T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2016-YL-044

İNDİRGENMİŞ MODÜLLER VE HALKALAR ÜZERİNE

Aslıhan ALTUN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN-2016

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Aslıhan ALTUN tarafından hazırlanan İNDİRGENMİŞ MODÜLLER VE HALKALAR ÜZERİNE başlıklı tez, 28/07/2016 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan : Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fak	
Üye : Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak	
Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Tuğba GÜROĞLU	CBÜ Fen-Ed. Fak	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla ... / ... / 2016 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY

Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

28/07/2016

Aslıhan ALTUN

ÖZET

İNDİRGENMİŞ MODÜLLER VE HALKALAR ÜZERİNE

Aslıhan ALTUN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2016, 43 sayfa

Bu tezde indirgenmiş halka ve modüller, Baer ve quasi Baer halka ve modüller ile α-indirgenmiş modüller çalışılmıştır.

Çalışma temel olarak dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde, halka ve modüller ile ilgili diğer bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, indirgenmiş ve yarıdeğişmeli modüller ile ilgili tanımlar ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Baer halka ve modüller ile ilgili bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Bununla birlikte Baer halka ve modüllerin diğer halka ve modül çeşitleri ile ilgili bağlantıları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, α-indirgenmiş ve α-Armendariz modüllerin tanımı verilmiş ve bunların arasındaki bağlantılar incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: İndirgenmiş halka, indirgenmiş modül, yarıdeğişmeli modül, Baer halka, Baer modül, α-indirgenmiş modül, Armendariz modül, α-Armendariz modül.

ABSTRACT

ON REDUCED MODULES AND RINGS

Aslıhan ALTUN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2016, 43 pages

In this thesis, reduced rings and modules, Baer and quasi Baer rings and modules, α-reduced modules were studied.

The thesis consists of four sections basically. In the first chapter, introduction is given.

In the second chapter, we give some definitions and properties on rings and modules that will be used in the following chapters.

In the third chapter, some definitions and some properties on reduced and semicommutative modules, were examined. Later, some theorems and results on Baer rings and modules, were presented. Moreover the relationships between Baer ring and modules with the others rings and modules types, were examined.

In the forth chapter, definition of α-reduced modules and α-Armendariz modules was given and relationships between them were examined.

Key Words: Reduced ring, reduced module, semicommutative module, Baer ring, Baer module, α-reduced module, Armendariz module, α-Armendariz module.

ÖNSÖZ

Değerli bilgi birikimi ve tecrübesiyle çalışmam süresince desteğini ve yardımını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.
Tüm hayatım boyunca bana duydukları güvenle beni en iyi şekilde yetiştiren, her zaman desteklerini yanımda hissettiğim her şeyin en iyisine layık olan sevgili aileme göstermiş oldukları sabır ve anlayışlarından ötürü yürekten teşekkür ederim..

Aslıhan ALTUN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$N \leq M$	N, M modülünün altmodülü
$N \leq_e M$	N, M modülünün essential altmodülü
$C_R(R) = C(R)$	R halkasının merkezi
$C_R(X)$	X kümesinin merkezi
$T(M)$	M_R nin torsion altmodülü
$r(x)$	Bir M modülünün x elemanının R de sağ sıfırlayanı
$l(x)$	Bir M modülünün x elemanının R de sol sıfırlayanı
$r(N)$	Bir M modülünün N altmodülünün R de sağ sıfırlayanı
$l(N)$	Bir M modülünün N altmodülünün R de sol sıfırlayanı
$Hom_R(M,M)$	M den M ye R-homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	M modülünün endomorfizma halkası
$Aut(R)$	R nin otomorfizma dönüşümleri
$R[x]$	R bileşenli x bilinmeyenli çok terimliler halkası
$R[[x]]$	R bileşenli x bilinmeyenli üstel seri halkası
$R[x,x^{-1}]$	Laurent çok terimliler halkası
$R[[x,x^{-1}]]$	Laurent üstel çok terimliler halkası
$R[x,\alpha]$	Skew (çarpık) sağ üstel çok terimliler halkası
$R[x,\alpha,\delta]$	R nin Ore genişlemesi ya da çarpık çok terimliler halkası
$M[x]$	M bileşenli x bilinmeyenli çok terimliler modülü
$M[x;\alpha]$	M nin çarpık genişlemesi
$M[[x;\alpha]]$	M nin çarpık üstel seri genişlemesi
$M[x,x^{-1};\alpha]$	M nin çarpık Laurent çok terimli genişlemesi
$M[[x,x^{-1};\alpha]]$	M nin çarpık Laurent üstel seriler genişlemesi

1. GİRİŞ

2000 li yıllarda T. K. Lee ve Y. Zou indirgenmiş (reduced) modüller ve halkalar üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Daha sonraki yıllarda konu A. Harmancı, S. Halıcıoğlu, N. Agayev gibi bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. İndirgenmiş halkalar ve indirgenmiş modüllerin diğer halka ve modül çeşitleri ile ilgili birçok bağlantıları vardır. Bazı özellikler bütün halka ve modül çeşitlerinde geçerli olmasına rağmen bazı özellikler başka koşullar altında gerçeklenmektedir. Burada bu konuyla ilgili günümüze kadar yapılmış olan çalışmalar taranarak, benzerlik ve farklılıklar detaylandırılmıştır.

İkinci bölümde, bu çalışma boyunca kullanacağımız temel tanımlar ve diğer bölümlerde gerekli olacak bazı özellikler verilmiştir. Bu bölümde [1], [2], [3], [8], [9], [11], [13], [15], [16] ve [20] çalışmalarındaki tanımlar temel alınmıştır.

Üçüncü bölümde, indirgenmiş ve yarıdeğişmeli modüller ile ilgili tanımlar ve diğer kısımlarda gerekli olacak bazı özellikler verilmiştir. Ayrıca Baer halka ve modüller ile ilgili temel tanımlar ve Baer halka ve modüllerin diğer halka ve modül çeşitleri ile ilgili bağlantıları verilmiştir. Bu bölümde [1], [5], [6], [7], [9], [10], [14], [18], [19] ve [20] çalışmaları incelenmiştir. Öncelikle α-indirgenmiş modülün hangi modüllerle denk olduğu incelenmiş, α-katı (rigid) halka tanımı verilerek bir α-katı halkanın indirgenmiş halka olduğu gösterilmiştir. Her indirgenmiş modülün yarı değişmeli modül olduğu verilerek tersinin hangi koşullar altında var olduğu incelenmiştir. Baer modül ile quasi-Baer modül ve p.p.-modül (principally projective modül) ile p.q.-Baer (principally quasi-Baer) modül ilişkileri incelenerek buna bağlı ilgili sonuç ve özelliklere yer verilmiştir. Bir p.p.-modülün hangi durumda indirgenmiş modül olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte her p.p.-modülün tekil olmayan (nonsingular) modül olduğu gösterilmiştir. İndirgenmiş halkanın sağ tekil olmayan halka olduğu incelenerek bunun modülde doğru olmadığına dair örnek verilmiştir.

Dördüncü bölümde α-indirgenmiş modül ve Armendariz modül kavramı tanımlanmış, indirgenmiş, α-indirgenmiş ve Armendariz modüller ile ilgili bazı özellikler incelenmiştir. Bu bölümde, [2], [3], [4], [12], [14], [17], [19] ve [20] çalışmaları incelenmiştir. İlk olarak indirgenmiş halka, α-indirgenmiş modül tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. İndirgenmiş modüllerin sınıfının homomorfizma altında kapalı olmayabileceğine dair örnek verilmiştir. Bir halkanın α-indirgenmiş olması için gerek ve yeter koşul belirtilmiştir. α-yarı değişmeli halka ve α-yarı değişmeli modül tanımlanarak bir modülün α-indirgenmiş olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Daha sonra indirgenmiş modüllerin özel örnekleri verilmişitir. Son olarak α-indirgenmiş modül ve Armendariz modül arasındaki ilişki incelenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kısımda, halka ve modüller ile ilgili bazı temel tanımlar ile gelecek bölümlerde gerekli olacak bazı özellikler alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Aksi belirtilmedikçe çalışmamız boyunca halkaları birleşmeli ve birimli halka olarak, modülleri birimsel sağ R-modül olarak alacağız ve $\alpha : R \to R$ dönüşümü bir halka homomorfizması olarak kabul edeceğiz.

Tanım 2.1.1. R boş olmayan bir küme, "$+$" ve "." R üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun.
(1) $(R,+)$ değişmeli bir grup,
(2) Her $a,b,c \in R$ için $(a.b).c = a.(b.c)$,
(3) Her $a,b,c \in R$ için $a.(b+c) = a.b+a.c$ ve $(a+b).c = a.c+b.c$
koşulları sağlanıyor ise R kümesine bu ikili işlemlere göre bir *halka* denir.
Bir R halkasında,
(4) Her $a,b \in R$ için $a.b = b.a$ koşulu sağlanıyorsa R ye *değişmeli halka*,
(5) Her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa R ye *birimli halka* denir.

Tanım 2.1.2. R halkasının bir S altkümesi, R halkasındaki işlemlere göre halka oluyorsa S kümesine R halkasının *althalkası* denir.

Tanım 2.1.3. [16]. R bir halka olsun.
(1) M bir toplamsal değişmeli grup ve
(2) $M \times R \to M$, $(m,r) \mapsto mr$ ile tanımlı dış çarpım dönüşümü için $m,m_1,m_2 \in M$ ve $r,r_1,r_2 \in R$ olmak üzere
(a) $(m_1+m_2)r = m_1r+m_2r$,
(b) $m(r_1+r_2) = mr_1+mr_2$,

(c) $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$,

özellikleri varsa M ye *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir. Eğer R birimli bir halka ve M_R, $m1 = m$ özelliğini sağlıyorsa M ye *birimsel sağ R-modül* denir. Benzer şekilde sol R-modül tanımlanır. M hem sol hem de sağ R-modül ise, o zaman M ye bir R-modül denir.

Tanım 2.1.4. [16]. M bir sağ R-modül ve A, M nin bir altkümesi olsun. Eğer A, M deki işlemlere göre bir R-modül oluyorsa A ya M nin *altmodülü* denir ve $A \leq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [16]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı her altmodülü ile arakesiti sıfırdan farklı olan sıfırdan farklı bir A altmodülüne *essential (large) altmodül* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir. Yani, $0 \neq A \leq M$ olmak üzere her $0 \neq U \leq M$ için $U \cap A \neq 0$ dır. Buna denk olarak, $A \neq 0$ olmak üzere her $U \leq M$ için $U \cap A = 0$ iken $U = 0$ oluyorsa A ya M nin *essential altmodülü* denir.

Tanım 2.1.6. [16]. R bir halka ve M bir R-modül olsun.
$Z(M) = \{x \in M : \text{bir } I \leq_e R_R \text{ için } xI = 0\} = \{x \in M : r(x) \leq_e R_R\}$ kümesine M nin *tekil (singular) altmodülü* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *tekil modül*, $Z(M) = 0$ ise M ye *tekil olmayan (nonsingular) modül* denir. Sol R-modüller için de benzer tanım yapılır.

Tanım 2.1.7. R bir halka olsun. $C(R) = \{x \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$ kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.1.8. [2]. Eğer herhangi bir $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ ise R ye *yarıdeğişmeli (semicommutative) halka* denir.

Tanım 2.1.9. [11]. Eğer her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ iken $mRa = 0$ ise M_R ye *yarıdeğişmeli modül* denir.

Tanım 2.1.8 ve Tanım 2.1.9 gereğince, "R yarıdeğişmeli halkadır ancak ve ancak R_R yarıdeğişmeli modüldür" olduğu açıktır.

Tanım 2.1.10. [16]. R bir halka ve $r \in R$ olsun.

(1) En az bir $n \in \mathbb{N}$ için $r^n = 0$ ise r ye *nilpotent (üstel sıfır) eleman* denir.

(2) Eğer $r^2 = r$ ise r ye *idempotent (kare-eş) eleman* denir.

Tanım 2.1.11. [8]. Eğer her $x \in R$ için $xe = exe$ (veya $ex = exe$) ise $e \in R$ kare-eş elemanına *yarımerkezcil (semicentral)* denir.

Tanım 2.1.12. Her idempotent (kare-eş) elemanı merkezcil (central) olan halkaya *abel halka* denir.

Tanım gereğince, "Her değişmeli halka abeldir" ifadesi açıktır.

Tanım 2.1.13. [16]. M bir R-modül ve X, M nin bir altkümesi olsun.
$r(X) = \{s \in R : \text{her } \ x \in X \text{ için } \ xs = 0\}$ kümesine X in *sağ sıfırlayanı* ve
$l(X) = \{s \in R : \text{her } \ x \in X \text{ için } \ sx = 0\}$ kümesine de X in *sol sıfırlayanı* denir.

Tanım 2.1.14. Bir halkada sıfırdan farklı bir elemanın ne sağ ne de sol sıfırlayanı yoksa bu elemana *regular eleman* denir.

Tanım 2.1.15. [15]. Her boştan farklı altkümesinin sağ sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen halkaya *Baer halka* denir.

Tanım 2.1.16. [13]. Her sağ idealinin sağ sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen halkaya *quasi-Baer halka* denir.

Tanım 2.1.15 ve Tanım 2.1.16 gereğince, "Her Baer halka quasi-Baer halkadır" ifadesi açıktır

Tanım 2.1.17. [9]. Herhangi elemanının sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen halkaya *sağ (ya da sol) principally projective-Baer halka, kısaca p.p.-Baer halka* denir.

Tanım 2.1.18. [9]. Her principal (temel) sağ (ya da sol) idealinin sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen halkaya *sağ (ya da sol) principally quasi-Baer,* *kısaca p.q.-Baer halka* denir. Hem sağ hem de sol p.q.-Baer halkasına *p.q.-Baer halka* denir.

Tanım 2.1.19. [20]. M_R bir sağ R-modül olsun.
(1) M nin boştan farklı her X altkümesi için $r_R(X) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir *Baer modül*,
(2) M nin her N altmodülü için $r_R(N) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir *quasi-Baer modül*,
(3) Her $m \in M$ için $r_R(mR) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir *p.q.-Baer modül*,
(4) Her $m \in M$ için $r_R(m) = eR$, $e^2 = e \in R$ şartı sağlanıyorsa M ye bir *p.p.-modül* denir.

Tanım 2.1.20. R_R modülü Baer (quasi-Baer, p.q.-Baer, p.p.-) modül olan halkaya Baer (quasi-Baer, p.q.-Baer, p.p.-) halka denir.

Tanım 2.1.21. $R[x]$, bir polinom halkası ve $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$, $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olduğunda her i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkasına *Armendariz halka* denir.

Tanım 2.1.22. R bir değişmeli integral bölgesi ve M bir sol R-modül olsun. Bir $x \in M$ için $I_R(x) = \{r \in R : rx = 0\}$ olmak üzere $T(M) = \{x \in M : I_R(x) \neq 0\}$ altmodülüne M_R nin *torsion altmodülü* denir. Eğer $T(M) = 0$ ise M ye *torsion free modül*, $T(M) = M$ ise bu durumda M ye *torsion modül* denir.

Tanım 2.1.23. [19]. R birimli bir halka ve $x \in R$ olmak üzere,
$R[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_ix^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$ kümesine *R bileşenli x bilinmeyenli çok terimliler halkası*,
$R[[x]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i : a_i \in R\}$ kümesine *R bileşenli x bilinmeyenli üstel seri halkası*,
$R[x, x^{-1}] = \{\sum_{i=-s}^{t} a_ix^i : s, t \in \mathbb{N}, a_i \in R\}$ kümesine *Laurent çok terimliler halkası*,
$R[[x, x^{-1}]] = \{\sum_{i=-s}^{\infty} a_ix^i : s \in N, a_i \in R\}$ kümesine *Laurent üstel çok terimliler*

halkası,

$R[x,\alpha] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$ kümesine *Skew (çarpık) sağ üstel çok terimliler halkası* denir.

$R[x,\alpha]$ da işlemler çokterimlilerdeki bilinen eşitlik ve toplama işlemleri gibi tanımlanır, ayrıca çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$xr = \alpha(r)x$$

Tanım 2.1.24. [1]. $R[x,\alpha,\delta] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in R, n \in N\}$ halkasında δ, R de α ya bağlı türev, yani her $a,b \in R$ için $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$ olacak şekilde alınmaktadır. $R[x,\alpha,\delta]$ ya, R nin *Ore genişlemesi* ya da *çarpık çok terimliler halkası* denir.

$R[x,\alpha,\delta]$ ya çok terimlilerdeki bilinen eşitlik ve toplama işlemlerine ek olarak çarpma işlemi:

$$xr = \alpha(r)x + \delta(r)$$

şeklinde tanımlanır, diğer işlemler ise çok terimliler halkasındakilerle aynı olarak kabul edilmektedir.

Tanım 2.1.25. [19]. M bir sağ R-modül olsun. Halkalarda olduğu gibi M nin de modül genişlemeleri aşağıdaki şekillerde tanımlanmıştır:

$M[x;\alpha] = \{\sum_{i=0}^{s} m_i x^i : s \geq 0, m_i \in M\}$

$M[[x;\alpha]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i : m_i \in M\}$

$M[x,x^{-1};\alpha] = \{\sum_{i=-s}^{t} m_i x^i : s \geq 0, t \geq 0, m_i \in M\}$

$M[[x,x^{-1};\alpha]] = \{\sum_{i=-s}^{\infty} m_i x^i : s \geq 0, m_i \in M\}$

Bu modüller toplamaya göre değişmeli grupturlar ve ayrıca $m(x) = \sum m_i x^i \in M[x;\alpha]$ ve $f(x) = \sum a_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $m(x)f(x) = \sum_{k=0}^{s+t}(\sum_{i+j=k} m_i a^i(a_j))x^k$ skaler çarpma işlemine göre $M[x;\alpha]$, $R[x;\alpha]$ üzerinde modül olur. Benzer şekilde $M[[x;\alpha]]$, $R[[x;\alpha]]$ üzerinde benzer çarpımla sağ modül olur. $M[x;\alpha]$ ya *M nin* *çarpık genişlemesi* ve $M[[x;\alpha]]$ ya da *M nin çarpık üstel seri genişlemesi* denir. $Aut(R)$ ile R nin otomorfizma dönüşümlerini gösterelim ve $\alpha \in Aut(R)$ ise, o zaman benzer bir skaler çarpım ile $M[[x,x^{-1};\alpha]]$, $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ üzerinde ve $M[x,x^{-1};\alpha]$, $R[x,x^{-1};\alpha]$ üzerinde modül olur. Bu işlem ile $M[x,x^{-1};\alpha]$ modülüne *M nin çarpık Laurent çokterimli genişlemesi* ve $M[[x,x^{-1};\alpha]]$ ya da *M nin çarpık Laurent üstel seriler genişlemesi* denir.

Tanım 2.1.26. [3]. Eğer M nin kopyalarının direk çarpımına gömülebiliyorsa M modülüne R ile *eşüretilmiş* denir. Eğer $Ma = 0$ olması sadece $a = 0 \in R$ için sağlanıyorsa M modülüne *vefalı (faithful)* denir.

Tanım 2.1.27. [16]. Bir M modülü lineer bağımsız olsun. M modülünün bir tabanı varsa M modülüne *serbest (free) modül* denir.

3. İNDİRGENMİŞ VE YARIDEĞİŞMELİ MODÜLLER

Bu bölümde, indirgenmiş (reduced) halka ve modül kavramları tanımlanacak daha sonra indirgenmiş halka ve modüller ile ilgili bazı özellikler incelenecektir. Ayrıca yarıdeğişmeli modül kavramı tanımlanarak yapıları incelenecektir. Böylece yarıdeğişmelilik kavramı halkalardan modüllere genelleşmiş olacaktır.

3.1. İndirgenmiş Halka ve Modüller

Tanım 3.1.1. [20]. Sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan bir R halkasına *indirgenmiş (reduced) halka* denir.

Tanım 3.1.2. [19]. $\alpha(1) = 1$ olmak üzere $\alpha : R \to R$ bir halka endomorfizması olsun. Her $m \in M$ ve her $a \in R$ için M_R sağ R-modülünde aşağıdaki şartlar sağlansın:
(a) $ma = 0$ ise $mR \cap Ma = 0$ ve
(b) $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır.
O zaman M_R ye *α-indirgenmiş (α-reduced) modül* denir. Eğer M 1_R-indirgenmiş ise M_R modülüne *indirgenmiş modül* denir.

Tanım gereğince, "R_R 1-indirgenmiş modüldür ancak ve ancak R indirgenmiş bir halkadır" ifadesi açıktır.

Lemma 3.1.3. [19]. *M_R modülü için aşağıdakiler denktir:*
(1). *M_R α-indirgenmiştir.*
(2). *Her $m \in M$ ve her $a \in R$ için aşağıdaki üç durum sağlanır:*
(a). *$ma = 0$ ise $mRa = mR\alpha(a) = 0$.*
(b). *$ma\alpha(a) = 0$ ise $ma = 0$.*
(c). *$ma^2 = 0$ ise $ma = 0$.*

İspat: İspat tanımdan açık. □

Tanım 3.1.4. [14]. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ dan $a = 0$ elde edilirse R halkasına *α-katı (α-rigid) halka* denir.

Önerme 3.1.5. [1]. *Her α-katı halka indirgenmiş halkadır.*

İspat: R bir α-katı halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. O zaman $a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = 0$. Böylece $\alpha(a) = 0$ dır. R α-katı olduğundan $a = 0$ bulunur. $\square$

3.2. İndirgenmiş ve Yarıdeğişmeli Modüller Üzerine

Tanım 2.1.9 da her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olduğunda $mRa = 0$ oluyorsa M_R nin yarıdeğişmeli modül olduğu tanımlanmıştı. R nin yarıdeğişmeli bir halka olması için gerek ve yeter koşulun R_R nin yarıdeğişmeli bir modül olmasıdır ifadesi açıkça görülür.

Lemma 3.2.1. [20]. *Her indirgenmiş modül yarıdeğişmeli modüldür.*

İspat: M_R indirgenmiş olsun. $m \in M$, $a \in R$ ve $ma = 0$ olsun. M_R indirgenmiş olduğundan $mR \cap Ma = 0$ olur. $mRa \leq mR \cap Ma = 0$ olduğundan $mRa = 0$ dır. O halde M yarıdeğişmelidir. $\square$

Önerme 3.2.2. [6]. *$\phi : R \to S$ bir halka homomorfizması ve M bir sağ S-modül olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:*

(i). *M_S bir indirgenmiş modül ise M_R indirgenmiş modüldür.*

(ii). *ϕ örten ise (i) nin tersi de vardır.*

(iii). *S indirgenmiş halka ise S, sağ R-modül olarak indirgenmiştir.*

İspat: (i). ϕ homomorfizma olduğundan ispat açıktır.

(ii). ϕ örten olsun. O halde M_R indirgenmiş modül ise M_S nin bir indirgenmiş modül olduğu açıktır.

(iii). İndirgenmiş halka tanımı ve modül tanımından ispat açıktır. $\square$

Lemma 3.2.3. [6]. *M_R yarıdeğişmeli modül ise, her $e^2 = e \in R$, her $m \in M$ ve her $a \in R$ için $mea = mae$ dir.*

İspat: $e^2 = e \in R$ için $e(1-e) = (1-e)e = 0$ dır. Her $m \in M$ için $me(1-e) = 0$ ve $m(1-e)e = 0$ dır. M_R yarıdeğişmeli olduğundan $meR(1-e) = 0$ ve $m(1-e)Re = 0$ dır. Böylece her $a \in R$ için $mea(1-e) = 0$ ve $m(1-e)ae = 0$ olur. Buradan $mea = meae$ ve $mae = meae$ dır. O halde her $a \in R$ için $mea = mae$ elde edilir. □

Önerme 3.2.4. [6]. *M_R, p.q.-Baer modül olsun. M_R yarıdeğişmeli modül ise M_R indirgenmiş modüldür.*

İspat: M_R nin yarıdeğişmeli modül olduğunu kabul edelim. $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olsun. M_R p.q.-Baer modül olduğundan $e^2 = e \in R$ için $a \in r_R(m) = r_R(mR) = eR$ dir. $x \in mR \cap Ma$ olsun. O zaman bir $r \in R$ ve $m' \in M$ için $x = mr = m'a$ dır. $a \in r_R(m)$ olduğu için $a = ea$ dır. Lemma 3.2.3 ten $x = m'a = m'ea = m'ae$ olur. $eR \in r_R(m)$ olduğundan $x = mre = mer = 0$ bulunur. Böylece $mR \cap Ma = 0$ dır. Dolayısıyla M_R indirgenmiş modül olur. □

Sonuç 3.2.5. [1]. *R bir sağ p.q.-Baer halka olsun. O zaman R yarı değişmeli halkadır ancak ve ancak R indirgenmiş halkadır.*

Önerme 3.2.6. [6]. *M_R bir yarıdeğişmeli modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler vardır:*

(i). *M_R bir Baer modüldür ancak ve ancak M_R bir quasi-Baer modüldür.*

(ii). *M_R bir p.p.-modüldür ancak ve ancak M_R bir p.q.-Baer modüldür.*

İspat: (i). M_R Baer modül ise M_R nin quasi-Baer modül olduğu açıktır.

Karşıt olarak, M_R quasi-Baer modül ve X, M_R nin boştan farklı herhangi bir alt kümesi olsun. O zaman $r_R(X) = \bigcap_{x \in X} r_R(x)$ olur. M_R yarıdeğişmeli modül olduğundan $\bigcap_{x \in X} r_R(x) = \bigcap_{x \in X} r_R(xR)$ olur. Fakat M_R quasi-Baer modül olduğundan, $e^2 = e \in R$ olmak üzere $r_R(X) = \bigcap_{x \in X} r_R(xR) = r_R(\sum_{x \in X} xR) = eR$ dir. Dolayısıyla $e^2 = e \in R$ olmak üzere $r_R(X) = eR$ böylece M_R Baer modül olur.

(ii). M_R yarıdeğişmeli bir modül olduğundan her $m \in M$ için $r_R(m) = r_R(mR)$ olur. Bu da ispatı bitirir. □

Önerme 3.2.6 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.7. [6]. *R yarıdeğişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki özelllikler vardır:*

(1). *R bir Baer halkadır ancak ve ancak R bir quasi-Baer halkadır.*

(2). *R bir p.p.-halkadır ancak ve ancak R bir p.q.-Baer halkadır.*

Önerme 3.2.8. [6]. *Bir M_R modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1). *M_R bir p.q-Baer modüldür.*

(2). *Her sonlu üretilmiş alt modülün sağ sıfırlayanı (sağ ideal olarak) bir kare-eş eleman tarafindan üretilir.*

İspat: (2) $\Rightarrow$ (1). Her devirli alt modül sonlu üretilmiş olduğu için (2) kabulü altında M_R p.q-Baer modül olur.

(1) $\Rightarrow$ (2). M_R p.q-Baer modül ve $N = \sum\limits_{i=1}^{k} n_iR$, M_R nin sonlu üretilmiş bir alt modülü olsun. O zaman $r_R(n_iR) = e_iR$ ve $e_i^2 = e_i$ olmak üzere $r_R(N) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} e_iR$ olur. $e = e_1e_2...e_k$ olsun. O halde e sol yarımerkezi kare-eş elemandır ve her e_i nin sol yarımerkezi kare-eş olmasından $\bigcap\limits_{i=1}^{k} e_iR = eR$ dir. Sonuç olarak $r_R(N) = eR$ elde edilir. □

Önerme 3.2.8 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.9. [10, Önerme 1.7]. *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(1). *R bir sağ p.q.-Baer halkadır.*

(2). *R nin her sonlu üretilmiş idealinin sağ sıfırlayanı bir kare-eş eleman ile üretilir.*

Lemma 3.2.10. [1, Teorem 3.4]. *M_R bir p.p.-modül olsun. O halde M_R bir indirgenmiş modüldür ancak ve ancak M_R bir yarıdeğişmeli modüldür.*

İspat: M_R bir indirgenmiş modül olsun. $m \in M$, $a \in R$ ve $ma = 0$ olsun. M_R indirgenmiş olduğundan $mR \cap Ma = 0$ olur. $mRa \leq mR \cap Ma = 0$ olduğundan $mRa = 0$ dır. O halde M yarıdeğişmeli modül olur.

Karşıt olarak, M_R nin yarıdeğişmeli modül olduğunu kabul edelim. $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olsun. M_R p.p.-modül olduğundan $e^2 = e \in R$ için $r_R(m) = eR$ dir. O zaman $a \in r_R(m)$ olduğundan $a \in eR$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $ea = e^2 r = er = a$, yani $a = ea$ bulunur. Lemma 3.2.3 ten $mae = mea$ olur. $x \in mR \cap Ma$ olsun. O zaman $x = mr_1 = m'a = m'ea = m'ae$, $er_1 \in r_R(m)$ olduğundan $x = mr_1e = mer_1 = 0$ bulunur. Böylece $mR \cap Ma = 0$ yani M_R indirgenmiş modül olur. □

Sonuç 3.2.11. [6]. *R bir sağ p.p.-halka olsun. O zaman R bir indirgenmiş halkadır ancak ve ancak R bir yarıdeğişmeli halkadır.*

İspat: $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $axb = 0$ olduğunu gösterelim. Bu durumda $(ba)^2 = baba = 0$ ve R indirgenmiş halka olduğundan $ba = 0$ buluruz ve böylece $(arb)^2 = 0 = arb$ bulunur. O zaman R yarıdeğişmeli halka olur.

Karşıt olarak, R bir p.p.-halka ve yarıdeğişmeli ise R indirgenmiştir; çünkü R bir p.p.-halka ise Sonuç 3.2.7 den R p.q.-Baer halkadır ve dolayısıyla Sonuç 3.2.5 ten R bir indirgenmiş halka olur. □

Önerme 3.2.12. [6]. *R bir abel halka olsun. Eğer M_R bir p.p.-modül ise M_R bir indirgenmiş modüldür.*

İspat: $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olsun. O halde $a \in r_R(m)$ dir. M_R bir p.p.-modül olduğundan $e^2 = e \in R$ için $r_R(m) = eR$ dir. Böylece $a = ea$ ve $me = 0$ dır.

$x \in mR \cap Ma$ olsun. $r \in R$ ve $m' \in M$ olmak üzere $x = mr = m'a$ olur. O halde $eR \in r_R(m)$ olduğundan, $x = m'ea = m'ae = mre = mer = 0$ dır. Buradan M_R bir indirgenmiş modül olur. □

Sonuç 3.2.13. [6]. *R bir abel halka olsun. Eğer R bir sağ p.p.-halka ise o zaman R bir indirgenmiş halkadır.*

Önerme 3.2.14. [6]. *R bir abel halka ve M_R bir p.p.-modül olsun. O zaman M_R bir p.q.-Baer modüldür.*

İspat: $m \in M$ olsun. M_R bir p.p.-modül olduğundan $r_R(m) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. $r_R(mR) \subseteq r_R(m)$ olduğu açıktır. $x \in r_R(m)$ olsun. O halde $x = ex$ ve $me = 0$ dır. Her $r \in R$ için R abel olduğndan $mrx = mrex = merx = 0$ olur. O halde $x \in r_R(mR)$ dir. Sonuç olarak $r_R(mR) = r_R(m) = eR$ olur. Böylece M_R bir p.q.-Baer modüldür. □

Sonuç 3.2.15. [6]. *Abel sağ p.p.-halkalar sağ p.q.-Baer'dir.*

Önerme 3.2.16. [6]. *Her p.p.-modül tekil olmayan (nonsingular) modüldür.*

İspat: M_R p.p-modül ve $m \in Z(M)$ olsun. O halde $r_R(m)$, R_R de essentialdır ve $r_R(m) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Böylece eR, R_R de essentialdır. Fakat R nin $(1-e)R$ sağ ideali için $eR \cap (1-e)R = 0$ dır ve buradan $e = 1$ dir. Böylece $r_R(m) = R$ ve $m = 0$ olur. O halde M_R bir tekil olmayan (nonsingular) modüldür. □

Sonuç 3.2.17. [18]. *Bir sağ p.p-halka sağ tekil olmayan (nonsingular) halkadır.*

Lemma 3.2.18. [18]. *R indirgenmiş halka olsun. O zaman R sağ tekil olmayan (nonsingular) halkadır.*

İspat: $x \neq 0$ için $r_R(x)$ R_R de essential olamayacağı için herhangi bir $x \in R$ için $r_R(x) \cap xR = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $y \in r_R(x) \cap xR$ için $z \in R$ olacak şekilde $y = xz$ yazılır. Buradan $(yx)^2 = y(xy)x = 0$ olur. Böylece $yx = 0$ elde edilir, fakat $y^2 = y.xz = 0$ olduğundan $y = 0$ dır. □

Bu Lemma modül için doğru değildir yani M indirgenmiş bir modül ise her zaman M modülü tekil olmayan (nonsingular) bir modül olmak zorunda değildir.

İndirgenmiş modül olan fakat tekil (nonsingular olmayan) bir modüle aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.2.19. [18]. $(\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$ indirgenmiş modüldür fakat sağ nonsingular modül değildir.

3.3. İndirgenmiş ve p.q.- Baer Modüller

Bu bölümde Baer halka ve modüllerin diğer halka ve modül çeşitleri ile ilgili bağlantıları incelenmiştir. Bununla birlikte p.q.-Baer modüller ve p.q.-Baer modüllerin bazı çokterimli (polynomial) genişlemeleri çalışılmıştır.

Lemma 3.3.1. [19]. *M, her $m \in M$, $a \in R$ için, $ma = 0$ olması $mR\alpha(a) = 0$ olmasını ve $ma^2 = 0$ olması $ma = 0$ olmasını gerektiren bir modül olsun. $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x_i \in M[[x;\alpha]]$ ve $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i \in R[[x;\alpha]]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ ise o zaman, her i ve j için $m_i \alpha^i(a_j) = 0$ olur.*

İspat: $m(x)f(x) = 0$ olsun. Buradan $k = 0,1,2,...$ için $\sum_{i+j=k} m_i \alpha^i(a_j) = 0$ dır. Buradan her i ve j için $i + j \leq s$ olacak şekilde $s \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$m_0 a_0 = 0$

$m_0 a_1 + m_1 a_0 = 0$

$m_0 a_2 + m_1 a_1 + m_2 a_0 = 0$

$\vdots$

$m_0 a_s + m_1 a_{s-1} + m_2 a_{s-2} + ... + m_s a_0 = 0.$

$m_i \alpha_i(a_j) = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$(1) \qquad m_0 a_{s+1} + m_1 \alpha(a_s) + ... + m_s \alpha^s(a_1) + m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) = 0$$

elde edilir. (1) eşitliğini $\alpha^{s+1}(a_0)$ ile çarparsak,

$$(2) \qquad m_0 a_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) + ... + m_s \alpha^s(a_1)\alpha^{s+1}(a_0) + m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0)\alpha^{s+1}(a_0) = 0$$

elde edilir. Kabulden $i = 0,...,s$ için $m_i \alpha^i(a_0) = 0$ dır ve buradan $m_i R\alpha^{s+1}(a_0) = 0$ olur ($0 \leq i \leq s$). O halde $m_0 a_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) = ... = m_s \alpha^s(a_1)\alpha^{s+1}(a_0) = 0$ olur ve böylece (2) den $m_{s+1}(\alpha^{s+1}(a_0))^2 = 0$ elde edilir. Kabulden $m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) = 0$ olur. Böylece (1) den;

$$(3) \qquad m_0 a_{s+1} + m_1 \alpha(a_s) + ... + m_s \alpha^s(a_1) = 0$$

elde edilir. (3) ü $\alpha^s(a_1)$ ile çarparsak ve kabulden, $m_s(\alpha^s(a_1))^2 = 0$ olur ve böylece $m_s\alpha^s(a_1) = 0$ dır. Benzer şekilde bu işleme devam edilerek,

$$m_{s+1}\alpha^{s+1}(a_0) = m_s\alpha^s(a_1) = ... = m_0a_{s+1} = 0$$

elde edilir. Böylece $i + j \leq s + 1$ olacak şekilde her i, j için $m_i\alpha^i(a_j) = 0$ olduğu gösterilmiş olur. Tümevarımla her i, j için $m_i\alpha^i(a_j) = 0$ olur. □

Daha önce de tanımladığımız gibi $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ dan $a = 0$ elde edilirse R halkasına *α-katı (α-rigid) halka* denir [Tanım 3.1.4]. R nin α-katı halka olması için gerek ve yeter koşul R nin indirgenmiş halka olmasıdır [14, Lemma 4].

Sonuç 3.3.2. [17]. *R bir α-katı halkadır ancak ve ancak $R[x;\alpha]$ indirgenmiş halkadır ancak ve ancak $R[[x;\alpha]]$ indirgenmiş halkadır.*

Teorem 3.3.3. [19]. *Bir M_R modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *M_R α-indirgenmiştir.*

(2). *$M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ indirgenmiştir.*

(3). *$M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ indirgenmiştir.*

(4). *$M[x,x^{-1};\alpha]_{R[x,x^{-1};\alpha]}$ indirgenmiştir.*

(5). *$M[[x,x^{-1};\alpha]]_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}$ indirgenmiştir.*

İspat: (5) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) ve (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1). M_R nin indirgenmiş olduğu açıktır. $m \in M$ ve $a \in R$ olmak üzere $ma = 0$ ise o zaman Lemma 3.1.3 ten $mR[x;\alpha]a = 0$ dır. Böylece $m\alpha(a)x = mxa = 0$ ve buradan $m\alpha(a) = 0$ olur. $m \in M$ ve $a \in R$ olmak üzere $m\alpha(a) = 0$ ise $ma\alpha(a) = 0$ olur. O halde $max(ax) = ma\alpha(a)x^2 = 0$ dır. (2) den $max = 0$ ve buradan $ma = 0$ olur. Böylece M α- indirgenmiş modül olur.

(1) $\Rightarrow$ (3). $m(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} m_ix^i$, $l(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} l_ix^i \in M[[x;\alpha]]$ ve $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i$, $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_ix^i \in R[[x;\alpha]]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ ve $m(x)g(x) = l(x)f(x)$ olsun. Göstermemiz gereken $l(x)f(x) = 0$ olduğudur. Lemma 3.3.1 den her i ve j için $m_i\alpha^i(a_j) = 0$ dır ve böylece Lemma 3.1.3 ten her i, j, s için $m_iR\alpha^{i+s}(a_j) = 0$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} m(x)g(x)f(x) &= (\sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i)(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k (m_i x^i)(b_j x^j)(a_k x^k) \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k m_i \alpha^i (b_j) \alpha^{i+j}(a_k) x^{i+j+k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Böylece $[l(x)f(x)]f(x) = m(x)g(x)f(x) = 0$ olur. Lemma 3.3.1 den her $k = 0, 1, \ldots$ için $l(x)[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i (a_k) x^i] = l(x)(f(x)a_k) = (l(x)f(x))a_k) = 0$ olur ve tekrar Lemma 3.3.1 den her i, j, k için $l_i \alpha^i (a_j \alpha^j (a_k)) = 0$ olur. Böylece $l_i \alpha^i (a_k) \alpha^{i+k}(a_k)) = l_i \alpha^i (a_k \alpha^k (a_k) = 0$ dır. Lemma 3.1.3 (2)(b) den her i ve k için $l_i \alpha^i (a_k) = 0$ buradan $l(x)f(x) = 0$ dır.

(3) $\Rightarrow$ (5). $m(x), l(x) \in M[[x, x^{-1}; \alpha]]$ ve $f(x), g(x) \in R[[x, x^{-1}; \alpha]]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ ve $m(x)g(x) = l(x)f(x)$ olduğunu kabul edelim.

$m(x)x^k$, $l(x)x^k \in M[[x, \alpha]]$ ve $f(x)x^k$, $g(x)x^k \in R[[x; \alpha]]$ olacak şekilde $k > 0$ vardır. $f(x) = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{i=-k}^{\infty} b_i x^i$ olsun. O halde

$$[m(x)x^i x^k][(\sum_{i=-k}^{\infty} \alpha^{-k}(a_i) x^k) x^k] = m(x)f(x)x^{2k} = 0,$$

$$[m(x)x^k][(\sum_{i=-k}^{\infty} \alpha^{-k}(b_i) x^k) x^k] = [l(x)x^k][(\sum_{i=-k}^{\infty} \alpha^{-k}(a_i) x^k) x^k]$$

dır ve $\sum_{i=-k}^{\infty} \alpha^{-k}(a_i) x^k) x^k$ ile $\sum_{i=-k}^{\infty} \alpha^{-k}(b_i) x^i) x^k$, $R[[x; \alpha]]$ dadır. (3) den $[m(x)x^k][(\sum_{i=-k}^{\infty} \alpha^{-k}(b_i) x^i) x^k] = 0$ dır. Buradan $m(x)g(x)x^{2k} = 0$ ve böylece $m(x)g(x) = 0$ olur. $\square$

Sonuç 3.3.4. [19]. *M_R nin α-indirgenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul $M[[x, x^{-1}]]_{R[[x, x^{-1}]]}$ in indirgenmiş modül olmasıdır.*

Tanım 3.3.5. [9]. M_R bir modül olsun. $e^2 = e \in R$ olmak üzere her $m \in M$ için $r_R(mR) = eR$ ise M_R ye *temel (principal) quasi-Baer (veya kısaca p.q.-Baer) modül* denir.

Tanım 2.1.18 de her principal (temel) sağ (ya da sol) idealinin sıfırlayanı bir kare-eş eleman tarafından üretilen halkanın sağ (ya da sol) principally quasi-Baer, kısaca p.q.-Baer halka olduğu tanımlanmıştı.
"R sağ p.q.-Baer halkadır ancak ve ancak R_R p.q.-Baer modüldür" olduğu açıktır. Eğer R bir p.q.-Baer halka ise o zaman R nin her sağ I_R ideali p.q.-Baer modüldür. p.q.-Baer modülün her alt modülü p.q.-Baer modüldür. Ayrıca her quasi-Baer modül p.q.-Baer modüldür ve her Baer modül quasi-Baer modüldür [7].
Eğer R değişmeli bir halka ise, o zaman M_R p.p.-modüldür ancak ve ancak M_R p.q.-Baer modüldür. p.q.-Baer modül olan fakat p.p.-modül olmayan modüle aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 3.3.6. [14]. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $M_2(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}$ üzerinde 2×2 tipindeki matrislerin halkası olsun.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) | a \equiv d, b \equiv 0, c \equiv 0 (mod 2) \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R_R p.q.-Baer modüldür fakat p.p.-modül değildir.
Öncelikle R nin sağ p.q.-Baer modül olduğunu gösterelim. $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ R nin sıfırdan farklı elemanı olsun. R nin $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları ile u yu çarparsak,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \in uR$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 2c \end{pmatrix} \in uR$$

olduğu görülür. $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \in r_R(uR)$ için

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\alpha & 2a\beta \\ 2c\alpha & 2c\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Böylece $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ olur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\gamma & 2a\varepsilon \\ 2c\gamma & 2c\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Böylece $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise $\gamma = 0$ ve $\varepsilon = 0$ olur. Buradan $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $b \neq 0$ veya $d \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yerine sırasıyla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ alarak u yu çarparsak,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \in uR$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 2d & 0 \end{pmatrix} \in uR$$

olduğu görülür. $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \in r_R(uR)$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b\gamma & 2b\varepsilon \\ 2d\gamma & 2d\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Böylece $b \neq 0$ ve $d \neq 0$ ise $\gamma = 0$ ve $\varepsilon = 0$ olur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 2d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b\alpha & 2b\beta \\ 2d\alpha & 2d\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Böylece $b \neq 0$ ve $d \neq 0$ ise $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ dır. O halde $d \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Buradan R nin sıfırdan farklı r elemanı için $r_R(uR) = 0$ olur. Böylece R sağ p.q.-Baer modüldür. Şimdi R nin ne sağ p.p.-modül ne de sol p.p.-modül olmadığını gösterelim.
$e^2 = e$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$r_R(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \left\{\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \mu \equiv 0(mod2) ve \nu \equiv 0(mod2)\right\} \neq eR$$

olur. R nin idempotent elemanları sadece $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece R sağ p.p.-modül değildir. Benzer şekilde R nin sol p.p.-modül değildir.

Teorem 3.3.7. [7]. *M_R, her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olduğunda $mRa = 0$ (yani M_R yarıdeğişmeli) olsun. M_R p.p.-modüldür ancak ve ancak M_R p.q.-Baer modüldür.*

İspat: $m \in M$ olsun. Eğer $a \in r_R(m)$ ise $ma = 0$ dır. Kabulden $mRa = 0$ ve böylece $a \in r_R(mR)$ dir. O zaman $r_R(m) \subseteq r_R(mR)$ dir. Ayrıca $r_R(mR) \subseteq r_R(m)$ olduğu açıktır. O halde $r_R(mR) = r_R(m) = eR$ elde edilir. Dolayısıyla Tanım 2.1.19 dan ispat biter. □

Sonuç 3.3.8. [7]. *M_R bir indirgenmiş modül olsun. M_R bir p.p.-modüldür ancak ve ancak M_R bir p.q.-Baer modüldür.*

İspat: M_R nin bir indirgenmiş modül olduğunu kabul edelim. O zaman $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olması $mRa = 0$ olmasını gerektirir [Lemma 3.2.1]. Dolayısıyla Teorem 3.3.7 den ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.3.9. [14]. *R bir indirgenmiş halka olsun. O zaman R bir sağ p.p.-halkadır ancak ve ancak R bir sağ p.q.-Baer halkadır.*

Tanım 3.3.10. [4]. $m(x) = \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{t} a_j x^j \in R[x]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ olduğunda her i ve j için $m_i a_j = 0$ oluyorsa M modülüne *Armendariz modül* denir.

Tanım 3.3.11. [20]. Bir M_R modülü için aşağıdaki (1) ve (2) koşulları sağlanıyorsa M_R modülüne *α-Armendariz modül* denir. Eğer (1) ve (3) koşulları sağlanıyorsa M_R modülüne *üstel serili α-Armendariz modül* denir.

(1) $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ ancak ve ancak $ma\alpha(a) = 0$ dır.

(2) Her $m(x) = \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x;\alpha]$ ve $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \in R[x;\alpha]$ için $m(x)f(x) = 0$ olduğunda her i, j için $m_i \alpha^i(a_j) = 0$ dır.

(3) Her $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ ve $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$ için $m(x)f(x) = 0$ olduğunda her i, j için $m_i \alpha^i(a_j) = 0$ dır.

Tanım gereğince, "M_R bir Armendariz modüldür ancak ve ancak M_R bir 1-Armendariz modüldür" ifadesi açıktır.

Tanım 3.3.12. M_R bir üstel serili 1-Armendariz modül ise M_R modülüne *üstel serili Armendariz modül* denir.

M_R bir α-indirgenmiş modül ise M_R modülü üstel serili α-Armendariz modüldür. M_R bir üstel serili α-Armendariz modül ise M_R modülü α-Armendariz modüldür.

Teorem 3.3.13. [7]. *$\alpha : R \longrightarrow R$, R nin bir endomorfizması olsun. $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0 \Leftrightarrow m\alpha(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdakiler vardır:*
(1). (a). *$M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ bir p.q.-Baer modül ise M_R bir p.q.-Baer modüldür. Tersi M_R α-indirgenmiş modül ise vardır.*
(b). *$M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ bir p.q.-Baer modül ise M_R bir p.q.-Baer modüldür.*
(2). *$\alpha \in Aut(R)$ olsun.*
(a). *$M[x,x^{-1};\alpha]_{R[x,x^{-1};\alpha]}$ bir p.q.-Baer modül ise M_R bir p.q.-Baer modüldür. Tersi M_R nin α-indirgenmiş olması durumunda vardır.*
(b). *$M[[x,x^{-1};\alpha]]_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}$ bir p.q.-Baer modül ise M_R bir p.q.-Baer modüldür.*

İspat: (1)(a). $(1)(b)$ nin ispatı gibidir.
(1)(a) nın tersinin M_R nin α-indirgenmiş olması durumunda var olduğunu gösterelim. M_R bir α-indirgenmiş modül ve M_R p.q.-Baer modül olsun. Her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olması $mRa = 0$ gerektirir. Teorem 3.3.7 den M_R bir p.p.-modüldür. M_R nin bir α-indirgenmiş modül olmasından, M_R α-Armendariz modül olur. [19, Teorem 2.11.(1)(a)] dan $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ p.p.-modüldür. M_R nin α-indirgenmiş olmasından $M[[x;\alpha]]_{R[[x;\alpha]]}$ indirgenmiştir [Teorem 3.3.3]. Sonuç 3.3.8 den $M[x;\alpha]_{R[x;\alpha]}$ bir p.q.-Baer modül olur.
(1)(b). $M[[x,x^{-1};\alpha]]_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}$ bir p.q.-Baer modül olsun. $m \in M$ için $f(x)^2 = f(x) \in R[[x;\alpha]]$ olacak şekilde $r_{R[[x;\alpha]]}(mR[[x;\alpha]]) = f(x)R[[x;\alpha]]$ dır. Böylece

$$f(x)R[[x;\alpha]] \subseteq r_{R[[x;\alpha]]}(mR) = r_R(mR[[x;\alpha]])$$

olur. Her $j \geq 0$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in r_R(mR)[[x;\alpha]]$ için $mR(b_j) = 0$ dır. Böylece kabulden her $j \geq 0$ ve her $k \geq 0$ için $mR\alpha^k(b_j) = 0$ dır.
Her $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i \in (mR)[[x;\alpha]]$ için

$$u(x)g(x) = \sum_i \sum_j u_i \alpha^i(b_j) x^{i+j} = 0$$

olur. Böylece $g(x) \in r_{R[[x;\alpha]]}((mR)[[x;\alpha]]$ dır. O halde $r_R(mR)[[x;\alpha]] = f(x)R[[x;\alpha]]$ olur. Her $a_i \in r_R(mR)$ için $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ alalım. O halde her $a \in r_R(mR)$ ve $h(x) \in R[[x;\alpha]]$ için $a = f(x)h(x)$ dir, böylece

$$f(x)a = f(x)f(x)h(x) = a$$

olur. Buradan her $a \in r_R(mR)$ için $a = a_0 a$ dır. O halde $(a_0)^2 = a_0$ olmak üzere $r_R(mR) = a_0 R$ olur. Böylece M_R p.q.-Baer modül olur.

(2). (1) in ispatına benzerdir. □

Sonuç 3.3.14. [7]. *Bir M_R modülü için aşağıdakiler vardır:*

(1). *Eğer $M[x]_{R[x]}$, $M[[x]]_{R[[x]]}$, $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ ve $M[[x,x^{-1}]]_{R[[x,x^{-1}]]}$ den herhangi biri bir p.q.-Baer modül ise, o zaman M_R de p.q.-Baer modüldür.*

(2). *M_R indirgenmiş modül olsun. Eğer M_R bir p.q.-Baer modül ise, $M[x]_{R[x]}$ ve $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ de p.q.-Baer modüllerdir.*

Lemma 3.3.15. [5, Lemma 1]. *R bir indirgenmiş halka ve $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ olacak şekilde $f, g \in R[x]$ olsun. Bu durumda, $fg = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ için $a_i b_j = 0$ olmasıdır.*

İspat: $fg = 0$ ve $n = m$ olsun. O halde eşitlikten

(1) $a_0 b_0 = 0$

(2) $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$

(3) $a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0$

$\vdots$

(n) $a_n b_0 + \ldots + a_0 b_n = 0$

eşitlikleri vardır. R indirgenmiş olduğundan $a_0 b_0 = 0$ dır ve buradan $b_0 a_0 = 0$ dır. (2) eşitliğini soldan b_0 ile çarparsak,

$$b_0(a_1 b_0 + a_0 b_1) = 0$$

ve böylece $b_0a_1b_0 + b_0a_0b_1 = 0$ elde edilir. $b_0a_0b_1 = 0$ olacağından $b_0a_1b_0 = 0$ olur. $b_0a_1b_0 = 0$ eşitliğini soldan a_1 ile çarparsak,

$$a_1b_0a_1b_0 = (a_1b_0)^2 = 0$$

olur. R indirgenmiş halka olduğundan $a_1b_0 = 0$ olur ve böylece (2) eşitliğinden $a_0b_1 = 0$ elde edilir. R indirgenmiş halka olduğundan $b_1a_0 = 0$ olur. (3) eşitliğini sağdan a_0 ile çarparsak,

$$(a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)a_0 = 0$$

elde edilir. Yani $a_2b_0a_0 + a_1b_1a_0 + a_0b_2a_0 = 0$ ise $a_0b_2a_0 = 0$ olur. $a_0b_2a_0 = 0$ eşitliğini sağdan b_2 ile çarparsak $a_0b_2a_0b_2 = (a_0b_2)^2 = 0$ elde edilir. R indirgenmiş halka olduğundan $a_0b_2 = 0$ dır. (3) eşitliğinden $a_2b_0 + a_1b_1 = 0$ olur. Bu eşitliği soldan a_2 ile çarparsak,

$$a_2b_0a_2b_0 = 0$$

elde edilir. Buradan $(a_2b_0)^2 = 0$ olur. R indirgenmiş halka olduğu için $a_2b_0 = 0$ dır. (3) eşitliğinden $a_1b_1 = 0$ dir. Diğer eşitlikler için de benzer işlemler uygulanarak her $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ elde edilir. Denkliğin diğer yönü açıktır. □

Sonuç 3.3.16. [5, Sonuç 1]. *Eğer R bir indirgenmiş halka ve $f^2 = f$ olacak şekilde $f \in R[x]$ ise $f \in R$ dir.*

İspat: $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ olsun. O halde $(1-f) = (1-a_0) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ dır. Buradan

$$(1-f) = (1-a_0) - (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)$$

olur. $f^2 = f$ olduğundan

$$(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

elde edilir. O halde $(a_0)^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + ... = a_0 + a_1x + a_nx^n$ dır. Böylece $(a_0)^2 = a_0$ ise $0 = a_0 - (a_0)^2 = a_0(1-a_0)$ elde edilir. $a_0a_1 + a_1a_0 = a_1$ ise

$$(a_0a_1 + a_1a_0)a_0 = a_1a_0$$

ve buradan $a_0a_1a_0 + a_1a_0a_0 = a_1a_0$ olur. Böylece

$$a_0a_1a_0 + a_1a_0 = a_1a_0$$

elde edilir. Bu ise $a_0a_1a_0 = 0$ demektir. İndirgenmiş halkalar Lemma 3.3.15 ten Armendarizdir. Armendariz halkalar abeliandır. Böylece $a_0a_0a_1 = 0$ olur. Buna göre $a_0a_1 = 0$ dır. $a_0a_1 + a_1a_0 = a_1$ olduğundan $a_1a_0 = a_1$ dır. O halde

$$(a_1)^2 = a_1a_0a_1a_0 = a_1(a_0a_1)a_0 = 0$$

dır. R indirgenmiş olduğundan $a_1 = 0$ elde edilir. $a_2a_0 + a_1a_1 + a_0a_2 = a_2$ ise $a_2a_0 + a_0a_2 = a_2$ dır. Aynı yöntemle $a_2 = 0$ bulunur. Yani her $i \geq 1$ için $a_i = 0$ olur ve böylece $f = a_0 = (a_0)^2 \in R$ elde edilir. □

Eğer $f \in R[x]$, n dereceli ve $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ise $S_f = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ olsun.

Sonuç 3.3.17. [5, Sonuç 2]. *R bir indirgenmiş halka ve $U \subseteq R[x]$ olsun. Eğer $T = \bigcup_{f \in U} S_f$ ise*

$$r_{R[x]}(U) = r_R(T)[x]$$

olur.

İspat: Eğer $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in R[x]$ ve $gU = 0$ ise $b_i \in r_{R[x]}(U)$ olur. Bu durumda her $f \in U$ için $gf = 0$ dır ve böylece Lemma 3.3.15 ten $0 \leq i \leq m$ için $b_i \in r_R(T)$ olur. Buradan $r_{R[x]}(U) \subseteq r_R(T)$ elde edilir. Eşitliğin diğer kapsamı açıktır. O halde $r_{R[x]}(U) = r_R(T)$ dır. □

Teorem 3.3.18. [5, Teorem A]. *R bir indirgenmiş halka olsun. O zaman $R[x]$ bir p.p.-halkadır ancak ve ancak R bir p.p.- halkadır.*

İspat: $R[x]$ bir p.p.-halka olsun. $a \in R$ ise, $e^2 = e \in R$ olmak üzere $r_{R[x]}(a) = R \cap R[x]e$ dir. Sonuç 3.3.16 dan $e \in R$ olur ve böylece $R \cap R[x]e = Re$ elde edilir. O halde $r_R(a) = Re$ dir. Böylece R bir p.p.-halkadır.

Karşıt olarak, R bir p.p.-halka ise $e_1, e_2 \in R$ birer kare-eş eleman olmak üzere $r_R(a) = Re_1$ ve $r_R(b) = Re_2$ olacak şeilde $a, b \in R$ vardır. Eğer $e = e_1 + e_2 - e_1e_2$

ise R nin kare-eş elemanları merkezde olacağından ve $r_R(\{a,b\}) = Re$ olmasından $e^2 = e$ dir. Buradan her bir sonlu altküme $U \subseteq R$ için ve bazı $e^2 = e$ için $r_R(U) = Re$ elde edilir. Eğer $f \in R[x]$ ise Sonuç 3.3.17 den $e^2 = e$ olacak şekilde S_f sonlu olmak üzere $r_R[x](f) = r_R(S_f)[x] = Re[x] = R[x]e$ elde edilir. O halde $R[x]$ bir p.p.-halka olur. □

Teorem 3.3.19. [5, Teorem B]. *R bir indirgenmiş halka olsun. O zaman $R[x]$ bir Baer halkadır ancak ve ancak R bir Baer halkadır.*

İspat: Baer halkalar p.p.-halka olduğundan Teorem 3.3.18 den ispat açıktır. □

4. α-İNDİRGENMİŞ VE ARMENDARİZ MODÜLLER

Bu bölümde, α-indirgenmiş modül ve Armendariz modüllerle ilgili bazı özellikler verilecek daha sonra indirgenmiş, α-indirgenmiş ve Armendariz modüller arasındaki bağlantılar incelenecektir.

4.1. İndirgenmiş ve α-İndirgenmiş Modüller

Daha önce de tanımladığımız gibi $\alpha(1) = 1$ olmak üzere $\alpha : R \to R$ halka endomorfizması olsun. Her $m \in M$ ve her $a \in R$ için M_R sağ R-modülünde aşağıdaki şartlar sağlansın:

(a) $ma = 0$ ise $mR \cap Ma = 0$ ve

(b) $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır.

O zaman M_R ye *α-indirgenmiş modül* denir [Tanım 3.1.2].

Teorem 4.1.1. [3]. *M bir modül olsun. Her $m \in M$ ve her $a, b \in R$ için aşağıdakiler denktir:*

(1). *M α-indirgenmiş modüldür.*

(2).(a). *$ma = 0$ ise $mR\alpha(a) = 0$ dır.*

(b). *$ma\alpha(a) = 0$ ise $ma = 0$ dır.*

(3).(a). *$mab = 0$ ise $(mbR) \cap (Ma) = 0$ dır.*

(b). *$ma = 0$ ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır.*

(4).(a). *$mab = 0$ ise $(maR) \cap (Mb) = 0$ dır.*

(b). *$ma = 0$ ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır.*

İspat: α-indirgenmiş modül tanımı ve Lemma 3.1.3 ten ispat açıktır.

$\square$

Sonuç 4.1.2. [3]. *M bir α-indirgenmiş modül, $m \in M$ ve $a \in R$ olsun. $ma = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $ma^2 = 0$ olmasıdır. Bu durumda $mRa = 0$ dır.*

Daha önce de tanımladığımız gibi $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ dan $a = 0$ elde edilirse R halkasına *α-katı (α-rigid) halka* denir [Tanım 3.1.4].

Tanım 4.1.3. [14]. Her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma\alpha(a) = 0$ olması $ma = 0$ olmasını gerektiriyorsa M modülüne *α-katı (α-rigid) modül* denir.

Eğer M modülü 1-katı (1-rigid) modül ise M ye *katı (rigid) modül* denir. R halkası α-katıdır ancak ve ancak R_R α-katı modüldür [14]. Teorem 4.1.1 den aşağıdaki sonuç açıktır:

Sonuç 4.1.4. [3]. *M modülü α-indirgenmiş ise o zaman M katı ve α-katı modüldür.*

Önerme 4.1.5. [3]. *α-indirgenmiş modüllerin sınıfı alt modüller, direk çarpımlar ve direk toplamlar altında kapalıdır yani α-indirgenmiş modüllerin alt modülleri, direk çarpımları ve direk toplamları yine α-indirgenmiştir.*

İspat: İspat tanımlardan açık. □

İndirgenmiş modüllerin sınıfı homomorfizma altında kapalı olmayabilir buna ilişkin aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 4.1.6. [3]. $R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. $\mathbb{Z}$-modül olarak $M = \mathbb{Z}$ ve M nin $N = 8\mathbb{Z}$ alt modülünü ele alalım. O zaman M/N α-indirgenmiş R-modül olmaz.

İspat: $M = \mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmadığından indirgenmiştir. O halde $m = 4 + N \in M/N$ ve $a = 2 \in R$ olsun. O halde $ma = 0$ dır. Ayrıca $m = 4 + N = (2 + N)a \in (mR) \cap (M/N)a \neq 0$ dır. Böylece $(mR) \cap (M/N)a \neq 0$ olur. O halde M/N α-indirgenmiş R-modül olmaz. □

Önerme 4.1.7. [3]. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1). *R bir α-indirgenmiş halkadır.*

(2). *Her eşüretilmiş R-modül α-indirgenmiştir.*

(3). *Bir serbest (free) R-modülün her alt modülü α-indirgenmiştir.*

(4). *Bir vefalı (faithful) α-indirgenmiş R-modül vardır.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. M bir eşüretilmiş R-modül olsun. O zaman M, R nin kopyalarının direk çarpımına izomorftur. (1) ve Önerme 4.1.5 ten R nin kopyalarının direk çarpımlarının her alt modülü α-indirgenmiş R-modüldür. Böylece M, α-indirgenmiş modül olur.

$(2) \Rightarrow (3)$. Serbest R modülün her alt modülünün R tarafından eşüretilmiş olmasından açıktır.

$(3) \Rightarrow (4)$. R sağ R-modül olarak vefalı serbest R-modüldür. Böylece (3) ten α-indirgenmiştir.

$(4) \Rightarrow (1)$. M bir vefalı α-indirgenmiş R-modül olsun. $r,s \in R$ için $rs = 0$ olsun. (1) i ispatlamak için $rR \cap Rs = 0$ ve $rs = 0$ ancak ve ancak $r\alpha(s) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. Böylece bazı m için $mrs = 0$ elde ederiz. O halde (4) ten $mrR \cap Ms = 0$ dır. $r_1, r_2 \in R$ için $rr_1 = r_2s \in rR \cap Rs$ olsun. O zaman $mrr_1 = mr_2s \in mrR \cap Ms = 0$ dır. Böylece her $m \in M$ için $mrr_1 = 0$ dır. M nin vefalı olmasından $rr_1 = 0$ dır. Buradan $rR \cap Rs = 0$ elde edilir. Benzer şekilde her $m \in M$ için $rs = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $mrs = 0$ olmasıdır. M nin α-indirgenmiş olmasından $mrs = 0$ dır ancak ve ancak $mr\alpha(s) = 0$ dır denkliği vardır.

M nin vefalı olması her $m \in M$ için $mr\alpha(s) = 0$ olmasını gerektirir bu da $r\alpha(s) = 0$ olmasına denktir. Bu ise ispatı bitirir. $\square$

$T(M) = \{m \in M \mid ma = 0 \quad \text{bazı } 0 \neq a \in R\}$ bir M modülünün tüm torsion elemanlarının kümesi olsun.

Teorem 4.1.8. [3]. *R, sıfırın sıfırdan farklı böleni olmayacak şekilde bir halka ve M bir α-indirgenmiş modül olsun. O zaman $T(M)$, M nin bir α-indirgenmiş alt modülüdür.*

İspat: Öncelikle ispat etmemiz gereken $T(M)$ nin M nin alt modülü olduğudur. $m_1, m_2 \in T(M)$ ve $r \in R$ olsun. İspat için $m_1 - m_2$ nin ve m_1r nin $T(M)$ ye ait olduğunu göstermeliyiz. $m_1t_1 = 0$ ve $m_2t_2 = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $t_1, t_2 \in R$ vardır. Sonuç 4.1.2 den $m_1Rt_1 = 0$ dır. Özel olarak $m_1t_2t_1 = 0$ ve $m_2t_2t_1 = 0$

dır. O halde $(m_1 - m_2)t_2t_1 = 0$ ve böylece $m_1 - m_2 \in T(M)$ olur. $m_1t_1 = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $m_1Rt_1 = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $m_1r \in T(M)$ olur. α-indirgenmiş modüllerin alt modülleri α-indirgenmiş olduğundan $T(M)$ de α-indirgenmiş modül olur. □

Teorem 4.1.9. [3]. *R sıfırdan farklı böleni olmayacak şekilde α-indirgenmiş bir halka olsun. O zaman M nin α-indirgenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul $T(M)$ nin α-indirgenmiş modül olmasıdır.*

İspat: M α-indirgenmiş modül olsun. $T(M)$, M nin alt modülü olduğundan Önerme 4.1.5 ten $T(M)$ de bir α-indirgenmiş modül olur. Karşıt olarak $T(M)$ α-indirgenmiş modül olsun. $ma = 0$ olacak şekilde $0 \neq m \in M$ ve $0 \neq a \in R$ olsun. $mR \cap Ma = 0$ olduğunu ispatlayacağız. $mr = m'a \in mR \cap Ma$ olsun. Bu eşitliği sağdan a ile çarparsak $mra = m'a^2$ elde edilir. $m \in T(M)$ ve $T(M)$ nin α-indirgenmiş olmasından dolayı Sonuç 4.1.2 gereği $mRa = 0$ elde edilir. Böylece $0 = mra = m'a^2$ dir. Buradan $m' \in T(M)$ olur. Tekrar Sonuç 4.1.2 den $m'a^2 = 0$ olması $m'a = 0$ durumunu gerektirir. Bu da ispatı tamamlar. □

R halkasının regüler elemanı, sıfır böleni olmayan sıfırdan farklı eleman anlamındadır. S, R nin regüler merkezcil elemanlarını içeren bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. R ve M yi S ye göre lokalize ediyoruz (yerelleştiriyoruz) ve $S^{-1}M_{S^{-1}R}$ lokalizasyonunun (yerelleştirmesinin) α-indirgenmiş olması durumuna bakacağız.

Eğer $\alpha : R \longrightarrow R$ bir halka homomorfizması ise

$$S^{-1}\alpha : S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}R; S^{-1}\alpha(a/s) = \alpha(a)/s$$

olacak şekilde bir halka homomorfizmasıdır. Açıkça bu dönüşümü α ile gösterebiliriz.

Önerme 4.1.10. [3]. *S, R nin regüler merkezcil elemanlarını içeren çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. M_R modülü α-indirgenmiştir ancak ve ancak $S^{-1}M_{S^{-1}R}$ α-indirgenmiştir.*

İspat: M_R α-indirgenmiş modül olsun ve $m/s \in S^{-1}M$, $a/t \in S^{-1}R$ olmak üzere, $S^{-1}M$ de $(m/s)(a/t) = 0$ olsun. Buradan $ma = 0$ olur. Kabulden $mR \cap Ma = 0$ dır. İspatı tamamlamak için, $(m/s)(S^{-1}R) \cap (S^{-1}M)(a/t) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $(m/s)(c/u) \in (m'/s'^{-1}R) \cap (S^{-1}M)(a/t)$ olsun. O halde $mcs'r = m'astu \in mR \cap Ma = 0$ dır. Böylece $(m/s)(c/u) = (m'/s')(a/t) = 0$ olur. □

Sonuç 4.1.11. [3]. *Bir M modülü için, $M[x]_{R[x]}$ in α-indirgenmiş olması için gerek ve yeter koşul $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ in α-indirgenmiş olmasıdır.*

İspat: $S = \{1, x, x^2, ...\}$ olsun. O halde S, $R[x]$ in regüler merkezil elemanlarını içeren çarpımsal kapalı bir alt kümesi olur. $S^{-1}M[x] = M[x,x^{-1}]$ ve $S^{-1}R[x] = R[x,x^{-1}]$ olduğundan Önerme 4.1.10 gereği ispat açıktır. □

Lemma 4.1.12. [3]. *M bir α-indirgenmiş modül olsun. Her $n \in N$, $m \in M$ ve $i = 1,2,3,...,n$, $a_i \in R$ olmak üzere $\sigma \in S_n$ permütasyonu için $ma_1...a_n = 0$ dır ancak ve ancak $m \in M$ için $ma_{\sigma(1)}...a_{\sigma(n)} = 0$ dır.*

İspat: ($\Rightarrow$). Açık.

($\Leftarrow$). $m \in M$, $a_i \in R$ ve $\sigma \in S_n$ olmak üzere $ma_{\sigma(1)}...a_{\sigma(n)} = 0$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.1(3)(b) den, M α-indirgenmiş olduğundan her $m \in M$ ve $a,b \in R$ için $mab = 0$ olması $mba = 0$ olmasını gerektirir. Buradan $n = 1$ ve $n = 2$ için iddia açıktır. $n = 3$ ve $ma_1a_2a_3 = 0$ olsun. $ma_1a_2a_3 = m(a_1)(a_2a_3) = 0$ den $m(a_2a_3)(a_1) = 0$ dır. $(ma_2)(a_3)(a_1) = 0$ olması $(ma_2)(a_1)(a_3) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece iddiamız $\sigma_1 = (123)$ ve $\sigma_2 = (12)$ için sağlanır. S_3 ün herhangi bir başka elemanı σ_1 ve σ_2 devirlerinin bir bileşkesidir böylece $n = 3$ için istenen elde edildi. $n > 3$ için $S_n =< (12), (12...n) >$ alındığı zaman R deki çarpmanın birleşme özelliğinden ispat biter. □

Lemma 4.1.13. [3]. *M bir α-indirgenmiş modül olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(1). *$m \in M$, $a_i \in R$ olmak üzere $ma_1a_2...a_n = 0$ dır.*

(2). *Her $i_1, ..., i_n \in N$ için $m\alpha^{i_1}(a_1)\alpha^{i_2}(a_2)...\alpha^{i_n}(a_n) = 0$ dır.*

İspat: İspat için "$ma_1...a_{i-1}a_ia_{i+1}...a_n = 0$ dır ancak ve ancak her i için $ma_1...a_{i-1}\alpha(a_i)a_{i+1}...a_n = 0$ dır" denkliğini göstermek yeter. Bu ise M nin α-indirgenmiş olması ile birlikte Lemma 4.1.12 kullanılarak kolayca görülür. □

Daha önce tanımladığımız gibi eğer her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $aRb = 0$ olmasını gerektiriyorsa R halkasına *yarıdeğişmeli* denir [Tanım 2.1.8].

Tanım 4.1.14. [2]. Her $a, b \in R$ için eğer $ab = 0$ olması $aR\alpha(b) = 0$ olmasını gerektiriyorsa R halkasına *α-yarıdeğişmeli* denir.

Tanım 4.1.15. [2]. Eğer her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ olması $mR\alpha(a) = 0$ olmasını gerektiriyorsa M modülüne *α-yarıdeğişmeli* denir.

Eğer bir M modülü 1-yarıdeğişmeli ise M modülüne *α-yarıdeğişmeli modül* denir [2].

Teorem 4.1.16. [3]. *M modülünün α-indirgenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin α-yarıdeğişmeli ve katı olmasıdır.*

İspat: Tanımlar, Teorem 4.1.1 ve Sonuç 4.1.4 ten açık. □

Lemma 4.1.17. [3]. *M bir α-indirgenmiş modül olsun. $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in R[[x;\alpha]]$ için $m(x)f(x)g(x) = 0$ ise her i, j ve k için $m_i\alpha^i(a_j)\alpha^{i+j}(b_k) = 0 = m_i a_j b_k$ dir.*

Sonuç 4.1.18. [3]. *M bir α-indirgenmiş modül olsun. $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x;\alpha]]$ ve $f_1(x) = \sum_{j_1=0}^{\infty} a_{j_1} x^{j_1}$, $f_2(x) = \sum_{j_2=0}^{\infty} a_{j_2} x^{j_2}$, ... $, f_n(x) = \sum_{j_n=0}^{\infty} a_{j_n} x^{j_n} \in R[[x;\alpha]]$ olsun. Eğer $m(x)f_1(x)f_2(x)...f_n(x) = 0$ ise o zaman her $i, j_1, ..., j_n$ için*

$$m_i\alpha^i(a_{j_1})\alpha^{i+j_1}(a_{j_2})...\alpha^{i+j_1+...+j_{n-1}}(a_{j_n}) = 0 = m_i a_{j_1} a_{j_2} ... a_{j_n}$$

dir.

Uyarı 4.1.19. [3]. *S, $\alpha(S) \subseteq S$ ve $M_S \subseteq L_R$ olacak şekilde $1_R \in S$ ve $\alpha \in End(R)$ olmak üzere bir R halkasının bir alt halkası olsun. L_R α-indirgenmiş ise M_S de α-indirgenmiştir. Eğer $\alpha \in End(R)$ ise*

$$R[[x]] \longrightarrow R[[x]]; \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(a_j) x^j$$

ile tanımlı dönüşüm $R[[x]]$ halkasının bir endomorfizmasıdır.

Şimdi bir M modülünün skew (Laurent) polinomlarının genişlemelerinin ve M skew (Laurent) kuvvet serilerinin genişlemelerinin α-indirgenmiş olduğunu belirleyeceğiz.

Teorem 4.1.20. [3]. *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *M_R α-indirgenmiştir.*

(2). *$M[x]_{R_{[x]}}$ α-indirgenmiştir.*

(3). *$M[[x]]_{R_{[[x]]}}$ α-indirgenmiştir.*

(4). *$M[x,x^{-1}]_{R_{[x,x^{-1}]}}$ α-indirgenmiştir.*

(5). *$M[[x,x^{-1}]]_{R_{[[x,x^{-1}]]}}$ α-indirgenmiştir.*

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$. Teorem 3.3.3 te $\alpha = 1$ alınırsa M_R α-indirgenmiştir ancak ve ancak $M[x]_{R[x]}$ indirgenmiştir. $m(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \in R[x]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ ancak ve ancak $m(x)\alpha(f(x)) = 0$ olduğu gösterilmeli ve ikinci özellik için $m_i a_j = 0$ dır ancak ve ancak $m_i \alpha(a_j) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Bu ise Lemma 4.1.13 ten açıktır.

$(2) \Leftrightarrow (3)$. Sonuç 4.1.11 den elde edilir.

$(1) \Leftrightarrow (4)$. Teorem 3.3.3 te $\alpha = 1$ alınır ve 2.durum için Lemma 4.1.13 kullanılır.

$(4) \Leftrightarrow (1)$. Uyarı 4.1.19 dan elde edilir.

$(4) \Leftrightarrow (5)$. $S^{-1}M[x]$ in elemanları $\frac{1}{x^s} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ formundaki $M[[x,x^{-1}]]$in tüm elemanlarından oluştuğundan Önerme 4.1.10 dan ispat tamamlanır. $\square$

$\alpha = 1$ alınırsa Teorem 4.1.20 den aşağıdakiler denktir:

(1). M indirgenmiştir.

(2). $M[x]$ indirgenmiştir.

(3). $M[[x]]$ indirgenmiştir.

(4). $M[x,x^{-1}]$ indirgenmiştir.

(5). $M[[x,x^{-1}]]$ indirgenmiştir.

Sonuç 4.1.21. [3]. *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *M, α-indirgenmiştir.*

(2). $M[x;\alpha]_{R_{[x;\alpha]}}$ *α-indirgenmiştir.*

(3). $M[[x;\alpha]]_{R_{[[x;\alpha]]}}$ *α-indirgenmiştir.*

(4). $M[x]_{R_{[x]}}$ *α-indirgenmiştir.*

(5). $M[[x]]_{R_{[[x]]}}$ *α-indirgenmiştir.*

(6). $M[x;x^{-1}]_{R_{[x;x^{-1}]}}$ *α-indirgenmiştir.*

(7). $M[[x;x^{-1}]]_{R_{[[x;x^{-1}]]}}$ *α-indirgenmiştir.*

(8). *$\alpha \in Aut(R)$ olmak üzere $M[x;x^{-1};\alpha]_{R_{[x;x^{-1};\alpha]}}$ indirgenmiştir.*

(9). *$\alpha \in Aut(R)$ olmak üzere $M[[x;x^{-1};\alpha]]_{R_{[[x;x^{-1};\alpha]]}}$ indirgenmiştir.*

İspat: Teorem 3.3.3 ve Teorem 4.1.20 den elde edilir. □

Tanım 4.1.22. [20]. Bir M modülü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa *α-Armendariz* modül olarak adlandırılır.

(1) Her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ dır ancak ve ancak $m\alpha(a) = 0$ dır.

(2) Her $m(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x,\alpha]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{s} a_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $m(x)f(x) = 0$, her i ve j için $m_i\alpha^i(a_j) = 0$ olmasını gerektirir.

Eğer bir M modülü 1-Armendariz ise M Armendariz'dir. [14] ten her $m(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x,\alpha]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{s} a_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $m(x)f(x) = 0$ olması her i ve j için $m_i\alpha_i(a_j) = 0$ olmasını gerektirir. Her α-Armendariz modül α-skew Armendariz' dir. Bazı pozitif n tamsayıları ve $\alpha^n = 1$ olacak şekilde R halkasının bir α endomorfizması için R α-skew Armendariz'dir [12] ve [14]; R halkası üzerinde her M modülü α-Skew'dir ancak ve ancak $R[x]$ üzerinde $M[x]$ α-Skew Armendariz'dir [21].

Teorem 4.1.23. [3]. *M bir α-indirgenmiş modül olsun. O halde M α-skew Armendariz modüldür. Özel olarak M indirgenmiş bir modül ise o zaman M bir Armendariz modüldür.*

İspat: M α-indirgenmiş modül $m(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i x^i \in M[x,\alpha]$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{s} a_j x^j \in R[x;\alpha]$ olsun. Eğer $m(x)f(x) = 0$ ise her i ve j için Lemma 4.1.17 den $m_i\alpha^i(a_j) = 0$ dır. Buradan M α-skew Armendariz modül olur. Özel olarak $\alpha = 1$ ise M Armendariz modül olur. □

4.2. İndirgenmiş ve Armendariz Modüller

Örnek 4.2.1. [19]. İndirgenmiş modüllerin özel örnekleri verilebilir:

(1). R nin bir indirgenmiş halka olması için gerek ve yeter koşul R_R nin bir indirgenmiş modül olmasıdır.

(2). Bir indirgenmiş modülün her alt modülü indirgenmiştir. Özel olarak, I, R indirgenmiş halkasının bir sağ ideali ise I_R bir indirgenmiş modül olur.

(3). p bir asal sayı ve $n > 1$ olsun. O zaman $p^{n-1}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir indirgenmiş modül olur.

(4). İndirgenmiş R-modüllerin her direk çarpımı indirgenmiş R-modüldür.

(5). $\mathbb{Z}$ üzerinde bir M modülünün indirgenmiş olması için gerek ve yeter koşul $m \in M$ için m nin torsion-free veya m kare-eş olmasıdır. Özel olarak, $n > 1$ için $\mathbb{Z}_n$ nin $\mathbb{Z}$ üzerinde bir indirgenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul n nin kare-eş olmasıdır.

Uyarı 4.2.2. [19]. *$1_S \in R$, $\alpha \in End(S)$, $\alpha(R) \subseteq (R)$ ve $M_R \subseteq L_S$ olacak şekilde R, bir S halkasının bir alt halkası olsun. Eğer L_S α-indirgenmiş modül ise, o zaman M_R de bir α-indirgenmiş modüldür.*

Not 4.2.3. *$M_n(R)$, R üzerinde $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası, I_n $n \times n$ tipinde birim matris, M_R modülü ve $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ için $\{MA = (ma_{ij}) : m \in M\}$ olsun. $n \geq 2$ için $\{E_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ birim matris ve*

$$V_n(R) = RI_n + RV + ... + RV^{n-1}$$

ve

$$V_n(M) = MI_n + MV + ... + MV^{n-1}$$

olmak üzere

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$$

olsun. O halde $V_n(R)$ bir halka ve matrislerde toplama ve çarpma işlemlerine göre $V_n(M)$, $V_n(R)$ üzerinde bir sağ modül olur.

$$\theta(r_0 I_n + r_1 V + ... + r_{n-1} V^{n-1}) = (r_0 + r_1 x + ... + r_{n-1} x^{n-1}) + (x^n)$$

şeklinde tanımlı $\theta : V_n(R) \to R[x]/x^n$ halka izomorfizması ve her $W \in V_n(M)$ ve $A \in V_n(R)$ için $\phi(WA) = \phi(W)\theta(A)$ olacak şekilde

$$\phi(m_0 I_n + m_1 V + ... + m_{n-1} V^{n-1})(m_0 + m_1 x + ... + m_{n-1} x^{n-1}) + M[x]x^n$$

ile tanımlı

$$\phi : V_n(M) \to M[x]/(M(x)(x^n))$$

Abelian grup izomorfizması vardır. Daha önce de tanımladığımız gibi $m(x) = \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \in M[x]$ ve $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \in R[x]$ olmak üzere $m(x)f(x) = 0$ olduğunda her i ve j için $m_i(a_j) = 0$ oluyorsa M modülüne Armendariz modül denir [Tanım 3.3.10]. Lemma 3.3.1 den her indirgenmiş modül Armendariz modüldür.

Teorem 4.2.4. [19]. *$n \geq 2$ ve $n \in Z$ olsun. M_R modülünün indirgenmiş olması için gerek ve yeter koşul $M[x]/M[x](x^n)$ modülünün $R[x]/(x^n)$ üzerinde bir sağ Armendariz modül olmasıdır.*

İspat: Yukarıdaki açıklamalardan, M_R nin indirgenmiş bir modül olması için gerek ve yeter koşul $V_n(M)_{V_n(R)}$ nin Armendariz olmasıdır.

$(\Leftarrow)$. $ma = 0$ fakat $m, m' \in M$ ve $a, r \in R$ için $mr = m'a \neq 0$ olsun. O halde

$$(mI_n) - (m'E_{1,n})x \in V_n(M)[x],$$

$$(aI_n) - (rE_{1,n})x \in V_n(R)[x],$$

$$[(mI_n) - (m'E_{1,n})x][(aI_n) - (rE_{1,n})x] = 0$$

fakat $(mI_n)(rE_{1,n}) = (mr)E_{1,n} \neq 0$ dır. Böylece $V_n(M)_{V_n(R)}$ Armendariz değildir.

$(\Rightarrow)$. $W(x) = \sum_{i=0}^{s} W_i x^i \in V_n(M)[x]$ ve $A(x) = \sum_{i=0}^{s} A_i x^i \in V_n(R)[x]$ olmak üzere $W(x)A(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. $i = 0, 1, ..., s$ için

$$W_i = m_0{}^{(i)} I_n + m_1{}^{(i)} V + ... + m_{n-1}{}^{(i)} V^{n-1}$$

ve

$$A_i = a_0{}^{(i)} I_n + a_1{}^{(i)} V + ... + a_{n-1}{}^{(i)} V^{n-1}$$

olsun. $i = 0, 1, ..., n-1$, $m_i(x) = m_i{}^{(0)} + m_i{}^{(1)} x + ... + m_i{}^{(s)} x^s$ ve $a_i(x) = a_i{}^{(0)} + a_i{}^{(1)} x + ... + a_i{}^{(s)} x^s$ olmak üzere $W(x)A(x) = 0$ olmasından,

$$[m_0(x)I_n + m_1(x)V + ... + m_{n-1}(x)V^{n-1}][a_0(x)I_n + a_1(x)V + ... + a_{n-1}(x)V^{n-1}] = 0$$

dır ve böylece $k = 0, 1, ..., n-1$ için

$$\sum_{i+j=k} m_i(x) a_j(x) = 0$$

dır. $0 \leqslant i + j \leqslant l$ olmak üzere her i, j için $0 < l < n-1$ ve $m_i(x)a_j(x) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$$(1) \qquad m_0(x)a_{l+1}(x) + m_1(x)a_l(x) + ... + m_l(x)a_1(x) + m_{l+1}(x)a_0(x) = 0$$

M_R indirgenmiş modül olduğundan Sonuç 3.3.4 ten $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ indirgenmiş modüldür. Böylece Uyarı 4.2.2 den $M[x]_{R[x]}$ indirgenmiş modüldür. O halde,

$$(2) \qquad 0 \leqslant i+j \leqslant l$$

olmak üzere her i,j için $m_i(x)R[x]a_j(x) = 0$ dır. (1) eşitliğini sağdan $a_0(x)$ ile çarparsak (2) den,

$$m_{l+1}(x)a_0(x)^2 = 0$$

elde edilir. $M[x]_{R[x]}$ indirgenmiş modül olduğundan $m_{l+1}(x)a_0(x) = 0$ dır. Böylece (1) den,

$$(3) \qquad m_0(x)a_{l+1}(x) + m_1(x)a_l(x) + ... + m_l(x)a_1(x) = 0$$

elde edilir. (3) eşitliğini sağdan $a_1(x)$ ile çarpalım ve (2) eşitliğinden

$$m_1(x)a_1(x)^2 = 0$$

elde edilir ve böylece $m_1(x)a_1(x) = 0$ olur. Benzer şekilde devam edilirse

$$m_{l+1}(x)a_0(x) = m_l(x)a_1(x) = ... = m_0(x)a_{l+1}(x) = 0$$

elde edilir. $0 \leqslant i+j \leqslant l+1$ olmak üzere her i,j için $m_i(x)a_j(x) = 0$ ispatlanmış olur. Tümevarımla $0 \leqslant i+j \leqslant n-1$ olmak üzere her i,j için $m_i(x)a_j(x) = 0$ elde edilir. Lemma 3.3.1 den $0 \leqslant i+j \leqslant n-1$ olacak şekilde her i,j ve her $0 \leqslant u,v \leqslant s$ için

$$m_i{}^{(u)}a_j{}^{(v)} = 0$$

olur. Bu ise $i,j = 0,...,s$ için $W_iA_j = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $V_n(M)_{V_n(R)}$ Armendarizdir. □

Sonuç 4.2.5. [19]. *$n \geq 2$ bir tamsayı olsun. R nin α-indirgenmiş bir halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x;x^{-1}]$ in indirgenmiş olmasıdır.*

Teorem 4.2.6. [4]. *$n \geq 2$ bir tamsayı olsun. R nin indirgenmiş bir halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x]/(x^n)$ in Armendariz olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. $R[x]/(x^n)$ Armendariz olsun. $r^n = 0$ olacak şekilde $r \in R$ olsun. r ile $\overline{x}$ yer değiştirilirse, T herhangi bir değişken olmak üzere

$$0 = r^n - \overline{x}^n T^n = (r - \overline{x}T)(r^{n-1} + r^{n-2}\overline{x}T + ... + \overline{x}^{n-1}T^{n-1})$$

dır. $R[x]/(x^n)$ Armendariz olduğundan $r\overline{x}^{n-1} = 0$ ve böylece $r = 0$ olur. O halde R indirgenmiştir.

$(\Leftarrow)$. R indirgenmiş olsun. $R[x]/(x^n)$ deki $\overline{x}$ yı u ile gösterelim. O halde u yu R nin elemanları ile yer değiştirirsek $R[x]/(x^n) = R[u] = R + Ru + ... + Ru^{n-1}$ ve $u^n = 0$ elde edilir. $fg = 0$ olacak şekilde $f, g \in R[u][T]$ olsun. $f_i, g_i \in R[T]$ olmak üzere $f = f_0 + f_1 u + ... + f_{n-1}u^{n-1}$ ve $g = g_0 + g_1 u + ... + g_{n-1}u^{n-1}$ olarak yazabiliriz. $i + j \geq n$ olmak üzere $f_i u^j$ ve $g_j u^j$ için $f_i u^i$ nin katsayıları $u^{i+j} = 0$ olduğundan $g_j u^j$ nin katsayılarının sıfırlayanıdır. $i + j < n$ olduğundan $f_i g_j = 0$ olduğunu göstermeliyiz ve böylece R indirgenmiş olduğundan Armendariz olur. f_i nin katsayıları g_j nin katsayılarının sıfırlayanlarıdır. O halde f nin katsayıları g nin katsayılarının sıfırlayanlarıdır.

$$0 = fg = (f_0 + f_1 u + ... + f_{n-1}u^{n-1})(g_0 + g_1 u + ... + g_{n-1}u^{n-1})$$

$$= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0)u + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)u^2 + ... + (f_0 g_{n-1} + ... + f_{n-1} g_0)u^{n-1}$$

olur. Böylece

$$0 = f_0 g_0 = f_1 g_0 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = ... = f_0 g_{n-1} + ... + f_{n-1} g_0$$

elde edilir. Lemma 3.3.15 in ispatı ile eğer $i + j < n$ ise $f_i g_j = 0$ olur. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Agayev, N. 2006. Semicommutative rings and modules depending on mappings (Ph.D. Thesis). Gazi University Institute of Science and Technology.

[2] Agayev, N. and Harmanci, A. 2007. On semicommutative modules and rings. **Kyunpook Math. J.** 47 (1), 21-30.

[3] Agayev, N., Halicioglu S., and Harmanci, A. 2009. On reduced modules. **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1**, Vol. 58, Number 1, Pages 9-16.

[4] Anderson, D. and Camillo, V. 1998. Armendariz rings and Gaussion rings. **Comm. Algebra**, 26(7), 2265-2272.

[5] Armendariz, E. P. 1974. A note on extensions of Baer and $p.p$-Rings. **J. Australian Math. Soc.**, 18, 470-473.

[6] Baser, M. and Agayev, N. 2006. On reduced and semicommutative modules. **Turk J Math.**, 30, 285-291.

[7] Baser, M. and Harmanci, A. 2007. Reduced and $p.q.$-Baer Modules. **Taiwanese Journal of Math.**, Vol. 11, No. 1, pp. 267-275.

[8] Birkenmeier G. F. 1983. Idempotents and completely semiprime ideals. **Comn. Algebra.**, 11, 567-580.

[9] Birkenmeier G. F., Kim. J. Y. and Park J. K. 2001. On extensions of quasi-Baer and Principally quasi-Baer rings. **J. Pure Appl. Algebra**, 159, 25-42.

[10] Birkenmeier G. F., Kim. J. Y. and Park J. K. 2001. Principall Quasi-Baer Rings. **Comm. Algebra**, 29(2), 639-660.

[11] Buhpang, A. M. and Rege, M. B. 2002. Semi-commutative Modules and Armendariz Modules. **Arap J. Mathematical Sciences**, 18, 53-65.

[12] Chen, W. X. and Tong, W. T. 2005. A note on skew Armendariz rings. **Com. Algebra**, 33, 1137-1140.

[13] Clark, W. E. 1967. Twisted matrix units semigroup algebras. **Duke Math J.**, 34, 417-424.

[14] Hong, C. Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K. 2000. Ore Extensions of Baer and $p.p.$-Rings. **J. Pure Appl. Algebra**, 151, 215-226.

[15] Kaplansky, I. 1965. Rings of operators. Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin, New York.

[16] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph, no.17.

[17] Krempa, J. 1996. Some examples of reduced rings. **J.Algebra Collog.**, 4(4), 289-300.

[18] Lam, T. Y. 1999. Lectures on Modules and Rings. Springer-Verlag, New York.

[19] Lee, T. K. and Zhou, Y. 1991. Reduced Modules. MSC:Primary 16D80, 16S36.

[20] Lee, T. K. and Zhou, Y. 2004. Reduced modules, rings, modules, algebras and abelian groups, 365-377, **Lecture Notes in Pure and Appl. Math.**, 236, Dekker, New York.

[21] Zhang, C. and Chen, J. 2008. α-Skew Armendariz Modules and α-semicomutative modules. **Taiwanese J. Math.**, 12 (2), 473-486.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Aslıhan ALTUN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Rize, 20.03.1986

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Ege Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
- -SCI :
- -Diğer :

b) Bildiriler
- -Uluslararası :
- -Ulusal :

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Milli Eğitim Bakanlığı, (2010 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi : altun.aslihan@hotmail.com

Tarih :