T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2016-DR-005

BANACH CEBİRLERİNDE TÜREVLER

Berna ARSLAN

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Berna ARSLAN tarafından hazırlanan "Banach Cebirlerinde Türevler" başlıklı tez, 25.05.2016 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	:	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	:	Prof. Dr. Alev FIRAT	Ege Üniv.	
Üye	:	Prof. Dr. Ali GÜVEN	Balıkesir Üniv.	
Üye	:	Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ	Adnan Menderes Üniv.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

25.05.2016

Berna ARSLAN

ÖZET

BANACH CEBİRLERİNDE TÜREVLER

Berna ARSLAN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ
2016, 118 sayfa

Bu tezin amacı, Banach cebirlerde modül amenabilite üzerine genelleştirmeler yapmak ve bazı türev çeşitlerinin Hyers-Ulam-Rassias anlamında stabil olmasını sağlayacak koşulları araştırmaktır. Bunun için yeni kavramlar tanıtılmış ve yeni özellikler elde edilmiştir.

Tez, esas olarak altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, Banach cebirlerin amenabilitesi ve türev çeşitlerinin stabilitesi ile ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştıracak bazı temel tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, tez konusunun tarihi gelişimi hakkında genel bir bilgi vermek amacıyla konu ile ilgili yapılmış olan önemli çalışmalardan bazıları derlenmiştir.

Beşinci bölümde, (σ)-n-zayıf modül amenable Banach cebirleri tanıtılmış ve bu konuyla ilgili yeni sonuçlara ulaşılmıştır.

Altıncı bölümde, k. kısmi üçlü kuadratik türevlerin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi Arşimet olmayan Banach üçlü cebirlerde incelenmiştir ve sabit nokta metodu kullanılarak bazı özellikler elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Banach cebiri, Banach bimodül, türev, modül amenabilite, Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi, Arşimet olmayan Banach üçlü cebir.

ABSTRACT

DERIVATIONS ON BANACH ALGEBRAS

Berna ARSLAN

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Hülya İNCEBOZ

2016, 118 pages

The objective of this thesis is to make generalizations on module amenability, and to investigate the conditions to ensure that some types of derivations are stable in the sense of Hyers-Ulam-Rassias in Banach algebras. For this reason, some new notions have been introduced and some new properties have been obtained.

The thesis mainly consists of six chapters. In the first chapter, short informations about some works which have been done in the literature related to amenability of Banach algebras and stability of some types of derivations have been given.

In the second chapter, some basic definitions and properties which make easy reading of this thesis are given.

In the third and fourth chapters, some important works have been done so far related to this subject are compiled to give an overview about the historical development of the topic of the thesis.

In the fifth chapter, (σ)-n-weak module amenable Banach algebras have been introduced and obtained some new results about this notion.

In the sixth chapter, Hyers-Ulam-Rassias stability of the k-th partial ternary quadratic derivations have been investigated in non-Archimedean Banach ternary algebras, and get some properties by using the fixed point method.

Key Words: Banach algebra, Banach bimodule, derivation, module amenability, Hyers-Ulam-Rassias stability, non-Archimedean Banach ternary algebra.

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca, değerli bilgi ve birikiminden faydalandığım, görüşlerini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) bana gösterdiği destek ve anlayışı için yürekten teşekkür ederim. Tüm yaşamım boyunca her koşulda bana duydukları güvenle, desteklerini yanımda hissettiğim anneme, babama ve kardeşlerime; hayatımın her aşamasında benden desteğini esirgemeyen her koşulda yanımda olan, bu çalışma süresince tezin biçimlenmesine de büyük katkı sağlayan sevgili eşim Yrd. Doç. Dr. Okan ARSLAN'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) ve bu süreçte bir nebze de olsa ihmal ettiğim canım kızım Zeynep'e göstermiş oldukları sabır ve anlayışlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez, Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından FEF-14010 kod numaralı bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Berna ARSLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	$=\{0,1,2,\ldots\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	$=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$[x,y]$	$=xy-yx$ (kommutator çarpım)
$[xyz]$	x, y ve z elemanlarının üçlü çarpımı
$A^\sharp$	A nın birimlileştirilmişi
$\otimes$	cebirsel tensör çarpımı
$\hat{\otimes}$	projektif tensör çarpımı
$\Vert.\Vert_\pi$	projektif tensör normu
$0_R=0$	R halkasının sıfırı
e_R	Birimli R halkasının birimi
$I_R=I$	R halkasının birim dönüşümü
$\mathfrak{L}(E,F)$	E den F ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$\mathfrak{L}(E)=\mathfrak{L}(E,E)$	E den E ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$\mathfrak{B}(E,F)$	E den F ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathfrak{B}(E)=\mathfrak{B}(E,E)$	E den E ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$Hom(E,F)$	E den F ye tüm sınırlı homomorfizmaların kümesi
$Hom(E)=Hom(E,E)$	E den E ye tüm sınırlı homomorfizmaların kümesi
B^*	B nin dual uzayı
$M_n(R)$	R halkası üzerinde tüm $n\times n$ tipindeki matrislerin halkası
$\ell^\infty(X)$	X den $\mathbb{C}$ ye sınırlı fonksiyonların kümesi
$C(X)$	X den $\mathbb{C}$ ye sürekli fonksiyonların kümesi
$\ell^1(S)$	S nin yarıgrup cebiri
$L^\infty(G)$	G üzerinde esaslı sınırlı fonksiyonların kümesi
$L^1(G)$	G nin grup cebiri
$M(G)$	G nin ölçü cebiri
$\mathcal{B}(X)$	X üzerinde Borel σ-cebiri
$Z(A)$	A cebirinin merkezi
$*$	konvolüsyon
$\vert.\vert_p$	p-sel mutlak değer

$\mathbb{Q}_p$	p-sel sayılar cismi
$\operatorname{Ker}\varphi$	φ homomorfizmasının çekirdeği
$\operatorname{Im}\varphi$	φ homomorfizmasının görüntüsü
$J^{\perp}$	J nin sıfırlayıcısı
$Z^1(A,E)$	A dan E ye tüm sınırlı türevlerin kümesi
$B^1(A,E)$	A dan E ye tüm iç türevlerin kümesi
$H^1(A,E)$	Birinci Hochschild kohomoloji grubu
$Hom_{\mathfrak{A}}(A,B)$	A dan B ye tüm $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmaların uzayı
$Hom_{\mathfrak{A}}(A) = Hom_{\mathfrak{A}}(A,A)$	A dan A ya tüm $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmaların uzayı
$Z^{\mathfrak{A}}(A,X)$	A dan X e tüm modül türevlerin kümesi
$B^{\mathfrak{A}}(A,X)$	A dan X e tüm modül iç türevlerin kümesi

1. GİRİŞ

Günümüzde halka teoride olduğu kadar Banach cebir teorisinde de türevler hakkında birçok araştırma yapılmaktadır. Banach cebirleri üzerindeki türevler ile ilgili ilk çalışma, I. M. Singer ve J. Wermer tarafından 1955 yılında yapılmıştır [73]. Bu çalışmada, bir değişmeli Banach cebiri üzerindeki herhangi bir sürekli türevin, cebirin Jacobson radikali içinde değer aldığı ispatlanmıştır. I. M. Singer ve J. Wermer [73], bu teorem ile ilgili olarak türev üzerindeki süreklilik şartının kaldırılabileceğini öne sürmüşlerdir. Bu varsayım, Banach cebirleri üzerindeki türevlerin otomatik sürekliliği hakkındaki araştırmalara ışık tutmuştur.

Otomatik süreklilik teorisinde, Banach uzayları arasındaki bir lineer dönüşümün sürekliliğini zorunlu kılacak cebirsel koşulların neler olabileceği araştırılmaktadır. Bu teori üzerine yapılan çalışmalar, Banach cebirleri üzerindeki homomorfizma ve türevlerde yoğunlaşmıştır.

Singer-Wermer varsayımı, 1988 yılında M. P. Thomas [75] tarafından gerçeklenmiştir. Daha sonraki araştırmalarda aynı teorem, değişmeli olmayan Banach cebirlerine genelleştirilmek istenmiştir. Bu konuda birçok çalışma yapılmış ve sadece kısmi cevaplar elde edilmiştir. Bu varsayım üzerine çalışmalar halen devam etmektedir.

Son yıllarda Banach cebirleri üzerindeki türevler ile ilgili en çok çalışılan konulardan birisi amenabilite kavramıdır. Banach cebirlerinin amenabilitesi, ilk olarak B. E. Johnson [47] tarafından 1972 yılında çalışılan kohomolojik bir özelliktir.

Amenabilite kavramı, ilk kez 1929 yılında J. von Neumann [77] tarafından ayrık gruplarda ele alınmıştır. Ancak "amenabilite" terimini ilk kullanan 1949 yılında M. M. Day [28] olmuştur. Day, yerel kompakt grupların amenabilitesi üzerine önemli çalışmalar yapmıştır. G bir yerel kompakt grup olmak üzere $L^{\infty}(G)$ üzerinde sol değişmez bir mean bulunabiliyorsa G grubuna amenable denir.

B. E. Johnson [47], çalışmasında bir G yerel kompakt grubu üzerindeki sol değişmez meanler ile $L^1(G)$ Banach cebiri üzerindeki türevler arasında bir bağlantı kurarak Hochschild kohomoloji yardımıyla Banach cebirlerinde amenabilite tanımını vermiştir. A bir Banach cebiri olmak üzere eğer A dan herhangi bir dual Banach A-bimodüle tanımlı her sınırlı türev bir iç türev ise A Banach cebirine amenable denir. Johnson [47], G bir yerel kompakt grup olmak üzere $L^1(G)$ Banach cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşulun G nin amenable olması gerektiğini kanıtlamıştır.

Daha sonraki yıllarda, amenable Banach cebirler üzerine pek çok karakterizasyon yapılmış ve bu teori geliştikçe zayıf amenabilite, (σ,τ)-zayıf amenabilite, n-zayıf amenabilite, ideal amenabilite, karakter amenabilite, simetrik amenabilite gibi birçok farklı kavram ortaya çıkmıştır. Bu önemli tanımlamalardan bir diğeri ise M. Amini tarafından 2004 yılında *modül amenabilite* olarak verilmiştir [1].

Johnson [47]'ın teoremi, ayrık yarıgruplar için gerçeklenmez. Yarıgrup cebirlerinde bu teoremin geçerli olmama durumu, Amini'nin Banach cebirlerin bir sınıfı için modül amenabilite kavramını geliştirmesine olanak sağlamıştır. $\mathfrak{A}$ bir Banach cebiri ve A, modül etkileri ile bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olmak üzere A dan herhangi bir dual değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modüle tanımlı her modül türev bir modül iç türev ise A Banach cebirine modül amenable denir.

Amini [1], bu çalışmasında S bir ters yarıgrup ve E de S nin tüm idempotent elemanlarının kümesi olmak üzere $\ell^1(S)$ yarıgrup cebirinin $\ell^1(E)$-modül amenable olması için gerek ve yeter koşulun S nin amenable olması gerektiğini ispatlamıştır. Daha sonra A. Bodaghi [10], 2010 yılında modül amenabilite kavramını σ,τ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmaları yardımıyla genelleştirmiştir.

Banach cebirlerin zayıf modül amenabilitesi, M. Amini ve D. Ebrahimi Bagha [3] tarafından tanıtılmış, M. Amini ve A. Bodaghi [2] tarafından 2010 yılında ayrıntılı olarak çalışılmıştır. $\mathfrak{A}$ bir Banach cebiri ve A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olmak üzere eğer bir A-altbimodül ve değişmeli Banach $\mathfrak{A}$-altbimodül olan her $Y \subseteq A^*$ altkümesi için, A dan Y uzayına tanımlı her modül türev bir modül iç türev ise A Banach cebirine zayıf modül amenable denir [2].

A. Bodaghi, M. Amini ve R. Babaee [13], 2011 yılında n-zayıf modül amenabilite kavramını tanıtmışlardır ve her n tek tamsayısı için $\ell^1(S)$ yarıgrup cebirinin n-zayıf $\ell^1(E)$-modül amenable olduğunu ispatlamışlardır.

Günümüzde, Banach cebirleri üzerinde tanımlı türevler ile ilgili bir başka çalışma konusu da Hyers-Ulam-Rassias stabilitesidir. Fonksiyonel denklemlerin stabilite kavramı, ilk olarak grup homomorfizmalarının stabilitesi şeklinde S. M. Ulam [76] tarafından 1940 yılında bir problem ile öne sürülmüştür. Bu problemde, verilen fonksiyonel denklem için bir yaklaşık çözüm seçildiğinde, bu yaklaşık çözüme yakın olacak bir gerçek çözüm bulmanın mümkün olup olamayacağı sorulmuştur. Eğer bu problemin çözümü mümkün ise, o zaman verilen fonksiyonel denklem stabildir denir. Eğer verilen fonksiyonel denklem için seçilen yaklaşık çözüm aslında gerçek çözümün kendisi oluyorsa, bu fonksiyonel denkleme süper stabildir denir.

Esas olarak bu teoride, fonksiyonel denklemlerin stabil veya süper stabil olmasını sağlayacak koşullar araştırılmaktadır. İlk olarak 1941 de D. H. Hyers [44], Banach uzaylarında Ulam'ın problemini toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi için kısmen çözmüştür. 1978 de yayınladığı makalesinde Th. M. Rassias [66], Hyers'in sonucunu genelleştirmiş ve birçok matematikçiyi önemli pek çok fonksiyonel denklemin stabilitesini araştırmak için fonksiyonel denklemler üzerine çalışmaya teşvik etmiştir.

Operatör cebirleri arasındaki türevlerin stabilitesi ile ilgili sonuçlar ilk olarak P. Šemrl tarafından 1994 yılında elde edilmiştir [72]. Son zamanlarda da türev çeşitlerinin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi ile ilgili olarak ulaşılan sonuçlardan bazıları şu şekildedir:

Direkt metod yaklaşımı ile, 2006 yılında M. S. Moslehian [55], genelleştirilmiş türevlerin stabilitesini birimli Banach cebirlerinde, K.-W. Jun ve H.-M. Kim, 2007 yılında türevler ile Jordan türevlerin stabilitesini Banach cebirlerinde araştırmışlardır [49]. Arşimet olmayan Banach cebirlerde, kuadratik türevlerin stabilitesi C. Park, S. Shagholi, A. Javadian, M. B. Savadkouhi ve M. E. Gordji [61] tarafından 2014 yılında incelenmiştir.

2010 yılında, M. Eshaghi, M. B. Savadkouhi, M. Bidkham, C. Park ve J. R. Lee [32] ilk kez k. kısmi üçlü türev tanımını vererek Banach üçlü cebirlerde k. kısmi üçlü türevlerin stabilitesini direkt metod yaklaşımı ile incelemişlerdir. Daha sonra 2011 yılında A. Javadian, M. E. Gordji ve M. B. Savadkouhi [45], k. kısmi üçlü kuadratik türevlerin stabilitesini Banach üçlü cebirlerde aynı yaklaşım ile ele almışlardır.

L. Cadariu ve V. Radu [19], 2003 yılında fonksiyonel denklemlerin stabilitesini araştırırken sabit nokta metodu olarak adlandırılan farklı bir yaklaşım kullanmışlardır. Günümüze kadar bu yaklaşımla birçok genelleştirme yapılmıştır. Örneğin, M. E. Gordji, A. Najati ve A. Ebadian, bu metodu 2011 yılında Banach cebirlerde genelleştirilmiş Jensen fonksiyonel denklemi yardımıyla Jordan türevlerin stabilitesini elde etmek için kullanmıştır [37].

2012 yılında Y. J. Cho, R. Saadati ve J. Vahidi ise sabit nokta metodunu kullanarak m-değişkenli toplamsal bir fonksiyonel denklem ile Arşimet olmayan C^*-cebirlerde türevlerin stabilitesini araştırmışlardır [21].

Bu tez çalışmasının amacı, Banach cebirlerin modül amenabilitesi ve türev çeşitlerinin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi ile ilgili yeni özellikler elde etmektir.

Bu amaçla öncelikle, n-zayıf modül amenable Banach cebirleri, modül homomorfizmaları kullanılarak genelleştirilmiştir ve bu konuda yeni kavramlar tanıtılarak bazı örneklere yer verilmiştir. Burada elde edilen en önemli sonuç, S bir ters yarıgrup ve E, S nin idempotent elemanlarının kümesi olmak üzere her σ $\ell^1(E)$-modül homomorfizması ve her n tek tamsayısı için $\ell^1(S)$ yarıgrup cebirinin, aşikar sol etki ve doğal sağ etki ile birlikte (σ)-n-zayıf $\ell^1(E)$-modül amenable olduğudur.

Daha sonra, türev çeşitlerinin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi hakkında farklı yaklaşımlarla yeni özellikler elde etmek ve şimdiye kadar elde edilen özelliklerin çalışılan uzay değiştirildiğinde de sağlanıp sağlanmadığını araştırmak amacıyla k. kısmi üçlü kuadratik türevler ile k. kısmi üçlü kuadratik $*$-türevlerin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi, sabit nokta metodu kullanılarak, sırasıyla, Arşimet olmayan Banach üçlü cebirler ve Arşimet olmayan C^*-üçlü cebirlerde incelenmiş ve bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE BAZI TEOREMLER

Bu bölümde, Banach Cebirleri teorisinde iyi bilinen bazı temel kavramlar ile diğer bölümlerde gerekli olacak bazı özellikler alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

2.1. Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1. [43] R ve R' herhangi iki halka ve $f : R \to R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise o zaman f dönüşümüne bir *halka homomorfizması*, özel olarak $R = R'$ ise f ye R nin bir *endomorfizması* denir. $\operatorname{Ker} f = \{a \in R \mid f(a) = 0_{R'}\}$ kümesine de f homomorfizmasının *çekirdeği* denir.

Tanım 2.1.2. M bir toplamsal değişmeli grup ve R bir halka olsun. $\cdot : R \times M \to M$, $(r,x) \mapsto r \cdot x$ ile tanımlanan dış işlem, her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için

(i) $r \cdot (x+y) = r \cdot x + r \cdot y$

(ii) $(r+s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$

(iii) $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$

şartlarını sağlıyorsa M ye bir *sol R-modül* denir. Bu koşullara ek olarak R halkası birimli ve e_R, R nin birimi olmak üzere

(iv) $e_R \cdot x = x$

şartı da sağlanıyorsa M ye *birimsel sol R-modül* denir.

Eğer R bir bölüm halkası ve M bir birimsel sol R-modül ise M ye *R üzerinde bir sol vektör uzayı* denir.

Sağ R-modül ve R üzerinde bir sağ vektör uzayı da benzer şekilde tanımlanır. Eğer R halkası değişmeli ise M sol veya sağ R-modüle kısaca *R-modül* adı verilir.

Tanım 2.1.3. M bir sol R-modül ve N, M nin boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. Her $x,y \in N$ ve her $r \in R$ için $x-y \in N$ ve $r \cdot x \in N$ koşulları sağlanıyorsa N kümesine M nin *sol R-altmodülü* denir.

Tanım 2.1.4. M bir sol R-modül ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$, M nin altmodülleri olsun. $1 \leq i \leq n$ için

$$A_i \cap (A_1 + \cdots + A_{i-1} + A_{i+1} + \cdots + A_n) = \{0\}$$

ise $A_1 + \cdots + A_n$ altmodülüne, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ altmodüllerinin *direkt toplamı* denir ve $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ ile gösterilir. $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ direkt toplamının her x elemanı, $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in A_i$ olmak üzere $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ biçiminde tek türlü yazılır.

Tanım 2.1.5. [43] R bir halka, M ve N iki sol R-modül olsun. Toplamsal bir $f : M \to N$ fonksiyonu her $x \in M$ ve her $r \in R$ için,

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna bir *sol R-modül homomorfizması* denir. Eğer R bir bölüm halkası (veya cisim) ve M ile N birer R-vektör uzayı ise f fonksiyonuna bir *lineer dönüşüm* (ya da kısaca R-lineerdir) denir. M den N ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi $\mathfrak{L}(M,N)$ ile gösterilir. $\mathfrak{L}(M,N)$, bilinen işlemler ile bir R-vektör uzayıdır. $\mathfrak{L}(M,M)$ uzayı, kısaca $\mathfrak{L}(M)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.6. [25] M bir R-vektör uzayı ve N, M nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer bir $P \in \mathfrak{L}(M)$ dönüşümü,

$$P(M) = N \quad \text{ve} \quad P(x) = x \quad (x \in N)$$

özelliklerini sağlarsa bu dönüşüme N üzerine bir *projeksiyon* denir.

Tanım 2.1.7. [43] M_n $(n \in \mathbb{Z})$ R-modüller ve $f_n : M_n \to M_{n-1}$ R-modül homomorfizmalarından oluşan

$$\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots$$

dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $\operatorname{Im} f_{n+1} = \operatorname{Ker} f_n$ ise o zaman bu diziye bir *tam dizi* denir.

Lemma 2.1.8. [43] *A, B, C herhangi üç R-modül olsun.*

$$0 \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \to 0$$

dizisi tam ise o zaman g bir monomorfizma ve h bir epimorfizmadır. Ayrıca $\operatorname{Im} g \cong A$ *ve* $C \cong B/\operatorname{Im} g$ *dir. Böylece izomorf gruplar özdeşleştirilerek* $C = B/A$ *yazılabilir.*

Sonuç 2.1.9. [43] *Lemma 2.1.8 deki dizinin tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul* $\operatorname{Ker} g = 0$, $\operatorname{Im} h = C$ *ve* $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} h$ *olmasıdır.*

Tanım 2.1.10. [43] A, B, C herhangi üç R-modül olmak üzere

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

şeklindeki tam diziye *kısa tam dizi* denir.

Lemma 2.1.11. [43] *A, B, C herhangi üç R-modül olmak üzere*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) $h \circ f = I_A$ *olacak şekilde bir* $h : B \to A$ *homomorfizması bulunur;*

(ii) $\operatorname{Im} f$, *B R-modülünün direkt toplananıdır;*

(iii) $g \circ k = I_C$ *olacak şekilde bir* $k : C \to B$ *homomorfizması bulunur. Bu durumda* $B \cong A \oplus C$ *dir.*

Tanım 2.1.12. Yardımcı Özellik 2.1.11 deki denk koşullardan biri gerçeklendiğinde,

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

kısa tam dizisine *parçalanabilir kısa tam dizi* denir.

Tanım 2.1.13. X boş olmayan herhangi bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanıyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metriktir*, denir. Üzerinde bir d metriği tanımlı olan X kümesine de *metrik uzay* denir ve genellikle (X,d) ile gösterilir.

Uyarı 2.1.14. *(i) X kümesinin öğelerine (X,d) metrik uzayının noktaları denir.*
(ii) d metrik fonksiyonuna, genellikle uzaklık fonksiyonu da denir. $d(x,y)$ değeri, d fonksiyonuna göre x ve y noktaları arasındaki uzaklığı belirtir.
(iii) Tanım 2.1.13 deki (i) koşulu "$x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$" şeklinde değiştirilirse diğer iki koşul ile birlikte d ye X üzerinde bir yarı-metrik (semimetric) adı verilir.

Tanım 2.1.15. (X,d) bir metrik uzay olsun. Herhangi $x \in X$ noktası ve herhangi $r > 0$ reel sayısı için

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$$

kümesine *x merkezli r yarıçaplı açık yuvar*;

$$B_r[x] = \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$$

kümesine *x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar* denir. Eğer $r = 1$ ve $x = 0$ ise $B_1(0)$ kümesine *açık birim yuvar* ve $B_1[0]$ kümesine *kapalı birim yuvar* adı verilir.

Tanım 2.1.16. (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

(i) Her $x,y \in A$ için $d(x,y) < K$ olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı var ise A kümesine *sınırlı* denir.
(ii) Her $x \in A$ için $B_\varepsilon(x) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A kümesine *açık küme* denir.
(iii) $X \setminus A$ kümesi açık ise A kümesine *kapalı küme* denir.
(iv) A kümesini kapsayan X in tüm kapalı altkümelerinin arakesitine A kümesinin *kapanışı* adı verilir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Yani $\overline{A} = \cap\{K \mid A \subset K,\ K \text{ kapalı küme}\}$ dir.

(v) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\overline{A} = A$ olmasıdır.

(vi) $\overline{A} = X$ ise A kümesi X uzayında *yoğun bir kümedir* denir.

Tanım 2.1.17. X boş olmayan bir küme ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına f fonksiyonunun bir *sabit noktası* denir.

Tanım 2.1.18. (X,d) metrik uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

(i) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için

$$d(x,x_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in M$ noktasına *yakınsar* (ya da $\{x_n\}$ dizisi *yakınsaktır*) denir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ yazılır.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m,n \geq N$ için

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.19. (X,d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tamdır* denir.

Her metrik uzay tam değildir, ancak her metrik uzayın bir tamlanışı vardır.

Tanım 2.1.20. (X,d_X) ve (Y,d_Y) metrik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y \in X$ için $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$ sağlanırsa o zaman f ye bir *izometri (metrik koruyan)* denir.

Tanım 2.1.21. Bir (X,d_X) metrik uzayının *tamlanışı* aşağıdaki koşulları sağlayan bir (Y,d_Y) metrik uzayı ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonudur:

(i) Y tam metrik uzaydır;

(ii) f, Y içine bir izometridir;

(iii) $f(X)$, Y içinde yoğundur.

Teorem 2.1.22. [74] *Her (X,d) metrik uzayının bir tamlanışı vardır ve bu tamlanış izometri anlamında tektir.*

Tanım 2.1.23. G bir grup ve d, G üzerinde bir metrik olsun. Eğer her $x,y,z \in G$ için $d(y,z) = d(xy,xz)$ oluyorsa o zaman d ye *sol değişmez metrik* adı verilir. Benzer şekilde sağ değişmez metrik de tanımlanır.

Tanım 2.1.24. G bir grup ve d, G üzerinde bir sol değişmez metrik olsun. G üzerinde $x \mapsto x^{-1}$ ile tanımlı fonksiyon sürekli ise G ye bir *metrik grup* denir.

Tanım 2.1.25. X bir $\mathbb{F}$-vektör uzayı ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için,

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. Üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olan X vektör uzayına *normlu uzay* adı verilir ve $(X, \|.\|)$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.26. *(i) $(X, \|.\|)$ normlu uzayı verilsin. $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x-y\|$ ile tanımlı fonksiyon X üzerinde bir metrik tanımlar. Bu durumda d ye $\|.\|$ normu tarafindan indirgenen metrik adı verilir.*
(ii) Her normlu uzay bir metrik doğurur. Ancak metrik uzay olan bir vektör uzayı üzerindeki her metrik, bir norm yardımıyla elde edilemez. Örneğin, $\emptyset \neq X$ vektör uzayı üzerinde

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \;\; d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ile tanımlı d ayrık metriğini verecek bir norm yoktur. Çünkü $0 \neq x \in X$ olmak üzere $d(x,0) = 1$ dir, ve eğer $|\alpha| \neq 0,1$ olarak alınırsa

$$|\alpha| \, d(x,0) = |\alpha| \neq 1 = d(\alpha x, 0)$$

olduğu görülür.

(iii) Bir normlu uzay içinde, bir metrik ya da bir metrik uzay kavramı kullanıldığında (örneğin, yakınsaklık, süreklilik veya tamlık), daima bu normun indirgediği metrik anlaşılacaktır.

(iv) *Tanım 2.1.25 deki (i) koşulu "$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$" şeklinde değiştirilirse diğer iki koşul ile birlikte $\|.\|$ ye X üzerinde bir yarı-norm (seminorm) adı verilir.*

Tanım 2.1.27. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise, yani X teki her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise, X e bir *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.28. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $\{x_k\}$, X içinde bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ye dizinin *n. kısmi toplamı* adı verilir. Eğer X içinde $\lim_{n\to\infty} s_n$ varsa, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine *yakınsaktır* denir. Kısaca $\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$ olarak gösterilir ve bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

ile tanımlanır. Eğer X içindeki bir $\{x_k\}$ dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ serisi $\mathbb{R}$ içinde yakınsak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine *mutlak yakınsaktır* denir.

Teorem 2.1.29. *Normlu bir X uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul X deki her mutlak yakınsak serinin yakınsak olmasıdır.*

Tanım 2.1.30. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve M, X in bir altuzayı olsun. $X/M = \{x + M \mid x \in X\}$ kümesi, her $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$ için

$$(x+M) + (y+M) = (x+y) + M \quad \text{ve} \quad \alpha \cdot (x+M) = (\alpha \cdot x) + M$$

işlemleriyle bir vektör uzayıdır. X/M uzayına, M altuzayına göre X in *bölüm (quotient) uzayı* adı verilir. Eğer M, X in kapalı bir altuzayı ise X/M deki norm

$$\|x+M\| := \inf\{\|x+m\| \mid m \in M\} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda X/M bölüm uzayı, (2.1) ile bir normlu uzaydır. Üstelik, X bir Banach uzayı ise X/M bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.1.31. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar, $f : X \to Y$ (lineer olması gerekmeyen) bir fonksiyon ve belli bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in X$ için,

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında *süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f (X üzerinde) süreklidir denir.

Tanım 2.1.32. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|Tx\|_Y \leq k.\|x\|_X$ olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı varsa T ye *sınırlıdır* denir.

Bir operatörün sınırlılığı ve sürekliliği arasındaki ilişki, aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 2.1.33. [52, Teorem 7A] *X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

(i) T süreklidir.

(ii) T, bir noktada süreklidir.

(iii) T sınırlıdır.

Tanım 2.1.34. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne bir *izometri (norm koruyan)* denir. Aşikar olarak, T birebirdir. Eğer T lineer dönüşümü, X den Y ye örten bir izometri ise o zaman T ye *izometrik izomorfizma* adı verilir.

X ve Y normlu uzaylar olmak üzere X den Y ye bütün sürekli lineer dönüşümlerin kümesi $\mathfrak{B}(X,Y)$ ile gösterilecektir. Teorem 2.1.33 den dolayı $\mathfrak{B}(X,Y)$ nin elemanları ayrıca sınırlı lineer operatör adını da alır.

$S,T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ olsun. Her $x \in X$ ve her α skaleri için,

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x) \text{ ve } (\alpha T)(x) = \alpha(T(x))$$

işlemleri ile $\mathfrak{B}(X,Y)$ bir vektör uzayıdır.

$$\|.\| : \mathfrak{B}(X,Y) \to \mathbb{R},\ \|T\| = \sup\{\|T(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

fonksiyonu, $\mathfrak{B}(X,Y)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Bu norma T nin *operatör normu* adı verilir.

Teorem 2.1.35. [70, Teorem 4.1] *Eğer X bir normlu uzay ve Y bir Banach uzayı ise o zaman $\mathfrak{B}(X,Y)$ bir Banach uzayıdır.*

Tanım 2.1.36. X, $\mathbb{F}$ üzerinde bir normlu uzay olsun. $\mathfrak{B}(X,\mathbb{F})$ uzayına X in *dual uzayı* denir ve X^* $(= X^{(1)})$ ile gösterilir. X^* uzayının elemanlarına X üzerinde bir *sürekli lineer fonksiyonel* adı verilir.

Sonuç 2.1.37. *X^* bir Banach uzayıdır.*

Uyarı 2.1.38. *Bir X normlu uzayı üzerindeki herhangi bir φ lineer fonksiyoneli için*

$$< x, \varphi > := \varphi(x) \qquad (x \in X)$$

notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 2.1.39. X ve Y birer normlu uzay ve $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ olsun.

(i) $x \in X$, $f \in Y^*$ olmak üzere $< x, T^*(f) > = < T(x), f >$ olacak şekilde bir tek $T^* \in \mathfrak{B}(Y^*, X^*)$ operatörü vardır. T^* operatörüne T nin *duali* denir.
(ii) $g \in Y^*$, $h \in X^{**}$ olmak üzere $< g, T^{**}(h) > = < T^*(g), h >$ olacak şekilde bir tek $T^{**} \in \mathfrak{B}(X^{**}, Y^{**})$ operatörü vardır. T^{**} operatörüne T nin *ikinci duali* denir.

Tanım 2.1.40. X bir küme ve I bir indis kümesi olsun. Eğer X_i bir topolojik uzay ise o zaman $f_i : X \to X_i$ ile tanımlı fonksiyonu her $i \in I$ için sürekli kılan en zayıf topolojiye $\{f_i \mid i \in I\}$ ailesi tarafından indirgenmiş *zayıf topoloji (w-topoloji)* denir.

Tanım 2.1.41. X bir Banach uzayı ve X^*, X in dual uzayı olsun. $x \in X$ için,

$$J_x : X^* \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x)$$

fonksiyonu tanımlansın. $\{J_x \mid x \in X\}$ ailesi tarafından indirgenmiş zayıf topolojiye X^* üzerindeki *zayıf*-topoloji (w^*-topoloji)* adı verilir.

Tanım 2.1.42. Herhangi bir X normlu uzayı için, $X^{**} = X^{(2)} = (X^*)^*$ uzayına X in *ikinci duali* denir. $n \in \mathbb{N}$ için $X^{(n)}$ de X in *n. dual uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.43. [25] X bir normlu uzay ve $\iota : X \to X^{**}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ ve $\lambda \in X^*$ için

$$\iota(x)(\lambda) = \lambda(x)$$

şartı sağlanıyorsa ι ya *doğal gömme fonksiyonu* denir.

Önerme 2.1.44. [70] *X bir normlu uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ için*

$$< f, H_X(x) > = < x, f > \qquad (f \in X^*)$$

ile $H_X : X \to X^{**}$ dönüşümü tanımlansın. O halde H_X dönüşümü bir lineer izometridir. Eğer X bir Banach uzayı ise $H_X(X)$, X^{**} nin bir kapalı altuzayı olur. Bu durumda H_X, X normlu uzayından X^{**} in bir kapalı altuzayına bir izometrik izomorfizmadır.

Tanım 2.1.45. [70] X bir Banach uzayı olsun. M, X in bir altuzayı ve N, X^* in bir altuzayı olmak üzere M ve N nin *sıfırlayıcıları*, sırasıyla,

$$\begin{aligned} M^{\perp} &= \{f \in X^* \mid < x, f > = 0, \ \forall x \in M\}, \\ {}^{\perp}N &= \{x \in X \mid < x, f > = 0, \ \forall f \in N\} \end{aligned}$$

dir. $M^{\perp}$ ve ${}^{\perp}N$ birer vektör uzayıdır. $M^{\perp} = \bigcap \operatorname{Ker}(H_X(x)) \ \ (x \in M)$ olduğundan $M^{\perp}$, X^* nin w^*-kapalı bir altuzayıdır.

Teorem 2.1.46. [70] *X bir Banach uzayı ve M, X in bir kapalı altuzayı olsun. O halde*

$$M^* \cong X^*/M^{\perp} \quad ve \quad (X/M)^* \cong M^{\perp}$$

dir. Üstelik $(X/M)^{**} \cong X^{**}/M^{\perp\perp}$ *olur.*

Teorem 2.1.47. [25] *X ve Y birer Banach uzayı ve* $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ *olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $\operatorname{Ker} T = {}^{\perp}(T^*(Y^*))$ *;*

(ii) $\operatorname{Ker} T^* = (T(X))^{\perp}$.

Tanım 2.1.48. Λ bir küme ve $\leq$ de Λ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer

(i) $\forall p \in \Lambda$ için $p \leq p$ dir;

(ii) $p \leq q$ ve $q \leq r$ özelliğindeki her $p,q,r \in \Lambda$ için $p \leq r$ dir;

(iii) $\forall p,q \in \Lambda$ için $p \leq s$ ve $q \leq s$ olacak şekilde bir $s \in \Lambda$ vardır

şartları sağlanıyorsa Λ kümesine $\leq$ *bağıntısı ile yönlenmiş küme* denir. $\leq$ bağıntısına da Λ kümesini *yönlendiriyor* denir.

Tanım 2.1.49. X herhangi bir küme ve Λ da yönlenmiş bir küme olsun. $\forall \alpha \in \Lambda$ için $x(\alpha) = x_\alpha$ olmak üzere $x : \Lambda \to X$ şeklindeki her fonksiyona X içinde bir *ağ (net)* denir ve $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ veya kısaca (x_α) şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.50. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri bilinen "$\leq$" bağıntısı ile yönlenmiş kümelerdir. Böylece her $x : \mathbb{N} \to X$ dizisi, X kümesi içinde bir ağdır. O halde ağ kavramı, dizi kavramından daha geneldir.

Tanım 2.1.51. Λ bir yönlenmiş küme, (X,τ) bir topolojik uzay ve X içinde bir ağ $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için bir $\alpha_N \in \Lambda$ elemanı,

$$\forall \alpha \geq \alpha_N \ \text{ için } \ x_\alpha \in U$$

olacak şekilde varsa $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı $x \in X$ noktasına *yakınsar* denir. Bu durumda $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağına *yakınsak*, x noktasına da $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının *limiti* denir ve genellikle bu durum $x_\alpha \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.52. K birimli, değişmeli bir halka ve A herhangi bir halka olsun. $(A,+)$ bir birimsel K-modül ve her $a \in K$, $x,y \in A$ için,

$$a \cdot (xy) = (a \cdot x)y = x(a \cdot y)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman A ya bir *K-cebir* veya A, K değişmeli halkası üzerinde bir *cebirdir* denir.

Eğer her $x \in A$ için $e_A x = x e_A = x$ olacak şekilde bir $0_A \neq e_A \in A$ varsa e_A ye A cebirinin *birim elemanı*, A ya da bir *birimli cebir* denir.

Tanım 2.1.53. A bir cebir olsun. A nın her elemanı ile değişmeli olan elemanların kümesine A cebirinin *merkezi* denir ve $Z(A)$ ile gösterilir. Kısaca,

$$Z(A) = \{x \in A \mid xy = yx,\ \forall y \in A\}$$

dır.

Tanım 2.1.54. A ve B aynı cisim üzerinde birer cebir ve $T : A \to B$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer, her $x,y \in A$ için, $T(xy) = T(x)T(y)$ şartı sağlanıyorsa T ye A dan B ye bir *cebir homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.55. A bir cebir ve $a \in A$ olsun. Eğer $a^2 = a$ ise a ya A nın *idempotent elemanı* denir.

Tanım 2.1.56. A bir cebir ve I, A nın bir lineer altuzayı olsun. Eğer her $a \in A$ ve her $x \in I$ için,

$$ax \in I \quad (xa \in I)$$

ise I ya A nın bir *sol (sağ) ideali* denir. Eğer I, A nın hem sağ hem de sol ideali ise o zaman I ya A nın bir *ideali* denir.

2.2. Tensör Çarpımı

Tanım 2.2.1. [71] A ve B birer vektör uzayı olsun. A ve B nin *tensör çarpımı*, M bir vektör uzayı ve $\tau : A \times B \to M$ aşağıdaki (evrensel) özelliği sağlayan bir bilineer dönüşüm olmak üzere (M, τ) ikilisidir:

"Her F vektör uzayı ve her bilineer dönüşüm $V : A \times B \to F$ için $V = \widetilde{V} \circ \tau$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{V} : M \to F$ lineer dönüşümü vardır."

Verilen herhangi iki A, B vektör uzayının (M, τ) tensör çarpımı daima mevcuttur ve izomorfizma farkıyla tektir.

Verilen A, B vektör uzayları ve bunların (M, τ) tensör çarpımı için standart notasyon olarak M için $A \otimes B$ yazılır ve

$$a \otimes b := \tau(a, b) \qquad (a \in A,\ b \in B) \tag{2.2}$$

ile tanımlanır. (2.2) deki formun elemanlarına *temel tensörler (elementary tensors)* denir ve $A \otimes B$ nin elemanları *tensörler* olarak adlandırılır.

$A \otimes B$ nin her elemanı, temel tensörlerin sonlu bir toplamı şeklinde temsil edilir. Yani x, $A \otimes B$ nin herhangi bir elemanı olmak üzere bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$$

olacak şekilde $a_1, \ldots, a_m \in A$, $b_1, \ldots, b_m \in B$ vardır.

Örnek 2.2.2. A ve B birer cebir olsun. $A \otimes B$ tensör çarpımı üzerinde teklikle belirli

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) \qquad (a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B)$$

şeklindeki $\cdot$ işlemi ile $A \otimes B$ bir cebirdir. Eğer e_A, A nın ve e_B, B nin birim elemanları ise $e_A \otimes e_B$, $A \otimes B$ cebirinin birim elemanıdır.

Eğer A ve B Banach uzayları ise $A \otimes B$ tensör çarpımları daima vardır, ancak $A \otimes B$ bir Banach uzayı olmayabilir. Bu durumda $A \otimes B$ üzerinde bir norm tanımlayıp bu norma göre tamlaştırma yapılarak bir Banach uzayı elde etmek mümkündür.

Tanım 2.2.3. A ve B Banach uzayları olsun. $A \otimes B$ tensör çarpımı üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu, her $a \in A,\ b \in B$ için $\|a \otimes b\| = \|a\|\|b\|$ koşulunu sağlarsa *çapraz norm (cross norm)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.4. A ve B birer Banach uzayı olsun. $A \otimes B$ tensör çarpımı üzerinde $\|\cdot\|_\pi$ *projektif normu*, $x \in A \otimes B$ için

$$\|x\|_\pi := \inf\{\sum_{i=1}^{m}\|a_i\|\|b_i\| \mid x = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i,\ m \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.5. [71] *A ve B Banach uzayları olsun. O halde $\|\cdot\|_\pi$ projektif normu $A \otimes B$ üzerinde bir çapraz normdur. Üstelik, $A \otimes B$ üzerindeki her $\|\cdot\|$ çapraz normu için*

$$\|x\| \leq \|x\|_\pi \qquad (x \in A \otimes B)$$

sağlanır.

Tanım 2.2.6. A ve B birer Banach uzayı olsun. $A \otimes B$ nin $\|\cdot\|_\pi$ normuna göre tamlanışına *projektif tensör çarpımı* denir ve $A \hat{\otimes} B$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.7. [71, Önerme B.2.11] *A ve B Banach uzayları ve $x \in A \hat{\otimes} B$ olsun. Bu durumda*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|\|b_i\| < \infty$$

olacak şekilde A da bir $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ve B de bir $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Üstelik,

$$\|x\|_\pi := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|\|b_i\| < \infty \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i,\ a_i \in A, b_i \in B\}$$

dir.

Önerme 2.2.8. [25, Önerme A.3.70] *A ve B birer Banach uzayı olsun. O halde her $a \in A$, $b \in B$ ve $\varphi \in \mathfrak{B}(A, B^*)$ için,*

$$\Phi : \mathfrak{B}(A, B^*) \to (A \hat{\otimes} B)^*,\ < a \otimes b, \Phi(\varphi) > = < b, \varphi(a) >$$

ile tanımlanan dönüşüm bir izometrik izomorfizmadır.

2.3. Banach Cebirleri

Tanım 2.3.1. [51] A bir $\mathbb{C}$-cebir ve $\|.\|$ normu ile bir normlu uzay olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

şartı sağlanıyorsa A ya bir *normlu cebir* denir. Eğer $(A, \|.\|)$ normlu cebiri aynı zamanda bir Banach uzayı ise A ya bir *Banach cebiri* denir. Üstelik A değişmeli ise $(A, \|.\|)$ değişmelidir.

Eğer A Banach cebirinde $\|e_A\| = 1$ olacak şekilde bir $e_A \in A$ birim elemanı varsa, A ya bir *birimli (unital) Banach cebiri* denir.

Uyarı 2.3.2. [51] *Eğer bir A Banach cebirinde birim eleman yok ise A, birimli bir Banach cebiri içine gömülebilirdir:*

$$A^{\sharp} := A \oplus \mathbb{C} = \{(x, \alpha) \mid x \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$$

kümesi tanımlansın. $x, y \in A$ *ve* $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ *olmak üzere* $A^{\sharp}$ *da toplama işlemi* $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta)$ *ile; çarpma işlemi* $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)$ *ile; skalerle çarpma işlemi* $\alpha(x, \lambda) = (\alpha x, \alpha\lambda)$ *ile ve* $A^{\sharp}$ *da* $\| \cdot \|_{A^{\sharp}}$ *normu ise*

$$\|(x, \alpha)\|_{A^{\sharp}} = \|x\|_A + |\alpha|$$

ile verilsin. O halde $A^{\sharp}$ *bir birimli Banach cebiridir ve birimi* $(0, 1)$ *dir. Her* (x, α) *elemanı,* $(x, \alpha) = (x, 0) + \alpha(0, 1)$ *olmak üzere* $x + \alpha e$ *şeklinde yazılabilir.* $A^{\sharp}$ *ya A nın birimlileştirilmişi adı verilir.*

Tanım 2.3.3. A bir cebir ve $B \subseteq A$ bir alt vektör uzayı olsun. Her $a, b \in B$ için $ab \in B$ ise B ye A nın bir *altcebiri* denir. Eğer B, bir A Banach cebirinin kapalı bir altcebiri ise o zaman B tam uzay olup (A daki işlemler ve norm ile) bir Banach cebiri belirtir. Bu durumda B ye A nın bir *Banach altcebiri* denir.

Tanım 2.3.4. A ve B birer Banach cebiri olsun. A dan B ye tüm sınırlı cebir homomorfizmalarının kümesi $Hom(A, B)$ ile gösterilir. $Hom(A, B)$, A dan B ye tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı $\mathfrak{B}(X,Y)$ den elde edilen metrik ile bir metrik uzaydır. $Hom(A,A)$ uzayı, kısaca $Hom(A)$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.3.5. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ uzayları, bilinen toplama, çarpma işlemleri ve alışılmış norm ile birer birimli, değişmeli Banach cebiridir.

Örnek 2.3.6. X bir normlu uzay ve Y bir Banach uzayı olsun. $\mathfrak{B}(X,Y)$ Banach uzayı üzerinde çarpma işlemi, $S,T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ olmak üzere

$$(TS)(x) = T(S(x)) \qquad (x \in X)$$

şeklinde tanımlansın. Her $T,S \in \mathfrak{B}(X,Y)$ ve her α skaleri için,

$$(\alpha(TS))(x) = \alpha((TS)(x)) = \alpha(T(S(x))) = (\alpha T)(S(x)) = ((\alpha T)S)(x)$$

$$\text{ve } (T(\alpha S))(x) = T(\alpha(S(x))) = \alpha(T(S(x))) = \alpha((TS)(x)) = (\alpha(TS))(x)$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathfrak{B}(X,Y)$ bir cebirdir. Üstelik her $T,S \in \mathfrak{B}(X,Y)$ için,

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(TS)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(S(x))\| \leq \|T\| \sup_{\|x\|\leq 1} \|S(x)\| \\ &\leq \|T\|\,\|S\| \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\| \leq \|T\|\,\|S\| \end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{B}(X,Y)$ bir Banach cebiridir.

Örnek 2.3.7. $M_n(\mathbb{C})$, kompleks sayılar kümesi üzerinde tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. Matrislerde bilinen toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri ile $M_n(\mathbb{C})$, birimi I_n birim matrisi olan bir birimli cebirdir. Eğer $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ ise,

$$\|A\|_\infty = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{ve} \quad \|A\|_1 = \sup_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

dönüşümlerinin herbiri $M_n(\mathbb{C})$ üzerinde birer normdur. Ancak $M_n(\mathbb{C})$ uzayı sonlu boyutlu olduğundan bu normlar birbirine denktir. Dolayısıyla bu normların herhangi biri için $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

şartı sağlanır ve $M_n(\mathbb{C})$ değişmeli olmayan bir Banach cebiridir.

Örnek 2.3.8. S bir yarıgrup ve

$$\ell^1(S) = \{f \mid f : S \to \mathbb{C} \text{ fonksiyon ve } \|f\|_1 := \sum_{s\in S}|f(s)| < \infty\}$$

olsun. $f, g \in \ell^1(S)$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her α skaleri için,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

işlemleri ile $(fg)(x) = f(x)g(x)$ çarpma işlemi tanımlansın. Bu durumda $\ell^1(S)$ uzayı, $\|.\|_1$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Üstelik $\ell^1(S)$ üzerindeki çarpma işlemi $s \in S$ için,

$$(f*g)(s) = \sum_{tu=s} f(t)g(u) \quad \ni \; tu = s,\; \exists t, u \in S \text{ yok ise } (f*g)(s) = 0$$

şeklindeki konvolüsyon olarak alınırsa $\ell^1(S)$ bir Banach cebiri olur ve bu uzay S nin *yarıgrup cebiri* olarak adlandırılır.

G bir grup olsun. Bu durumda $f, g \in \ell^1(G)$ için konvolüsyon çarpımı

$$(f*g)(s) = \sum_{t\in G} f(t)g(t^{-1}s) \quad (s \in G)$$

ile tanımlanır ve $\|.\|_1$ normu ile birlikte $\ell^1(G)$ bir Banach cebiri olur.

Örnek 2.3.9. X boş olmayan bir küme ve

$$\ell^\infty(X) = \{f \mid f : X \to \mathbb{C} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$$

olsun. $\|.\|_\infty : \ell^\infty(X) \to \mathbb{C}$, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}|f(x)|$ fonksiyonu, $\ell^\infty(X)$ üzerinde bir normdur ve $\ell^\infty(X)$ uzayı, $\|.\|_\infty$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Üstelik $\ell^\infty(X)$ uzayı, noktasal çarpım ile bir Banach cebiridir.

Örnek 2.3.10. X bir kompakt Hausdorff uzayı ve

$$C(X) = \{f \mid f : X \to \mathbb{C} \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

olsun. $f, g \in C(X)$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her α skaleri için,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

işlemleri ile $(fg)(x) = f(x)g(x)$ çarpma işlemi tanımlansın. $\|.\| : C(X) \to \mathbb{C}$, $\|f\| := \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ dönüşümü, $C(X)$ üzerinde bir norm olup $(C(X), \|.\|)$ yapısı bir Banach cebiridir.

Örnek 2.3.11. X bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ve

$$C_0(X) = \{ f \mid f : X \to \mathbb{C} \text{ sürekli fonksiyon ve } \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\}$$

olsun. $\|.\|_\infty : C_0(X) \to \mathbb{C}$, $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ dönüşümü, $C_0(X)$ üzerinde bir norm olup $(C_0(X), \|.\|_\infty)$ yapısı bir Banach cebiridir.

Örnek 2.3.12. $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ kompleks uzayı içindeki açık birim yuvar ve $\overline{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}$ nin kapanışı olsun. Yani, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ve $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ olsun.

$$A(\overline{\mathbb{D}}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \mid f, \mathbb{D} \text{ üzerinde analitik fonksiyon}\}$$

uzayı tanımlansın. $\|.\| : A(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathbb{C}$, $\|f\| := \sup\limits_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$ dönüşümü, $A(\overline{\mathbb{D}})$ üzerinde bir normdur. Her $f, g \in A(\overline{\mathbb{D}})$ ve her $z \in \overline{\mathbb{D}}$ için, $(fg)(z) = f(z)g(z)$ şeklindeki çarpma işlemi ile $A(\overline{\mathbb{D}})$ bir Banach cebiridir ve *Disk cebiri* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.13. A bir Banach cebiri ve $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$, A içinde bir ağ olsun. Eğer her $a \in A$ için

$$\lim_\alpha e_\alpha a = a \quad (\lim_\alpha a e_\alpha = a)$$

ise $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağına A için bir *sol (sağ) yaklaşık birim (left (right) approximate identity)* denir. Eğer bir ağ hem sol hem de sağ yaklaşık birim ise o zaman bu ağa *(iki yanlı) yaklaşık birim* denir. Üstelik $\sup\limits_\alpha \|e_\alpha\| < \infty$ ise $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ yaklaşık birimine *sınırlıdır* denir.

Teorem 2.3.14. *A bir Banach cebiri ve I, A da kapalı bir ideal olsun. O zaman A/I bölüm cebiri bir Banach cebiridir. Eğer A değişmeli ise A/I da değişmelidir ve eğer A birimli ise A/I da birimli olup birimi $e_{A/I} = e_A + I$ dır.*

2.4. Banach Modüller

Bir A kompleks cebiri üzerinde modül tanımını anımsayalım.

Tanım 2.4.1. [26] A bir $\mathbb{C}$-cebir ve E bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, her $a, b \in A$ ve her $x, y \in E$ için,

(i) $a \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha a \cdot x + \beta a \cdot y$

(ii) $(\alpha a + \beta b) \cdot x = \alpha a \cdot x + \beta b \cdot x$

(iii) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

olacak şekilde $(a, x) \mapsto a \cdot x$ ile tanımlı $A \times E \to E$ fonksiyonu varsa E ye bir *sol A-modül* denir. Benzer şekilde bir sağ A-modül tanımlanır. Eğer E hem sağ A-modül hem de sol A-modül ve her $a, b \in A$ ve her $x \in E$ için,

$$a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b$$

şartı sağlanıyor ise o zaman E ye bir *A-bimodül* denir. Eğer A cebiri değişmeli, E bir sol A-modül ve her $a \in A$, $x \in E$ için $a \cdot x = x \cdot a$ ise o zaman E bir *A-modüldür*.

E bir sol A-modül ve F, E nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer

$$A \cdot F = \{a \cdot t \mid a \in A,\ t \in F\} \subset F$$

ise F ye E nin bir (sol) A-altmodülü denir.

Örnek 2.4.2. A bir cebir, E bir sol A-modül ve F bir sağ A-modül olsun. A nın $E \otimes F$ üzerindeki bimodül etkileri tek türlü olup $a \in A$, $x \in E$ ve $y \in F$ olmak üzere

$$a \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes y, \quad (x \otimes y) \cdot a = x \otimes y \cdot a$$

şeklindedir.

Tanım 2.4.3. A bir Banach cebiri ve X bir Banach uzayı olsun. Eğer X bir A-bimodül ve her $a \in A$, $x \in X$ için

$$\|a \cdot x\| \leq K\|a\|\|x\| \text{ ve } \|x \cdot a\| \leq K\|x\|\|a\| \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti var ise X e bir *Banach A-bimodül* denir. (2.3) deki eşitsizliklerden yalnızca soldaki geçerli olduğu durumda X sol A-modüle bir *sol Banach A-modül*; yalnızca sağdaki geçerli olduğunda X sağ A-modüle bir *sağ Banach A-modül* adı verilir.

Tanım 2.4.4. A bir Banach cebiri, X, Y birer Banach A-bimodül ve $T : X \to Y$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a \in A$, $x \in X$ için $T(a \cdot x) = aT(x)$ ve $T(x \cdot a) = T(x)a$ ise T ye bir *A-bimodül homomorfizması* denir.

Tanım 2.4.5. A bir Banach cebiri ve X bir Banach A-bimodül olsun. $a \in A$, $x \in X$ ve $\varphi \in X^*$ için $a \cdot \varphi$ ve $\varphi \cdot a$ şu şekilde tanımlanır:

$$< x, a \cdot \varphi > := < x \cdot a, \varphi >, \quad < x, \varphi \cdot a > := < a \cdot x, \varphi > .$$

Bu durumda $a \cdot \varphi$, $\varphi \cdot a \in X^*$ olur. X^* bir Banach A-bimodüldür ve X^* ye X in *dual modülü* denir. Buna ek olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için X in n. dual uzayı $X^{(n)}$ de bir Banach A-bimodüldür.

Tanım 2.4.6. A bir Banach cebiri ve X bir sol Banach A-modül olsun. Eğer $A \cdot X = \{a \cdot x \mid a \in A, \, x \in X\}$ kümesinin lineer gereni X içinde yoğun ise X e *sol esas (essential) A-modül* denir. Sağ esas A-modüller ile (iki yanlı) esas A-bimodüller de benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.4.7. [17, Tanım I.11.8] A bir Banach cebiri, X bir Banach A-bimodül ve $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$, A içinde sınırlı bir ağ olsun. Eğer her $x \in X$ için, $\lim_\alpha e_\alpha \cdot x = x$ ($\lim_\alpha x \cdot e_\alpha = x$) ise $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağına *X için A nın bir sınırlı sol (sağ) yaklaşık birimi* denir.

Teorem 2.4.8. [17, Teorem I.11.10] (Cohen Çarpanlama Teoremi) *A bir Banach cebiri, X bir sol (sağ) Banach A-modül, $z \in X$ ve $\delta > 0$ olsun. Eğer A nın X için bir sınırlı sol (sağ) yaklaşık birimi var ise, o zaman $z = ay$ ($z = ya$) ve $\|z - y\| \leq \delta$ olacak şekilde $a \in A$, $y \in X$ vardır.*

2.5. C^*-Cebirler

Tanım 2.5.1. [51] A bir $\mathbb{C}$-cebir ve $\begin{array}{l} *: A \to A \\ \;\; x \mapsto x^* \end{array}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

(i) $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$

(ii) $(ab)^* = b^* a^*$

(iii) $(a^*)^* = a^{**} = a$

şartları sağlanıyorsa $*$ dönüşümüne bir *involüsyon* ve A ya da bir $*$-*cebir* denir.

Tanım 2.5.2. [51] A bir Banach cebiri ve $*$, A üzerinde bir involüsyon olmak üzere eğer her $a \in A$ için

$$\|a^*\| = \|a\|$$

ise A ya bir *Banach* $*$-*cebir* denir.

Tanım 2.5.3. [51] A bir Banach cebiri ve $*$, A üzerinde bir involüsyon olsun. Eğer her $a \in A$ için $\|a^* a\| = \|a\|^2$ koşulu sağlanıyorsa A ya bir C^*-*cebir* denir.

Her C^*-cebir bir Banach $*$-cebirdir. Çünkü her $a \in A$ için,

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| \;\Rightarrow\; \|a\|^2 = \|a^* a\| \leq \|a^*\| \|a\|$$

dır. Böylece

$$\|a\| \leq \|a^*\| \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.4) de a yerine a^* yazılırsa

$$\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\| \tag{2.5}$$

olur. (2.4) ve (2.5) den, her $a \in A$ için $\|a\| = \|a^*\|$ olduğu görülür.

Teorem 2.5.4. [57, Teorem 3.1.2] Her C^*-cebirin sınırlı bir yaklaşık birimi vardır.

2.6. Banach Üçlü Cebirler

Tanım 2.6.1. A bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı olsun. Eğer $[\,]: A \times A \times A \to A$, $(x,y,z) \mapsto [xyz]$ ile tanımlı $[\,]$ dönüşümü lineer ise ve her $x,y,z,u,v \in A$ için,

$$[[xyz]uv] = [x[yzu]v] = [xy[zuv]]$$

şartı sağlanıyorsa bu dönüşüme *üçlü çarpım (ternary product)*; $(A,[\,])$ ikilisine ise *üçlü cebir (ternary algebra)* adı verilir.

Eğer $(A,[\,])$ üçlü cebirin birim elemanı varsa, yani her $x \in A$ için $[xee] = [eex] = x$ olacak şekilde bir $e \in A$ elemanı var ise, o zaman $(A,[\,])$ üçlü cebirine *birimlidir* denir.

Uyarı 2.6.2. *$(A,\odot)$ herhangi bir cebir olsun. A üzerinde bir $[\,]: A \times A \times A \to A$, $(x,y,z) \mapsto [xyz] := (x \odot y) \odot z$ fonksiyonu tanımlanırsa $(A,[\,])$ bir üçlü cebir olur. Tersine, $(A,[\,])$ birimli bir üçlü cebir ve e, A nın birimi olsun. $\odot: A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto a \odot b := [aeb]$ işlemi tanımlansın. Bu durumda $(A,\odot)$ birimli bir cebir olur.*

Örnek 2.6.3. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde 2×2 tipindeki matrislerden oluşan

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

kümesi matrislerdeki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir üçlü cebirdir. (Burada $[\,]: A^3 \to A$ dönüşümü, $(x,y,z) \mapsto [xyz] := xyz$ olarak alınır.)

Tanım 2.6.4. A bir üçlü cebir olsun. Her $y,z \in A$ için $[xyz] = [zxy] = [yzx]$ şartını sağlayan $x \in A$ elemanına *merkezi eleman* denir. A nın tüm merkezi elemanlarının kümesine A nın *merkezi* denir ve $Z(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.5. $(A,[\,]_A)$ ve $(B,[\,]_B)$ birer üçlü cebir ve $h: A \to B$ bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a,b,c \in A$ için $h([abc]_A) = [h(a)h(b)h(c)]_B$ ise h dönüşümüne bir *üçlü homomorfizma (ternary homomorphism)* denir.

Tanım 2.6.6. A bir üçlü cebir ve $\|.\|$, A üzerinde bir norm olsun. Eğer her $x,y,z \in A$ için,

$$\|[xyz]\| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|z\|$$

şartı sağlanıyorsa o zaman A ya bir *normlu üçlü cebir* denir.

Eğer bir A normlu üçlü cebirin aynı zamanda bir tam $\|.\|$ normu varsa, A ya bir *Banach üçlü cebir* denir.

2.7. C^*-Üçlü Cebirler

Tanım 2.7.1. A bir üçlü cebir ve $\begin{array}{l} *: A \to A \\ \quad x \mapsto x^* \end{array}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y,z \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

(i) $(x^*)^* = x$,

(ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$,

(iii) $(x+y)^* = x^* + y^*$,

(iv) $[xyz]^* = [z^*y^*x^*]$

şartları sağlanıyorsa A ya bir $*$-*üçlü cebir* denir. Eğer A birimli ve e, A nın birimi ise o zaman $e^* = e$ dir.

Tanım 2.7.2. A bir $*$-üçlü cebir ve $\|.\|$, A üzerinde bir norm olsun. Eğer her $x,y,z \in A$ için, $\|[xyz]\| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|z\|$ şartı sağlanıyorsa o zaman A ya bir *normlu* $*$-*üçlü cebir* denir.

Eğer bir A normlu $*$-üçlü cebiri aynı zamanda bir tam $\|.\|$ normuna sahip ise A ya bir *Banach* $*$-*üçlü cebir* denir.

Eğer A bir normlu $*$-üçlü cebir ve $Z(A) = 0$ ise o zaman her $x \in A$ için $\|x^*\| = \|x\|$ dir.

Tanım 2.7.3. A bir Banach $*$-üçlü cebir olsun. Eğer her $x \in A$ ve $y \in Z(A)$ için, $\|[x^*yx]\| = \|x\|^2\,\|y\|$ ise A ya bir C^*-*üçlü cebir* denir.

Uyarı 2.7.4. $(A,[\ ])$ *birimli bir* C^**-üçlü cebir ve e, A nın birimi olsun. Eğer her* $x,y \in A$ *için* $x \circ y := [xey]$ *ve* $x^* := [exe]$ *alınırsa, o zaman* $(A,\circ)$ *birimli bir* C^**-cebir olur. Tersine,* $(A,\circ)$ *birimli bir* C^**-cebir olsun. Eğer her* $x,y,z \in A$ *için* $[xyz] := x \circ y^* \circ z$ *alınırsa, o zaman* $(A,[\ ])$ *bir* C^**-üçlü cebir olur.*

2.8. Arşimet Olmayan Banach Üçlü Cebirler

Arşimet olmayan normlu uzaylar, K. Hensel [40] tarafından 1897 yılında kurgulanmıştır.

Tanım 2.8.1. [38] $\mathbb{K}$ bir cisim ve $|.| : \mathbb{K} \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $|.|$ fonksiyonu, her $r,s \in \mathbb{K}$ için

(i) $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$

(ii) $|rs| = |r||s|$

(iii) $|r+s| \leq |r| + |s|$

şartlarını sağlıyor ise $|.|$ fonksiyonuna $\mathbb{K}$ üzerinde bir *mutlak değer fonksiyonu (absolute value)* denir. Bu koşullara ek olarak

(iv) $|r+s| \leq \max\{|r|,|s|\} \leq |r| + |s|$

şartı da sağlanıyorsa $|.|$ fonksiyonuna $\mathbb{K}$ üzerinde bir *Arşimet olmayan mutlak değer fonksiyonu (non-Archimedean valuation)* adı verilir. Bu durumda $\mathbb{K}$ cismi, *Arşimet olmayan cisim (non-Archimedean field)* olarak adlandırılır. (iv) koşulunun sağlanmadığı durumda $|.|$ mutlak değer fonksiyonuna *Arşimettir* denir.

Örnek 2.8.2. (i)

$$|.| : \mathbb{Q} \to [0,\infty), \quad |r| := \begin{cases} r, & r \geq 0 \\ -r, & r < 0 \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{Q})$$

fonksiyonu, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir Arşimet mutlak değer fonksiyonudur. Çünkü

$$|1+1| = 2 > 1 = |1| = \max\{|1|,|1|\}$$

olur.

(ii)

$$|.|:\mathbb{K}\to[0,\infty),\quad |r|:=\begin{cases}1, & r\neq 0\\ 0, & r=0\end{cases}\qquad (r\in\mathbb{K})$$

fonksiyonu $\mathbb{K}$ üzerinde bir Arşimet olmayan (aşikar) mutlak değer fonksiyonudur.

(iii) p bir asal sayı olsun. Herhangi bir $0\neq n\in\mathbb{Z}$ tamsayısı,

$$n=p^r m \quad \ni \quad r\in\mathbb{Z},\ 0\neq m\in\mathbb{Z},\ p\nmid m$$

formunda tek türlü yazılır. Bu durumda bir

$$r_p:\mathbb{Z}-\{0\}\to\mathbb{R},\ \ r_p(n):=\max\{r\mid\ p^r|n\}$$

fonksiyonu tanımlamak mümkündür. Her $0\neq x=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ rasyonel sayısı için,

$$r'_p(x):=r_p(x)=r_p(a)-r_p(b)$$

tanımlansın.

Böylece her $0\neq x\in\mathbb{Q}$ rasyonel sayısı,

$$x=p^{r_p(x)}\cdot(\frac{a}{b})\quad\ni\quad p\nmid a,\ p\nmid b$$

formunda tek türlü yazılır. Ayrıca $r_p(0)=\infty$ olarak kabul edilir.

$$|.|_p:\mathbb{Q}\to[0,\infty),\quad |x|_p:=\begin{cases}p^{-r_p(x)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad (x\in\mathbb{Q})$$

fonksiyonu tanımlansın. $|.|_p$ fonksiyonu *p-sel mutlak değer (p-adic valuation)* olarak adlandırılır. Örneğin;

$$|6|_3=|15|_3=\frac{1}{3}\qquad |\frac{1}{4}|_2=|\frac{3}{4}|_2=4\qquad |137|_2=1$$

olur. $|.|_p$ fonksiyonu, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir Arşimet olmayan mutlak değer fonksiyonudur.

Bundan sonraki kısımlarda, aksi belirtilmedikçe, $|.|$ fonksiyonu, $\mathbb{K}$ üzerinde bir Arşimet olmayan mutlak değer fonksiyonu olarak alınacaktır.

Üstelik, $|.|$ fonksiyonu ile daima *aşikar olmayan* bir fonksiyon anlaşılacaktır. Yani $|a_0|\notin\{0,1\}$ olacak şekilde bir $a_0\in\mathbb{K}$ elemanının her zaman var olduğu kabul edilecektir.

Tanım 2.8.3. [38] $\mathbb{K}$ bir Arşimet olmayan cisim, X bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\|.\|$ fonksiyonu, bir Arşimet olmayan mutlak değer $|.|$ fonksiyonu ile birlikte, her $x, y \in X$ ve $r \in \mathbb{K}$ için

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|rx\| = |r| \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$

ile verilen şartları sağlıyorsa o zaman $\|.\|$ fonksiyonuna bir *Arşimet olmayan norm* denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine de *Arşimet olmayan normlu uzay* adı verilir.

$\mathbb{Q}$ uzayının, $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|_p$ metriğine göre tamlanışına *p-sel sayılar cismi* denir ve $\mathbb{Q}_p$ ile gösterilir.

Arşimet olmayan normlu uzaylara verilebilecek en önemli örneklerden biri $\mathbb{Q}_p$ p-sel sayılar cismidir: p bir asal sayı olsun. $|.|_p$ p-sel mutlak değer fonksiyonu, aynı zamanda $\mathbb{Q}$ üzerinde bir Arşimet olmayan norm tanımlar. Ancak $\mathbb{Q}$, $|.|_p$ normundan indirgenen metrik ile tam değildir.

Tanım 2.8.4. $(A, \|.\|)$ Arşimet olmayan normlu uzayında bir dizi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. Tanım 2.8.3 (iii) gereği, her $n > m$ için

$$\|x_n - x_m\| \leq \max\left\{\left\|x_{j+1} - x_j\right\| : m \leq j \leq n-1\right\}$$

sağlanır. Buna göre, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin A da bir *Cauchy dizisi* olması için gerek ve yeter koşul $\{x_{n+1} - x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $0 \in A$ noktasına yakınsamasıdır.

Bir $(A, \|.\|)$ Arşimet olmayan normlu uzayındaki her Cauchy dizisi A nın bir elemanına yakınsıyor ise A uzayına *tamdır* denir.

Tanım 2.8.5. A bir $\mathbb{K}$-cebir ve bir Arşimet olmayan tam normlu uzay olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ şartı sağlanıyor ise A ya bir *Arşimet olmayan Banach cebir* denir.

Tanım 2.8.6. $\mathbb{K}$ bir Arşimet olmayan cisim, A bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı ve $[\,]: A\times A\times A \to A,\ (x,y,z)\longmapsto [xyz]$ bir fonksiyon olsun. Eğer $[\,]$ fonksiyonu, $\mathbb{K}$-lineer ise ve her $x,y,z,w,v\in A$ için

$$[xy[zwv]] = [x[yzw]v] = [[xyz]wv]$$

şartı sağlanıyor ise, o zaman A ya bir *Arşimet olmayan üçlü cebir* denir.

A bir Arşimet olmayan üçlü cebir ve $\|.\|$, A üzerinde bir Arşimet olmayan norm olsun. Eğer her $x,y,z\in A$ için

$$\|[xyz]\| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|z\|$$

ise A ya *Arşimet olmayan normlu üçlü cebir* denir. Eğer $\|.\|$ normu tam ise A ya *Arşimet olmayan Banach üçlü cebir* adı verilir.

Eğer A bir Arşimet olmayan Banach $*$-üçlü cebir ve her $x\in A,\ y\in Z(A)$ için $\|[x^*yx]\| = \|x\|^2\,\|y\|$ ise A ya bir *Arşimet olmayan C^*-üçlü cebir* denir.

2.9. Cebirler Üzerinde Türevler

Tanım 2.9.1. A bir cebir olsun. Eğer bir $D: A\to A$ lineer dönüşümü her $a,b\in A$ için,

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

şartını sağlıyorsa D ye A üzerinde bir *türev (derivation)* denir.

D, bir A Banach cebiri üzerinde türev ve her $a\in A$ için $\|D(a)\| < \infty$ ise D ye *sınırlı türev (ya da sürekli türev)* denir.

Uyarı 2.9.2. *A bir cebir ve $x\in A$ sabit bir eleman olmak üzere $D_x := [.,x] : A\to A$ dönüşümü her $a\in A$ için $D_x(a) = [a,x] = ax - xa$ olarak tanımlansın. Her $a,b\in A$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ için,*

$$\begin{aligned} D_x(a+b) &= [a+b,x] = (a+b)x - x(a+b) = (ax-xa)+(bx-xb) \\ &= [a,x]+[b,x] = D_x(a)+D_x(b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_x(\alpha a) &= [\alpha a, x] = (\alpha a)x - x(\alpha a) = \alpha(ax) - \alpha(xa) \\ &= \alpha(ax - xa) = \alpha D_x(a) \end{aligned}$$

olduğundan D_x dönüşümü lineerdir. Her $a, b \in A$ için,

$$D_x(ab) = [ab, x] = (ab)x - x(ab)$$

dir. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} aD_x(b) + D_x(a)b &= a[b,x] + [a,x]b = a(bx - xb) + (ax - xa)b \\ &= a(bx) - a(xb) + (ax)b - (xa)b \\ &= a(bx) - (xa)b - a(xb) + a(xb) \\ &= (ab)x - x(ab) + 0 = D_x(ab) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece D_x bir türevdir.

Uyarı 2.9.2 de tanıtılan D_x türevine A nın *x elemanı tarafından belirlenmiş iç türevi* denir. Eğer A değişmeli ise her $a \in A$ için $D_x(a) = ax - xa = ax - ax = 0$ dır. Böylece değişmeli cebirlerde sıfırdan farklı iç türevlerin bulunamayacağı sonucuna varılır.

Eğer D_x, bir A Banach cebiri üzerinde bir iç türev ise her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} \|D_x(a)\| &= \|ax - xa\| \\ &\leq \|ax\| + \|xa\| && \text{(üçgen eşitsizliğinden)} \\ &\leq \|a\|\|x\| + \|x\|\|a\| && \text{(Tanım 2.3.1 den)} \\ &= 2\|x\|\|a\| \\ &= M\|x\| && (M = 2\|a\|) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla D_x iç türevi daima sınırlıdır.

Cebirde tanımlı diğer türev çeşitleri aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.9.3. A bir cebir ve $D : A \to A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için,

(i) $D(a^2) = D(a)a + aD(a)$ şartı sağlanıyorsa D ye bir *Jordan türev*;

(ii) $D[a,b] = [D(a), b] + [a, D(b)]$ şartı sağlanıyorsa D ye bir *Lie türev* denir.

Her türev bir Jordan türevdir. Fakat tersi genelde doğru değildir. I.N. Herstein [41] bir asal halkada ve daha sonra J.M. Cusack [24] herhangi bir R halkasında bazı koşullar altında tersinin doğru olduğunu ispatlamışlardır.

Tanım 2.9.4. A bir cebir, $D : A \to A$ bir lineer dönüşüm ve σ ile τ, A üzerinde birer cebir endomorfizması olsun. Eğer her $a, b \in A$ için,

(i) $D(ab) = D(a)\tau(b) + \sigma(a)D(b)$ şartı sağlanıyorsa D ye bir (σ, τ)-*türev*;

(ii) $D(a^2) = D(a)\tau(a) + \sigma(a)D(a)$ şartı sağlanıyorsa D ye bir (σ, τ)-*Jordan türev*;

(iii) $D([a,b]) = [D(a), b]_{\sigma,\tau} - [D(b), a]_{\sigma,\tau}$ şartı sağlanıyorsa D ye bir (σ, τ)-*Lie türev* denir. Burada her $a, b \in A$ için $[a,b]_{\sigma,\tau} = a\tau(b) - \sigma(b)a$ dır.

I_A, A üzerindeki birim dönüşüm olsun. O halde her $D : A \to A$ türevi bir (I_A, I_A)-türevdir.

Tanım 2.9.5. A bir cebir ve σ, τ lar A üzerinde birer cebir endomorfizması olsun. $m \in A$ olmak üzere, her $a \in A$ için $D_m(a) = \sigma(a)m - m\tau(a)$ ile tanımlı bir $D_m : A \to A$ lineer dönüşümüne A nın bir (σ, τ)-*iç türevi* denir.

Genelleştirilmiş türev tanımı, ilk olarak 1991 yılında M. Brešar [18] tarafından verilmiştir ve iki türevin bileşkesi ile ilgili bazı özellikler, genelleştirilmiş türevlere taşınmıştır.

Tanım 2.9.6. A bir cebir ve $G : A \to A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $G(ab) = G(a)b + a\alpha(b)$ olacak şekilde bir $\alpha : A \to A$ türevi varsa G ye A üzerinde bir *genelleştirilmiş türev* denir ve genellikle (G, α) ile gösterilir.

Tanım 2.9.7. A bir cebir, $G : A \to A$ bir lineer dönüşüm ve σ ile τ, A üzerinde birer cebir endomorfizması olsun. Eğer her $a, b \in A$ için,

(i) $G(a^2) = G(a)a + a\alpha(a)$ olacak şekilde bir $\alpha : A \to A$ Jordan türevi varsa G ye bir *genelleştirilmiş Jordan türev*;

(ii) $G([a,b]) = [G(a), b] + [a, \alpha(b)]$ olacak şekilde bir $\alpha : A \to A$ Lie türevi varsa G ye bir *genelleştirilmiş Lie türev*;

(iii) $G(ab) = G(a)\tau(b) + \sigma(a)\alpha(b)$ olacak şekilde bir $\alpha : A \to A$ (σ, τ)-türevi varsa G ye bir *genelleştirilmiş* (σ, τ)*-türev*;

(iv) $G(a^2) = G(a)\tau(a) + \sigma(a)\alpha(a)$ olacak şekilde bir $\alpha : A \to A$ (σ, τ)-Jordan türevi varsa G ye bir *genelleştirilmiş* (σ, τ)*-Jordan türev*;

(v) $G([a,b] = [\alpha(a), b]_{\sigma,\tau} - [G(b), a]_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde bir $\alpha : A \to A$ (σ, τ)-Lie türevi varsa G ye bir *genelleştirilmiş* (σ, τ)*-Lie türev* denir.

$*$-cebirlerde ve üçlü cebirlerde türev tanımları, sırasıyla, şu şekilde verilmektedir:

Tanım 2.9.8. A bir $*$-cebir ve $\delta : A \to A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a \in A$ için,

(i) $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ ve $\delta(a^*) = (\delta(a))^*$ şartları sağlanıyorsa δ ya bir $*$*-türev*;

(ii) $\delta(a^2) = \delta(a)a + a\delta(a)$ ve $\delta(a^*) = (\delta(a))^*$ şartları sağlanıyorsa δ ya bir *Jordan* $*$*-türev* denir.

Tanım 2.9.9. $(A, [\ ])$ bir üçlü cebir ve $\delta : A \to A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için,

$$\delta([abc]) = [\delta(a)bc] + [a\delta(b)c] + [ab\delta(c)]$$

ise δ ya bir *üçlü türev* denir.

2.10. Yerel Kompakt Uzaylarda İntegrasyon

Yerel kompakt gruplar üzerinde amenable tanımı Haar ölçüsü ile verilir. Bu bölümde, yerel kompakt Hausdorff uzaylarda ölçü ve integrasyon ile ilgili bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.10.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

(i) $x \in X$ olsun. $x \in U \subset C$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ kümesi ve X in kompakt bir C altkümesi varsa X uzayına x noktasında *yerel kompakt* denir. Her $x \in X$ için X uzayı x noktasında yerel kompakt ise (X,τ) uzayına *yerel kompakt uzay* denir.

(ii) $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X,τ) uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir.

Tanım 2.10.2. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathscr{A}$, X in altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

(i) $X \in \mathscr{A}$;
(ii) Her $E \in \mathscr{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathscr{A}$;
(iii) Her $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ dizisi için $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{A}$

koşulları sağlanıyorsa $\mathscr{A}$ ailesine X kümesi üzerinde bir *σ-cebiri* denir.

Tanım 2.10.3. X bir küme ve $\mathscr{A}$, X üzerinde bir σ-cebiri olmak üzere $(X,\mathscr{A})$ ikilisine bir *ölçülebilir uzay* denir.

Önerme 2.10.4. *$(X,\mathscr{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A \subseteq X$, $A \in \mathscr{A}$ ve $f : A \to [-\infty,+\infty]$ bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A \mid f(x) \leq t\} \in \mathscr{A}$;
(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A \mid f(x) < t\} \in \mathscr{A}$;
(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A \mid f(x) \geq t\} \in \mathscr{A}$;
(iv) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A \mid f(x) > t\} \in \mathscr{A}$.

Tanım 2.10.5. Önerme 2.10.4 deki denk koşullardan biri sağlanırsa f fonksiyonuna *$\mathscr{A}$-ölçülebilir (ya da ölçülebilir)* denir.

Tanım 2.10.6. $(X,\mathscr{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her ayrık $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ dizisi için,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

ise μ fonksiyonuna *sayılabilir toplamsal (countably additive)* dır denir. $\mu(\emptyset) = 0$ şartını sağlayan sayılabilir toplamsal bir $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ fonksiyonuna, $(X,\mathscr{A})$ üzerinde bir *ölçüm (measure)* adı verilir. $(X,\mathscr{A},\mu)$ üçlüsüne de *(pozitif) ölçüm uzayı* denir.

Tanım 2.10.7. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathscr{A}$, X üzerinde bir σ-cebir olsun. $x \in X$ olmak üzere,

$$\delta_x : \mathscr{A} \to [0,+\infty], \quad \delta_x(E) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

ile tanımlı dönüşüm $(X,\mathscr{A})$ üzerinde bir ölçümdür ve x deki *nokta kütle (point mass)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.10.8. $(X,\mathscr{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. X üzerindeki tüm ölçümlerin uzayı $M(X)$ ile gösterilir. Bir $\mu \in M(X)$ ölçümünün normu

$$\|\mu\| := \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \mid E_1, E_2, \ldots \in \mathscr{A} \text{ ayrık }, X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \}$$

ile tanımlıdır. $M(X)$, bu norm ile birlikte bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.10.9. [22] X bir Hausdorff topolojik uzay olsun. X in açık altkümelerinin ailesi ile üretilen σ-cebirine X üzerinde *Borel σ-cebiri* denir ve $\mathcal{B}(X)$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(X)$ deki herbir altkümeye X in *Borel altkümeleri* adı verilir.

Tanım 2.10.10. [22] X bir Hausdorff topolojik uzay olsun. $(X,\mathcal{B}(X))$ ölçülebilir uzayı üzerindeki $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,+\infty]$ ölçümüne X üzerinde bir *Borel ölçüm* denir.

Tanım 2.10.11. $(X,\mathscr{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

(i) X in $B \in \mathscr{A}$, $\mu(B) = 0$ ve $A \subset B$ özelliklerini sağlayan bir B altkümesi varsa A kümesi *μ-boştur* denir.

(ii) $\mu(V) < \infty$ koşulunu sağlayan her $V \in \mathscr{A}$ kümesi için $V \cap A$ kümesi μ-boş ise A kümesi *lokal μ-boştur* denir.

Tanım 2.10.12. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, $A \subseteq X$ ve $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\mathscr{A}$-ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $\mu(A) = 0$ koşulunu sağlayan $A \in \mathscr{A}$ kümesi dışında $f = g$ ise f ile g fonksiyonları *hemen hemen her yerde eşittir* denir ve kısaca $f = g$ $(h.h.h.y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10.13. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \to [-\infty, +\infty]$ $\mathscr{A}$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\|f\|_1 := \int\limits_X |f|\, d\mu < \infty$ ise f ye *integrallenebilirdir* denir.

Teorem 2.10.14. *$(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathscr{A}$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde $\|f\|_1 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f = 0$ $(h.h.h.y)$ olmasıdır.*

Tanım 2.10.15. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathscr{A}$-ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \in [1, \infty)$ olsun.

$$\|f\|_p := \Big(\int\limits_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} < \infty$$

ise f fonksiyonuna *p. kuvvetten integrallenebilir* denir. $p.$ kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ ile gösterilir. $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır. $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ üzerinde tanımlanan $\|.\|_p$ fonksiyonu bir yarı-normdur.

$$\mathscr{N}^p(X, \mathscr{A}, \mu) = \{f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu) \mid \|f\|_p = 0\} \subseteq \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$$

altkümesi göz önüne alınsın. $\mathscr{N}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ nin bir alt vektör uzayıdır. $\mathscr{N}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ uzayının, $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ deki tüm kosetlerinin kümesi,

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu) := \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu) / \mathscr{N}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$$

olsun. Bu durumda $L^p(X, \mathscr{A}, \mu) = \{[f] = f + \mathscr{N}^p(X, \mathscr{A}, \mu) \mid f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)\}$ olur. $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ üzerinde,

$$\text{“}f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathscr{N}^p(X, \mathscr{A}, \mu)\text{”}$$

ile tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu $\sim$ denklik bağıntısının denklik sınıfları $\mathscr{N}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ nin $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ deki kosetleridir. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ iken $f-g \in \mathscr{N}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ ise $\|f-g\|_p = 0$ olup $\|(f-g)^p\|_1 = 0$ dır. Teorem 2.10.14 den, $f = g$ $(h.h.h.y)$ olur. Yani $f \sim g$ olması için gerek ve yeter koşul $f = g$ $(h.h.h.y)$ olmasıdır. Buna göre $[f] \in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ için

$$[f]+[g] = [f+g] \text{ ve } [\alpha f] = \alpha [f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpma ile $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ bir vektör uzayıdır. Üstelik $f,g \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ ve $f \sim g$ ise $\|f\|_p = \|g\|_p$ dir. Böylece $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ biçiminde tanımlanan $\|.\|_p$ fonksiyonu, $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ üzerinde bir norm olur.

Her ne kadar $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ uzayının elemanları $[f]$ denklik sınıfları ise de, onları denklik sınıflarının f temsilci elemanları ile göstermek mümkündür.

Tanım 2.10.16. $(X,\mathscr{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \to \mathbb{C}$ bir $\mathscr{A}$-ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer $\{x \in X \mid |f(x)| > M\}$ kümesi lokal μ-boş olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı varsa f fonksiyonu *esaslı sınırlıdır*, denir. Tüm esaslı sınırlı $\mathscr{A}$-ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların kümesi $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ ile gösterilir. $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ bir vektör uzayıdır. $f \in \mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ için,

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}|f(x)| = \inf\{M \mid \{x \in X \mid |f(x)| > M)\} \text{ lokal } \mu\text{-boştur}\}$$

tanımlansın. $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ üzerinde,

$$\text{“}f \sim g \Leftrightarrow f = g \ (h.h.h.y.)\text{”}$$

biçiminde tanımlanan denklik bağıntısı $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ ile gösterilir. $\|.\|_\infty$ fonksiyonu, $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ üzerinde bir norm olur.

Teorem 2.10.17. *$(X,\mathscr{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı ve $p \in [1,+\infty]$ olsun. O halde $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$, $\|.\|_p$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.*

Tanım 2.10.18. [22] X bir Hausdorff topolojik uzay ve $\mathscr{A}$, X üzerinde $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathscr{A}$ şartını sağlayan bir σ-cebir olsun. μ, $(X,\mathscr{A})$ üzerinde bir ölçüm olmak üzere eğer

(i) Her $K \subseteq X$ kompakt altkümesi için $\mu(K) < \infty$;

(ii) Her $E \in \mathscr{A}$ için $\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid U$ açık ve $E \subseteq U\}$;

(iii) Her $U \subseteq X$ açık altkümesi için $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K$ kompakt ve $K \subseteq U\}$

şartları sağlanıyorsa μ ye bir *regüler ölçüm* denir. $(X,\mathcal{B}(X))$ üzerinde bir $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,+\infty]$ regüler ölçümü, *regüler Borel ölçüm* olarak adlandırılır.

Tanım 2.10.19. S bir yarıgrup ve bir topolojik uzay olsun. S yarıgrubu üzerinde $S \times S \to S$, $(s,t) \mapsto st$ ile tanımlı işlem sürekli ise S ye bir *topolojik yarıgrup* denir.

Tanım 2.10.20. G bir grup ve τ da G üzerinde bir topoloji olsun. G grubu üzerinde tanımlı $m : G \times G \to G,\ m(a,b) = ab$ işlemi ile $n : G \to G,\ n(a) = a^{-1}$ fonksiyonu sürekli ise (G,m,τ) üçlüsüne bir *topolojik grup* denir. Burada $G \times G$ kartezyen çarpımı üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir.

Tanım 2.10.21. G, τ topolojisi ile birlikte, bir topolojik grup (veya topolojik yarıgrup) olsun. Eğer τ, G üzerinde bir ayrık (diskret) topoloji ise, yani G üzerindeki τ topolojisi, G nin tüm altkümelerinin ailesi $P(G)$ olarak alınırsa, G topolojik grubuna bir *ayrık grup (veya ayrık yarıgrup)* denir.

Tanım 2.10.22. G bir topolojik grup olsun. Eğer G, yerel kompakt bir Hausdorff uzayı ise G ye bir *yerel kompakt grup* denir.

Tanım 2.10.23. [22] G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde sıfırdan farklı bir regüler Borel ölçüm olsun. Eğer her $x \in G$ ve her $B \in \mathcal{B}(G)$ için $\mu(xB) = \mu(B)$ şartı sağlanıyorsa μ ye G üzerinde bir *sol Haar ölçüm*; $\mu(Bx) = \mu(B)$ şartı sağlanıyorsa μ ye bir *sağ Haar ölçüm* denir.

Teorem 2.10.24. [22, Teorem 9.2.2 ve 9.2.6] *G bir yerel kompakt grup olsun. O halde G üzerinde bir μ sol Haar ölçüm vardır. Üstelik ν, G üzerinde başka bir sol Haar ölçüm ise o zaman $\nu = c\mu$ olacak şekilde bir $c \in (0,+\infty)$ sabiti vardır.*

Uyarı 2.10.25. *G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde bir sol Haar ölçüm olsun.*

(i) $p \in [1, +\infty]$ olmak üzere $L^p(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ uzayı, $L^p(G)$ notasyonu ile gösterilir.

(ii) $L^\infty(G)$ uzayı, noktasal çarpım ile bir değişmeli Banach cebiridir.

Tanım 2.10.26. G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde bir sol Haar ölçüm olsun. $f, g \in L^1(G)$ ve $x \in G$ olmak üzere

$$(f * g)(x) = \int\limits_G f(t)\, g\left(t^{-1}x\right) d\mu(t)$$

ile tanımlı $f * g : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna f ile g nin *konvolüsyonu* denir. $L^1(G)$ üzerindeki çarpma işlemi konvolüsyon olarak alınırsa $L^1(G)$ bir Banach cebiri olur. Bu durumda $L^1(G)$ ye G nin *grup cebiri* adı verilir.

Teorem 2.10.27. *G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde bir sol Haar ölçüm olsun. O halde $g \in L^\infty(G)$ ve $f \in L^1(G)$ olmak üzere*

$$T : L^\infty(G) \to (L^1(G))^*, \; g \mapsto T_g(f) := < f, g > = \int\limits_G fg d\mu$$

ile tanımlı T fonksiyonu bir izometrik izomorfizmadır.

Teorem 2.10.28. [62] *G bir ayrık grup (veya yarıgrup) olsun. O halde $L^1(G) = \ell^1(G)$ ve $L^\infty(G) = \ell^\infty(G)$ olur.*

Tanım 2.10.29. G bir yerel kompakt grup ve

$$M(G) := \{\mu \mid \mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{C} \text{ regüler Borel ölçüm } \}$$

olsun. $\mu, \nu \in M(G)$ olmak üzere $\mu * \nu \in M(G)$ konvolüsyon çarpımı

$$(\mu * \nu)(E) := \int\limits_G \mu(E \cdot s^{-1}) d\nu(s) \qquad (E \in \mathcal{B}(G))$$

ile tanımlanır. Üstelik $M(G)$ uzayı, $(C_0(G))^*$ dual uzayı ile izometrik izomorf olduğundan bu konvolüsyon çarpımı

$$\langle f, \mu * \nu \rangle := \int\limits_G \left(\int\limits_G f(st) d\mu(s) \right) d\nu(t) \qquad (f \in C_0(G))$$

şeklinde de verilir. $M(G)$ üzerindeki çarpma işlemi konvolüsyon olarak alınırsa $(M(G),*)$ bir Banach cebiri olur. Bu durumda $M(G)$ ye G nin *ölçüm cebiri* adı verilir.

Tanım 2.10.30. [71] G bir yerel kompakt grup olsun.

(i) $g \in G$ olmak üzere g deki nokta kütle $\delta_g \in M(G)$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\delta_g : C_0(G) \to \mathbb{C},\ \ f \mapsto \delta_g(f) := f(g)$$

(ii) $\mu \in M(G)$ olsun. Eğer μ ölçümü, $\{\delta_g \mid g \in G\}$ kümesinin kapalı lineer gereni içinde ise μ ölçümüne *ayrık* denir.

Teorem 2.10.31. [71] *G bir yerel kompakt grup olsun.*

$$M_d(G) := \{\mu \in M(G) \mid \mu \text{ ayrık ölçüm}\}$$

uzayı, $M(G)$ nin bir kapalı altcebiridir. Eğer G ayrık grup ise, o zaman $M_d(G) = M(G)$ olur. Üstelik,

$$\varphi : \ell^1(G) \to M(G), \quad \varphi(f) = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g$$

fonksiyonu bir izometrik homomorfizma olup $\varphi(\ell^1(G)) = M_d(G)$ dir. Yani $\ell^1(G)$ uzayı, $M(G)$ uzayının tüm ayrık ölçümlerden oluşan bir altcebiridir.

Uyarı 2.10.32. *S bir ayrık yarıgrup olsun. O halde $\ell^1(S)$ yarıgrup cebirinin elemanları, $f = \sum_{s \in S} f(s)\,\delta_s$ formunda temsil edilirler. Böylece $f = \sum_{s \in S} f(s)\,\delta_s$, $g = \sum_{t \in S} g(t)\,\delta_t \in \ell^1(S)$ için $f * g$ konvolüsyon çarpımı,*

$$f * g = \sum_{u \in S} h(u)\delta_u \ \ni\ h(u) = \sum_{st=u} f(s)g(t)$$

olur.

3. AMENABİLİTE

3.1. Amenable Yerel Kompakt Gruplar

Tanım 3.1.1. [62] G bir yerel kompakt grup olsun. Eğer $m \in (L^\infty(G))^*$ fonksiyonu için

$$\|m\| =< 1_G, m >= 1$$

şartı sağlanıyorsa m ye $L^\infty(G)$ üzerinde bir *mean* denir. $L^\infty(G)$ üzerindeki tüm meanlerin kümesi $\mathcal{M}(L^\infty(G))$ ile gösterilir. Burada $1_G : G \to \{0,1\}$ fonksiyonu, G kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

m, $L^\infty(G)$ üzerinde bir mean olsun. Her $a \in G$, $f \in L^\infty(G)$ için,

$$m({}_af) = m(f) \quad (\text{veya } \ m(f_a) = m(f))$$

ise m ye *sol (veya sağ) değişmez (invaryant) mean* denir. Burada $f \in L^\infty(G)$ ve $a \in G$ olmak üzere ${}_af, f_a \in L^\infty(G)$ fonksiyonları

$${}_af(x) := f(ax) \quad \text{ve} \quad f_a(x) := f(xa) \quad (x \in G)$$

ile tanımlıdır.

Önerme 3.1.2. [62] *G bir yerel kompakt grup olsun. O halde $< 1_G, m >= 1$ şartını sağlayan bir $m : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneli için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) m, $L^\infty(G)$ üzerinde bir mean olur;

(ii) m pozitiftir, yani her pozitif $f \in L^\infty(G)$ fonksiyonu için $m(f) \geq 0$ dır.

Örnek 3.1.3. G sonlu bir yerel kompakt grup olsun. $L^\infty(G)$ üzerinde bir $m : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneli

$$m(f) := |G|^{-1} \sum_{g \in G} f(g) \quad (f \in L^\infty(G))$$

ile tanımlansın. $m \in (L^\infty(G))^*$ fonksiyonu için

$$m(1_G) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} 1_G(g) = |G|^{-1} \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{|G| \text{ tane}} = |G|^{-1} |G| = 1 \in \mathbb{C}$$

dir ve her pozitif $f \in L^\infty(G)$ fonksiyonu için $m(f) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f(g) \geq 0$ olur. Çünkü her bir $f \in L^\infty(G)$ fonksiyonu pozitif olduğundan her $g \in G$ için $f(g) \geq 0$ dır. Böylece m, $L^\infty(G)$ üzerinde bir mean olur. Üstelik her $h \in G$, $f \in L^\infty(G)$ için,

$$\begin{aligned} m({}_h f) &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} ({}_h f(g)) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f(hg) \\ &= |G|^{-1} \sum_{m \in G} f(m) = m(f) \end{aligned}$$

olduğundan m, $L^\infty(G)$ üzerinde bir sol değişmez mean olur.

Teorem 3.1.4. [62] *G bir yerel kompakt grup olsun. O halde $\mathcal{M}(L^\infty(G))$ kümesi, $(L^\infty(G))^*$ içinde w^*-kompakttır.*

Tanım 3.1.5. [62] G bir yerel kompakt grup olsun. Eğer $L^\infty(G)$ üzerinde bir sol değişmez mean bulunabiliyor ise G grubuna *amenable* denir.

Örnek 3.1.6. [62] Her sonlu yerel kompakt grup amenabledır.

Örnek 3.1.7. [62] Her kompakt grup amenabledır.

Örnek 3.1.8. [62] Her değişmeli yerel kompakt grup amenabledır.

Örnek 3.1.9. [62] İki üreteçli $\mathbb{F}_2$ serbest grubu amenable değildir.

G bir yerel kompakt grup olsun. G üzerindeki topoloji ayrık topoloji olarak alındığında aynı grup G_d ile gösterilsin.

Teorem 3.1.10. [71, Sonuç 1.1.10] *Eğer G_d amenable ise o zaman G grubu da amenable olur.*

Teorem 3.1.11. [71, Teorem 1.1.11] *G bir yerel kompakt grup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) G amenabledır;

(ii) $L^\infty(G)$ üzerinde bir sağ değişmez mean vardır;

(iii) $L^\infty(G)$ üzerinde bir değişmez mean vardır.

Amenable yerel kompakt gruplara ait bazı kalıtsal özellikler şu şekilde verilebilir:

Teorem 3.1.12. [71, Önerme 1.2.1] *G ve H birer yerel kompakt grup ve $\theta : G \to H$ sürekli bir homomorfizma olsun. Eğer G amenable ve $\overline{\theta(G)} = H$ ise o zaman H amenable gruptur.*

Teorem 3.1.13. [71, Sonuç 1.2.2] *G bir amenable yerel kompakt grup ve N, G nin kapalı normal bir altgrubu olsun. O halde G/N bölüm grubu amenable olur.*

Teorem 3.1.14. [71, Sonuç 1.2.10] *G bir yerel kompakt grup ve H, G nin kapalı normal bir altgrubu olsun. Eğer G/H bölüm grubu ile H amenable ise o zaman G grubu amenable olur.*

Teorem 3.1.15. [71, Teorem 1.2.7] *G bir amenable yerel kompakt grup ve H, G nin kapalı bir altgrubu olsun. Bu durumda H amenable grup olur.*

Sonuç 3.1.16. [71, Sonuç 1.2.8] *G bir yerel kompakt grup olsun. Eğer G nin $\mathbb{F}_2$ ye izomorf bir kapalı altgrubu varsa o zaman G grubu amenable değildir.*

Tanım 3.1.17. [71] $n \in \mathbb{N}$ olsun. $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ birim matris ve A^t, $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin transpozu olmak üzere $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = AA^t = I_n\}$ kümesine *n-boyutlu ortogonal grup* denir. $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$, $O(n)$ nin bir altgrubudur ve bu altgruba *n-boyutlu özel ortogonal grup* adı verilir. $SO(n)$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin kapalı ve sınırlı bir altkümesi olup kompakttır.

Örnek 3.1.18. $n \geq 3$ için $SO(n)$ kompakt olduğundan amenable gruptur. Üstelik $SO(n)$ grubunun $\mathbb{F}_2$ ye izomorf olan bir altgrubu vardır. Ayrık topolojide her altgrup kapalı olduğundan $SO(n)_d$ amenable değildir [71, Teorem 0.1.4 ve Örnek 1.2.9].

3.2. Amenable Yarıgruplar

Tanım 3.2.1. [30] S bir ayrık yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için,

$$ss^*s = s \text{ ve } s^*ss^* = s^*$$

olacak şekilde teklikle belli bir $s^* \in S$ elemanı var ise S ye bir *ters yarıgrup (inverse semigroup)* adı verilir. Burada $s \mapsto s^*$ dönüşümü S üzerinde bir involüsyondur.

Tanım 3.2.2. S bir ters yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = e^* = e$ oluyor ise e ye S nin bir *idempotent elemanı* denir. S nin tüm idempotent elemanlarının kümesi E ile gösterilir. Her $s \in S$ için $s^*s, ss^* \in E$ olduğu açıktır. Böylece E nin daima boş kümeden farklı olduğu görülür.

Bundan sonraki kısımlarda, aksi belirtilmedikçe, S bir ters yarıgrubu ve E de S nin tüm idempotent elemanlarının kümesini gösterecektir.

E kümesi üzerinde doğal bir sıralama vardır ve şu şekilde tanımlanır:

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e \qquad (e, f \in E).$$

$e, f, g \in E$ olsun. $e^2 = e$ olduğundan $e \leq e$ olup $\leq$ yansımalıdır. Eğer $e \leq f$ ve $f \leq e$ ise $ef = fe = e$ ve $fe = ef = f$ dir ve $\leq$ ters-simetriktir. Şimdi ise $e \leq f$ ve $f \leq g$ olsun. Bu durumda $eg = (ef)g = e(fg) = ef = e$ ve $ge = g(fe) = (gf)e = fe = e$ olduğundan $e \leq g$ olup $\leq$ bağıntısı geçişlidir. Böylece $\leq$, E üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olur. [42, Teorem V.1.2] gereği, E bir değişmeli yarılatistir.

S üzerinde bir "$s \sim t \Leftrightarrow se = te, \exists e \in E$" bağıntısı tanımlansın. $\sim$ bağıntısı, S üzerinde bir kongruans bağıntısıdır. Böylece S kümesinin bu bağıntıya göre denklik sınıflarının $S/\sim$ kümesi, $\bar{s}, \bar{t} \in S/\sim$ olmak üzere $\bar{s} \cdot \bar{t} = \overline{st}$ işlemi ile bir grup olur. Bu gruba, S nin *maksimal grup homomorf görüntüsü* adı verilir ve $G(S)$ ile gösterilir [56]:

$\sim$ bağıntısının yansıma ve simetri özelliklerini sağladığı açıktır. $s,t,u \in S$ olsun. Eğer $s \sim t$ ve $t \sim u$ ise $se = te$ ve $tf = uf$ olacak şekilde $e, f \in E$ vardır. Bu durumda $s(ef) = (se)f = (te)f = t(ef) = t(fe) = (tf)e = (uf)e = u(fe) = u(ef)$ eşitlikleri sağlandığından $s(ef) = u(ef)$ olacak biçimde $ef \in E$ dir. Yani $s \sim u$ olup $\sim$ bağıntısı geçişme özelliğini sağlar. O halde $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. Eğer $s \in S$ ve $e \in E$ ise o zaman $(s^*es)^2 = s^*ess^*es = s^*ss^*ees = s^*es$ ve $(s^*es)^* = s^*es$ olduğundan $s^*es \in E$ dir. Şimdi ise $s \sim t$ ve $u \in S$ olsun. O halde $se = te$ olacak şekilde bir $e \in E$ idempotenti vardır ve buradan

$$su(u^*eu) = s((uu^*)eu) = s(e(uu^*)u) = se(uu^*u) = te(uu^*u) = t((uu^*)eu) = tu(u^*eu)$$

eşitlikleri sağlanır. Benzer şekilde $(ueu^*)us = (ueu^*)ut$ olduğu görülür. Böylece $su \sim tu$ ve $us \sim ut$ dir. Yani $\sim$, S üzerinde bir kongruans bağıntısıdır.

$\overline{s}$, $s \in S$ elemanının $\sim$ bağıntısına göre denklik sınıfını göstersin. $\cdot$ işlemi, $S/\sim$ üzerinde bir ikili işlemdir. S bir yarıgrup olduğundan $\cdot$ ikili işlemi birleşme özelliğini sağlar. Her $e, f \in E$ için $e(fe) = f(fe)$ olduğundan $e \sim f$ dir ve buradan $\overline{e} = \overline{f}$ olur. Yani S kümesinin tüm idempotent elemanları aynı denklik sınıfına aittir. Bu denklik sınıfını $\overline{1}$ ile gösterelim. Her $\overline{s} \in S/\sim$ için

$$\overline{1} \cdot \overline{s} = \overline{ss^*} \cdot \overline{s} = \overline{ss^*s} = \overline{s} = \overline{s} \cdot \overline{s^*s} = \overline{s} \cdot \overline{1}$$

olduğundan $\overline{1}$, $S/\sim$ kümesinin $\cdot$ işlemine göre birimidir. Buna göre

$$\overline{s^*} \cdot \overline{s} = \overline{s^*s} = \overline{1} = \overline{ss^*} = \overline{s} \cdot \overline{s^*}$$

olduğundan herhangi bir $\overline{s} \in S/\sim$ elemanının tersinin $\overline{s^*}$ olduğu görülür. O halde $S/\sim$ bir gruptur.

Örnek 3.2.3. $\mathcal{C}$, p ve q ile üretilen iki-devirli (bicyclic) ters yarıgrup olsun, yani

$$\mathcal{C} = \{p^m q^n \mid m, n \geq 0\}, \quad (p^m q^n)^* = p^n q^m$$

olsun. $\mathcal{C}$ üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(p^m q^n)(p^{m'} q^{n'}) = p^{m-n+\max\{n,m'\}} q^{m'-n'+\max\{n,m'\}}.$$

$\mathcal{C}$ deki tüm idempotent elemanların kümesi $E_{\mathcal{C}} = \{p^n q^n \mid n = 0,1,\ldots\}$, aşağıda verilen sıralama bağıntısı ile bir tam sıralı kümedir:

$$p^n q^n \leq p^m q^m \Leftrightarrow m \leq n.$$

Tanım 3.2.4. S bir ters yarıgrup olsun. Eğer $\ell^\infty(S)$ üzerinde bir sol (veya sağ) değişmez mean bulunabiliyorsa S yarıgrubuna *amenable* denir.

Teorem 3.2.5. [63, Önerme A.0.5] *S bir ters yarıgrup olsun. S nin amenable olması için gerek ve yeter koşul $G(S) := S/\sim$ grubunun amenable olmasıdır.*

Örnek 3.2.6. Her sonlu ters yarıgrup amenabledır.

Örnek 3.2.7. $\mathcal{C}$, Örnek 3.2.3 deki iki-devirli ters yarıgrup olsun. O halde $G(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$ dir. Teorem 3.2.5 den, $\mathcal{C}$ amenable olur [2].

3.3. Amenable Banach Cebirler

Bu bölümde, amenable Banach cebirleri üzerinde durulacak ve bu konuda günümüze kadar yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilecektir.

Bir G yerel kompakt grubu üzerindeki sol değişmez meanler ile $L^1(G)$ Banach cebiri üzerindeki türevler arasında ilk kez 1972 yılında B.E. Johnson [47] bir bağlantı kurmuştur, ve *Hochschild kohomoloji* yardımıyla Banach cebirlerinde amenabilite tanımını vermiştir.

A bir Banach cebiri ve X bir Banach A-bimodül olsun. Bir $D : A \to X$ lineer dönüşümü, her $a,b \in A$ için

$$D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b$$

şartını sağlıyorsa D bir türevdir. A dan X e tanımlı tüm sınırlı türevlerin kümesi $Z^1(A,X)$ ile gösterilir.

$Z^1(A,X)$, A dan X e tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $\mathfrak{B}(A,X)$ in kapalı bir alt vektör uzayıdır.

$x \in X$ olsun. Her $a \in A$ için,

$$D_x : A \to X,\ \ D_x(a) := a \cdot x - x \cdot a$$

dönüşümü tanımlansın. D_x fonksiyonunun lineer ve sınırlı olduğu açıktır. Üstelik X bir A-bimodül olduğundan, her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned} D_x(ab) &= (ab) \cdot x - x \cdot (ab) = a \cdot (b \cdot x) - a \cdot (x \cdot b) + (a \cdot x) \cdot b - (x \cdot a) \cdot b \\ &= a \cdot D_x(b) + D_x(a) \cdot b \end{aligned}$$

olup $D_x \in Z^1(A, X)$ dir. Bu şekilde tanımlanan D_x dönüşümüne, *x elemanı tarafindan belirlenmiş iç türev* adı verilir. A dan X e tanımlı tüm iç türevlerin kümesi $B^1(A, X)$ ile gösterilir. $B^1(A, X)$ uzayı, $Z^1(A, X)$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 3.3.1. [47] A bir Banach cebiri ve X bir Banach A-bimodül olsun.

$$H^1(A, X) = Z^1(A, X) / B^1(A, X)$$

ile tanımlı bölüm uzayına, *A nın katsayıları X de olan birinci dereceden Hochschild kohomoloji grubu* denir.

Teorem 3.3.2. *(*Johnson [47]*) G bir yerel kompakt grup olsun. O halde G nin amenable olması için gerek ve yeter koşul her Banach $L^1(G)$-bimodül E için $H^1(L^1(G), E^*) = \{0\}$ olmasıdır.*

Teorem 3.3.2 nin ışığında *amenabilite* tanımı şu şekilde verilir:

Tanım 3.3.3. [47] A bir Banach cebiri olsun. Eğer her X Banach A-bimodülü için $H^1(A, X^*) = \{0\}$ oluyorsa, yani A dan X^* dual modülüne tanımlı her sınırlı türev bir iç türev ise, o zaman A ya *amenable Banach cebiri* denir.

Tanım 3.3.3 gereği, bir yerel kompakt G grubunun amenable olması için gerek ve yeter koşul $L^1(G)$ grup cebirinin amenable Banach cebiri olmasıdır.

Örnek 3.3.4. $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı ve $A(\overline{\mathbb{D}})$ Disk cebiri verilsin. $x_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ olsun. $\mathbb{C}$ kompleks uzayı, her $f \in A(\overline{\mathbb{D}}), \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\cdot : \mathbb{C} \times A(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathbb{C},\ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f := \lambda f(x_0)$$

dış işlemi ile bir sağ $A(\overline{\mathbb{D}})$-modül;

$$\cdot : A(\overline{\mathbb{D}}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (f, \lambda) \mapsto f \cdot \lambda := \lambda f(x_0)$$

dış işlemi ile bir sol $A(\overline{\mathbb{D}})$-modüldür. Üstelik $\mathbb{C}$, bir Banach $A(\overline{\mathbb{D}})$-bimodüldür. Bir $D : A(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f'(x_0)$ dönüşümü tanımlansın. Her $f, g \in A(\overline{\mathbb{D}})$ için,

$$\begin{aligned} D(fg) &= (fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ &= D(f)g(x_0) + f(x_0)D(g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g) \end{aligned}$$

olduğundan $D \in Z^1(A(\overline{\mathbb{D}}), \mathbb{C})$ dir. Ancak $\lambda \in \mathbb{C}$ elemanı ile belirlenen her D_λ iç türevi sıfırdır, çünkü her $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ için

$$D_\lambda(f) = f \cdot \lambda - \lambda \cdot f = \lambda f(x_0) - \lambda f(x_0) = 0$$

olur. Yani $B^1(A(\overline{\mathbb{D}}), \mathbb{C}) = \{0\}$ dır. Böylece $A(\overline{\mathbb{D}})$ Disk cebiri amenable değildir.

Bir Banach cebirinin amenable olduğunu gösterirken Tanım 3.3.3 ü uygulamak çoğunlukla kolay değildir. Bu sebeple amenable Banach cebirleri için pek çok karakterizasyon yapılmıştır.

A bir Banach cebiri olsun. $A\hat{\otimes}A$ projektif tensör çarpımı, her $a, b, c \in A$ için

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c \quad \text{ve} \quad (b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca$$

şeklindeki dış işlemler ile bir Banach A-bimodüldür. Tanım 2.4.5 gereği $(A\hat{\otimes}A)^*$ ile $(A\hat{\otimes}A)^{**}$ dual uzayları da birer Banach A-bimodül olur. Önerme 2.2.8 den, $(A\hat{\otimes}A)^*$ dual modülü ile $\mathfrak{B}(A, A^*)$ uzayı izometrik izomorftur. Böylece $(A\hat{\otimes}A)^*$ üzerindeki Banach A-bimodül etkileri

$$(a \cdot T)(b) = a \cdot (T(b)), \quad (T \cdot a)(b) = T(ab) \quad (a, b \in A,\ T \in \mathfrak{B}(A, A^*))$$

şeklinde alınabilir. $A\hat{\otimes}A$ üzerinde *köşegen operatör (diagonal operator)* ile duali, sırasıyla,

$$\pi_A : A\hat{\otimes}A \to A, \quad a \otimes b \mapsto ab \ \ (a,b \in A)$$

$$\pi_A^* : A^* \to (A\hat{\otimes}A)^*, \quad \pi_A^*(f)(a \otimes b) = f(ab) \ \ (f \in A^*, \ a,b \in A)$$

şeklinde tanımlıdır. $A\hat{\otimes}A$ üzerinde yukarıda verilen dış işlemler ile birlikte π_A, bir A-bimodül homomorfizmasıdır.

Tanım 3.3.5. [46] A bir Banach cebiri olsun.

(i) Bir $m \in A\hat{\otimes}A$ elemanı, her $a \in A$ için $a \cdot m = m \cdot a$ ve $a\pi_A(m) = a$ şartlarını sağlıyorsa m ye, A için bir *köşegen (diagonal)* denir.
(ii) Bir $M \in (A\hat{\otimes}A)^{**}$ elemanı, her $a \in A$ için $a \cdot M = M \cdot a$ ve $a \cdot \pi_A^{**}(M) = a$ şartlarını sağlıyorsa M ye, A için bir *sanal köşegen (virtual diagonal)* denir.
(iii) $A\hat{\otimes}A$ içinde sınırlı bir $(m_\alpha)_\alpha$ ağı, her $a \in A$ için $a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a \to 0$ ve $a\pi_A(m_\alpha) \to a$ şartlarını sağlıyorsa bu ağa, A için bir *yaklaşık köşegen (approximate diagonal)* denir.

B.E. Johnson [46], amenable Banach cebirlerine ait bir karakterizasyonu şu şekilde yapmıştır:

Teorem 3.3.6. [46, Teorem 1.3] *A bir Banach cebiri olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

(i) A amenable dır.
(ii) A için bir yaklaşık köşegen vardır.
(iii) A için bir sanal köşegen vardır.

Amenable Banach cebirlerinin parçalanabilir kısa tam diziler ile karakterizasyonu 1989 yılında Curtis ve Loy [23] tarafından şu şekilde verilmiştir:

Teorem 3.3.7. [23, Teorem 1.3] *Bir A Banach cebirinin amenable olması için gerek ve yeter koşul* *(i) A nın sınırlı bir yaklaşık biriminin var olması, ve*

(ii) π_A, $A\hat{\otimes}A$ üzerinde köşegen operatör ve $i : \mathrm{Ker}\,\pi_A \to A\hat{\otimes}A$ doğal içerme fonksiyonu olmak üzere

$$\Pi : 0 \to A^* \xrightarrow{\pi_A^*} (A\hat{\otimes}A)^* \xrightarrow{i^*} (\mathrm{Ker}\,\pi_A)^* \to 0$$

dizisinin Banach A-bimodüllerin parçalanabilir kısa tam dizisi olmasıdır.

Teorem 3.3.8. [23, Teorem 2.3] *A bir amenable Banach cebiri olsun. X^* bir dual Banach A-modül olmak üzere*

$$\sum : 0 \to X^* \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

dizisi sol ya da sağ Banach A-modüllerin kısa tam dizisi olsun. Eğer $F \circ f = I_{X^*}$ olacak şekilde sınırlı bir $F : Y \to X^*$ lineer dönüşümü varsa, o zaman $\sum$ kısa tam dizisi parçalanabilirdir.

Amenable Banach cebirlerine ait başlıca kalıtsal özellikler şu şekilde verilir:

Teorem 3.3.9. [71, Önerme 2.3.1] *A ve B birer Banach cebiri ve $\varphi : A \to B$ sürekli bir cebir homomorfizması olsun. Eğer A amenable ve $\overline{\varphi(A)} = B$ ise o zaman B amenable olur.*

Sonuç 3.3.10. [71, Sonuç 2.3.2] *A bir amenable Banach cebiri ve I, A nın kapalı bir ideali ise o zaman A/I Banach cebiri amenable olur.*

Teorem 3.3.11. [71, Önerme 2.2.1] *A bir amenable Banach cebiri olsun. O halde A nın sınırlı bir yaklaşık birimi vardır.*

Teorem 3.3.12. [71, Önerme 2.3.3] *A bir amenable Banach cebiri ve I, A nın kapalı bir ideali olsun. O halde I idealinin amenable olması için gerek ve yeter koşul I da sınırlı bir yaklaşık birimin var olmasıdır.*

Teorem 3.3.13. [71, Teorem 2.3.10] *A bir Banach cebiri ve I, A nın kapalı bir ideali olsun. Eğer I ve A/I amenable ise o zaman A amenable olur.*

Sonuç 3.3.14. [71, Sonuç 2.3.11] *A bir Banach cebiri olsun. O halde A nın amenable olması için gerek ve yeter koşul A nın birimlileştirilmişi $A^{\sharp}$ nın amenable olmasıdır.*

W.G. Bade, P.C. Curtis, Jr. ve H.G. Dales [8], değişmeli Banach cebirleri için *zayıf amenabilite* kavramını 1987 yılında tanıtmışlardır. B.E. Johnson ise zayıf amenabilite için daha genel bir tanımlama yapmıştır:

Tanım 3.3.15. A bir Banach cebiri olsun. Eğer $H^1(A, A^*) = \{0\}$ ise A Banach cebirine *zayıf amenable (weak amenable)* denir.

Her amenable Banach cebiri, zayıf amenabledır. Ancak zayıf amenable Banach cebirlerin sınıfı, amenable Banach cebirlerine göre oldukça geniştir. Örneğin, her yerel kompakt G grubu için $L^1(G)$ grup cebiri zayıf amenabledır. Her C^*-cebir zayıf amenabledır [48].

Teorem 3.3.16. [39] *A bir Banach cebiri olsun.*

(i) A değişmeli, B bir değişmeli Banach cebiri ve $\varphi : A \to B$ sürekli bir cebir homomorfizması olsun. Eğer A zayıf amenable ve $\overline{\varphi(A)} = B$ ise o zaman B zayıf amenable olur.

(ii A zayıf amenable ve I, A nın bir kapalı ideali olsun. I nın zayıf amenable olması için gerek ve yeter koşul $\overline{I^2} = I$ olmasıdır.

(iii) A zayıf amenable ve B bir zayıf amenable Banach cebiri ise $A\hat{\otimes}B$ de zayıf amenable olur.

Teorem 3.3.17. [25] *A bir Banach cebiri ve I, A nın bir kapalı ideali olsun. Eğer I ve A/I zayıf amenable ise A zayıf amenable olur.*

Bodaghi, Gordji ve Medghalchi [14], 2009 yılında bir A Banach cebiri üzerinde tanımlı φ, ψ sürekli cebir homomorfizmaları için zayıf amenabilite kavramını genelleştirmişlerdir:

A bir Banach cebiri ve $\varphi, \psi \in Hom(A)$ olsun. A Banach cebiri,

$$a \cdot x := \varphi(a)x\ ,\ \ x \cdot a := x\psi(a) \quad (a, x \in A)$$

şeklinde tanımlı dış işlemler ile bir A-modüldür. Bu A-modül, [14] de $A_{(\varphi,\psi)}$ ile gösterilmiştir.

X bir Banach A-bimodül olmak üzere $Z^1_{\varphi,\psi}(A,X)$, A dan X e tüm sınırlı (φ,ψ)-türevlerin kümesi ve $B^1_{\varphi,\psi}(A,X)$ de A dan X e tüm (φ,ψ)-iç türevlerin kümesi olsun. Eğer $H^1_{\varphi,\psi}(A,(A_{(\varphi,\psi)})^*) = \{0\}$ ise A ya (φ,ψ)-*zayıf amenable* denir.

Yine aynı çalışmada [14], A nın (φ,ψ)-zayıf amenabilitesi ile zayıf amenabilitesi arasındaki ilişki incelenmiştir.

1998 yılında Dales, Ghahramani ve Grønbæk [27], $n \in \mathbb{N}$ için Banach cebirlerde *n-zayıf amenabilite* kavramını vermişlerdir. Üstelik m-zayıf ve n-zayıf amenable Banach cebirleri arasındaki bağıntıyı incelemişler ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(n+2)$-zayıf amenabilitenin n-zayıf amenabiliteyi gerektirdiğini ispatlamışlardır.

Tanım 3.3.18. [27] A bir Banach cebiri ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $A^{(n)}$, A nın n. dual uzayı olmak üzere eğer $H^1\left(A, A^{(n)}\right) = \{0\}$ ise A ya *n-zayıf amenable (n-weak amenable)* denir. Eğer her $n \in \mathbb{Z}^+$ için A n-zayıf amenable ise A ya *daimi zayıf amenable (permanently weakly amenable)* adı verilir.

$n = 1$ için yukarıda verilen tanım, zayıf amenabilite kavramı ile çakışır.

Her C^*-cebir daimi zayıf amenabledır [27, Teorem 2.1]. Ayrıca her yerel kompakt G grubu için $L^1(G)$ cebiri daimi zayıf amenabledır [27, Önerme 1.13].

2014 de A. Bodaghi ve B. Shojaee [16], φ ile ψ bir A Banach cebiri üzerinde sürekli homomorfizmalar olmak üzere n-zayıf amenabilite kavramını (φ,ψ)-n-zayıf amenabilite olarak genişletmişlerdir. Üstelik A Banach cebiri ile girdileri A ya ait olan $m \times m$ tipinde matrislerin Banach cebiri $M_m(A)$ nın (φ,ψ)-n-zayıf amenabiliteleri arasındaki bazı bağıntıları çalışmışlar ve G bir yerel kompakt grup olmak üzere her $\varphi, \psi \in Hom(L^1(G))$ için $L^1(G)$ nin (φ, ψ)-n-zayıf amenable olduğunu ispatlamışlardır.

3.4. Modül Amenable Banach Cebirler

Banach cebirlerde *modül amenabilite* kavramı, ilk kez 2004 yılında M. Amini [1] tarafından tanıtılmıştır. Literatürde bu teori, Banach cebirlerin Johnson amenabilitesi için önemli bir genelleme olarak kabul edilir.

Bu kısımda, modül amenabilite teorisinde geçen temel kavramlardan ve bu konuda yapılan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

Tanım 3.4.1. [1] A ve $\mathfrak{A}$ birer Banach cebiri olsun. Her $\alpha \in \mathfrak{A}$, $a, b \in A$ için,

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b \ , \ (ab) \cdot \alpha = a(b \cdot \alpha) \tag{3.1}$$

ile verilen *modül etkileri* ile birlikte A, bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun. Üstelik her $\alpha \in U$, $a \in A$ için $\alpha \cdot a = a \cdot \alpha$ şartı sağlanıyorsa A ya *değişmeli U-bimodül* adı verilir.

X de aşağıda verilen *modül etkileri* ile birlikte bir Banach A-bimodül ve bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun: Her $\alpha \in \mathfrak{A}$, $a \in A$, $x \in X$ için,

$$\alpha \cdot (a \cdot x) = (\alpha \cdot a) \cdot x \quad , \ (\alpha \cdot x) \cdot a = \alpha \cdot (x \cdot a) \quad , (a \cdot \alpha) \cdot x = a \cdot (\alpha \cdot x).$$

Benzer şekilde sağ ya da iki yanlı etkiler de mevcuttur. Bu durumda X e *Banach A-$\mathfrak{A}$-modül* adı verilir. Üstelik, her $\alpha \in \mathfrak{A}$, $x \in X$ için $\alpha \cdot x = x \cdot \alpha$ ise, o zaman X e *değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül* denir. Eğer X bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ve her $a \in A$, $x \in X$ için $a \cdot x = x \cdot a$ ise, o zaman X e *iki-değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül* adı verilir.

Eğer X bir Banach A-$\mathfrak{A}$-modül (veya değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül) ise, o zaman X in dual uzayı X^* da aynı özelliği taşır. Burada A ve $\mathfrak{A}$ nun X^* üzerine etkileri şu şekildedir: Her $a \in A, \alpha \in \mathfrak{A}, x \in X, f \in X^*$ için

$$< x, f \cdot \alpha >=< \alpha \cdot x, f >, \ \ < x, f \cdot a >=< a \cdot x, f >,$$

$$< x, \alpha \cdot f > = < x \cdot \alpha, f >, \;\; < x, a \cdot f > = < x \cdot a, f > .$$

$X^{(0)} = X$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $X^{(n)}$ uzayı, $X^{(n)} := (X^{(n-1)})^*$ ile tanımlanırsa, o zaman $X^{(n)}$ uzayı da bir Banach A-$\mathfrak{A}$-modül (veya değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül) olur.

A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun. Ancak dış işlem olarak A cebirinin ikinci işlemi alındığında, genellikle, A bir Banach A-$\mathfrak{A}$-modül olmaz. Çünkü her $\alpha \in \mathfrak{A}$, $a, b \in A$ için $a \cdot (\alpha \cdot b) = (a \cdot \alpha) \cdot b$ şeklindeki modül etkisi sağlanmaz. Eğer A bir değişmeli $\mathfrak{A}$-bimodül olup dış işlem olarak A cebirinin ikinci işlemi alınırsa, A aynı zamanda bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olur. Üstelik A değişmeli bir Banach cebiri ise, o zaman A iki-değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modüldür.

Bu bölüm boyunca, aksi belirtilmedikçe, A ve $\mathfrak{A}$ Banach cebirleri Tanım 3.4.1 de olduğu gibi alınacaktır.

Tanım 3.4.2. [1] A ve B birer Banach $\mathfrak{A}$-bimodül ve $h : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $a, b \in A$ için

$$h(a \pm b) = h(a) \pm h(b), \;\; h(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot h(a), \;\; h(a \cdot \alpha) = h(a) \cdot \alpha$$

olup her $a \in A$ için $\|h(a)\| \leq M\|a\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti var (yani h sınırlı) ise, o zaman h ye bir *$\mathfrak{A}$-modül dönüşümü ($\mathfrak{A}$-module map)* denir. Üstelik, her $a, b \in A$ için

$$h(ab) = h(a)h(b)$$

şartı sağlanıyor ise h fonksiyonuna bir *$\mathfrak{A}$-modül homomorfizması ($\mathfrak{A}$-module homomorphism)* adı verilir. A dan B ye tüm $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmalarının uzayı $Hom_{\mathfrak{A}}(A, B)$ ile gösterilir. $Hom_{\mathfrak{A}}(A, B)$ uzayı, operatör normdan indirgenen metrik ile bir metrik uzaydır. $Hom_{\mathfrak{A}}(A, A)$ kısaca $Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ şeklinde yazılır. Eğer $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ ise o zaman $Hom_{\mathbb{C}}(A, B) = Hom(A, B)$ dir.

Uyarı 3.4.3. *$Hom_{\mathfrak{A}}(A, B)$ nin elemanları birer lineer dönüşüm olmak zorunda değildir. Buna rağmen, bu uzaydaki dönüşümler, çıkarma işlemini koruduğundan sınırlılık, norm sürekliliği gerektirir.*

Tanım 3.4.4. [1] X bir Banach A-$\mathfrak{A}$-modül ve $D : A \to X$ bir $\mathfrak{A}$-modül dönüşümü olsun. Eğer her $a,b \in A$ için

$$D(ab) = D(a)\cdot b + a\cdot D(b)$$

ise o zaman D ye bir *modül türev* denir. A dan X e tanımlı tüm modül türevlerin kümesi $Z^{\mathfrak{A}}(A,X)$ ile gösterilir.

$x \in X$ olmak üzere bir $D_x : A \to X$ $\mathfrak{A}$-modül dönüşümü,

$$D_x(a) := a\cdot x - x\cdot a \quad (a \in A)$$

şeklinde tanımlansın. X değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olduğunda D_x bir modül türev olur. Bu durumda D_x dönüşümüne *modül iç türev* adı verilir. A dan X e tanımlı tüm modül iç türevlerin kümesi $B^{\mathfrak{A}}(A,X)$ ile gösterilir. $Z^{\mathfrak{A}}(A,X)/B^{\mathfrak{A}}(A,X)$ bölüm uzayına A nın *katsayıları X de olan birinci dereceden ($\mathfrak{A}$ ya göre) kohomoloji grubu* adı verilir ve $H^{\mathfrak{A}}(A,X)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.5. [1] Eğer her X değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modülü için $H^{\mathfrak{A}}(A,X^*) = \{0\}$ ise A Banach cebirine *modül amenable (module amenable)* denir.

Önerme 3.4.6. [1, Önerme 2.1] *$\mathfrak{A}$ Banach cebirinde A için bir sınırlı yaklaşık birim var ise, o zaman A nın amenabilitesi, modül amenabilitesini gerektirir.*

Bu önerme ile, $\mathfrak{A}$, A için bir sınırlı yaklaşık birim içerdiği zaman her $\mathfrak{A}$-modül türevin aynı zamanda bir türev olacağı sonucuna varılır. Ancak bu önermenin hipotezi güçlüdür ve buradaki koşulu daha zayıf bir koşula indirgemek mümkündür. Bunun için A bir sağ esas $\mathfrak{A}$-modül iken her $\mathfrak{A}$-modül türevin bir türev (yani bir lineer dönüşüm) olduğunu ispatlayalım:

$a \in A$ ise o zaman $\lim\limits_n E_n = a$ olacak şekilde bir $\{E_n\} \subseteq A\cdot\mathfrak{A}$ dizisi vardır. Uygun $\{a_{n,m}\}_{m=1}^{m=K_n} \subseteq A$ ve $\{\alpha_{n,m}\}_{m=1}^{m=K_n} \subseteq \mathfrak{A}$ sonlu dizileri için $E_n = \sum\limits_{m=1}^{K_n} a_{n,m}\cdot\alpha_{n,m}$

olduğunu kabul edelim. $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} D(\lambda E_n) &= D\big(\lambda \sum_{m=1}^{K_n} a_{n,m} \cdot \alpha_{n,m}\big) = \sum_{m=1}^{K_n} D(a_{n,m} \cdot (\lambda \alpha_{n,m})) \\ &= \sum_{m=1}^{K_n} D(a_{n,m}) \cdot (\lambda \alpha_{n,m}) = \sum_{m=1}^{K_n} \lambda D(a_{n,m} \cdot \alpha_{n,m}) = \lambda D(E_n) \end{aligned}$$

dir ve D nin sürekliliğinden, $D(\lambda a) = \lambda D(a)$ olur. Yani D, $\mathbb{C}$-lineerdir.

Önerme 3.4.6 nın karşıtının doğru olmadığına dair bir örnek, [1] de verilmiştir. Dolayısıyla modül amenabilite, amenabiliteye göre daha genel bir kavramdır.

Önerme 3.4.7. [1, Önerme 2.2] *A bir değişmeli Banach $\mathfrak{A}$-modül olsun. Eğer A modül amenable ise A nın sınırlı bir yaklaşık birimi vardır.*

$A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A$, A ile A nın *projektif modül tensör çarpımı* olsun [69]. $A\hat{\otimes}A$ bilinen projektif tensör çarpımı ve I_A, $A\hat{\otimes}A$ nın

$$\alpha \cdot a \otimes b - a \otimes b \cdot \alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{A},\ a, b \in A)$$

formundaki elemanları ile üretilmiş bir kapalı ideali olmak üzere $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A \cong (A\hat{\otimes}A)/I_A$ dır. Ayrıca $(A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^* \cong Hom_{\mathfrak{A}}(A, A^*)$ olur [69].

$w := \pi_A \in \mathfrak{B}(A\hat{\otimes}A, A)$ göz önüne alınsın. J_A, A nın

$$w(I_A) = \{(\alpha \cdot a)b - a(b \cdot \alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{A}, a, b \in A\}$$

ile üretilen kapalı ideali olsun. I_A ve J_A, sırasıyla, $A\hat{\otimes}A$ ve A nın Banach A-altmodülleri ve Banach $\mathfrak{A}$-altmodülleridir. Üstelik, $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A$ projektif modül tensör çarpımı ve A/J_A bölüm Banach cebiri hem Banach A-modül hem de Banach $\mathfrak{A}$-modüllerdir. Ayrıca A nın A/J_A üzerine etkisi kanonik olduğunda A/J_A, (3.1) deki modül etkileri ile bir Banach A-$\mathfrak{A}$-modül olur.

Bir $\tilde{w} : A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A \cong (A\hat{\otimes}A)/I_A \to A/J_A$ dönüşümü $a, b \in A$ için $\tilde{w}(a \otimes b + I_A) = ab + J_A$ ile tanımlansın. Bu durumda $\tilde{w} \in \mathfrak{B}(A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A, A/J_A)$ olur. Hem $\tilde{w}, \tilde{w}^*$ hem de $\tilde{w}^{**} \in \mathfrak{B}((A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^{**}, A^{**}/J^{\perp\perp})$ birer A-modül ve $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmasıdır.

Tanım 3.4.8. (i) $(\tilde{u}_i)$, $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A$ içinde bir sınırlı ağ olsun. Eğer $\tilde{w}(\tilde{u}_i)$, A/J nin bir sınırlı yaklaşık birimi ve her $a \in A$ için $\lim_i \|\tilde{u}_i \cdot a - a \cdot \tilde{u}_i\| = 0$ ise $(\tilde{u}_i)$ ağına bir *modül yaklaşık köşegen (module approximate diagonal)* denir.

(ii) $\tilde{M} \in (A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^{**}$ olsun. Eğer $\tilde{a} = a + J^{\perp\perp}$ olmak üzere $a \cdot \tilde{M} = \tilde{M} \cdot a$ ve $\tilde{w}^{**}(\tilde{M}) \cdot a = \tilde{a}$ ise $\tilde{M}$ elemanına bir *modül sanal köşegen (module virtual diagonal)* denir.

Teorem 3.4.9. [1, Teorem 2.1] *$A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A$ bir değişmeli $\mathfrak{A}$-modül olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) A nın bir modül sanal köşegeni vardır.

(ii) A nın bir modül yaklaşık köşegeni vardır.

(iii) A modül amenabledır ve A nın bir sınırlı yaklaşık birimi vardır.

Tanım 3.4.10. f, $\mathfrak{A}$ üzerinde bir sürekli lineer fonksiyonel olsun. Eğer her $\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $a \in A$ için

$$\alpha \cdot a = f(\alpha)a \quad (a \cdot \alpha = f(\alpha)a)$$

ise $\mathfrak{A}$, *A üzerine soldan (sağdan) aşikar etki eder* denir.

Lemma 3.4.11. [13, Lemma 3.13] *$\mathfrak{A}$, A üzerine soldan veya sağdan aşikar etki ettiğinde A/J nin bir sınırlı sağ yaklaşık birimi var ise, o zaman her bir $\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $a \in A$ için $f(\alpha)a - a \cdot \alpha \in J$ dir.*

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.3.9 un modül amenabilite için yapılmış versiyonudur:

Teorem 3.4.12. [1, Önerme 2.5] *A ve B birer Banach cebiri ve Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun. $\varphi : A \to B$ bir $\mathfrak{A}$-modül homomorfizması olmak üzere eğer $\overline{\varphi(A)} = B$ ve A modül amenable ise B modül amenable olur.*

Sonuç 3.4.13. *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül ve I, A nın bir kapalı ideali olsun. O halde A modül amenable ise A/I modül amenable olur.*

Önerme 3.4.14. [11] *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül ve I, A nın bir kapalı ideali ve $\mathfrak{A}$-altmodülü olsun. Eğer I ve A/I modül amenable ise A modül amenable olur.*

Teorem 3.4.15. *A ve B birer Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun. O halde $A \oplus B$ nin modül amenable olması için gerek ve yeter koşul A ve B nin modül amenable olmasıdır.*

İspat: A ve B modül amenable olsun. $A \oplus B$ nin bir kapalı ideali olan B ile $(A \oplus B)/B \cong A$ bölüm cebiri modül amenable olduğundan Önerme 3.4.14 gereği $A \oplus B$ modül amenabledır.

Tersine, $A \oplus B$ nin modül amenable olduğunu kabul edelim. Sonuç 3.4.13 den, $(A \oplus B)/A \cong B$ ve $(A \oplus B)/B \cong A$ modül amenable olur. □

S bir ters yarıgrup ve E, S nin tüm idempotent elemanlarının kümesi olsun. E üzerindeki sıralama bağıntısı, "$e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e \ (e, f \in E)$" ile verilsin.

E, S nin bir (değişmeli) altyarıgrubudur. Bölüm 3.2 de de belirtildiği gibi E bir yarılatistir. Bu durumda $\ell^1(E)$ cebiri, $\ell^1(S)$ nin değişmeli bir altcebiri olarak düşünülebilir. Böylece $\ell^1(S)$ bir Banach cebiri ve ilgili modül etkileri ile bir Banach $\ell^1(E)$-modüldür [1]. $\ell^1(E)$ nin $\ell^1(S)$ üzerine etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\delta_e \cdot \delta_s = \delta_s, \quad \delta_s \cdot \delta_e = \delta_{se} = \delta_s * \delta_e \qquad (e \in E, s \in S). \tag{3.2}$$

Burada δ_s ve δ_e, sırasıyla, s ve e deki nokta kütlelerdir.

Lemma 3.4.16. [1, Lemma 3.1] *Yukarıdaki notasyonlar ile*

(i) $\ell^1(S \times S)$ nin kapalı I ideali,

$$\delta_{(set,x)} - \delta_{(st,x)} \qquad (s, t, x \in S, \ e \in E)$$

formundaki elemanların kümesinin kapalı lineer gerenine eşit olduğunda

$$\ell^1(S) \hat{\otimes}_{\ell^1(E)} \ell^1(S) \cong \ell^1(S \times S)/I$$

olur.

(ii) $I^{\perp} = \{f \in \ell^{\infty}(S\times S) \mid f(set,x) = f(st,x)\ (s,t,x\in S, e\in E)\}$ *olmak üzere*

$$(\ell^1(S)\hat{\otimes}_{\ell^1(E)}\ell^1(S))^* \cong \ell^{\infty}(S\times S)/I^{\perp}$$

dir.

$w : \ell^1(S)\hat{\otimes}\ell^1(S) = \ell^1(S\times S) \to \ell^1(S)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$w(g\otimes h)(s) = (g*h)(s) \quad (s\in S, g,h\in \ell^1(S)).$$

I, Lemma 3.4.16 da olduğu gibi alınsın. Eğer J, $\ell^1(S)$ nin $w(I)$ ile üretilen kapalı ideali ise J, $\ell^1(S)$ içinde $\{\delta_{set}-\delta_{st} \mid e\in E, s,t\in S\}$ kümesinin kapalı lineer gerenine eşit olur [11].

S üzerinde bir denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$s\approx t \Leftrightarrow \delta_s - \delta_t \in J \qquad (s,t\in S) \tag{3.3}$$

S nin $\approx$ bağıntısına göre denklik sınıflarından oluşan küme $S/\approx$ ile gösterilsin. E kümesi tam sıralı olduğundan herhangi $e,f\in E$ idempotentleri için $e\le f$ ya da $f\le e$ dir. Böylece $ef = e$ ya da $ef = f$ olur. $ef = f$ olsun. Bu durumda $\delta_e - \delta_f = \delta_{ee} - \delta_{efe} \in J$ olup $e\approx f$ bulunur. Her $s\in S$ için eğer $e = s^*s$ ise o zaman $s = se = see$ sağlanır. Buradan

$$\delta_s - \delta_{se} = \delta_{see} - \delta_{se} \in J$$

olup $s\approx se$ elde edilir. Benzer şekilde $e = ss^*$ alındığında $s\approx es$ olur. Sonuç olarak, her $e\in E$ için $ss^*\approx s^*s\approx e$ dir [11]. O halde $S/\approx$ bir diskret gruptur ([68], [65]). Üstelik $S/\approx$, S nin Bölüm 3.2 de tanımlanan maksimal grup homomorf görüntüsü G_S ye izomorftur ([64]).

$F : S\to S/\approx,\ x\mapsto [x]$ dönüşümü, bir sürekli $F : \ell^1(S)\to \ell^1(S/\approx)$ Banach cebir epimorfizmasına genişletilebilir. Bu durumda F lineer olup $\mathrm{Ker}F = J$ dir. Böylece

$\ell^1(S)/J \cong \ell^1(S/\approx)$ olur [68, Teorem 3.3]. $\ell^1(S)/J$, aşağıdaki dış işlemler ile bir değişmeli $\ell^1(E)$-bimodüldür:

$$\delta_e \cdot (\delta_s + J) = \delta_s + J, \;\; (\delta_s + J) \cdot \delta_e = \delta_{se} + J \quad (s \in S, e \in E).$$

$(\ell^1(S)/J)^{(n)}$ $(n \geq 0)$ nin bir Banach $\ell^1(S)$-$\ell^1(E)$-modül olduğu açıktır. Ayrıca [35, Uyarı 2.1] den, bir değişmeli $\ell^1(E)$-modüldür.

Amini, [1] deki çalışmasında S bir ters yarıgrup ve E, S deki tüm idempotent elemanların kümesi olmak üzere (3.2) de verilen modül etkileri ile bir Banach $\ell^1(E)$-bimodül olan $\ell^1(S)$ yarıgrup cebirinin modül amenable olması için gerek ve yeter koşulun S nin amenable olması gerektiğini ispatlamıştır.

Daha sonra A. Bodaghi [10] tarafından 2010 yılında $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmaları kullanılarak modül amenabilite kavramı genelleştirilmiştir.

Banach cebirlerin *zayıf modül amenabilitesi (weak module amenability)* [3] de M. Amini ve D. Ebrahimi Bagha tarafından tanıtılmış, [2] de ise M. Amini ve A. Bodaghi tarafından ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

Tanım 3.4.17. [2] A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun. Eğer bir A-altbimodül ve değişmeli Banach $\mathfrak{A}$-altbimodül olan her $Y \subseteq A^*$ altkümesi için, $H^{\mathfrak{A}}(A,Y) = \{0\}$ ise A Banach cebirine *zayıf* ($\mathfrak{A}$-) *modül amenable* denir.

A, Tanım 3.4.1 de verilen *modül etkileri* ile birlikte bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül ve J, A nın

$$(a \cdot \alpha)b - a(\alpha \cdot b) \qquad (a, b \in A, \; \alpha \in \mathfrak{A})$$

formundaki elemanları ile üretilen bir kapalı ideali olsun. J, aynı zamanda A nın bir $\mathfrak{A}$-altmodülüdür.

$A/J = \{a + J \mid a \in A\}$ bölüm cebiri bir Banach cebiridir. A/J, ilgili modül etkileri ile birlikte bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodüldür. Ayrıca, dış işlem olarak A/J bölüm cebirinin ikinci işlemi alınırsa A/J bir Banach (A/J)-$\mathfrak{A}$-modül olur. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $(A/J)^{(n)}$ (A/J nin n. dual uzayı) de bir Banach (A/J)-$\mathfrak{A}$-modüldür. Üstelik, her $n \in \mathbb{N}$ için $(A/J)^{(n)}$ uzayı,

$$a \cdot \Phi := (a+J) \cdot \Phi \ , \quad \Phi \cdot a := \Phi \cdot (a+J) \quad (a \in A, \Phi \in (A/J)^{(n)})$$

şeklindeki dış işlemler ile bir Banach A-$\mathfrak{A}$-modüldür. Benzer şekilde $\mathfrak{A}$-modül etkileri de mevcuttur.

Genel olarak, A/J bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül değildir. Ancak A/J bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olduğunda her $n \in \mathbb{N}$ için $(A/J)^{(n)}$ de bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olur.

$Y \leq A^{(n)}$ altuzayı ve $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $Y^{(n\perp)}$ uzayı, tümevarım yardımıyla şu şekilde tanımlansın:

(i) $Y^{(0\perp)} = Y \leq A$,

(ii) $Y^{(1\perp)} = Y^{\perp} \leq A^*$,

(iii) $Y^{(n\perp)} = (Y^{((n-2)\perp)})^{\perp\perp} \leq (A^{(n-2)})^{**} = A^{(n)}$.

Buna göre Teorem 2.1.46 dan, $(A/J)^{(2n)} \cong A^{(2n)}/J^{(2n\perp)}$ ve $(A/J)^{(2n-1)} \cong J^{((2n-1)\perp)}$ olduğu açıktır.

A/J bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olduğunda zayıf modül amenabiliteye denk bir tanım şu şekilde verilmiştir:

Önerme 3.4.18. [2] *Eğer A/J bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ise, o zaman aşağıdakiler denktir:*

(i) A dan $J^{\perp}$ e tanımlı her modül türev, bir modül iç türevdir;

(ii) A zayıf modül amenabledır.

Bu bilgiler ışığında 2011 yılında A. Bodaghi, M. Amini ve R. Babaee [13] tarafından *n-zayıf modül amenabilite* kavramı tanıtılmıştır.

Tanım 3.4.19. A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $(A/J)^{(n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ve $H^{\mathfrak{A}}(A,(A/J)^{(n)}) = \{0\}$ ise A Banach cebirine *n-zayıf modül amenable* denir.

Bu çalışmada, her n tek tamsayısı için $\ell^1(S)$ yarıgrup cebirinin n-zayıf $\ell^1(E)$-modül amenable olduğu ispatlanmıştır [13]. H. Ghahramani [35] ise bu sonucun her n doğal sayısı için sağlandığını göstermiştir.

2004 yılından bu yana modül amenabilite konusunda birçok karakterizasyon yapılmıştır ve halen daha bu konuda yeni sonuçlar elde edilmeye ve yeni kavramlar tanıtılmaya devam edilmektedir.

4. HYERS-ULAM-RASSIAS STABİLİTESİ

Üzerinde en çok çalışılan fonksiyonel denklemler,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{4.1}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{4.2}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{4.3}$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{4.4}$$

şeklindeki Cauchy fonksiyonel denklemleridir. Genel olarak, (4.1) - (4.4) fonksiyonel denklemlerinin çözümleri, sırasıyla, toplamsal, üstel, logaritmik ve çarpımsal fonksiyon olarak adlandırılır. Birçok matematikçi, çeşitli fonksiyonel denklemlerin genel çözümleriyle ve Ulam'ın stabilite problemiyle ilgilenmiştir.

Fonksiyonel denklemlerin stabilite kavramı, ilk olarak grup homomorfizmalarının stabilitesi şeklinde S. M. Ulam [76] tarafından 1940 yılında Wisconsin Üniversitesi'nde yaptığı bir konuşma sırasında bir problem ile öne sürülmüştür:

$(G_1,.)$ bir grup ve $(G_2,*,d)$, $d(.,.)$ metriği ile bir metrik grup olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı ile her $x,y \in G_1$ için,

$$d(f(x.y), f(x)*f(y)) < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $f : G_1 \to G_2$ fonksiyonu verildiğinde her $x \in G_1$ için $d(f(x),H(x)) \leq k\varepsilon$ olacak şekilde bir $k > 0$ sabiti ile G_1 den G_2 ye tanımlı bir H homomorfizması bulunabilir mi?

Eğer bu soruya olumlu bir cevap verilebilirse, o zaman H homomorfizması için $f(x.y) = f(x)*f(y)$ ile verilen fonksiyonel denklem *stabildir* denir. Esas olarak bu teoride fonksiyonel denklemlerin stabil olmasını sağlayacak koşullar ile ilgilenilmektedir.

Bu bölümdeki amacımız, fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi hakkında günümüze kadar elde edilmiş önemli sonuçlardan bazılarını vermektir. Fonksiyonel denklemlerin stabilitesi incelenirken farklı birçok yaklaşım kullanılmaktadır. En sık kullanılan yaklaşımlar, direkt metod ve sabit nokta metodu olarak bilinmektedir.

4.1. Direkt Metod Yaklaşımı

İlk olarak 1941 de D. H. Hyers [44], G_1 ve G_2 yi Banach uzayları kabul ederek Ulam'ın problemini (4.1) denklemi için kısmen çözmüştür.

Teorem 4.1.1. [44] *E_1 ve E_2 birer Banach uzayı olsun. Eğer uygun bir $\varepsilon \geq 0$ sayısı ve her $x, y \in E_1$ için,*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \tag{4.5}$$

şartını sağlayan bir $f : E_1 \to E_2$ fonksiyonu var ise o zaman her $x \in E_1$ için $A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ limiti mevcuttur ve $A : E_1 \to E_2$, her $x \in E_1$ için $\|f(x) - A(x)\| \leq \varepsilon$ şartını sağlayan teklikle belli toplamsal fonksiyondur. Üstelik sabitlenmiş her $x \in E_1$ için $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(tx)$ dönüşümü sürekli ise, o zaman A fonksiyonu lineerdir.

Daha sonra Hyers [44] in vermiş olduğu bu önemli sonuçtan yola çıkılarak yeni bir tanımlama yapılmıştır:

$\varepsilon \geq 0$ bir sabit ve herbir $x, y \in E_1$ olmak üzere (4.5) eşitsizliğini sağlayan her $f : E_1 \to E_2$ fonksiyonu için $f - A$ farkı E_1 üzerinde sınırlı olacak şekilde bir $A : E_1 \to E_2$ toplamsal fonksiyonu bulunabiliyorsa, o zaman $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ile verilen toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi *Hyers-Ulam anlamında stabildir* denir.

D.H. Hyers [44], bu teoreminde $A : E_1 \to E_2$ toplamsal fonksiyonunu, seçilen f fonksiyonundan limit yardımıyla inşa etmiştir. Bu yöntem, *direkt metod* olarak adlandırılır ve çeşitli fonksiyonel denklemlerin stabilitesini çalışmakta kullanılan güçlü bir araçtır.

Th.M. Rassias [66], 1978 de yayınladığı makalesinde $f(x+y)-f(x)-f(y)$ şeklindeki Cauchy farkının normunun sınırı için verilen şartı oldukça zayıflatarak Hyers'in sonucunu genelleştirmiştir:

Teorem 4.1.2. [66] *E_1 ve E_2 birer Banach uzayı olsun. Eğer uygun bir $\varepsilon \geq 0$ ile $p \in [0,1)$ sabiti ve her $x, y \in E_1$ için,*

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p) \tag{4.6}$$

şartını sağlayan bir $f : E_1 \to E_2$ fonksiyonu var ise o zaman her $x \in E_1$ için,

$$\|f(x)-A(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{|2-2^p|}\|x\|^p$$

olacak şekilde teklikle belli $A : E_1 \to E_2$ toplamsal fonksiyonu vardır. Üstelik, sabitlenmiş her bir $x \in E_1$ için $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(tx)$ dönüşümü sürekli ise, o zaman A lineerdir.

$p = 0$ iken Teorem 4.1.1 in gerçeklendiği açıktır. Böylece Teorem 4.1.2 ile Ulam'ın sorusuna daha genel bir çözüm getirilmiştir. Bu sebeple genelleştirilmiş Ulam-Hyers stabilitesi, *Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi* olarak adlandırılır.

Hyers-Ulam-Rassias stabilitesinin genel tanımı aşağıdaki gibidir:

Tanım 4.1.3. [50] E_1 ve E_2 uygun seçilmiş uzaylar olsun. Uygun $p, q \in \mathbb{N}$ ve her $i \in \{1, \ldots, p\}$ için,

$$g_i : E_1^q \to E_1 \;\text{ ve }\; G : E_2^p \times E_1^q \to E_2$$

fonksiyonları verilsin. $\varphi, \Phi : E_1^q \to [0,\infty)$ fonksiyonlarının bazı özel koşulları sağladıkları kabul edilsin. Eğer herbir $x_1, \ldots, x_q \in E_1$ olmak üzere

$$\|G(f(g_1(x_1,\ldots,x_q)),\ldots,f(g_p(x_1,\ldots,x_q)),x_1,\ldots,x_q)\| \leq \varphi(x_1,\ldots,x_q) \tag{4.7}$$

eşitsizliğini sağlayan her $f : E_1 \to E_2$ fonksiyonu için,

$$G(H(g_1(x_1,\ldots,x_q)),\ldots,H(g_p(x_1,\ldots,x_q)),x_1,\ldots,x_q) = 0,\ \forall x_1,\ldots,x_q \in E_1$$

ve

$$\|f(x) - H(x)\| \leq \Phi(x,\ldots,x),\ \ \forall x \in E_1$$

şartlarını sağlayan bir $H : E_1 \to E_2$ fonksiyonu bulunabiliyorsa o zaman

$$G(f(g_1(x_1,\ldots,x_q)),\ldots,f(g_p(x_1,\ldots,x_q)),x_1,\ldots,x_q) = 0 \qquad (4.8)$$

fonksiyonel denklemi *Hyers-Ulam-Rassias anlamında stabildir* denir.

Eğer (4.7) eşitsizliğinin herbir $f : E_1 \to E_2$ çözümü, aslında (4.8) denkleminin bir çözümü oluyor ise, o zaman (4.8) fonksiyonel denklemi (E_1, E_2) üzerinde *süper stabildir* denir.

Fonksiyonel denklemlerin süper stabilitesi, ilk kez J. Baker, J. Lawrence ve F. Zorzitto [9] tarafından (4.2) deki fonksiyonel denklem için ele alınmıştır. Bu çalışmada ispatlanan temel teorem ise aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1.4. [9] *V bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayı olmak üzere uygun $\delta > 0$ ve her $x, y \in V$ için*

$$|f(x+y) - f(x)f(y)| \leq \delta$$

şartını sağlayan bir $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ise ya f fonksiyonu sınırlıdır ya da $f : V \to \mathbb{R}$ bir üstel fonksiyondur.

Teorem 4.1.2 ile Th.M. Rassias [66], birçok matematikçiyi önemli pek çok fonksiyonel denklemin bu yöndeki stabilitesini araştırmaya teşvik etmiştir. Şimdiye kadar bu konuda yapılan çalışmalarda, Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi yalnızca Cauchy fonksiyonel denklemleri için değil aynı zamanda kuadratik fonksiyonel denklem, Jensen fonksiyonel denklemi, d'Alembert fonksiyonel denklemi, Lobaczevski fonksiyonel denklemi, kübik fonksiyonel denklem vb. özel fonksiyonel denklemler için de ele alınarak bu teori geliştirilmiştir ve halen daha fonksiyonel denklemler ile ilgili yeni tanımlamalar yapılmaktadır.

Th.M. Rassias [66], Teorem 4.1.2 nin ispatından sonra bu teoremin $p < 0$ için de gerçeklendiğini belirtmiştir ve $p \geq 1$ için sağlanıp sağlanmadığını açık problem olarak bırakmıştır.

Rassias'ın bu sorusu, Z. Gajda [34] tarafından 1991 yılında ele alınmıştır. Bu çalışmasında Gajda [34], Teorem 4.1.2 nin hipotezlerinden E_1 uzayının tam olma koşulunun kaldırılabileceğini ve p sabitinin $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesinden alınabileceğini belirtmiştir. p sabitinin 1 değerini aldığı durum, Gajda'nın teoreminin hipotezlerinde yer almamaktadır. Çünkü $p = 1$ olduğunda $\varepsilon > 0$ ve $\mu := \frac{\varepsilon}{6}$ iken,

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \begin{cases} \mu & , \quad x \in [1.\infty) \text{ ise} \\ \mu x & , \quad x \in (-1.1) \text{ ise} \\ -\mu & , \quad x \in (-\infty.-1] \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlı bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(2^n x)}{2^n}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon(|x| + |y|)$ şartını sağlar ancak bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x) - T(x)| \leq \delta |x|$ şartını sağlayan bir $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toplamsal fonksiyonu ve bir $\delta \geq 0$ sabiti bulunamaz [34].

Benzer bir karşıt örnek, 1992 yılında Th.M. Rassias ve P. Semrl [67] tarafından da verilmiştir.

1994 yılında P. Găvruta [33], Teorem 4.1.2 yi şu şekilde genelleştirmiştir:

Teorem 4.1.5. [33] *G bir toplamsal değişmeli grup ve E bir Banach uzayı olsun. $\varphi : G \times G \to [0, \infty)$, her $x, y \in G$ için*

$$\widetilde{\varphi}(x,y) := \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \varphi(2^n x, 2^n y) < \infty$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere eğer bir $f : G \to E$ fonksiyonu, her $x, y \in G$ için,

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varphi(x,y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, o zaman her $x \in G$ için

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \widetilde{\varphi}(x,x)$$

olacak şekilde teklikle belli $A : G \to E$ toplamsal fonksiyonu vardır.

Operatör cebirleri arasındaki türevlerin stabilitesi ile ilgili sonuçlar ise ilk olarak P. Semrl [72] tarafından 1994 yılında elde edilmiştir.

Son zamanlarda türev çeşitlerinin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi ile ilgili olarak direkt metod yaklaşımı ile ulaşılan önemli sonuçlardan bazıları aşağıdaki gibi verilebilir:

2006 yılında M.S. Moslehian [55], genelleştirilmiş türevlerin stabilitesini birimli Banach cebirlerinde, K.-W. Jun ve H.-M. Kim [49], 2007 yılında türevler ile Jordan türevlerin stabilitesini Banach cebirlerinde araştırmışlardır.

2007 yılında yayınladıkları çalışmalarında C. Park ve A. Najati [60], ilk kez

$$f(z-x) + f(z-y) + (1/2)\,f(x+y) = 2f(z-(x+y)/4)$$

ile tanımlanan *Apollon-tipi toplamsal fonksiyonel denklem* yardımıyla C^*-cebirlerde türevlerin stabilitesini incelemişlerdir.

A birimli bir cebir ve $\delta : A \to A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için,

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b - a\delta(e_A)b$$

şartı sağlanıyorsa δ ya A üzerinde bir *genişletilmiş türev* adı verilir.

2007 yılında M. Amyari, F. Rahbarnia ve Gh. Sadeghi [5], genişletilmiş türevlerin stabilitesini

$$f\left(\frac{x+y}{K}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{K} \qquad (K > 1,\ K \in \mathbb{Z})$$

ile tanımlanan *genelleştirilmiş Jensen fonksiyonel denklemi* ile birlikte birimli Banach cebirlerinde ele almışlardır:

Teorem 4.1.6. [5] *A birimli bir Banach cebiri ve* $\varphi : A \times A \times A \times A \to [0,\infty)$, *her* $a,b,c,d \in A$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} K^{-n}\varphi(K^n a, K^n b, K^n c, K^n d) = 0,$$

$$\widetilde{\varphi}(a) := \sum_{n=1}^{\infty} K^{-n+1}\varphi(K^n a, 0, 0, 0) < \infty$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $f : A \to A$ *ile tanımlı dönüşüm* $f(0) = 0$ *ve her* $\lambda \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ *ve her* $a,b,c,d \in A$ *için,*

$$\|f(\frac{\lambda a + \lambda b}{K} + cd) - \frac{\lambda f(a)}{K} - \frac{\lambda f(b)}{K} - cf(d) - f(c)d + cf(1)d\| \leq \varphi(a,b,c,d)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, o zaman her $a \in A$ *için,*

$$\|f(a) - \delta(a)\| \leq \widetilde{\varphi}(a)$$

olacak şekilde teklikle belli $\delta : A \to A$ *genişletilmiş türev vardır.*

2008 yılında yayınladığı çalışmasında M. Amyari [4], bir A normlu cebirinden bir Banach A-bimodülüne tanımlı (σ,τ)-Lie türevler ile genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie türevlerin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesini incelemiştir.

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{4.9}$$

ile tanımlı denkleme *kuadratik fonksiyonel denklem* denir. Bu denklemin her çözümü bir *kuadratik fonksiyon* olarak adlandırılır.

A bir Banach cebiri ve X bir Banach A-bimodül olmak üzere $f : A \to X$ bir kuadratik fonksiyon olsun. Eğer her $a,b \in A$ için $f(ab) = f(a)b^2 + a^2 f(b)$ ise f dönüşümüne bir *kuadratik türev* adı verilir.

Kuadratik türevlerin stabilitesi, (4.9) da verilen kuadratik fonksiyonel denklem yardımıyla 2010 yılında M.E. Gordji ve N. Ghobadipour [36] tarafından Banach cebirlerde; 2014 yılında C. Park, S. Shagholi, A. Javadian, M. B. Savadkouhi ve M. E. Gordji [61] tarafından Arşimet olmayan Banach cebirlerde araştırılmıştır.

2010 yılında, M. Eshaghi, M.B. Savadkouhi, M. Bidkham, C. Park ve J.R. Lee [32] tarafından, normlu üçlü cebirlerde *k. kısmi üçlü türev (k-th partial ternary derivation)* ilk kez tanımlanmıştır:

Tanım 4.1.7. [32] $A_1,\ldots,A_n$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde normlu üçlü cebirler, B, $\mathbb{C}$ üzerinde bir Banach üçlü cebir ve $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$, $a_k,b_k,c_k \in A_k$ ve her $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için,

$$\begin{aligned} & \delta_k(x_1,\ldots,\alpha a_k+\beta b_k+\gamma c_k,\ldots,x_n) \\ = \;& \alpha\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)+\beta\delta_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)+\gamma\delta_k(x_1,\ldots,c_k,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

ise ve

$$\begin{aligned} & \delta_k(x_1,\ldots,[a_kb_kc_k],\ldots,x_n)=[g_k(a_k)g_k(b_k)\delta_k(x_1,\ldots,c_k,\ldots,x_n)] \\ & +[g_k(a_k)\delta_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)g_k(c_k)]+[\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)] \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $g_k : A_k \to B$ fonksiyonu varsa, o zaman δ_k fonksiyonuna *k. kısmi üçlü türev* denir.

Tanım 4.1.7 de $B = A_k,\ A_i = \{0_i\}\ \ (i \neq k)$ ve $g_k := I_{A_k}$ olarak alınırsa her k. kısmi üçlü türev, bir üçlü türev olur.

Yine aynı çalışmada, k. kısmi üçlü türevlerin stabilitesi Banach üçlü cebirlerde incelenmiştir [32].

Üçlü cebirlerde *k. kısmi üçlü kuadratik türev* ise şu şekilde tanımlanır:

Tanım 4.1.8. [45] $A_1,\ldots,A_n$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde normlu üçlü cebirler, B, $\mathbb{C}$ üzerinde bir Banach üçlü cebir ve $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a_k,b_k,c_k \in A_k$ ve her $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned} & \delta_k(x_1,\ldots,a_k+b_k,\ldots,x_n)+\delta_k(x_1,\ldots,a_k-b_k,\ldots,x_n) \\ = \;& 2\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)+2\delta_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

ise ve

$$\delta_k(x_1,\ldots,[a_kb_kc_k],\ldots,x_n) = [g_k(a_k)g_k(b_k)\delta_k(x_1,\ldots,c_k,\ldots,x_n)]$$
$$+[g_k(a_k)\delta_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)g_k(c_k)] + [\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]$$

olacak şekilde bir $g_k : A_k \to B$ fonksiyonu varsa o zaman δ_k fonksiyonuna *k. kısmi üçlü kuadratik türev* denir.

2011 yılında A. Javadian, M.E. Gordji ve M.B. Savadkouhi [45], *k.* kısmi üçlü kuadratik türevlerin stabilitesini, Banach üçlü cebirlerde direkt metod yaklaşımı ile ele almıştır.

4.2. Sabit Nokta Metodu

L. Cădariu ve V. Radu [19], 2003 yılında Jensen tipi fonksiyonel denklemlerin stabilitesini araştırırken *sabit nokta metodu* olarak adlandırılan farklı bir yaklaşım kullanmışlardır. Bu metod, B. Margolis ve J.B. Diaz [53] tarafından 1968 yılında aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 4.2.1. [53] (E,d) *bir genelleştirilmiş tam metrik uzay ve* $J : E \to E$ *bir fonksiyon olsun. Eğer* J *bir kesin kontraktif dönüşüm ise, yani her* $x,y \in E$ *için*

$$d(Jx,Jy) \leq Ld(x,y)$$

olacak şekilde bir $L < 1$ *Lipschitz sabiti var ise, o zaman verilen her bir* $x \in E$ *elemanı için, ya*

$$d(J^nx,J^{n+1}x) = \infty \qquad (\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\,)$$

olur ya da aşağıdaki ifadeler sağlanacak şekilde negatif olmayan bir n_0 *tamsayısı vardır:*

(i) $\forall n \geq n_0$ *için* $d(J^nx,J^{n+1}x) < \infty$ *dır;*

(ii) $\{J^nx\}$ *dizisi,* J *nin bir* y^* *sabit noktasına yakınsar;*

(iii) y^* *elemanı,* $Y = \{y \in E \mid d(J^{n_0}x, y) < \infty\}$ *kümesinde* J *nin teklikle belli sabit noktasıdır;*

(iv) $\forall y \in Y$ *için* $d(y, y^*) \leq \frac{1}{1-L} d(y, Jy)$ *dir.*

Günümüze kadar bu yaklaşımla türev çeşitlerinin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi ile ilgili birçok genelleştirme yapılmıştır. Bu çalışmalarda elde edilen önemli sonuçlardan bazıları şu şekildedir:

2009 yılında A. Najati ve Th.M. Rassias [58], bir R halkasından bir Banach R-bimodüle tanımlı genelleştirilmiş (σ, τ)-türevler ile genelleştirilmiş (σ, τ)-Jordan türevlerin stabilitesini incelemişlerdir.

2011 yılında M.E. Gordji, A. Najati ve A. Ebadian [37] aynı metodu, Banach cebirlerde tanımlı Jordan türevler ile C^*-cebirlerde tanımlı Jordan $*$-türevlerin stabilitesini,

$$rf\left(\frac{x+y}{r}\right) + rf\left(\frac{x-y}{r}\right) = 2f(x) \qquad (r \in (1, \infty) \ \text{sabit})$$

şeklindeki *genelleştirilmiş Jensen fonksiyonel denklemi* yardımıyla incelemek için kullanmışlardır. Bu çalışmada, Banach cebirlerde tanımlı Jordan türevlerin stabilitesi ile ilgili olarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

Teorem 4.2.2. [37] *A bir Banach cebiri olsun. Bir $f : A \to A$ fonksiyonu verildiğinde her $\mu \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\}$ ve her $x, y \in A$ için*

$$\Delta_\mu f(x, y) := r\mu f\left(\frac{x+y}{r}\right) + r\mu f\left(\frac{x-y}{r}\right) - 2f(\mu x)$$

tanımlansın. Buna göre, $p \in (0, 1)$ ve $\theta \in [0, \infty)$ olmak üzere her $\mu \in \mathbb{T}$ ve her $x, y \in A$ için $f : A \to A$ dönüşümü,

$$\|\Delta_\mu f(x, y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \ \ \textit{ile} \ \ \|f(x^2) - xf(x) - f(x)x\| \leq 2\theta\|x\|^p$$

şartlarını sağlasın. O halde her $x \in A$ için,

$$\|f(x) - D(x)\| \leq \frac{2^p\theta}{2 - 2^p}\|x\|^p$$

olacak şekilde bir tek $D : A \to A$ Jordan türevi vardır.

2012 yılında, Arşimet olmayan C^*-cebirlerde türevlerin stabilitesi ise

$$\sum_{i=1}^{m} f(mx_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} x_j) + f(\sum_{i=1}^{m} x_i) = 2f(\sum_{i=1}^{m} mx_i) \quad (m \in \mathbb{N},\ m \geq 2)$$

şeklinde verilen *m değişkene sahip bir toplamsal fonksiyonel denklem* kullanılarak Y. J. Cho, R. Saadati ve J. Vahidi [21] tarafından araştırılmıştır.

A bir üçlü cebir ve f, A üzerinde bir kuadratik fonksiyon olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için,

$$f([abc]) = [f(a)b^2c^2] + [a^2 f(b)c^2] + [a^2b^2 f(c)]$$

şartı sağlanıyorsa f ye bir *kuadratik üçlü türev*; eğer her $a, b, c \in A$ için

$$g([abc]) = [g(a)b^2c^2] + [a^2 f(b)c^2] + [a^2b^2 f(c)]$$

olacak biçimde bir $f : A \to A$ kuadratik üçlü türev var ise $g : A \to A$ fonksiyonuna bir *genelleştirilmiş kuadratik üçlü türev* denir.

Son yıllarda sabit nokta metodu ile elde edilen bir başka sonuç, 2012 yılında C. Park, M. E. Gordji ve Y. J. Cho [59] tarafından oluşturulmuş olup; bu sonuç, Arşimet olmayan Banach üçlü cebirlerde genelleştirilmiş kuadratik üçlü türevlerin stabilitesi ile ilgilidir.

5. BANACH CEBİRLERDE n-ZAYIF MODÜL AMENABİLİTENİN BİR GENELLEMESİ

Bu bölümde, Bodaghi, Amini ve Babaee [13] nin n-zayıf modül amenable Banach cebirleri ile ilgili bir çalışmaları modül homomorfizmaları kullanılarak genişletilecektir ve bu konuda gerekli olan yeni tanımlara ve elde edilen yeni sonuçlara yer verilecektir [6].

Bu bölüm boyunca, aksi belirtilmedikçe, A ve $\mathfrak{A}$ birer Banach cebiri; A, Tanım 3.4.1 de verilen *modül etkileri* ile bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodülü ve J, A nın

$$(a\cdot\alpha)b - a(\alpha\cdot b) \qquad (a,b\in A,\ \alpha\in\mathfrak{A})$$

formundaki elemanları ile üretilen bir kapalı idealini gösterecektir.

5.1. (σ)-n-Zayıf Modül Amenable Banach Cebirler

$\sigma,\psi \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. [16] dan hareketle, A üzerinde

$$a\cdot x := \sigma(a)x\ , \quad x\cdot a := x\psi(a) \quad (a,x\in A)$$

şeklindeki dış işlemleri tanımlamak mümkündür. $n\in\mathbb{N}$ olsun. $((A/J)_{(\sigma,\psi)})^{(n)}$ uzayı, her $a\in A, m^{(2n)}\in (A/J)^{(2n)}$ ve $m^{(2n-1)}\in (A/J)^{(2n-1)}$ için

$$a\cdot m^{(2n)} := \sigma(a)m^{(2n)}\ \ ,\ \ m^{(2n)}\cdot a := m^{(2n)}\psi(a),$$
$$a\cdot m^{(2n-1)} := \psi(a)m^{(2n-1)}\ ,\ m^{(2n-1)}\cdot a := m^{(2n-1)}\sigma(a)$$

şeklindeki dış işlemler ile bir A-modüldür.

Tanım 5.1.1. [16] $n\in\mathbb{N}$ ve $D: A\to (A/J)^{(2n)}$ bir $\mathfrak{A}$-modül dönüşümü olsun. Eğer her $a,b\in A$ için

$$D(ab) = D(a)\cdot\psi(b) + \sigma(a)\cdot D(b)$$

ise o zaman D ye bir (σ,ψ)-*modül türev* denir. A/J bir değişmeli $\mathfrak{A}$-modül olduğunda eğer her $a\in A$ için,

$$D_x(a)=\sigma(a)\cdot x-x\cdot\psi(a)$$

olacak şekilde bir $x\in(A/J)^{(2n)}$ varsa $D_x: A\to(A/J)^{(2n)}$ $\mathfrak{A}$-modül dönüşümüne bir (σ,ψ)-*modül iç türev* denir.
Tek kuvvetteki durum için, $D: A\to(A/J)^{(2n-1)}$ $\mathfrak{A}$-modül dönüşümü, $D(ab)=D(a)\cdot\sigma(b)+\psi(a)\cdot D(b)$ şartını sağlarsa bir (σ,ψ)-modül türev olur. Üstelik, A/J bir değişmeli $\mathfrak{A}$-modül olduğunda bir $x\in(A/J)^{(2n-1)}$ için $D_x: A\to(A/J)^{(2n-1)}$ $\mathfrak{A}$-modül dönüşümü, $D_x(a)=x\cdot\sigma(a)-\psi(a)\cdot x \quad (a\in A)$ şartını sağlarsa bir (σ,ψ)-modül iç türev olur.

Bu bölüm boyunca $\sigma=\psi$ olarak kabul edilecek ve (σ,σ)-modül türev ile (σ,σ)-modül iç türev, sırasıyla, (σ)-modül türev ve (σ)-modül iç türev olarak gösterilecektir.

Tanım 5.1.2. A bir Banach cebiri, $\sigma\in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ ve $n\in\mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $(A/J)^{(n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ve her $D: A\to(A/J)^{(n)}$ (σ)-modül türev bir (σ)-modül iç türev ise, o zaman A ya (σ)-*n-zayıf modül amenable* denir.

Eğer A Banach cebiri, (σ)-1-zayıf modül amenable ise A ya (σ)-zayıf modül amenable adı verilir.

A bir değişmeli $\mathfrak{A}$-bimodül veya $\mathfrak{A}=\mathbb{C}$ olarak alınırsa $J=\{0\}$ olup $A/J\cong A$ bulunur. Böylece her $n\in\mathbb{N}$ için $A^{(n)}$ dual uzayı, doğal olarak bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olur.

Ayrıca $\mathfrak{A}=\mathbb{C}$ olduğunda (σ)-türevler ile (σ)-modül türevler birbirleriyle çakışır. Dolayısıyla A Banach cebirinin (σ)-n-zayıf modül amenabilitesi ile (σ)-n-zayıf amenabilitesi aynı olur.

Uyarı 5.1.3. [25] *X bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olsun. Bu durumda $X^*, X^{**}, X^{***}, \ldots$ Banach uzayları da birer Banach $\mathfrak{A}$-bimodül olur. $\iota : X \to X^{**}$ doğal gömme fonksiyonu olmak üzere*

$$P : X^{***} \to X^*, \ \ \Lambda \mapsto \Lambda\,|_{\iota(X)} \qquad (\Lambda \in X^{***})$$

fonksiyonu bir projeksiyondur. $\operatorname{Im} P = X^*$ *dir ve P bir $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmasıdır. Üstelik,* $\operatorname{Ker} P = (\iota(X))^{\perp}$ *olup $X^{***} = X^* \oplus (\iota(X))^{\perp}$ dir. Bu şekilde tanımlanan P fonksiyonuna doğal projeksiyon adı verilir.*

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $X^{(n)}$ dual uzayı da bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodüldür. Yukarıda verilene benzer bir projeksiyon, $X^{(n+2)}$ den $X^{(n)}$ ye tanımlanır.

Önerme 5.1.4. *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. Eğer A, (σ)-$(n+2)$-zayıf modül amenable ise o zaman A, (σ)-n-zayıf modül amenable olur.*

İspat: $D : A \to (A/J)^{(n)}$ bir (σ)-modül türev ve $P : (A/J)^{(n+2)} \to (A/J)^{(n)}$ bir doğal projeksiyon olsun. $(A/J)^{(n+2)} = (A/J)^{(n)} \oplus (\iota(A/J)^{(n-1)})^{\perp}$ olduğundan $D : A \to (A/J)^{(n+2)}$ de bir (σ)-modül türev olarak alınır. Böylece her $a \in A$ için,

$$D(a) = \sigma(a) \cdot \Phi - \Phi \cdot \sigma(a)$$

olacak şekilde bir $\Phi \in (A/J)^{(n+2)}$ vardır. $\lambda = P(\Phi)$ olsun. O halde

$$D(a) = P(D(a)) = \sigma(a) \cdot \lambda - \lambda \cdot \sigma(a) \qquad (a \in A)$$

olup D bir (σ)-modül iç türevdir. Böylece A Banach cebiri, (σ)-n-zayıf modül amenable olur. □

Önerme 5.1.5. *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\sigma, \lambda \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. Eğer λ^2 birim dönüşüm ve A, (σ)-n-zayıf modül amenable ise o zaman A, $(\sigma \circ \lambda)$-n-zayıf modül amenable olur.*

İspat: Çift kuvvetteki durum için ispat yapılacaktır. Tek kuvvetteki ispat benzer şekilde yapılır. $(A/J)^{(2n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ve $D : A \to (A/J)^{(2n)}$ bir $(\sigma \circ \lambda)$-modül türev olsun. Bu durumda $\widetilde{D} := D \circ \lambda^{-1}$ bir (σ)-modül türevdir, çünkü her $a, b \in A$ ve $\alpha \in \mathfrak{A}$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(ab) &= (D \circ \lambda^{-1})(ab) = D(\lambda^{-1}(a)\lambda^{-1}(b)) \\
&= D(\lambda^{-1}(a)) \cdot (\sigma \circ \lambda)(\lambda^{-1}(b)) + (\sigma \circ \lambda)(\lambda^{-1}(a)) \cdot D(\lambda^{-1}(b)) \\
&= \widetilde{D}(a) \cdot \sigma(b) + \sigma(a) \cdot \widetilde{D}(b),
\end{aligned}$$

$$\widetilde{D}(\alpha \cdot a) = D(\lambda^{-1}(\alpha \cdot a)) = D(\alpha \cdot \lambda^{-1}(a)) = \alpha \cdot D(\lambda^{-1}(a)) = \alpha \cdot \widetilde{D}(a)$$

ile benzer şekilde $\widetilde{D}(a \cdot \alpha) = \widetilde{D}(a) \cdot \alpha$ eşitlikleri sağlanır. A, (σ)-n-zayıf modül amenable olduğundan her $a \in A$ için $\widetilde{D}(a) = \sigma(a) \cdot \Phi - \Phi \cdot \sigma(a)$ olacak şekilde bir $\Phi \in (A/J)^{(2n)}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
D(a) &= D(\lambda^{-1}(\lambda(a))) = \widetilde{D}(\lambda(a)) \\
&= \sigma(\lambda(a)) \cdot \Phi - \Phi \cdot \sigma(\lambda(a))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan D nin $(\sigma \circ \lambda)$-modül iç türev olduğu görülür ve A, $(\sigma \circ \lambda)$-n-zayıf modül amenable olur. □

Sonuç 5.1.6. *Eğer A, n-zayıf modül amenable ve λ^2 birim dönüşüm ise o zaman A, (λ)-n-zayıf modül amenable olur.*

Önerme 5.1.7. *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. Eğer σ bir epimorfizma ve A, (σ)-n-zayıf modül amenable ise o zaman A, n-zayıf modül amenable olur.*

İspat: Çift kuvvetteki durum için ispat yapılacaktır. Tek kuvvetteki ispat benzer şekildedir. $(A/J)^{(2n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ve $D : A \to (A/J)^{(2n)}$ bir modül türev olsun. O halde $D \circ \sigma$ bir (σ)-modül türevdir. A, (σ)-n-zayıf modül amenable olduğundan her $a \in A$ için $(D \circ \sigma)(a) = \sigma(a) \cdot \Phi - \Phi \cdot \sigma(a)$ olacak şekilde bir

$\Phi \in (A/J)^{(2n)}$ vardır.

$b \in A$ olsun. σ fonksiyonu örten olduğundan $b = \sigma(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Böylece her $b \in A$ için

$$\begin{aligned} D(b) = D(\sigma(a)) &= (D \circ \sigma)(a) \\ &= \sigma(a) \cdot \Phi - \Phi \cdot \sigma(a) \\ &= b \cdot \Phi - \Phi \cdot b \end{aligned}$$

olur. Bu durumda D bir modül iç türev olup A, n-zayıf modül amenabledır. $\square$

A ve B birer Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \in \mathbb{N}$ ve $\theta \in Hom_{\mathfrak{A}}(A,B)$ olsun. Bu durumda $B^{(n)}$ dual uzayı,

$$a \cdot b^{(n)} = \theta(a) \cdot b^{(n)}, \quad b^{(n)} \cdot a = b^{(n)} \cdot \theta(a) \qquad (a \in A, b^{(n)} \in B^{(n)})$$

şeklindeki dış işlemler ile bir A-modüldür. $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O halde $\theta^{(2n-1)} : B^{(2n-1)} \to A^{(2n-1)}$ ve $\theta^{(2n)} : A^{(2n)} \to B^{(2n)}$ yüksek mertebeden dual operatörler, birer A-modül homomorfizması olur.

$\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $c,d \in B$ olmak üzere $(c \cdot \alpha)d - c(\alpha \cdot d)$ formundaki elemanlar ile üretilen B nin kapalı ideali J' ile gösterilsin. Böylece B/J' Banach bölüm cebiri bir Banach B-$\mathfrak{A}$-modüldür. $\theta \in Hom_{\mathfrak{A}}(A,B)$ olsun. O halde her $a,b \in A$ ve $\alpha \in \mathfrak{A}$ için

$$\theta((a \cdot \alpha)b - a(\alpha \cdot b)) = (\theta(a) \cdot \alpha)\theta(b) - \theta(a)(\alpha \cdot \theta(b)) \in J'$$

olur. J, A nın bir kapalı ideali ve θ fonksiyonu sürekli olduğundan $\theta(J) \subseteq J'$ olduğu görülür. Böylece

$$\widehat{\theta} : A/J \to B/J', \quad \widehat{\theta}(a+J) = \theta(a) + J'$$

ile tanımlı dönüşüm iyi tanımlıdır. Ayrıca $\widehat{\theta}^{(2n)}$ ile $\widehat{\theta}^{(2n-1)}$ dönüşümleri de birer A-modül homomorfizması olarak düşünülebilir.

Önerme 5.1.8. *A ve B birer Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\tau \in Hom_{\mathfrak{A}}(B)$ olsun. $\theta_1 \in Hom_{\mathfrak{A}}(A,B)$ ve $\theta_2 \in Hom_{\mathfrak{A}}(B,A)$ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmaları $\theta_1 \circ \theta_2 = I_B$ şartını sağlasın. O halde $\sigma = \theta_2 \circ \tau \circ \theta_1 \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olur. Üstelik, yukarıda tanımlanan J' ideali için B/J' bir değişmeli B-$\mathfrak{A}$-modül ise, o zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

(i) Eğer A, (σ)-$2n$-zayıf modül amenable ise o zaman B, (τ)-$2n$-zayıf modül amenabledır;

(ii) Eğer A, (σ)-$(2n-1)$-zayıf modül amenable ise o zaman B, (τ)-$(2n-1)$-zayıf modül amenabledır.

İspat: $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olduğu açıktır.

(i) A, (σ)-$2n$-zayıf modül amenable ve $D : B \to (B/J')^{(2n)}$ bir (τ)-modül türev olsun. θ_1 ve θ_2 den, sırasıyla, $\widehat{\theta_1} : A/J \to B/J'$ ve $\widehat{\theta_2} : B/J' \to A/J$ şeklindeki dönüşümlerin elde edilebildiği açıkça görülür. Buradan

$$\widetilde{D} := \widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1 : A \to (A/J)^{(2n)}$$

bir (σ)-modül türevdir, çünkü her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(ab) &= (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1)(ab) = \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(a)\theta_1(b))) \\
&= \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(a)) \cdot \tau(\theta_1(b)) + \tau(\theta_1(a)) \cdot D(\theta_1(b))) \\
&= (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1)(a) \cdot \theta_2(\tau(\theta_1(b))) \\
&\quad + \theta_2(\tau(\theta_1(a))) \cdot (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1)(b) \\
&= \widetilde{D}(a) \cdot \sigma(b) + \sigma(a) \cdot \widetilde{D}(b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(\alpha \cdot a) &= (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1)(\alpha \cdot a) = \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\alpha \cdot \theta_1(a))) \\
&= \widehat{\theta}_2^{(2n)}(\alpha \cdot D(\theta_1(a))) = \alpha \cdot \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(a))) \\
&= \alpha \cdot \widetilde{D}(a)
\end{aligned}$$

ile benzer şekilde $\widetilde{D}(a\cdot\alpha)=\widetilde{D}(a)\cdot\alpha$ eşitlikleri sağlanır. A, (σ)-$2n$-zayıf modül amenable olduğundan her $a\in A$ için

$$\widetilde{D}(a)=\sigma(a)\cdot x-x\cdot\sigma(a)$$

olacak şekilde bir $x\in(A/J)^{(2n)}$ vardır. Ayrıca $b\in B$ olmak üzere

$$\widehat{\theta}_1^{(2n)}(\sigma(\theta_2(b))\cdot x)=\tau(b)\cdot\widehat{\theta}_1^{(2n)}(x)\ \text{ ve }\ \widehat{\theta}_1^{(2n)}(x\cdot\sigma(\theta_2(b)))=\widehat{\theta}_1^{(2n)}(x)\cdot\tau(b)$$

eşitliklerinin sağlandığı açıktır. Üstelik, $\widehat{\theta}_1^{(2n)}\circ\widehat{\theta}_2^{(2n)}=I_{(B/J')^{(2n)}}$ dir. Böylece her $b\in B$ için,

$$\begin{aligned}
D(b) &= (\widehat{\theta}_1^{(2n)}\circ\widehat{\theta}_2^{(2n)}\circ D\circ\theta_1\circ\theta_2)(b)\\
&= \widehat{\theta}_1^{(2n)}((\widehat{\theta}_2^{(2n)}\circ D\circ\theta_1)(\theta_2(b)))\\
&= \widehat{\theta}_1^{(2n)}(\widetilde{D}(\theta_2(b)))\\
&= \widehat{\theta}_1^{(2n)}(\sigma(\theta_2(b))\cdot x-x\cdot\sigma(\theta_2(b)))\\
&= \tau(b)\cdot\widehat{\theta}_1^{(2n)}(x)-\widehat{\theta}_1^{(2n)}(x)\cdot\tau(b)
\end{aligned}$$

olur. Buradan B nin (τ)-$2n$-zayıf modül amenable olduğu görülür.
(ii) A, (σ)-$(2n-1)$-zayıf modül amenable ve $D:B\to(B/J')^{(2n-1)}$ bir (τ)-modül türev olsun. θ_1 ve θ_2 den, sırasıyla, $\widehat{\theta_1}:A/J\to B/J'$ ve $\widehat{\theta_2}:B/J'\to A/J$ şeklindeki dönüşümlerin elde edilebildiği açıkça görülür. Buradan

$$\widetilde{D}:=\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1:A\to(A/J)^{(2n-1)}$$

bir (σ)-modül türevdir, çünkü her $a,b\in A$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(ab) &= (\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1)(ab)=\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}(D(\theta_1(a)\theta_1(b)))\\
&= \widehat{\theta}_1^{(2n-1)}(D(\theta_1(a))\cdot\tau(\theta_1(b))+\tau(\theta_1(a))\cdot D(\theta_1(b)))\\
&= (\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1)(a)\cdot\theta_2(\tau(\theta_1(b)))\\
&\quad +\theta_2(\tau(\theta_1(a)))\cdot(\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1)(b)\\
&= \widetilde{D}(a)\cdot\sigma(b)+\sigma(a)\cdot\widetilde{D}(b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(\alpha\cdot a) &= (\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1)(\alpha\cdot a)=\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}(D(\alpha\cdot\theta_1(a)))\\ &= \widehat{\theta}_1^{(2n-1)}(\alpha\cdot D(\theta_1(a)))=\alpha\cdot\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}(D(\theta_1(a)))\\ &= \alpha\cdot\widetilde{D}(a)\end{aligned}$$

ile benzer şekilde $\widetilde{D}(a\cdot\alpha)=\widetilde{D}(a)\cdot\alpha$ olur. A, (σ)-$(2n-1)$-zayıf modül amenable olduğundan her $a\in A$ için

$$\widetilde{D}(a)=x\cdot\sigma(a)-\sigma(a)\cdot x$$

olacak şekilde bir $x\in(A/J)^{(2n-1)}$ vardır. Ayrıca $b\in B$ olmak üzere

$$\widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(\sigma(\theta_2(b))\cdot x)=\tau(b)\cdot\widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(x) \text{ ve } \widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(x\cdot\sigma(\theta_2(b)))=\widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(x)\cdot\tau(b)$$

eşitlikleri sağlanır ve $\widehat{\theta}_2^{(2n-1)}\circ\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}=I_{(B/J')^{(2n-1)}}$ dir. Buradan her $b\in B$ için,

$$\begin{aligned}D(b) &= (\widehat{\theta}_2^{(2n-1)}\circ\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1\circ\theta_2)(b)\\ &= \widehat{\theta}_2^{(2n-1)}((\widehat{\theta}_1^{(2n-1)}\circ D\circ\theta_1)(\theta_2(b)))\\ &= \widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(\widetilde{D}(\theta_2(b)))\\ &= \widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(x\cdot\sigma(\theta_2(b))-\sigma(\theta_2(b))\cdot x)\\ &= \widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(x)\cdot\tau(b)-\tau(b)\cdot\widehat{\theta}_2^{(2n-1)}(x)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece B, (τ)-$(2n-1)$-zayıf modül amenable olur.

□

Teorem 5.1.9. *A ve B birer Banach $\mathfrak{A}$-bimodül ve $n\in\mathbb{Z}^+$ olsun. Uygun $\theta_1\in Hom_{\mathfrak{A}}(A,B)$ ve $\theta_2\in Hom_{\mathfrak{A}}(B,A)$ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmaları için $\theta_1\circ\theta_2=I_B$ şartı sağlansın. Yukarıda tanımlanan J' ideali için B/J' bir değişmeli B-$\mathfrak{A}$-modül ise, o zaman her bir $\sigma\in Hom_{\mathfrak{A}}(B)$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) Eğer A, $2n$-zayıf modül amenable ise, o zaman B, (σ)-$2n$-zayıf modül amenabledır;

(ii) Eğer A, $(2n-1)$-zayıf modül amenable ise, o zaman B, (σ)-$(2n-1)$-zayıf modül amenabledır.

İspat: (i) A, $2n$-zayıf modül amenable, $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(B)$ ve $D : B \to (B/J')^{(2n)}$ bir (σ)-modül türev olsun. Bu durumda $\widetilde{D} := \widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1 : A \to (A/J)^{(2n)}$ bir modül türevdir, çünkü Önerme 5.1.8 de $\theta_2 \circ \sigma \circ \theta_1 = I_A$ olarak alınırsa her $\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(ab) &= (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1)(ab) \\
&= \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(a)\theta_1(b))) \\
&= \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(a)) \cdot \sigma(\theta_1(b)) + \sigma(\theta_1(a)) \cdot D(\theta_1(b))) \\
&= \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(a))) \cdot \theta_2(\sigma(\theta_1(b))) \\
&\quad + \theta_2(\sigma(\theta_1(a))) \cdot \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\theta_1(b))) \\
&= \widetilde{D}(a) \cdot b + a \cdot \widetilde{D}(b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(\alpha \cdot a) &= (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D)(\theta_1(\alpha \cdot a)) \\
&= (\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D)(\alpha \cdot \theta_1(a)) = \widehat{\theta}_2^{(2n)}(D(\alpha \cdot \theta_1(a))) \\
&= \widehat{\theta}_2^{(2n)}(\alpha \cdot D(\theta_1(a))) = \alpha \cdot \widetilde{D}(a)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\widetilde{D}(a \cdot \alpha) = \widetilde{D}(a) \cdot \alpha$ eşitliklerinin sağlandığı görülür. A, $2n$-zayıf modül amenable olduğundan her $a \in A$ için

$$\widetilde{D}(a) = a \cdot x - x \cdot a$$

olacak şekilde bir $x \in (A/J)^{(2n)}$ vardır. Ayrıca $b \in B$ olmak üzere

$$\widehat{\theta}_1^{(2n)}(I_A(\theta_2(b)) \cdot x) = \sigma(b) \cdot \widehat{\theta}_1^{(2n)}(x) \;\; \text{ve} \;\; \widehat{\theta}_1^{(2n)}(x \cdot I_A(\theta_2(b))) = \widehat{\theta}_1^{(2n)}(x) \cdot \sigma(b)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece her $b \in B$ için

$$\begin{aligned} D(b) &= (\widehat{\theta}_1^{(2n)} \circ \widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1 \circ \theta_2)(b) \\ &= \widehat{\theta}_1^{(2n)}((\widehat{\theta}_2^{(2n)} \circ D \circ \theta_1)(\theta_2(b))) \\ &= \widehat{\theta}_1^{(2n)}(\widetilde{D}(\theta_2(b))) \\ &= \widehat{\theta}_1^{(2n)}(I_A(\theta_2(b)) \cdot x - x \cdot I_A(\theta_2(b))) \\ &= \sigma(b) \cdot \widehat{\theta}_1^{(2n)}(x) - \widehat{\theta}_1^{(2n)}(x) \cdot \sigma(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan B nin (σ)-$2n$-zayıf modül amenable olduğu görülür.

(ii) İspat, (i) şıkkına benzer olarak yapılır. □

σ nın birim dönüşüm olduğu durumda Teorem 5.1.9 dan, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için n-zayıf modül amenable bir Banach cebirinin homomorf görüntüsünün de n-zayıf modül amenable olacağı sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.1.10. *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, B, A nın kapalı bir $\mathfrak{A}$-altmodülü ve I, A nın kapalı bir ideali olmak üzere $A = B \oplus I$ olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$, $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(B)$ ve B nin yukarıda tanımlanan J' kapalı ideali için B/J' bir değişmeli B-$\mathfrak{A}$-modül olsun. Eğer A, n-zayıf modül amenable ise, o zaman B, (σ)-n-zayıf modül amenable olur.*

İspat: $P : A \to B$ bir doğal projeksiyon ve $\iota : B \to A$ bir doğal gömme fonksiyonu olsun. P ile ι, birer $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmasıdır. Üstelik $P \circ \iota = I_B$ eşitliği sağlanır. Böylece ispatın geri kalan kısmı Teorem 5.1.9 yardımıyla tamamlanır. □

Sonuç 5.1.11. *I, A nın bir kapalı ideali ve $\mathfrak{A}$-altmodülü olmak üzere Banach cebirler, Banach $\mathfrak{A}$-bimodüller ile φ_1, φ_2 $\mathfrak{A}$-modül homomorfizmalarının bir parçalanabilir kısa tam dizisi*

$$0 \to I \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{\varphi_2} A/I \to 0$$

olsun. Eğer A, n-zayıf modül amenable ise o zaman her $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A/I)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için A/I, (σ)-n-zayıf modül amenable olur.

İspat: Verilen dizi tam ve parçalanabilir olduğundan $\varphi_2 \circ \varphi_3 = I_{A/I}$ olacak şekilde bir $\varphi_3 : A/I \to A$ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizması vardır. Böylece Teorem 5.1.9 dan istenilen sonuca ulaşılır. $\square$

Aşağıdaki lemmanın ispatı [13, Lemma 3.4] de yapılmıştır:

Lemma 5.1.12. *Her $n \geq 1$ tek tamsayısı için, $Y \leq A^{(n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül ise o zaman $Y \leq J^{(n\perp)}$ dir.*

Şimdi ise [13] de verilen bir sonuç, σ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizması yardımıyla genelleştirilecektir:

Önerme 5.1.13. *A bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. $(A/J)^{(n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olmak üzere A ile $\mathfrak{A}$ nun her ikisi de sınırlı yaklaşık birimlere sahip olsun. Eğer σ bir epimorfizma ve her n tek tamsayısı için A, (σ)-n-zayıf amenable ise o zaman A, (σ)-n-zayıf modül amenable olur.*

İspat: $D : A \to (A/J)^{(n)}$ bir (σ)-modül türev ve (α_i), $\mathfrak{A}$ için bir sınırlı yaklaşık birim olsun. Teorem 2.4.8 den, her $a \in A$ için $a = \beta \cdot b$ olacak şekilde $\beta \in \mathfrak{A}$ ve $b \in A$ vardır. Böylece her $a \in A$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
\sigma(\mu a) &= \sigma(\mu(\beta \cdot b)) = \lim_i \sigma(\mu(\alpha_i \beta) \cdot b) = \lim_i \sigma(\mu \alpha_i \cdot a) \\
&= \lim_i \mu \alpha_i \cdot \sigma(a) = \mu \sigma(a)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda σ dönüşümü, $\mathbb{C}$-lineer olur. Teorem 2.4.8 tekrar uygulanırsa D nin de benzer şekilde $\mathbb{C}$-lineer, yani her $a \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $D(\lambda a) = \lambda D(a)$ olduğu görülür.

n tek olduğundan $(A/J)^{(n)} = J^{(n\perp)} \leq A^{(n)}$ altmodülü olarak düşünülebilir ve buradan $D : A \to A^{(n)}$ bir (σ)-türev olur. Hipotez gereği, A, (σ)-n-zayıf amenable olduğundan her $a \in A$ için $D(a) = y \cdot \sigma(a) - \sigma(a) \cdot y$ olacak şekilde $y \in A^{(n)}$ vardır. Bu durumda $y \in J^{(n\perp)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. D bir (σ)-modül türev olduğundan her $\alpha \in \mathfrak{A}$, $a \in A$ için

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot y - y \cdot \alpha) \cdot \sigma(a) &= \alpha \cdot (y \cdot \sigma(a)) - y \cdot (\alpha \cdot \sigma(a)) \\
&= \alpha \cdot (y \cdot \sigma(a) - \sigma(a) \cdot y) - (y \cdot (\alpha \cdot \sigma(a)) - (\alpha \cdot \sigma(a)) \cdot y) \\
&= \alpha \cdot (y \cdot \sigma(a) - \sigma(a) \cdot y) - (y \cdot \sigma(\alpha \cdot a) - \sigma(\alpha \cdot a) \cdot y) \\
&= \alpha \cdot D(a) - D(\alpha \cdot a) = 0
\end{aligned}$$

olur. A nın bir sınırlı yaklaşık birimi var olduğundan Teorem 2.4.8 gereği $b \in A$ ve $x \in A^*$ olmak üzere $\alpha \cdot y - y \cdot \alpha = x \cdot b$ dir. Buradan her $a \in A$ için $x \cdot (b\sigma(a)) = (x \cdot b) \cdot \sigma(a) = 0$ olur. σ bir epimorfizma olduğundan ve A nın bir sınırlı yaklaşık birimi var olduğundan $x \cdot b = 0$ olup her $\alpha \in \mathfrak{A}$ için $\alpha \cdot y = y \cdot \alpha$ elde edilir. Lemma 5.1.12 nin ispatında verildiği gibi her $\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
0 &= < ab, y \cdot \alpha - \alpha \cdot y > = < ab, y \cdot \alpha > - < ab, \alpha \cdot y > \\
&= < a, b \cdot (y \cdot \alpha) > - < (ab) \cdot \alpha, y > = < a, b \cdot (y \cdot \alpha) > - < a(b \cdot \alpha), y > \\
&= < a, b \cdot (y \cdot \alpha) > - < b \cdot \alpha, y \cdot a > = < a, (b \cdot y) \cdot \alpha > - < b, \alpha \cdot (y \cdot a) > \\
&= < a, \alpha \cdot (b \cdot y) > - < b, (y \cdot a) \cdot \alpha > = < a \cdot \alpha, b \cdot y > - < \alpha \cdot b, y \cdot a > \\
&= < (a \cdot \alpha)b, y > - < a(\alpha \cdot b, y) > = < (a \cdot \alpha)b - a(\alpha \cdot b), y >
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan $y \in J^{\perp} \leq J^{(n\perp)}$ olduğu görülür. Böylece $D : A \to (A/J)^{(n)}$ bir (σ)-modül iç türev olup A Banach cebiri, (σ)-n-zayıf modül amenable olur. $\square$

$\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizması için $\sigma(J) \subseteq J$ şartı sağlanır. Bu durumda $\widehat{\sigma} : A/J \to A/J$, $\widehat{\sigma}(a+J) = \sigma(a) + J$ dönüşümü iyi tanımlıdır.

Teorem 5.1.14. *A, aşikar sol etki ile bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \geq 1$ bir tamsayı ve $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. A/J nin bir sol ya da sağ birimi var olsun. Eğer A, (σ)-n-zayıf modül amenable ise, o zaman A/J, $(\widehat{\sigma})$-n-zayıf amenable olur.*

İspat: Tek kuvvetteki durum için ispat yapılacaktır. Çift kuvvetteki ispat benzer şekilde yapılır. n bir tek tamsayı ve $D : A/J \to (A/J)^{(n)}$ bir $(\widehat{\sigma})$-türev olsun.

$\pi : A \to A/J$ doğal $\mathfrak{A}$-modül dönüşümü olmak üzere $\widehat{D} := D \circ \pi : A \to (A/J)^{(n)}$ tanımlansın. Lemma 3.4.11 gereği, $\mathfrak{A}$ nun A/J üzerine iki yanlı etkisi aşikardır, yani her $a \in A$, $\alpha \in U$ için

$$\alpha \cdot (a+J) = (a+J) \cdot \alpha = f(\alpha)a + J$$

olur. Böylece her $n \geq 1$ için A nın $(A/J)^{(n)}$ üzerine etkisi de aşikardır. Aynı zamanda, her $n \in \mathbb{N}$ için $(A/J)^{(n)}$ bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modüldür. Ayrıca her $a, b \in A$ için $\widehat{D}(a \pm b) = \widehat{D}(a) \pm \widehat{D}(b)$ olduğu açıktır. Her $a \in A$ ve $\alpha \in \mathfrak{A}$ için,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(\alpha \cdot a) &= D(\pi(\alpha \cdot a)) = D(\alpha \cdot a + J) = D(\alpha \cdot (a+J)) \\
&= D(f(\alpha)a + J) = f(\alpha)D(a+J) = f(\alpha)D(\pi(a)) \\
&= \alpha \cdot \widehat{D}(a),
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\widehat{D}(a \cdot \alpha) = \widehat{D}(a) \cdot \alpha$ olur. Ayrıca her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(ab) &= D(\pi(ab)) = D(ab + J) = D((a+J)(b+J)) \\
&= D(a+J) \cdot \widehat{\sigma}(b+J) + \widehat{\sigma}(a+J) \cdot D(b+J) \\
&= D(\pi(a)) \cdot (\sigma(b) + J) + (\sigma(a) + J) \cdot D(\pi(b)) \\
&= \widehat{D}(a) \cdot \sigma(b) + \sigma(a) \cdot \widehat{D}(b)
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda $\widehat{D}$ bir (σ)-modül türev olur. A, (σ)-n-zayıf modül amenable olduğundan her $a \in A$ için $\widehat{D}(a) = \Phi \cdot \sigma(a) - \sigma(a) \cdot \Phi$ olacak şekilde $\Phi \in (A/J)^{(n)}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
D(a+J) &= \Phi \cdot (\sigma(a) + J) - (\sigma(a) + J) \cdot \Phi \\
&= \Phi \cdot \widehat{\sigma}(a+J) - \widehat{\sigma}(a+J) \cdot \Phi
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde D bir $(\widehat{\sigma})$-iç türev olup A/J, $(\widehat{\sigma})$-n-zayıf amenable olur. □

Eğer A bir sağ esas $\mathfrak{A}$-modül ise o zaman her σ $\mathfrak{A}$-modül homomorfizması aynı zamanda bir lineer homomorfizmadır ve ayrıca $\widehat{\sigma}$ nın tanımı gereği, $\widehat{\sigma}$ dönüşümü de $\mathbb{C}$-lineerdir [12]:

$a \in A$ ise o zaman $\lim_n b_n = a$ olacak şekilde bir $\{b_n\} \subseteq A \cdot \mathfrak{A}$ dizisi vardır. Uygun $\{a_{n,m}\}_{m=1}^{m=K_n} \subseteq A$ ve $\{\alpha_{n,m}\}_{m=1}^{m=K_n} \subseteq \mathfrak{A}$ sonlu dizileri için $b_n = \sum_{m=1}^{K_n} a_{n,m}\alpha_{n,m}$ olsun. $t \in \mathbb{C}$ alınsın. O halde

$$\begin{aligned}
\sigma(tb_n) &= \sigma\big(t\sum_{m=1}^{K_n} a_{n,m}\cdot\alpha_{n,m}\big) = \sum_{m=1}^{K_n}\sigma(a_{n,m}\cdot(t\alpha_{n,m}))\\
&= \sum_{m=1}^{K_n}\sigma(a_{n,m})\cdot(t\alpha_{n,m}) = \sum_{m=1}^{K_n} t\sigma(a_{n,m}\cdot\alpha_{n,m}) = t\sigma(b_n)
\end{aligned}$$

dir. σ nın sürekliliğinden, $\sigma(ta) = t\sigma(a)$ olur.

Teorem 5.1.15. *A, aşikar sol etki ile bir Banach $\mathfrak{A}$-bimodül, $n \geq 1$ tek tamsayı ve $\sigma \in Hom_{\mathfrak{A}}(A)$ olsun. A bir sağ esas $\mathfrak{A}$-modül olup A/J nin bir sol ya da sağ birimi var olsun. Eğer A/J, $(\widehat{\sigma})$-n-zayıf amenable ise o zaman A, (σ)-n-zayıf modül amenable olur.*

İspat: Lemma 3.4.11 gereği, $\mathfrak{A}$ nun A/J üzerine iki yanlı etkisi aşikar olduğundan A/J bir değişmeli $\mathfrak{A}$-modüldür. O halde keyfi bir $D : A \to (A/J)^{(n)}$ (σ)-modül türevin, (σ)-modül iç türev olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $Y = (A/J)^{(n)}$ olsun. Y bir değişmeli A-$\mathfrak{A}$-modül olduğundan [13, Önerme 3.12] gereği $J \cdot Y = Y \cdot J = \{0\}$ dır. Böylece aşağıdaki dış işlemler ile Y bir Banach A/J-modül olur:

$$(a+J)\cdot y := a\cdot y, \quad y\cdot(a+J) := y\cdot a \quad (y \in Y, a \in A).$$

$\widetilde{D} : A/J \to Y$, $\widetilde{D}(a+J) = D(a) \quad (a \in A)$ dönüşümü tanımlansın. Her $\alpha \in \mathfrak{A}$ ve $a,b \in A$ için

$$\begin{aligned}
D((a\cdot\alpha)b - a(\alpha\cdot b)) &= D((a\cdot\alpha)b) - D(a(\alpha\cdot b))\\
&= D(a\cdot\alpha)\cdot\sigma(b) + \sigma(a\cdot\alpha)\cdot D(b) - (D(a)\cdot\sigma(\alpha\cdot b)\\
&\quad +\sigma(a)\cdot D(\alpha\cdot b))\\
&= (\sigma(a)\cdot\alpha)\cdot D(b) - \sigma(a)\cdot(\alpha\cdot D(b)) + (D(a)\cdot\alpha)\cdot\sigma(b)\\
&\quad -D(a)\cdot(\alpha\cdot\sigma(b)) = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. J, A nın kapalı bir ideali olduğundan D nin J ye kısıtlanışı sıfırdır. O halde $\widetilde{D}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca her $a,b \in A$ için

$$\widetilde{D}(ab+J) = \widetilde{D}(a+J)\cdot\widehat{\sigma}(b+J) + \widehat{\sigma}(a+J)\cdot\widetilde{D}(b+J)$$

dir. A bir sağ esas $\mathfrak{A}$-modül olduğundan $\widehat{\sigma}$, A/J üzerinde bir lineer homomorfizma olur. Üstelik, Bölüm 3.4 de de verildiği gibi $\widetilde{D}$, $\mathbb{C}$-lineerdir. Böylece $\widetilde{D}$, $(\widehat{\sigma})$-türevdir. A/J, $(\widehat{\sigma})$-n-zayıf amenable olduğundan her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} D(a) = \widetilde{D}(a+J) &= \Phi\cdot\widehat{\sigma}(a+J) - \widehat{\sigma}(a+J)\cdot\Phi \\ &= \Phi\cdot(\sigma(a)+J) - (\sigma(a)+J)\cdot\Phi \\ &= \Phi\cdot\sigma(a) - \sigma(a)\cdot\Phi \end{aligned}$$

olacak şekilde $\Phi \in (A/J)^{(n)}$ vardır. Bu durumda D, (σ)-modül iç türevdir ve A, (σ)-n-zayıf modül amenable olur. □

5.2. Yarıgrup Cebirleri için Elde Edilen Sonuçlar

Teorem 5.2.1. *S bir ters yarıgrup ve E, S nin idempotent elemanlarının kümesi olsun. O halde her $\sigma \in Hom_{\ell^1(E)}(\ell^1(S))$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\ell^1(S)$ yarıgrup cebiri, aşikar sol etki ve doğal sağ etki ile (σ)-$(2n+1)$-zayıf $\ell^1(E)$-modül amenable olur.*

İspat: Öncelikle, σ nın sıfır dönüşümü olduğunu kabul edelim. (3.3) de tanımlanan $\approx$ bağıntısı, S üzerinde bir denklik bağıntısı olup $S/\approx$ bir ayrık grup olduğundan $\ell^1(S/\approx)$ grup cebirinin bir birimi vardır ve [16, Örnek 3.2] den her $n \in \mathbb{N}$ için $\ell^1(S/\approx)$, $(\widehat{\sigma},0)$ ve $(0,\widehat{\sigma})$-n-zayıf amenable olur. Her $e \in E$, $s \in S$ için

$$\delta_e\cdot\delta_s = \delta_s, \quad \delta_s\cdot\delta_e = \delta_{se} = \delta_s * \delta_e$$

şeklinde tanımlanan dış işlemler ile $\ell^1(S)$ daima bir sağ esas $\ell^1(E)$-modüldür, çünkü her $f \in \ell^1(S)$ için

$$f = \sum_{s\in S} f(s)\delta_s = \sum_{s\in S} f(s)\delta_s * \delta_{s^*s} = \sum_{s\in S} f(s)\delta_s\cdot\delta_{s^*s}$$

dir ve böylece f fonksiyonu, $\ell^1(S)\cdot\ell^1(E)=\{\delta_s\cdot\delta_e \mid e\in E, s\in S\}$ nin kapalı lineer gereni içindedir. Bu durum için ispatın geri kalan kısmı, Teorem 5.1.15 de $A=\ell^1(S)$ ve $\mathfrak{A}=\ell^1(E)$ alınarak yapılır.

Şimdi ise σ dönüşümü sıfırdan farklı olsun. [16, Örnek 3.1] de G bir yerel kompakt grup ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere her $\varphi\in Hom(L^1(G))$ için $L^1(G)$ grup cebirinin (φ,φ)-n-zayıf amenable olduğu ispatlanmıştır. Özel olarak, $\ell^1(S/\approx)$, $(\widehat{\sigma})$-n-zayıf amenabledır. Teorem 5.1.15 tekrar kullanılırsa, her n tek tamsayısı için $\ell^1(S)$ nin (σ)-n-zayıf modül amenable olduğu görülür. □

Şimdi bu konuyla ilgili olarak bazı örneklere yer verilecektir:

Örnek 5.2.2. S bir ters yarıgrup ve E, S nin idempotent elemanlarının kümesi olsun. $C^*(S)$, $\ell^1(S)$ Banach $*$-cebirinden üretilmiş C^*-cebir olsun ([31]). O halde süreklilikten yararlanılarak, $\ell^1(E)$ nin $\ell^1(S)$ üzerine olan bir etkisi, $C^*(E)$ nin $C^*(S)$ üzerine bir etkisi olarak genişletilebilir. Teorem 2.5.4 gereği, $C^*(E)$ C^*-cebirinde sınırlı bir yaklaşık birim vardır. O halde Teorem 2.4.8 den $C^*(S)$ bir sağ esas $C^*(E)$-modüldür. Teorem 5.1.15 in ispatında olduğu gibi, her $\sigma\in Hom_{C^*(E)}(C^*(S))$ için $C^*(S)$ üzerindeki her bir σ-modül türev, $\mathbb{C}$-lineerdir. Böylece [16, Örnek 3.2] den, her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $C^*(S)$ C^*-cebiri, $(\sigma,0)$ ve $(0,\sigma)$-n-zayıf amenable olur. O halde Önerme 5.1.13 den, her $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $\sigma\in Hom_{C^*(E)}(C^*(S))$ için $C^*(S)$, $(\sigma,0)$ ve $(0,\sigma)$-$(2n+1)$-zayıf modül amenable olur.

Şimdi ise σ^2 nin birim dönüşüm olduğu kabul edilsin. [13, Önerme 3.5] gereği, her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $C^*(S)$ C^*-cebiri $(2n+1)$-zayıf $C^*(E)$-modül amenable olur. Böylece Sonuç 5.1.6 dan $C^*(S)$ Banach cebiri, (σ)-$(2n+1)$-zayıf $C^*(E)$-modül amenable olur.

Örnek 5.2.3. S bir değişmeli ters yarıgrup ve E, S nin idempotent elemanlarının kümesi olsun. $\ell^1(S)$ Banach cebiri, aşağıda tanımlanan dış işlemler ile bir Banach

$\ell^1(E)$-modüldür:

$$\delta_e \cdot \delta_s = \delta_s \cdot \delta_e = \delta_s * \delta_e = \delta_{se} \qquad (e \in E, s \in S).$$

S değişmeli olduğundan $\ell^1(S)$ yarıgrup cebiri de değişmelidir. $\ell^1(S)$ iki-değişmeli Banach $\ell^1(S)$-$\ell^1(E)$ modül olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(\ell^1(S))^{(n)}$ dual uzayı da iki-değişmeli $\ell^1(S)$-$\ell^1(E)$-modüldür. [3, Teorem 3.1] den $\ell^1(S)$, zayıf $\ell^1(E)$-modül amenable olur. Ayrıca $\ell^1(S)$ yarıgrup cebiri, esas $\ell^1(E)$-modül olduğundan $\ell^1(S)$ den $(\ell^1(S))^{(n)}$ ye tanımlı her modül türev sıfırdır [15, Teorem 4.1]. Böylece $\ell^1(S)$, n-zayıf $\ell^1(E)$-modül amenable olur [15]. Şimdi ise aşağıda verilen σ dönüşümünü ele alalım [12]:

$$\sigma : \ell^1(S) \to \ell^1(S), \ \sum_{s \in S} f(s)\delta_s \mapsto \sum_{s \in S} \overline{f(s)}\delta_{s^*} \quad (s \in S).$$

Burada $\overline{f(s)}$, $f(s)$ elemanının kompleks eşleniğidir. Her $g = \sum_{s \in S} g(s)\delta_s$, $h = \sum_{t \in S} h(t)\delta_t \in \ell^1(S)$ için, $\sigma(g \pm h) = \sigma(g) \pm \sigma(h)$ olduğu açıktır. Ayrıca her $f = \sum_{e \in E} f(e)\delta_e \in \ell^1(E)$ ve $g = \sum_{s \in S} g(s)\delta_s \in \ell^1(S)$ için, f bir homomorfizma olarak düşünülürse,

$$\begin{aligned}
\sigma(f \cdot g) &= \sigma\Big(\Big(\sum_{e \in E} f(e)\delta_e\Big) \cdot \Big(\sum_{s \in S} g(s)\delta_s\Big)\Big) \\
&= \sigma\Big(\sum_{u \in S} h(u)\delta_u\Big) \quad \ni h(u) = \sum_{es=u} f(e)g(s) \\
&= \sum_{u \in S} \overline{h(u)}\delta_{u^*} = \Big(\sum_{e \in E} \overline{f(e)}\delta_{e^*}\Big) \cdot \Big(\sum_{s \in S} \overline{g(s)}\delta_{s^*}\Big) \\
&= \Big(\sum_{e \in E} f(e^*)\delta_{e^*}\Big) \cdot \Big(\sum_{s \in S} \overline{g(s)}\delta_{s^*}\Big) \\
&= \Big(\sum_{e \in E} f(e)\delta_e\Big) \cdot \Big(\sum_{s \in S} \overline{g(s)}\delta_{s^*}\Big) \\
&= f \cdot \sigma(g)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\sigma(g \cdot f) = \sigma(g) \cdot f$ olur. Üstelik her $g = \sum_{s\in S} g(s)\delta_s$, $h = \sum_{t\in S} h(t)\delta_t \in \ell^1(S)$ için,

$$\begin{aligned}
\sigma(gh) &= \sigma\Big(\Big(\sum_{s\in S} g(s)\delta_s\Big) \cdot \Big(\sum_{t\in S} h(t)\delta_t\Big)\Big) \\
&= \sigma\Big(\sum_{u\in S} h(u)\delta_u\Big) \quad \ni h(u) = \sum_{st=u} g(s)h(t) \\
&= \sum_{u\in S} \overline{h(u)}\delta_{u^*} = \Big(\sum_{s\in S} \overline{g(s)}\delta_{s^*}\Big) \cdot \Big(\sum_{t\in S} \overline{h(t)}\delta_{t^*}\Big) \\
&= \sigma(g) \cdot \sigma(h)
\end{aligned}$$

dır. $\ell^1(S)$ üzerinde $\Big(\sum_{s\in S} g(s)\delta_s\Big)^* = \sum_{s\in S} \overline{g(s)}\delta_{s^*}$ ile tanımlı involüsyon bir izometri olduğundan her $g \in \ell^1(S)$ için $\|\sigma(g)\| = \|g\|$ olup σ sınırlıdır. Böylece $\sigma \in Hom_{\ell^1(E)}(\ell^1(S))$ olur. $\ell^1(S)$ bir esas $\ell^1(E)$-modül olduğundan σ dönüşümü, $\mathbb{C}$-lineerdir. Ayrıca σ^2 birim dönüşüm olduğundan Sonuç 5.1.6 gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $\ell^1(S)$, (σ)-n-zayıf modül amenable olur.

6. ARŞİMET OLMAYAN BANACH ÜÇLÜ CEBİRLERDE k. KISMİ ÜÇLÜ KUADRATİK TÜREVLERİN STABİLİTESİ

Bu bölümde, k. kısmi üçlü kuadratik türevler ile k. kısmi üçlü kuadratik $*$-türevlerin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi, *sabit nokta metodu* kullanılarak, sırasıyla, Arşimet olmayan Banach üçlü cebirler ve Arşimet olmayan C^*-üçlü cebirlerde incelenmiş ve bu konuda yeni sonuçlara ulaşılmıştır [7].

6.1. k. Kısmi Üçlü Kuadratik Türevlerin Stabilitesi

Tanım 6.1.1. X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to [0,\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ için

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir *Arşimet olmayan genelleştirilmiş metrik* denir. (X,d) ikilisine ise *Arşimet olmayan genelleştirilmiş metrik uzay* adı verilir.

Örneğin, boş olmayan her X kümesi için,

$$d : X \times X \to [0,\infty], \quad d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \infty, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlanan d fonksiyonu, X üzerinde bir Arşimet olmayan genelleştirilmiş metriktir.

Arşimet olmayan uzaylar için kullanılan sabit nokta teoremi aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 6.1.2. [29] *(X,d) bir Arşimet olmayan genelleştirilmiş tam metrik uzay ve $\Lambda : X \to X$ bir kesin kontraktif dönüşüm, yani $L < 1$ Lipschitz sabiti ile birlikte*

$$d(\Lambda x, \Lambda y) \leq L d(x,y) \qquad (x,y \in X)$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer uygun bir $x \in X$ elemanı için $d(\Lambda^{n_0+1}x, \Lambda^{n_0}x) < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan bir n_0 tamsayısı var ise o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $\{\Lambda^n x\}$ dizisi, Λ nın bir x^* sabit noktasına yakınsar.

(ii) x^* elemanı, $X^* = \{y \in X \mid d(\Lambda^{n_0}x, y) < \infty\}$ kümesinde Λ nın teklikle belli sabit noktasıdır.

(iii) Eğer $y \in X^*$ ise, o zaman $d(y, x^*) \leq d(\Lambda y, y)$ dir.

Aksi belirtilmedikçe, $A_1, \ldots, A_n$, Arşimet olmayan bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde birer Arşimet olmayan normlu üçlü cebiri ve B de $\mathbb{K}$ üzerinde bir Arşimet olmayan Banach üçlü cebiri gösterecektir. 0_k ve 0_B elemanları, sırasıyla, A_k ve B cebirlerinin sıfır elemanlarını belirtecektir.

Teorem 6.1.3. *$F_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ ile tanımlı dönüşüm $F_k(x_1, \ldots, 0_k, \ldots, x_n) = 0_B$ şartını sağlasın. Her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için,*

$$\begin{aligned} &\|F_k(x_1, \ldots, a_k + b_k, \ldots, x_n) + F_k(x_1, \ldots, a_k - b_k, \ldots, x_n) \\ &-2F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n) - 2F_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n)\| \leq \varphi_k(a_k, b_k, 0_k) \end{aligned} \tag{6.1}$$

ve

$$\begin{aligned} &\|F_k(x_1, \ldots, [a_k b_k c_k], \ldots, x_n) - [g_k(a_k) g_k(b_k) F_k(x_1, \ldots, c_k, \ldots, x_n)] \\ &-[g_k(a_k) F_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n) g_k(c_k)] - [F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n) g_k(b_k) g_k(c_k)]\| \\ \leq\ & \varphi_k(a_k, b_k, c_k) \end{aligned} \tag{6.2}$$

olacak şekilde bir $\varphi_k : A_k^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonu ve bir $g_k : A_k \to B$ kuadratik dönüşümü alınsın. Her $a_k, b_k, c_k \in A_k$ için

$$\varphi_k(t^{-1}a_k, t^{-1}b_k, t^{-1}c_k) \leq |t|^{-2} L \varphi_k(a_k, b_k, c_k) \tag{6.3}$$

olacak şekilde bir $t \in \mathbb{K}$ doğal sayısı ile bir $L \in (0,1)$ sabiti var olsun. O halde her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için,

$$\|F_k(x_1, \ldots, x_n) - \delta_k(x_1, \ldots, x_n)\| \leq |t|^{-2} L \psi(x_k) \tag{6.4}$$

$$\psi(x_k) \ := \ \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(x_k,x_k,0_k),\varphi_k(2x_k,x_k,0_k), \ldots,\varphi_k((k-1)x_k,x_k,0_k)\}. \tag{6.5}$$

olacak şekilde bir tek $\delta_k : A_1\times\cdots\times A_n \to B$ *k.ıncı kısmi üçlü kuadratik türev vardır.*

İspat: (6.3) de verilen eşitsizlikten yararlanılarak her $a_k,b_k,c_k\in A_k$ için

$$\lim_{m\to\infty}|t|^{2m}\varphi_k(t^{-m}a_k,t^{-m}b_k,t^{-m}c_k)=0 \tag{6.6}$$

elde edilir. Bu durumda m üzerinden tümevarım ile her $x_i\in A_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ve her $m\geq 0$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\ldots,mx_k,\ldots,x_n)-m^2F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\|\\ &\leq \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(x_k,x_k,0_k),\varphi_k(2x_k,x_k,0_k),\\ &\ldots,\varphi_k((m-1)x_k,x_k,0_k)\}\end{aligned} \tag{6.7}$$

olduğunu gösterelim: (6.1) de $a_k=b_k=x_k$ yazılırsa her $x_i\in A_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ için

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\ldots,2x_k,\ldots,x_n)-4F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\|\\ \leq\ & \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(x_k,x_k,0_k)\}\end{aligned} \tag{6.8}$$

olur. Böylece $m=2$ için (6.7) sağlanır. Şimdi ise (6.7) nin $m=1,2,\ldots,j$ için sağlandığını kabul edelim. (6.1) de a_k,b_k yerine sırasıyla jx_k,x_k alınırsa,

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\ldots,(j+1)x_k,\ldots,x_n)+F_k(x_1,\ldots,(j-1)x_k,\ldots,x_n)\\ &-2F_k(x_1,\ldots,jx_k,\ldots,x_n)-2F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\|\\ &\quad\leq \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(jx_k,x_k,0_k)\}\end{aligned} \tag{6.9}$$

bulunur. Her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\begin{aligned}
&F_k(x_1, \ldots, (j+1)x_k, \ldots, x_n) + F_k(x_1, \ldots, (j-1)x_k, \ldots, x_n) \\
&\qquad -2F_k(x_1, \ldots, jx_k, \ldots, x_n) - 2F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \\
&= F_k(x_1, \ldots, (j+1)x_k, \ldots, x_n) - (j+1)^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \\
&\qquad +F_k(x_1, \ldots, (j-1)x_k, \ldots, x_n) - (j-1)^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \\
&\qquad -2[F_k(x_1, \ldots, jx_k, \ldots, x_n) - j^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)] \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

olduğundan tümevarım hipotezi ve (6.9) gereği her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\begin{aligned}
&\|F_k(x_1, \ldots, (j+1)x_k, \ldots, x_n) - (j+1)^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\| \\
\leq\;& \max\{\|F_k(x_1, \ldots, (j+1)x_k, \ldots, x_n) + F_k(x_1, \ldots, (j-1)x_k, \ldots, x_n) \\
& -2F_k(x_1, \ldots, jx_k, \ldots, x_n) - 2F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\|, \\
& \|F_k(x_1, \ldots, (j-1)x_k, \ldots, x_n) - (j-1)^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\|, \\
& |2|\|j^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - F_k(x_1, \ldots, jx_k, \ldots, x_n)\|\} \qquad (6.11) \\
\leq\;& \max\{\varphi_k(0_k, 0_k, 0_k), \varphi_k(x_k, x_k, 0_k), \varphi_k(2x_k, x_k, 0_k), \ldots, \varphi_k(jx_k, x_k, 0_k)\}
\end{aligned}$$

dır. Bu ise (6.7) nin her $m \geq 2$ tamsayısı için sağlandığını gerçekler. Özel olarak, her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\|F_k(x_1, \ldots, tx_k, \ldots, x_n) - t^2 F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\| \leq \psi(x_k) \qquad (6.12)$$

dır. Yukarıdaki bağıntıda x_k yerine $t^{-1}x_k$ alınırsa, her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\|F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - t^2 F_k(x_1, \ldots, t^{-1}x_k, \ldots, x_n)\| \leq \psi(t^{-1}x_k) \qquad (6.13)$$

elde edilir.

$H_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ şeklindeki tüm fonksiyonların bir X kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned}
X = \{&H_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B,\ \ H_k(x_1, \ldots, 0_k, \ldots, x_n) = 0_B, \\
&x_i \in A_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Ayrıca X kümesi üzerinde bir ρ sayısı,

$$\begin{aligned}\rho(F_k, H_k) := \inf\{C \in (0,\infty) : \|F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) \\ -H_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \leq C\psi(x_k), \ \ \forall x_i \in A_i, \ \ i = 1,2,\ldots,n)\}\end{aligned} \tag{6.14}$$

şeklinde verilsin. O zaman ρ nun X üzerinde bir Arşimet olmayan genelleştirilmiş tam metrik olduğu açıktır ([19], [20] ve [54]). Şimdi ise bir $J : X \to X$ fonksiyonu, her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ve $H_k \in X$ için

$$J(H_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) := t^2 H_k(x_1,\ldots,t^{-1}x_k,\ldots,x_n)$$

ile tanımlansın. J nin X üzerinde kesin kontraktif bir dönüşüm olduğunu gösterelim: Eğer her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\|F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) - H_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \leq C\psi(x_k) \tag{6.15}$$

ise o zaman (6.3) gereği

$$\begin{aligned}&\|J(F_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) - J(H_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \\ = \ & |t|^2 \|F_k(x_1,\ldots,t^{-1}x_k,\ldots,x_n) - H_k(x_1,\ldots,t^{-1}x_k,\ldots,x_n)\| \\ \leq \ & C|t|^2 \psi(t^{-1}x_k) \leq CL\psi(x_k)\end{aligned} \tag{6.16}$$

olur. Dolayısıyla

$$\rho(J(F_k), J(H_k)) \leq L\rho(F_k, H_k) \qquad (F_k, H_k \in X) \tag{6.17}$$

bulunur. Böylece J dönüşümü, L Lipschitz sabiti ile birlikte bir kesin kontraktif dönüşümdür. Ayrıca (6.13) bağıntısından, her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\begin{aligned}&\|J(F_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) - F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \\ = \ & \|t^2 F_k(x_1,\ldots,t^{-1}x_k,\ldots,x_n) - F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \\ \leq \ & \psi(t^{-1}x_k) \leq |t|^{-2} L\psi(x_k)\end{aligned} \tag{6.18}$$

olduğu görülür. Bu ise $\rho(J(F_k),F_k) \leq |t|^{-2}L < \infty$ demektir. O halde Teorem 6.1.2 gereği, J nin

$$U_k = \{H_k \in X : \rho(H_k, J(F_k)) < \infty\}$$

kümesinde teklikle belli bir $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ sabit noktası vardır ve her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\begin{aligned} \delta_k(x_1,\ldots,x_n) &:= \lim_{m\to\infty} J^m(F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)) \\ &= \lim_{m\to\infty} t^{2m}(F_k(x_1,\ldots,t^{-m}x_k,\ldots,x_n)) \end{aligned} \tag{6.19}$$

dir. (6.1) ve (6.6) dan, her $a_k,b_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned} &\|\delta_k(x_1,\ldots,a_k+b_k,\ldots,x_n) + \delta_k(x_1,\ldots,a_k-b_k,\ldots,x_n) \\ &\quad -2\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n) - 2\delta_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)\| \\ = &\lim_{m\to\infty} |t|^{2m}\|F_k(x_1,\ldots,t^{-m}(a_k+b_k),\ldots,x_n) + F_k(x_1,\ldots,t^{-m}(a_k-b_k),\ldots,x_n) \\ &\quad -2F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k,\ldots,x_n) - 2F_k(x_1,\ldots,t^{-m}b_k,\ldots,x_n)\| \\ \leq &\lim_{m\to\infty} |t|^{2m} \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k), \varphi_k(t^{-m}a_k,t^{-m}b_k,0_k)\} = 0 \end{aligned}$$

olur. Üstelik, Teorem 6.1.2 kullanılarak,

$$\rho(F_k,\delta_k) \leq \rho(J(F_k),F_k)$$

bulunur. Yani δ_k, (6.4) bağıntısını sağlayan bir kısmi kuadratik dönüşümdür.

(6.2) de a_k,b_k,c_k yerine, sırasıyla, $t^{-m}a_k, t^{-m}b_k, t^{-m}c_k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &\|F_k(x_1,\ldots,[(t^{-3m})a_kb_kc_k],\ldots,x_n) \\ &\quad -[t^{-2m}g_k(a_k)t^{-2m}g_k(b_k)F_k(x_1,\ldots,t^{-m}c_k,\ldots,x_n)] \\ &\quad -[t^{-2m}g_k(a_k)F_k(x_1,\ldots,t^{-m}b_k,\ldots,x_n)t^{-2m}g_k(c_k)] \\ &\quad -[F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k,\ldots,x_n)t^{-2m}g_k(b_k)t^{-2m}g_k(c_k)]\| \\ \leq &\ \varphi_k(t^{-m}a_k,t^{-m}b_k,t^{-m}c_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned}
&\|t^{6m}F_k(x_1,\ldots,t^{-3m}[a_kb_kc_k],\ldots,x_n)\\
&\quad -t^{6m}[t^{-2m}g_k(a_k)t^{-2m}g_k(b_k)F_k(x_1,\ldots,t^{-m}c_k,\ldots,x_n)]\\
&\quad -t^{6m}[t^{-2m}g_k(a_k)F_k(x_1,\ldots,t^{-m}b_k,\ldots,x_n)t^{-2m}g_k(c_k)]\\
&\quad -t^{6m}[F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k,\ldots,x_n)t^{-2m}g_k(b_k)t^{-2m}g_k(c_k)]\|\\
&\leq \; |t|^{6m}\varphi_k(t^{-m}a_k,t^{-m}b_k,t^{-m}c_k)
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $m \to \infty$ iken limit alınırsa, (6.6) dan her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned}
&\|\lim_{m\to\infty} t^{6m}F_k(x_1,\ldots,t^{-3m}[a_kb_kc_k],\ldots,x_n)\\
&\quad -[g_k(a_k)g_k(b_k)\lim_{m\to\infty} t^{2m}F_k(x_1,\ldots,t^{-m}c_k,\ldots,x_n)]\\
&\quad -[g_k(a_k)\lim_{m\to\infty} t^{2m}F_k(x_1,\ldots,t^{-m}b_k,\ldots,x_n)g_k(c_k)]\\
&\quad -[\lim_{m\to\infty} t^{2m}F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k,\ldots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]\|\\
&\leq \; \lim_{m\to\infty}|t|^{6m}\varphi_k(t^{-m}a_k,t^{-m}b_k,t^{-m}c_k) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. g_k bir kuadratik dönüşüm olduğundan, her $a_k, b_k, c_k \in A_k$ ve $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned}
&\delta_k(x_1,\ldots,[a_kb_kc_k],\ldots,x_n) = [g_k(a_k)g_k(b_k)\delta_k(x_1,\ldots,c_k,\ldots,x_n)]\\
&+[g_k(a_k)\delta_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)g_k(c_k)] + [\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]
\end{aligned}$$

dır. Böylece $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ dönüşümü, (6.4) bağıntısını sağlayan bir k. kısmi üçlü kuadratik türevdir. □

Aşağıdaki sonuçlarda, $p > 2$ bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}_p$ p-sel sayılar cismini gösterecektir.

Teorem 6.1.3 ün ışığında, Arşimet olmayan Banach üçlü cebirlerde tanımlı k. kısmi üçlü kuadratik türevlerin Hyers-Ulam-Rassias stabilitesi ile ilgili bir sonuç şu şekilde verilebilir:

Sonuç 6.1.4. *$A_1,\dots,A_n$, $\|.\|$ normu ile $\mathbb{Q}_p$ üzerinde Arşimet olmayan üçlü normlu cebirler ve $(B,\|.\|_B)$, $\mathbb{Q}_p$ üzerinde bir Arşimet olmayan Banach üçlü cebir olsun. $F_k : A_1\times\cdots\times A_n \to B$ bir fonksiyon ve $g_k : A_k \to B$ bir kuadratik dönüşüm olmak üzere her $a_k,b_k,c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ ve uygun bir $\theta > 0$ ve $r \geq 0$, $r < 2$ için*

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\dots,a_k+b_k,\dots,x_n)+F_k(x_1,\dots,a_k-b_k,\dots,x_n) \\ &-2F_k(x_1,\dots,a_k,\dots,x_n)-2F_k(x_1,\dots,b_k,\dots,x_n)\|_B \leq \theta(\|a_k\|^r+\|b_k\|^r)\end{aligned} \tag{6.20}$$

ve

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\dots,[a_kb_kc_k],\dots,x_n)-[g_k(a_k)g_k(b_k)F_k(x_1,\dots,c_k,\dots,x_n)] \\ &-[g_k(a_k)F_k(x_1,\dots,b_k,\dots,x_n)g_k(c_k)]-[F_k(x_1,\dots,a_k,\dots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]\|_B \\ \leq\ &\theta(\|a_k\|^r+\|b_k\|^r+\|c_k\|^r)\end{aligned} \tag{6.21}$$

şartları sağlansın. O halde her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ için

$$\|F_k(x_1,\dots,x_n)-\delta_k(x_1,\dots,x_n)\|_B \leq 2\theta p^r\|x_k\|^r$$

olacak şekilde bir tek $\delta_k : A_1\times\cdots\times A_n \to B$ k.ıncı kısmi üçlü kuadratik türev vardır.

İspat: (6.20) den, $F_k(x_1,\dots,0_k,\dots,x_n) = 0_B$ elde edilir. Her $a_k,b_k,c_k \in A_k$ için,

$$\varphi_k(a_k,b_k,c_k) := \theta(\|a_k\|^r+\|b_k\|^r+\|c_k\|^r) \tag{6.22}$$

olsun. (6.22) de a_k,b_k,c_k yerine, sırasıyla, $p^{-1}a_k,p^{-1}b_k,p^{-1}c_k$ yazılırsa, Tanım 2.8.2(iii) gereği $|p^{-1}| = p$ olduğundan her $a_k,b_k,c_k \in A_k$ için,

$$\begin{aligned}\varphi_k(p^{-1}a_k,p^{-1}b_k,p^{-1}c_k) &= \theta(\|p^{-1}a_k\|^r+\|p^{-1}b_k\|^r+\|p^{-1}c_k\|^r) \\ &= \theta(|p^{-1}|^r\|a_k\|^r+|p^{-1}|^r\|b_k\|^r+|p^{-1}|^r\|c_k\|^r) \\ &= \theta p^r(\|a_k\|^r+\|b_k\|^r+\|c_k\|^r) \\ &= p^r\varphi_k(a_k,b_k,c_k)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her $x_k \in A_k$ için,

$$\begin{aligned}\psi(x_k) &= \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(x_k,x_k,0_k),\varphi_k(2x_k,x_k,0_k),\\ &\quad \ldots,\varphi_k((p-1)x_k,x_k,0_k)\} = 2\theta\|x_k\|^r\end{aligned}$$

olur. Bu durumda Teorem 6.1.3 de, $L := p^{r-2} < 1$ yazılırsa istenen elde edilir. □

Teorem 6.1.3 e benzer olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 6.1.5. *$F_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ ile tanımlı dönüşüm $F_k(x_1,\ldots,0_k,\ldots,x_n) = 0_B$ şartını sağlasın. Her $a_k,b_k,c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için,*

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\ldots,a_k+b_k,\ldots,x_n)+F_k(x_1,\ldots,a_k-b_k,\ldots,x_n)\\ &-2F_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)-2F_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)\| \le \varphi_k(a_k,b_k,0_k)\end{aligned} \tag{6.23}$$

ve

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1,\ldots,[a_kb_kc_k],\ldots,x_n)-[g_k(a_k)g_k(b_k)F_k(x_1,\ldots,c_k,\ldots,x_n)]\\ &-[g_k(a_k)F_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)g_k(c_k)]-[F_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]\|\\ \le\ &\varphi_k(a_k,b_k,c_k)\end{aligned} \tag{6.24}$$

olacak şekilde bir $\varphi_k : A_k^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonu ve bir $g_k : A_k \to B$ kuadratik dönüşümü alınsın. Her $a_k,b_k,c_k \in A_k$ için

$$\varphi_k(ta_k,tb_k,tc_k) \le |t|^2 L\varphi_k(a_k,b_k,c_k) \tag{6.25}$$

olacak şekilde bir $t \in \mathbb{K}$ doğal sayısı ile bir $0 < L < 1$ sabiti var olsun. O halde her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için,

$$\|F_k(x_1,\ldots,x_n)-\delta_k(x_1,\ldots,x_n)\| \le |t|^{-2}L\psi(x_k) \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}\psi(x_k) &:= \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(x_k,x_k,0_k),\varphi_k(2x_k,x_k,0_k),\\ &\quad \ldots,\varphi_k((k-1)x_k,x_k,0_k)\}\end{aligned} \tag{6.27}$$

olacak şekilde bir tek $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ k.ıncı kısmi üçlü kuadratik türev vardır.

İspat: Teorem 6.1.3 den hareketle, her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ve her $m \geq 0$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}
&\|F_k(x_1,\ldots,mx_k,\ldots,x_n) - m^2F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \\
&\leq \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k),\varphi_k(x_k,x_k,0_k),\varphi_k(2x_k,x_k,0_k), \\
&\ldots,\varphi_k((m-1)x_k,x_k,0_k)\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Özel olarak, her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\|F_k(x_1,\ldots,tx_k,\ldots,x_n) - t^2F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \leq \psi(x_k)$$

bağıntısı sağlanır.

$$\begin{aligned}
X := \{&H_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B,\;\; H_k(x_1,\ldots,0_k,\ldots,x_n) = 0_B, \\
&x_i \in A_i,\;\; i = 1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}$$

olsun ve X kümesi üzerinde bir ρ sayısı şu şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned}
\rho(F_k,H_k) := \inf\{&C \in (0,\infty) : \|F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) \\
&-H_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \leq C\psi(x_k),\;\; \forall x_i \in A_i,\;\; i = 1,2,\ldots,n)\}.
\end{aligned}$$

Bu durumda ρ, X üzerinde bir Arşimet olmayan genelleştirilmiş tam metriktir. Şimdi ise bir $J : X \to X$ fonksiyonu, her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ve $H_k \in X$ için

$$J(H_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) := t^{-2}H_k(x_1,\ldots,tx_k,\ldots,x_n)$$

ile tanımlansın. J nin X üzerinde kesin kontraktif bir dönüşüm olduğunu gösterelim: Eğer her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\|F_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) - H_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \leq C\psi(x_k)$$

ise o zaman

$$\begin{aligned}
&\|J(F_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) - J(H_k)(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\| \\
&= \;\; |t|^{-2}\|F_k(x_1,\ldots,tx_k,\ldots,x_n) - H_k(x_1,\ldots,tx_k,\ldots,x_n)\| \\
&\leq \;\; C|t|^{-2}\psi(tx_k) \leq CL\psi(x_k)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\rho(J(F_k), J(H_k)) \leq L\rho(F_k, H_k) \qquad (F_k, H_k \in X)$$

bulunur. Böylece J dönüşümü, L Lipschitz sabiti ile birlikte bir kesin kontraktif dönüşümdür. Ayrıca her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\begin{aligned}
&\|J(F_k)(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\| \\
= \quad &\|t^{-2}F_k(x_1, \ldots, tx_k, \ldots, x_n) - F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\| \\
= \quad &|t|^{-2}\|F_k(x_1, \ldots, tx_k, \ldots, x_n) - t^2F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\| \\
\leq \quad &|t|^{-2}\psi(x_k)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise $\rho(J(F_k), F_k) \leq (1/|t|^2) < \infty$ demektir. O halde Teorem 6.1.2 gereği, J nin

$$U_k = \{H_k \in X : \rho(H_k, J(F_k)) < \infty\}$$

kümesinde teklikle belli bir $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ sabit noktası vardır ve her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\begin{aligned}
\delta_k(x_1, \ldots, x_n) \quad &:= \quad \lim_{m\to\infty} J^m(F_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)) \\
&= \quad \lim_{m\to\infty} t^{-2m}(F_k(x_1, \ldots, t^m x_k, \ldots, x_n))
\end{aligned}$$

dir. Böylece her $a_k, b_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned}
&\|\delta_k(x_1, \ldots, a_k + b_k, \ldots, x_n) + \delta_k(x_1, \ldots, a_k - b_k, \ldots, x_n) \\
&\quad -2\delta_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n) - 2\delta_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n)\| \\
= \quad &\lim_{m\to\infty} |t|^{-2m}\|F_k(x_1, \ldots, t^m(a_k + b_k), \ldots, x_n) + F_k(x_1, \ldots, t^m(a_k - b_k), \ldots, x_n) \\
&\quad -2F_k(x_1, \ldots, t^m a_k, \ldots, x_n) - 2F_k(x_1, \ldots, t^m b_k, \ldots, x_n)\| \\
\leq \quad &\lim_{m\to\infty} |t|^{-2m} \max\{\varphi_k(0_k, 0_k, 0_k), \varphi_k(t^m a_k, t^m b_k, 0_k)\} = 0
\end{aligned}$$

olur. O halde δ_k kısmi kuadratiktir. Teorem 6.1.2 gereği,

$$\rho(F_k, \delta_k) \leq \rho(J(F_k), F_k)$$

bulunur. Yani δ_k, (6.26) bağıntısını sağlayan bir kısmi kuadratik dönüşümdür. İspatın geri kalan kısmı ise, Teorem 6.1.3 e benzer şekilde yapılır. $\square$

Aşağıdaki sonuç ise $r > 2$ alındığında Sonuç 6.1.4 e benzer bir ifade verir.

Sonuç 6.1.6. *$A_1, \ldots, A_n$, $\|.\|$ normu ile $\mathbb{Q}_p$ üzerinde Arşimet olmayan üçlü normlu cebirler ve $(B, \|.\|_B)$, $\mathbb{Q}_p$ üzerinde bir Arşimet olmayan Banach üçlü cebir olsun. $F_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ bir fonksiyon ve $g_k : A_k \to B$ bir kuadratik dönüşüm olmak üzere her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ ve uygun bir $\theta > 0$ ve $r \geq 0$, $r > 2$ için*

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1, \ldots, a_k + b_k, \ldots, x_n) + F_k(x_1, \ldots, a_k - b_k, \ldots, x_n) \\ &-2F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n) - 2F_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n)\|_B \leq \theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r)\end{aligned} \tag{6.28}$$

ve

$$\begin{aligned}&\|F_k(x_1, \ldots, [a_k b_k c_k], \ldots, x_n) - [g_k(a_k) g_k(b_k) F_k(x_1, \ldots, c_k, \ldots, x_n)] \\ &-[g_k(a_k) F_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n) g_k(c_k)] - [F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n) g_k(b_k) g_k(c_k)]\|_B \\ \leq\ & \theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r + \|c_k\|^r)\end{aligned} \tag{6.29}$$

şartları sağlansın. O halde her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\|F_k(x_1, \ldots, x_n) - \delta_k(x_1, \ldots, x_n)\|_B \leq 2\theta p^{-r} \|x_k\|^r$$

olacak şekilde bir tek $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ k.ıncı kısmi üçlü kuadratik türev vardır.

İspat: (6.28) den, $F_k(x_1, \ldots, 0_k, \ldots, x_n) = 0_B$ dir. Her $a_k, b_k, c_k \in A_k$ için,

$$\varphi_k(a_k, b_k, c_k) := \theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r + \|c_k\|^r) \tag{6.30}$$

olsun. (6.30) da a_k, b_k, c_k yerine, sırasıyla, pa_k, pb_k, pc_k yazılırsa, Tanım 2.8.2(iii) gereği $|p| = p^{-1}$ olduğundan her $a_k, b_k, c_k \in A_k$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(pa_k, pb_k, pc_k) &= \theta(\|pa_k\|^r + \|pb_k\|^r + \|pc_k\|^r) \\
&= \theta|p|^r(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r + \|c_k\|^r) \\
&= \theta p^{-r}(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r + \|c_k\|^r) \\
&= p^{-r}\varphi_k(a_k, b_k, c_k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her $x_k \in A_k$ için,

$$\begin{aligned}
\psi(x_k) &= \max\{\varphi_k(0_k, 0_k, 0_k), \varphi_k(x_k, x_k, 0_k), \varphi_k(2x_k, x_k, 0_k), \\
&\quad \ldots, \varphi_k((p-1)x_k, x_k, 0_k)\} = 2\theta\|x_k\|^r
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda Teorem 6.1.5 de, $L := p^{2-r} < 1$ yazılırsa istenen sonuca varılır. □

Arşimet olmayan Banach üçlü cebirlerde k.ıncı kısmi üçlü kuadratik türevlerin süper stabilitesi ile ilgili sonuç ise şu şekildedir:

Sonuç 6.1.7. *r, s, t ve θ reel sayıları için $r + s + t < -2$ ve $\theta \in (0, \infty)$ olsun. $A_1, \ldots, A_n$, $\|.\|$ normu ile $\mathbb{Q}_p$ üzerinde Arşimet olmayan üçlü normlu cebirler ve $(B, \|.\|_B)$, $\mathbb{Q}_p$ üzerinde bir Arşimet olmayan Banach üçlü cebir olsun. $F_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ bir fonksiyon ve $g_k : A_k \to B$ bir kuadratik dönüşüm olmak üzere her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için,*

$$\begin{aligned}
&\|F_k(x_1, \ldots, a_k + b_k, \ldots, x_n) + F_k(x_1, \ldots, a_k - b_k, \ldots, x_n) \\
&-2F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n) - 2F_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n)\|_B \leq \theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\|F_k(x_1, \ldots, [a_k b_k c_k], \ldots, x_n) - [g_k(a_k)g_k(b_k)F_k(x_1, \ldots, c_k, \ldots, x_n)] \\
&-[g_k(a_k)F_k(x_1, \ldots, b_k, \ldots, x_n)g_k(c_k)] - [F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]\|_B \\
\leq\ & \theta(\|a_k\|^r\|b_k\|^s\|c_k\|^t)
\end{aligned}$$

şartları sağlansın. O halde F_k bir k.ıncı kısmi üçlü kuadratik türevdir.

İspat: Teorem 6.1.3 de her $a_k, b_k, c_k \in A_k$ için,

$$\varphi_k(a_k, b_k, c_k) := \theta(\|a_k\|^r \|b_k\|^s \|c_k\|^t)$$

yazılırsa istenen elde edilir. □

Teorem 6.1.5 den hareketle, $r+s+t > -2$ şartı için yukarıda verilene benzer bir sonuç daha elde edilebilir.

6.2. k. Kısmi Üçlü Kuadratik $*$-Türevlerin Stabilitesi

Bir önceki bölümde elde edilenlere benzer sonuçlar, Arşimet olmayan C^*-üçlü cebirlerde tanımlı k. kısmi üçlü kuadratik $*$-türevler için de verilecektir.

Teorem 6.2.1. *$A_1, \ldots, A_n$, $\mathbb{C}$ üzerinde Arşimet olmayan $*$-normlu üçlü cebirler ve B bir Arşimet olmayan C^*-üçlü cebir olsun. $F_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ ile tanımlı dönüşüm $F_k(x_1, \ldots, 0_k, \ldots, x_n) = 0_B$ şartını sağlasın. Her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için, (6.1), (6.2) ve*

$$\|F_k(x_1, \ldots, a_k^*, \ldots, x_n) - (F_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n))^*\| \leq \varphi_k(a_k, 0_k, 0_k) \tag{6.31}$$

olacak şekilde bir $\varphi_k : A_k^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonu ve $g_k : A_k \to B$ kuadratik dönüşümü var olsun. Eğer (6.3) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $t \in \mathbb{K}$ doğal sayısı ve bir $0 < L < 1$ sabiti varsa o zaman (6.4) şartı sağlanacak şekilde bir tek $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ k. kısmi üçlü kuadratik $*$-türev vardır.

İspat: Teorem 6.1.3 ün ispatında olduğu gibi, her $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için

$$\delta_k(x_1, \ldots, x_n) := \lim_{m\to\infty} t^{2m}(F_k(x_1, \ldots, t^{-m}x_k, \ldots, x_n)) \tag{6.32}$$

ile tanımlanan ve (6.4) şartını sağlayan teklikle belli bir $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ k. kısmi üçlü kuadratik türev vardır. Bu durumda δ_k nın, her $a_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\delta_k(x_1, \ldots, a_k^*, \ldots, x_n) = (\delta_k(x_1, \ldots, a_k, \ldots, x_n))^*$$

koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. O halde (6.32) den, her $a_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ için

$$\begin{aligned}
&\|\delta_k(x_1,\ldots,a_k^*,\ldots,x_n) - (\delta_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n))^*\| \\
= &\lim_{m\to\infty} |t|^{2m} \|F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k^*,\ldots,x_n) - (F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k,\ldots,x_n))^*\| \\
= &\lim_{m\to\infty} |t|^{2m} \|F_k(x_1,\ldots,(t^{-m}a_k)^*,\ldots,x_n) - (F_k(x_1,\ldots,t^{-m}a_k,\ldots,x_n))^*\| \\
\leq &\lim_{m\to\infty} |t|^{2m} \max\{\varphi_k(0_k,0_k,0_k), \varphi_k(t^{-m}a_k,0_k,0_k)\} = 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ dönüşümü, (6.4) bağıntısını sağlayan bir k. kısmi üçlü kuadratik $*$-türevdir. □

Sonuç 6.2.2. *$A_1,\ldots,A_n$, $\|.\|$ normu ile $\mathbb{Q}_p$ üzerinde Arşimet olmayan $*$-normlu üçlü cebirler ve $(B,\|.\|_B)$, $\mathbb{Q}_p$ üzerinde bir Arşimet olmayan C^*-üçlü cebir olsun. $F_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ bir fonksiyon ve $g_k : A_k \to B$ bir kuadratik dönüşüm olmak üzere her $a_k, b_k, c_k \in A_k$, $x_i \in A_i$ $(i \neq k)$ ve uygun bir $\theta > 0$ ve $r \geq 0$, $r < 2$ için,*

$$\begin{aligned}
&\|F_k(x_1,\ldots,a_k+b_k,\ldots,x_n) + F_k(x_1,\ldots,a_k-b_k,\ldots,x_n) \\
&-2F_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n) - 2F_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)\|_B \leq \theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|F_k(x_1,\ldots,[a_kb_kc_k],\ldots,x_n) - [g_k(a_k)g_k(b_k)F_k(x_1,\ldots,c_k,\ldots,x_n)] \\
&-[g_k(a_k)F_k(x_1,\ldots,b_k,\ldots,x_n)g_k(c_k)] - [F_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n)g_k(b_k)g_k(c_k)]\|_B \\
\leq\ &\theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r + \|c_k\|^r)
\end{aligned}$$

ve

$$\|F_k(x_1,\ldots,a_k^*,\ldots,x_n) - (F_k(x_1,\ldots,a_k,\ldots,x_n))^*\|_B \leq \theta\|a_k\|^r$$

şartları sağlansın. O halde her $x_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\|F_k(x_1,\ldots,x_n) - \delta_k(x_1,\ldots,x_n)\|_B \leq 2\theta p^r \|x_k\|^r$$

olacak şekilde bir tek $\delta_k : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ *k.ıncı kısmi üçlü kuadratik* $*$*-türev vardır.*

İspat: Teorem 6.2.1 de her $a_k, b_k, c_k \in A_k$ için,

$$\varphi_k(a_k, b_k, c_k) := \theta(\|a_k\|^r + \|b_k\|^r + \|c_k\|^r)$$

ve $L := p^{r-2} < 1$ yazılırsa istenen sonuca ulaşılır. $\square$

Benzer bir sonuç, $r > 2$ alınarak elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Amini, M. 2004. Module amenability for semigroup algebras, **Semigroup Forum** 69: 243-254.

[2] Amini, M., Bodaghi, A. 2010. Module amenability and weak module amenability for second dual of Banach algebras, **Chamchuri J. Math.** 2(1): 57-71.

[3] Amini, M., Ebrahimi Bagha, D. 2005. Weak module amenability for semigroup algebras, **Semigroup Forum** 71: 18-26.

[4] Amyari, M. 2008. Stability of generalized Lie (σ, τ)-derivations, **Tamsui Oxf. J. Math. Sci.** 24(4): 389-399.

[5] Amyari, M., Rahbarnia, F., Sadeghi, Gh. 2007. Some results on stability of extended derivations, **J. Math. Anal. Appl.** 329: 753-758.

[6] Arslan, B., Inceboz, H. 2015. A generalization of the n-weak module amenability of Banach algebras, **Semigroup Forum** 91(3): 625-640.

[7] Arslan, B., Inceboz, H., Guven, A. 2015. Nearly partial ternary quadratic *-derivations, **Kyungpook Math. J.** 55(4): 893-907.

[8] Bade, W.G., Curtis Jr., P.C., Dales, H.G. 1987. Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras, **Proc. Lond. Math. Soc.** 3: 359-377.

[9] Baker, J., Lawrence, J., Zorzitto, F. 1979. The stability of the equation $f(x+y) = f(x)f(y)$, **Proc. Amer. Math. Soc.** 74: 242-246.

[10] Bodaghi, A. 2010. Module (φ, ψ)-amenability of Banach algebras, **Arch. Math. (Brno)** 46(4): 227-235.

[11] Bodaghi, A. 2012. Module Amenability of Banach Algebras, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrucken.

[12] Bodaghi, A. 2014. Generalized notion of weak module amenability, **Hacettepe J. Math. Stat.** 43(1): 85-95.

[13] Bodaghi, A., Amini, M., Babaee, R. 2011. Module derivations into iterated duals of Banach algebras, **Proc. Roman. Acad. Ser. A** 12: 277-284.

[14] Bodaghi, A., Gordji, M.E., Medghalchi, A.R. 2009. A generalization of the weak amenability of Banach algebras, **Banach J. Math. Anal.** 3: 131-142.

[15] Bodaghi, A., Jabbari, A. 2015. n-weak module amenability of triangular Banach algebras, **Math. Slovaca** 65(3): 645-666.

[16] Bodaghi, A., Shojaee, B. 2014. A generalized notion of n-weak amenability, **Math. Bohem.** 139(1): 99-112.

[17] Bonsall, F.F., Duncan, J. 1973. Complete Normed Algebras, Springer Verlag, Berlin.

[18] Brešar, M. 1991. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivation, **Glasgow Math. J.** 33: 89-93.

[19] C*ă*dariu, L., Radu, V. 2003. Fixed points and the stability of Jensens functional equation, **J. Inequal. Pure Appl. Math.** 4(1): 1-15.

[20] C*ă*dariu, L., Radu, V. 2004. On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach, **Grazer Math. Ber.** 346: 43-52.

[21] Cho, Y.J., Saadati, R., Vahidi, J. 2012. Approximation of homomorphisms and derivations on non-Archimedean Lie C^*-algebras via fixed point method, **Discrete Dynamics in Nature and Society** 2012: Article ID 373904, 1-9.

[22] Cohn, D.L. 1980. Measure Theory, Birkh*äuser*.

[23] Curtis Jr., P.C., Loy, R.J. 1989. The structure of amenable Banach algebras, **J. Lond. Math. Soc.** 40(2): 89-104.

[24] Cusack, J.M. 1975. Jordan derivations on rings, **Proc. Amer. Math. Soc.** 53: 321-324.

[25] Dales, H.G. 2001. Banach Algebras and Automatic Continuity, London Mathematical Society Monographs, 926p., Oxford.

[26] Dales, H.G., Aiena, P., Eschmeier, J., Laursen, K., Willis, G.A. 2003. Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis, Cambridge Univ. Press, New York.

[27] Dales, H.G., Ghahramani, F., Gronbaek, N. 1998. Derivations into iterated duals of Banach algebras, **Studia Math.** 128: 19-54.

[28] Day, M.M. 1949. Means on semigroups and groups, **Bull. Amer. Math. Soc.** 55: 1053-1055.

[29] Diaz, J.B., Margolis, B. 1968. A fixed point theorem of the alternative for contractions on the generalized complete metric space, **Bull. Amer. Math. Soc.** 126: 305-309.

[30] Duncan, J., Namioka, I. 1978. Amenability of inverse semigroups and their semigroup algebras, **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.** 80: 309-321.

[31] Duncan, J., Paterson, A.L.T. 1985. C^*-algebras of inverse semigroups, **Proc. R. Soc. Edinb. Soc.** 28: 41-58.

[32] Eshaghi, M., Savadkouhi, M.B., Bidkham, M., Park, C., Lee, J.R. 2010. Nearly partial derivations on Banach ternary algebras, **J. Math. Stat.** 6(4): 454-461.

[33] Găvruta, P. 1994. A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings, **J. Math. Anal. Appl.** 184: 431-436.

[34] Gajda, Z. 1991. On stability of additive mappings, **Internat. J. Math. Sci.** 14: 431-434.

[35] Ghahramani, H. 2014. $2n$-weak module amenability of semigroup algebras, **arXiv:1403.1026v1:** 1-7.

[36] Gordji, M.E., Ghobadipour, N. 2010. Hyers-Ulam-Aoki-Rassias stability and Ulam-Gavruta-Rassias stability of quadratic homomorphisms and quadratic derivations on Banach algebras, Functional Equations, Difference Inequalities and Ulam Stability Notions (F.U.N.) Nova Publishers, Series: Mathematics Research Developments, 1st quarter, Chapter Book.

[37] Gordji, M.E., Najati, A., Ebadian, A. 2011. Stability and superstability of Jordan homomorphisms and Jordan derivations on Banach algebras and C*-algebras: a fixed point approach, **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.** 31(5): 1911-1922.

[38] Gouvea, F. Q. 1997. p-adic Numbers. Springer-Verlag, Berlin.

[39] Gronbaek, N. 1989. A characterization of weakly amenable Banach algebras, **Studia Math.** XCIV: 149-162.

[40] Hensel, K. 1897. Uber eine neue Begrundung der Theorie der algebraischen Zahlen, **Jahresber. Deutsch. Math. Verein** 6: 83-88.

[41] Herstein, I.N. 1969. Topics in Ring Theory, University of Chicago Press, Chicago.

[42] Howie, J.M. 1976. An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, London.

[43] Hungerford, T.W. 1974. Algebra, Holf, Rinehart and Wiston, Inc., New York, Chicago.

[44] Hyers, D.H. 1941. On the stability of the linear functional equation, **Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.** 27: 222-224.

[45] Javadian, A., Gordji, M.E., Savadkouhi, M.B. 2011. Approximately partial ternary quadratic derivations on Banach ternary algebras, **J. Nonlinear Sci. Appl.** 4(1): 60-69.

[46] Johnson, B.E. 1972. Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras, **J. Amer. Math. Soc.** 94: 685-698.

[47] Johnson, B.E. 1972. Cohomology in Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc., no. 127, U.S.A.

[48] Johnson, B.E. 1991. Weak amenability of group algebras, **Bull. Lond. Math. Soc.** 23: 281-284.

[49] Jun, K.-W., Kim, H.-M. 2007. Approximate derivations mapping into the radicals of Banach algebras, **Taiwanese J. Math.** 11(1): 277-288.

[50] Jung, S.-M. 2011. Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis, New York.

[51] Kaniuth, E. 2009. A Course in Commutative Banach Algebras, Graduate Texts in Mathematics, ISBN:937-0-387-72475-1, Springer Science Business Media LLC.

[52] Loomis, L.H. 1953. An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, von Nostrand, New York.

[53] Margolis, B., Diaz, J.B. 1968. A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, **Bull. Amer. Math. Soc.** 74: 305-309.

[54] Mirmostafaee, A.K. 2010. Hyers-Ulam stability of cubic mappings in non-Archimedean normed spaces, **Kyungpook Math. J.** 50: 315-327.

[55] Moslehian, M.S. 2006. Hyers-Ulam-Rassias stability of generalized derivations, **Int. J. Math. Math. Sci.** Art. ID 93942: 1-8.

[56] Munn, W.D. 1961. A class of irreducible matrix representations of an arbitrary inverse semigroup, **Proc. Glasgow Math. Assoc.** 5: 41-48.

[57] Murphi, G.J. 1990. C^*-algebras and Operator Theory, Academic Press, San Diago Calif., MR 91m:46084.

[58] Najati, A., Rassias, Th.M. 2009. Stability of homomorphisms and (σ,τ)-derivations, **Appl. Anal. Discrete Math.** 3(2): 264-281.

[59] Park, C., Gordji, M.E., Cho, Y.J. 2012. Stability and superstability of generalized quadratic ternary derivations on non-Archimedean ternary Banach algebras: a fixed point approach, **Fixed Point Theory and Appl.** 2012(97): 1-8.

[60] Park, C., Najati, A. 2007. Homomorphisms and derivations in C^*-algebras, **Abstr. Appl. Anal.** Art. ID 80630: 1-12.

[61] Park, C., Shagholi, S., Javadian, A., Savadkouhi, M.B., Gordji, M.E. 2014. Quadratic derivations on non-Archimedean Banach algebras, **J. Comput. Anal. Appl.** 16(3): 565-570.

[62] Paterson, A.L.T. 1988. Amenability, Providence, Rhode Island, American Math. Soc.

[63] Paterson, A.L.T. 1999. Groupoids, Inverse Semigroups, and Their Operator Algebras, Birkh*ä*user, Boston.

[64] Pourmahmood-Aghbaba, H. 2012. A note on an equivalence relation on an inverse semigroup, **Semigroup Forum** 84: 200-202.

[65] Pourmahmood-Aghbaba, H. 2010. (Super) module amenability, module topological centre and semigroup algebras, **Semigroup Forum** 81(2): 344-356.

[66] Rassias, Th.M. 1978. On the stability of the linear mapping in Banach spaces, **Proc. Amer. Math. Soc.** 72: 297-300.

[67] Rassias, Th.M., Semrl, P. 1992. On the behaviour of mappings which do not satisfy Hyers-Ulam stability, **Proc. Amer. Math. Soc.** 114: 989-993.

[68] Rezavand, R., Amini, M., Sattari, M.H., Ebrahimi Bagha, D. 2008. Module Arens regularity for semigroup algebras, **Semigroup Forum** 77: 300-305.

[69] Rieffel, M.A. 1967. Induced Banach representations of Banach algebras and locally compact groups, **J. Func. Analysis** 1: 443-491.

[70] Rudin, W., 1991. Functional Analysis, McGraw-Hill Inc., Singapore.

[71] Runde, V. 2002. Lectures on Amenability, Volume 1774 of Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag.

[72] *Š*emrl, P. 1994. The functional equation of multiplicative derivation is superstable on standard operator algebras, **Integ. Equ. Oper. Theory** 18: 118-122.

[73] Singer, I.M., Wermer, J. 1955. Derivations on commutative normed algebras, **Math. Ann.** 129: 260-264.

[74] Sutherland, W.A. 2009. Introduction to Metric and Topological Spaces, Oxford Science Publications, Clarendon Press.

[75] Thomas, M.P. 1988. The image of a derivation is contained in the radical, **Ann. of Math.** 128: 435-460.

[76] Ulam, S.M. 1960. Problems in Modern Mathematics, Chapter VI, Science Editions, Wiley, New York.

[77] Von Neumann, J. 1929. Zur allgemeinen Theorie des Mabes, **Fund. Math.** 13: 73-116.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Berna ARSLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Aydın, 04.05.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI :

Arslan, B., Inceboz, H. 2014. A characterization of generalized Jordan derivations on Banach algebras, Period. Math. Hung., 69(2): 139-148.

Arslan, B., Inceboz, H. 2015. A generalization of the n-weak module amenability of Banach algebras, Semigroup Forum, 91(3): 625-640.

-Diğer :

Inceboz, H., Arslan, B. 2015. Prime Lie rings of generalized derivations of commutative rings, Palestine J. Math., 4(2): 391-398.

Inceboz, H., Arslan, B. 2016. On homological properties of some module derivations on Banach algebras, Bol. Soc. Paran. Mat., 34(2): 169-188.

Arslan, B., Inceboz, H., Guven, A. 2015. Nearly partial ternary quadratic *-derivations, Kyungpook Math. J., 55(4): 893-907.

b) Bildiriler

-Uluslararası :

Inceboz, H., Arslan, B. Weak module (σ,τ)-amenability of triangular Banach algebras of order three, International Conference on Recent

Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016), 19-23 May 2016, Bodrum-Mugla.

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

Arslan, B., Banach Cebirlerinde Türevler, Lisansüstü Tez Projesi (Doktora), Araştırmacı, 2014-

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Adnan Menderes Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
(2007 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi : byorganci@adu.edu.tr
Tarih :