Soru (9). Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikişerli otururlarsa 6 öğrenci ayakta kalıyor. Üçerli otururlarsa 6 sıra boş kalıyor . Buna göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

A) 46

B) 48

C) 50

D) 52

E) 54

Soru (10). Ayşe 24 yaşındadır. Ayşe kardeşinin bugünkü yaşında iken kardeşi bugünkü yaşının $\frac{2}{3}$'ü yaşında idi. Buna göre Ayşe'nin kardeşinin bugünkü yaşı kaçtır?

A) 20

B) 18

C) 16

D) 14

E) 12

Cebir Sorularının Cevapları

1. (a)

Önerme: Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere *önerme* denir.

Küme: Küme kavramının tanımının olmamasına karşın küme denilince, iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğuna küme denir.

Bağıntı: A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A \times B$' nin her alt kümesine A' dan B' ye bir *ikili bağıntı* ya da kısaca *bağıntı* denir.

Kartezyen Çarpım: A ve B boş olmayan iki küme olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere bütün (x, y) ikililerin kümesine, A ile B'nin *kartezyen çarpımı* denir.

Fonksiyon: $A \neq \phi$ ve $B \neq \phi$ olmak üzere A dan B ye tanımlı bir bağıntı f olsun. f bağıntısı A kümesinin her elemanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşliyorsa, bu bağıntıya, A kümesinden B kümesine bir *fonksiyon* denir.

İşlem: $A \neq \emptyset$ bir küme, ve $A \times A$ dan A ya tanımlanan her fonksiyona bir *ikili işlem* denir.

(b)

Birebir $(1-1)$ fonksiyona örnek olarak;

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 1$ dönüşümü $(1-1)$ dir. $g(x) = g(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$ olduğundan g fonksiyonu birebir dir.

Örten fonksiyona örnek olarak;

Örten fonksiyona örnek olarak yine yukarıdaki g fonksiyonu örnek gösterilebilir. Buna göre $x \in \mathbb{R}$ için $x-1 \in \mathbb{R}$ alınırsa $g(x-1) = (x-1)+1 = x$ olur. O halde g örten bir fonksiyondur.

Birim elemana örnek olarak;

$\mathbb{R}$ de tanımlı $xoy = x + y - 5$ işlemine göre birim (etkisiz) elemanını bulmaya çalışalım, $xoe = x \Rightarrow x + e - 5 = x \Rightarrow e = x - x + 5 \Rightarrow e = 5$ bulunur.

(2).

$p \wedge q' \equiv 1$ ise $p \wedge (q' \vee p) \equiv (p \wedge q') \vee (p \wedge p) \equiv 1 \vee p \equiv 1$

(3).

$(A \backslash B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$

(4).

$(g^{-1}of)^{-1}(1) = (f^{-1}og)(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(\frac{3.1+1}{2.1-1}) = f^{-1}(4) = \frac{4+1}{4-2} = \frac{5}{2}$

(5).

$aoe = a \Rightarrow a + e - 2ae = a \Rightarrow e(1-2a) = 0 \Rightarrow e = 0$ dır. $aoa^{-1} = e \Rightarrow 3o3^{-1} = 0$, ($3^{-1} = t$ olsun) buna göre;

$3ot = 0 \Rightarrow 3 + t - 2.3.t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{5} \Rightarrow 3^{-1} = \frac{3}{5}$dir.

(6).

$OBEB(a, 40).OKEK(a, 40) = a.40$ olduğundan $5.120 = a.40 \Rightarrow a = 15$ bulunur.

(7).

İlk nöbeti pazartesi günü tutmuştur. Pazartesi (0.gün), salı (1.gün), çarşamba (2.gün), perşembe (3.gün), cuma (4.gün), cumartesi (5.gün),pazar (6.gün) olmak üzere bundan sonra 29 kez daha nöbet tutmalıdır. Her nöbet arasında 3 gün olduğundan, $29.3 = 87$ inci gün 30. nöbetini tutmuş olacaktır. $87 \equiv 3(mod7)$ olduğundan 3' e denk olan perşembe günü 30. nöbetini tutar.

(8).

$3a = 5b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} = \frac{15}{9} \Rightarrow a = 15k$, $b = 9k$

$2a = 3c \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{2} = \frac{15}{10} \Rightarrow a = 15k$, $c = 10k$

$a < 0 \Rightarrow k < 0$ olmalıdır. O halde $15k < 10k < 9k \Rightarrow a < c < b$ dir.

(9).

Sınıftaki sıra sayısı x olsun. İkişerli oturduklarında 6 öğrenci ayakta kalıyorsa ;

Sınıf mevcudu: $2x + 6$

Üçerli oturduklarında 6 sıra boş kalıyorsa ;

Sınıf mevcudu $3(x-6)$ olacağından $2x + 6 = 3(x-6) \Rightarrow 2x + 6 = 3x - 18 \Rightarrow$ $x = 24$

Sınıf mevcudu: $2x + 6 = 2.24 + 6 = 54$ bulunur.

(10).

Ayşe'nin bugünkü yaşı 24' dür. Kardeşinin buğünkü yaşı x olsun. Ayşe kardeşinin yaşında iken x , kardeşi $\frac{2x}{3}$'dür. İki kişinin yaşları arasındaki fark her zaman bir birine eşittir. Dolayısı ile;

$24 - x = x - \frac{2x}{3} \Rightarrow 24 = 2x - \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 18$ bulunur.

Cebir Sorularının Cevapları ve Değerlendirilmesi

Cebir sınav soruları iki kısımdan oluştu. İlk kısımda öğrencilerden Önerme, Küme, Bağıntı, Kartezyen Çarpım, Fonksiyon, İşlem tanılarının yapılması istendi. 9. sınıf öğrencileri konuları yeni görmesine karşın Önerme ve Küme tanımlarını yapabildikleri görüldü. Bağıntı, Kartezyen Çarpım, Fonksiyon ve İşlem için tam tanım yapamadılar; ancak "Bağıntı alt kümelerden oluşmuştur cevabını" vermişler, Kartezyen Çarpımı için $A \times B$ denilmiş, İşlem için aob simgesel gösterim yapmışlardır. Fonksiyonlar için ise, giren ve çıkan elemanlar dedikleri görülmüştür. İkinci kısmında ise öğrencilerden birebir fonksiyon, örten fonksiyon ve birim (etkisiz) elemanın tanımları verilerek birer örnek istendi. Bu soruyu tam olarak cevaplayan öğrenci çıkmamıştır. Birebir ve örten fonksiyonlara şekilsel olarak cevap vermeye çalışmışlar, bunu da genel olarak $f(x) = y$ biçiminde göstermişlerdir. Etkisiz (birim) eleman için ise, cevap veren olmamıştır. Sonuç olarak tanımları cevaplamaya çalışmışlar; ancak tanımları uygulayarak örneklemeye geçemedikleri gözlenmiştir.

10. sınıflarda ise; ilk kısımda sadece Önermenin tanımını doğru olarak yaptıkları, diğer tanımları boş bıraktıkları görülmüştür.

İkinci kısımda ise öğrencilerin verilen tanımlara örnek veremedikleri gözlenmiştir.

11. sınıflarda, tam olarak birinci kısmı cevaplayamadıklarını; ancak az da olsa önermenin tanımını yaptıkları, iki öğrencinin Bağıntı ve Kartezyen çarpımı için tanımı bildikleri ama matematiksel olarak ifade edemedikleri görülmüştür.

İkinci kısımda ise; öğrencilerin verilen tanımlara örnek vermedikleri görülmüştür.

12. sınıflarda, tam olarak birinci kısmı cevaplayamadıkları; ancak az da olsa önerme ve kümenin tanımını yaptıkları görüldü.

İkinci kısımda ise; öğrencilerin büyük bir kısmının verilen tanımlara örnek veremediği, iki öğrencinin bire-bir, örten fonksiyonlar için şekil ile örnek verdikleri görülmüştür. Birim (etkisiz) elemana sadece bir öğrencin tam olarak örnek verdiği gözlenmiştir.

Diğer sorular için öğrencilerin doğru olarak cevapladıkları başarı yüzdeleri ise;

9. sınıflar; (2). Soru %96 başarı, (3). Soru %76 başarı, (4). soru %44 başarı, (5). soru %12 başarı, (6). soru %80 başarı, (7). soru %88 başarı, (8). soru %44 başarı, (9). soru %32 başarı, (10). soru için %12 başarı gözlenmiştir.

10. sınıflar

(2). soru %80 başarı, (3). soru %56 başarı, (4). soru %12 başarı, (5). soru %4 başarı, (6). soru %44 başarı, (7). soru %32 başarı, (8). soru %40 başarı, (9). soru %32 başarı, (10). soru %16 başarı gözlenmiştir.

11. sınıflar

(2). soru %68 başarı, (3). soru %86 başarı, (4). soru %39 başarı, (5). soru %25 başarı, (6). soru %82 başarı, (7). soru %54 başarı, (8). soru %75 başarı, (9). soru %86 başarı, (10). soru %68 başarı göstermişlerdir.

12. sınıflar

(2). soru %91 başarı, (3). soru %91 başarı, (4). soru %91 başarı, (5). soru %73 başarı, (6). soru %100 başarı, (7). soru %41 başarı, (8). soru %87 başarı, (9). soru %82 başarı, (10). soru da %100 başarı göstermişlerdir.

5.3. Temel Düzeyde Cebir Konularında Başarısızlık Nedenleri Anketi

A. Bu anket, temel düzeyde cebir konularındaki başarısızlık nedenlerini öğrenmek için hazırlanmıştır. Bu başarısızlıkta sizin için önemli olan nedenleri (X) işaretiyle işaretleyiniz.

( ) (1). Cebir konularının üniteyi yetiştirme kaygısıyla hızlı işlenmesi.

( ) (2). Sınıfta cebir konuları ile ilgili yeterli sayıda soru çözülmemesi.

( ) (3). Cebir konularıyla ilgili örneklerinin güncel hayattan verilmemesi.

( ) (4). Konunun monoton biçimde anlatılması.

( ) (5). Cebir ve sayılar ile ilgili konularda, önceki konularla ilgili bilgi eksikliklerin giderilmemesi.

( ) (6). Cebir konularının anlayabileceğiniz düzeyde anlatılmaması.

( ) (7). Ders dışında cebir konularıyla ilgili sorulara yardımcı olunmaması.

( ) (8). Cebir konularında anlaşılmayan kısımlarıyla ilgili derste soru sorulamaması.

( ) (9). Cebir ve sayılar konusunun sonunda, öğrenme eksikliklerini belirlemeye yönelik ölçümlerin yapılmaması.

( ) (10). Cebir ile ilgili yanlış öğrenmelerin belirlenip düzeltilmemesi.

( ) (11). Sınıftaki bazı öğrencilerin öğrenme ortamını olumsuz etkilemesi.

( ) (12). Cebir konularının çok sıkıcı olması.

( ) (13). Cebirin çok soyut olması ve ezbere dayanması.

( ) (14). Derste tahtanın düzenli kullanılmaması.

( ) (15). Öğrencinin dikkatsiz olması.

( ) (16). Cebir konuları ile ilgili alıştırma ve tekrar yetersizliği.

( ) (17). Öğrencinin çeşitli gün ve hafta kutlamaları için sık sık derslerden alınması.

( ) (18). Öğrencinin matematiği bir türlü sevememesi.

( ) (19). Öğrencinin matematik dersini başaramayacağını düşünmesi.

( ) (20). Öğrencinin cebir konularının çok zor olduğunu düşünmesi [5].

B. Cebir ve sayılarla ile ilgili aşağıdaki konulardan hangisinde ya da hangilerinde zorlanmaktasınız?

( ) (1). Mantık

( ) (2). Kümeler

( ) (3). Bağıntı, fonksiyon ve işlem

( ) (4). Doğal sayılar ve tam sayılar

( ) (5). Modüler Aritmetik

( ) (6). Rasyonel Sayılar

( ) (7). Birinci Dereceden Denklem ve Eşitsizlikle

( ) (8). Üslü ifadeler

( ) (9). Oran ve orantı

( ) (10). Denklem kurma problemleri [5].

5.3.1. Temel Düzeyde Cebir Konularının Başarısızlık Nedenleri Anketinin Karşılaştırılmalı Analizi

Anketin bu bölümünde 9, 10, 11 ve 12. sınıf öğrencilerine uygulanan anket sorularına başarısızlık nedenlerinin ne olduğu işaretlenmesi istenmiş ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

9. sınıflar;

(1).%16, (2).%12, (3).%4, (4).%16, (5).%12, (6).%12, (7).%4, (8).%16 , (9).%24, (10).%16, (11).%48, (12).%28, (13).%32 , (14).%0 , (15).%68, (16).%72, (17).%8 ,(18).%24, (19).%36, (20).%28,

9. sınıf düzeyinde başarısızlık nedenlerine bakıldığında %72 ile öğrencilerin

konuların anlatımından sonra alıştırma ve tekrar yapmadığı ve az sayıda soru çözdükleri söylenebilir. Yine öğrencilerin %68'nin dikkatsizliği sebep göstermiş olması, öğrencilerde cebir konularında tam öğrenmenin olmaması, bilginin pekiştirilmemesi ve eksik öğrenme faktörlerinin dikkatsizliği artıran bir sebep olduğu bulunmuştur. %48 ile sınıftaki bazı öğrencilerin öğrenme ortamını olumsuz etkilediklerini belirtmişlerdir.

10.sınıflar;

(1). %32, (2). %36, (3). %40, (4). %64,(5). %68, (6). %64, (7). %8, (8). %32 , (9). %32, (10). %40, (11). %36, (12). %24, (13). %52 , (14). %16 , (15). %36, (16). %52, (17). %8 ,(18). %16, (19). %24, (20). %32,

10. sınıf düzeyinde başarısızlık nedenlerine bakıldığında %68 ile öğrenciler cebir ve sayılar ile ilgili konularda, önceki konularla ilgili bilgi eksikliklerin giderilmemesini başarısızlık nedeni olarak göstermişlerdir. Önceki konular ile ilgili ara ara geriye dönük çalışmalar yaparak hatırlamalar sağlanabilir. Yine öğrencilerin %64'ü cebir konularının monoton biçimde anlatılmasını neden olarak göstermişlerdir. Bu neden de öğrencilerin öğrenmesini zorlaştırabilir. Bu konuda öğretmen, konuyu dikkat çekici bir hale getirmek için destek ve ilgiyi ifade eden pekiştireçler kullanabilir. Öğrencilerin %52'si cebir konularının çok soyut ve ezbere dayalı olmasını başarısızlığın sebebi olarak göstermişlerdir. Öğretmen, cebir konularını anlatırken somut ve günlük hayattan örnekler vermeli ve etkin öğrenme yöntemlerini de kullanarak öğrencinin zihninde daha somut bir cebir imajı bırakmakdır.

11. sınıflar;

(1). %25, (2). %21, (3). %39, (4). %32, (5). %32, (6). %14, (7). %14, (8). %21 , (9). %32, (10). %14, (11). %14, (12). %50, (13). %39 , (14). %4 , (15). %32, (16). %57, (17). %0 ,(18). %4, (19). %11, (20). %29,

11. sınıf düzeyinde başarısızlık nedenlerine bakıldığında %57 cebir konularında alıştırma ve tekrar yapılmaması başarısızlık nedeni olarak bulunmuştur. Bu sonuca

göre öğrenciler derslere aktif olarak katılmalı, etkili dinleme ve günlük tekrar yaparak bol soru çözmelidir. Öğrencilerin %50'si cebir konularının sıkıcı olmasını sebep göstermiştirler. Öğrencilerin cebir konularına ön yargı ile yaklaşması, konuları öğrenmek için çaba harcamamaları ve dersin zor oluşu öğrenci için konuları sıkıcı hale getirebilir. Bu konuda öğretmen onlara, konuların öğrencinin düşündüğü gibi sıkıcı olmadığını göstermeli ve öğrencinin ön yargılarını kırmak için konuları daha zevkli bir hale getirmelidir. Öğrenciler %32 ile cebir konularının güncel hayattan yola çıkılarak örneklendirilmediğini başarısızlık nedeni olarak göstermiştir. Öğretmenlerin cebir konularını işlerken fazla geleneksel davranması öğrenmeyi öğrenciler için sıkıcı hale getirir. Bu durumda öğretmenlerin, öğrencilerin dikkatlerini çekecek daha modern örneklerle ve yaklaşımlarla cebir konusunu aydınlatmaları gerekir.

12. sınıflar;

(1). %32, (2). %14, (3). %27, (4). %23,(5). %23, (6). %23, (7). %5, (8). %5 , (9). %27, (10). %23, (11). %45, (12). %59, (13). %64 , (14). %9 , (15). %23, (16). %36, (17). %0 ,(18). %18, (19). %23, (20). %36,

12. sınıf düzeyinde başarısızlık nedenlerine bakıldığında öğrencilerin anketin 11, 12, 13 ve 16. sorularını işaretledikleri görülmüş olup oluşan yüzdeler ise sırasıyla %45, %49, %64 ve %36'dır. Bu sorunlar diğer sınıfların anket sonuçlarında değerlendirilmiştir.

Anketin ikinci kısmının yüzdeleri ise;

9. sınıflarda cebir ve sayılar konularında öğrencilerin zorlandıkları konuların yüzdeleri verdikleri yanıtlara göre şöyledir:

(1). %4, (2). %16, (3). %72, (4). %24, (5). %20, (6). %24, (7). %58, (8). %16 , (9). %12, (10). %32' dir. Bu konulara göre verilen yüzdelik oranlara göre; bağıntı, işlem ve fonksiyon, denklem kurma problemleri ve doğal sayılar, tam sayılar konularında öğrenciler zorlanmaktadırlar.

10. sınıflarda cebir ve sayılar konularında öğrencilerin zorlandıkları konuların

yüzdeleri verdikleri yanıtlara göre şöyledir:

(1). %24, (2). %40, (3). %92, (4). %24, (5). %76, (6). %32, (7). %32, (8). %36 , (9). %20, (10). %64’ dir. Bu konulara göre verilen yüzdelik oranlara göre; bağıntı, işlem ve fonksiyon, modüler aritmetik ve denklem kurma problemleri konularında öğrenciler zorlanmaktadırlar.

11. sınıflarda cebir ve sayılar konularında öğrencilerin zorlandıkları konuların yüzdeleri verdikleri yanıtlara göre aşağıdaki biçimdedir.

(1). %21, (2). %14, (3). %82, (4). %4, (5). %46, (6). %4, (7). %10, (8). %18 , (9). %7, (10). %29’ dir. Bu konulara göre verilen yüzdelik oranlara göre; bağıntı, işlem ve fonksiyon, modüler aritmetik ve denklem kurma problemleri konularında öğrenciler zorlanmaktadırlar.

12. sınıflarda cebir ve sayılar konularında öğrencilerin zorlandıkları konuların yüzdeleri verdikleri yanıtlara göre aşağıdaki biçimdedir.

(1). %36, (2). %5, (3). %50, (4). %5, (5). %32, (6). %0, (7). %5, (8). %0 , (9). %14, (10). %14’ dir. Bu konulara göre verilen yüzdelik oranlara göre; bağıntı,işlem ve fonksiyon, modüler aritmetik ve mantık konularında öğrenciler zorlanmaktadırlar.

Sonuç ve Öneriler;

Bu kısımda tüm sınıflardaki ortak başarısızlık nedenleri üzerinde durularak daha sonra sınıflar arası algıların karşılaştırılmaları için önerilerde bulunulmuştur. Anket sonuçlarına göre 9, 10, 11 ve 12. sınıflar düzeyinde öğrencilerin cebir ve sayılar konularında ortak başarısızlık nedenleri şöyle sıralanabilir;

1) Öğrencilerin temel düzeydeki cebir konularının diğer konularla ilgili bilgi eksiklerinin giderilmemesi.

2) Konuların anlatılırken öğrencinin anlayabileceği düzeyde anlatılmaması.

3) Bazı öğrencilerin öğrenme ortamını olumsuz etkilemesi.

4) Konuların eğlenceli hale getirilmemesi.

5) Konuların çok soyut ve ezbere dayalı olarak işlenmesi.

6) Öğrencilerin dikkatsiz olması.

7) Öğrencinin konular bittikten sonra konuyla ilgili yeterli sayıda soru çözmemesi gibi sonuçlara ulaşılmıştır.

• Geriye dönük olarak cebir ve sayılar konularıyla ilgili olarak sınıf düzeyinde geçmiş konuların tekrarı önemli olup ara ara geriye dönük farklı kaynaklardan çözümlü örnek sorular tekrarlanarak öğrencilerin konuyu hatırlaması sağlanmalıdır.

• Sınıf düzeyinin öğretmen tarafından iyi analiz edilip öğrencilerin anlayabileceği düzeyde anlatılmalıdır.

• Öğrencilere öğrencilerin öğrenme ortamını olumsuz etkilemesinin istenmeyen bir davranış olduğu açıklanabilir. Öğretmen özelliği, öğrenci özelliği, öğrencinin birbiri ile olan ilişkisi, sınıf yapısı ve eğitim programı öğrenme ortamını olumsuz etkileyen faktörler olarak ifade edilebilir. Bu istenmeyen davranışlardan dolayı öğrencinin, öğretmeni tarafından uyarılması gerekir. Bu uyarma göz teması, sözlü uyarı, soru sorma veya rehberlik servisinin kullanılması biçiminde sınıfın ve öğrencinin durumuna göre değişik biçimlerde olabilir.

• Öğretmen cebir ve sayılar konularını anlatırken konuyu eğlenceli hale getirmelidir. Öğrenciler cebir ve sayılarla iç içe olmalıdır. Öğrenmede etkili olan konuyla ilgili şekiller kullanılmalıdır.

• Cebir ve sayılar ile ilgili konuların soyut olması konuların anlaşılmasını zorlaştıracağından, konuların günlük olaylarla bağlantısının kurulması önemlidir ve konuların kullanıldığı alanlar örneklenmelidir. Öğrencilerin sürekli olarak cebir ve sayılar ile ilgili tekrar yapması da ezberi ortadan kaldıracağından, verilen bilgiden hemen sonra olabildiğince örnek çözülmelidir.

• Cebir ve sayılar konularında öğrencilerin dikkatsiz olmasının en büyük nedeni bilgi eksikliği olup önceki konular ile ilgili ara ara geriye dönük farklı kaynaklardan çözümlü örnek sorular tekrarlanmalı, alt sınıf konuları ve daha sonraki sınıflardan konunun ihtiyacı örneklerle vurgulanarak sınıfta öğrenci aktif halde tutulmalı, ara ara mola verilerek öğrencinin konulara odaklanması sağlanmalıdır.

• Cebir ve sayılarla ilgili konu bitiminden sonra çok sayıda soru çözülerek konular pekiştirilmelidir. Çözülemeyen sorular öğretmen ile çözülüp değerlendirilmelidir.

2013-2014 Eğitim Öğretim yılında matematik ve geometri dersleri birleştirilmiştir. Haftalık ders saati 6 saat olarak okutulmaktadır. Buna göre 9. sınıflardan başlayarak kademeli olarak değişen ders müfredatı şöyledir. 9. sınıf konuları; Sayılar ve Cebir konuları altında Kümeler, Denklem ve Eşitsizlikler ve Fonksiyon konularından oluşmaktadır. 10. sınıflarda Sayılar ve Cebir konuları iki kısma ayrılmıştır. I. kısımda Fonksiyonlarla İşlemler ve Uygulamaları, II. kısımda II. Dereceden Denklemlerle Fonksiyonlar ve Polinomlar; 11. sınıflarda ise I. kısımda Mantık, Modüler Aritmetik ve Denklemler, Eşitsizlik Sistemleri, II. kısımda ise Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar, Diziler, 12. sınıflarda ise; Türev ve İnteğral konularından oluşmaktadır. Buradan da anlaşıldığı üzere gibi 9. ve 10. sınıfların Temel Düzeyde konuları aynı olup; 11 ve 12. sınıflarda İleri Düzey temel konular olarak belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Altın, A. 2012. Orta Öğretimde Matematik 9. sınıf Ders Kitabı. Tutku Yayıncılık, 258 s, Ankara.

[2] Tobi, H., Tanfer, B., Tokar, İ., Türkkan, M., Köse, H., Tunç, H., Kırıkçı, M., Çakmak, A. , Edel, A., Değirmenci, E. 2010. 9. sınıf Hücreleme Yöntemine göre Matematik. Zambak Yayıncılık, 535 s, İzmir.

[3] Uygur Kabel, T. 2010. Fonksiyon Kavramı: Tarihi gelişimi, öğrenilme süreci, öğrenci yanılgılar ve öğretim stratejileri. **Tubav Bilim Dergisi**, 3:128-136.

[4] Asma, N., Bıyık, H. 2012. 9. sınıf Matematik Konu Özetli Soru Bankası. Esen Yayınları, 463 s, Ankara.

[5] Altun, N. 2010. Lise Düzeyinde Bağıntı ve Fonksiyonlar, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Dönem Projesi, Aydın.

[6] Akkaş, S., Salihoğlu, H. H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A. 1984, Soyut Matematik, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.

ÖZ GEÇMİŞ

KISISEL BILGILER

Adi Soyadi	:	İlker ÖZŞINLAK
Dogum Yeri ve Tarihi	:	Söke, 14.04.1976

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Universitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabanci Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
  -SCI
  -Diğer
b) Bildiriler
  -Uluslararası
  -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ	Milli Eğitim Bakanlığı
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	Tümg.Ömer KEÇECİGİL İ.O (2000-2004) Mehmetçik İ.O (2004-2008) Söke Yavuz Selim Anadolu Öğretmen Lisesi (2008-)

İLETİŞİM E-posta Adresi	:	iozsinlak09@gmail.com
Tarih		03.07.2014