T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2017-YL-003

RICCI SOLİTONLAR VE CONCURRENT VEKTÖR ALANLARI

Seçkin GÜNSEN

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Leyla ONAT

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Seçkin GÜNSEN tarafından hazırlanan "Ricci Solitonlar ve Concurrent Vektör Alanları" başlıklı tez, 20.01.2017 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Doç. Dr. İnci EGE	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Doç. Dr. Leyla ONAT	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI	ÇOMÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

20.01.2017

Seçkin GÜNSEN

ÖZET

RICCI SOLİTONLAR VE CONCURRENT VEKTÖR ALANLARI

Seçkin GÜNSEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Leyla ONAT
2017, 55 sayfa

Bu çalışma temel olarak iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diferensiyel geometride sık sık kullanılan tensörler ile ilgili işlemler, diferensiyel operatörler, tensör türevi, Ricci tensörü gibi kavramlar örnekleriyle verilmiştir. Ayrıca, diferensiyel geometride geniş bir yer tutan manifold teorisinin önemli kavramlarından biri olan alt manifoldlar ile ilgili temel eşitlikler ve çarpım manifoldunun özellikleri yine birinci bölümde incelenmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, 2015 yılında Bang-Yen Chen ve Sharief Deshmukh tarafından yapılan "Ricci solitonlar ve concurrent vektör alanları" [7] isimli makale detaylı olarak incelenerek bir manifold üzerinde concurrent vektör alanı, Ricci solitonlar, warped çarpım manifoldu, alt manifoldun Ricci soliton olması gibi kavramları içeren teorem ve önermeler ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Ricci soliton, concurrent vektör alanı, alt manifold, umbilik alt manifold, Lie türevi, tensör türevi, Ricci tensörü.

ABSTRACT

RICCI SOLITONS AND CONCURRENT VECTOR FIELDS

Seçkin GÜNSEN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Leyla ONAT
2017, 55 pages

This study is based on two chapters. In the first chapter, mainly used concepts of differential geometry is introduced with examples such that tensor fields, differential operators, tensor derivation, Ricci tensor, etc. Moreover, fundemental equations of the submanifold theory in Riemannian Geometry, which has a main role in differential geometry, and product manifolds are examined in this chapter.

In the second chapter, "Ricci solitons and concurrent vector fields" [7] has been studied and examined which was given by Bang-Yen Chen and Sharief Deshmukh in 2015. In particular, proofs of the theorems and propositions have been given with details about concurrent vector fields, warped product manifolds, submanifolds admitting Ricci solitons.

Key Words: Ricci soliton, concurrent vector fields, submanifold, umbilical submanifold, Lie derivation, tensor derivation, Ricci tensor.

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca, değerli bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, uygun bir çalışma ortamı yaratarak diferensiyel geometri alanında temelden yetişmem için elinden geleni yapan ve beni sürekli çalışmaya teşvik eden danışmanım sayın Doç. Dr. Leyla ONAT'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, zorlandığım dönemlerde benden desteğini esirgemeyen, tez sürecinde daha iyiye ulaşmamı sağlamak için çabalayan arkadaşım Araş. Gör. Dilek AÇIKGÖZ KAYA'ya (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Lisans hayatımda her konuda yanımda olan, bilim insanı olma yolunda adım atmam için beni cesaretlendiren sayın Doç. Dr. Uğur MADRAN'a (American University of Middle East, Öğretim Üyesi) teşekkürlerimi sunarım.

Yaşamım boyunca aldığım tüm kararlarda desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma, bana olan güvenleri ve sabırları için ayrıca teşekkür ederim.

Seçkin GÜNSEN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI v
ÖZET vii
ABSTRACT ix
ÖNSÖZ xi
SİMGELER DİZİNİ xv

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 2

2.1. Tensörler 2
2.1.1. Tensör Alanları 3
2.1.2. Temel İzomorfizmalar 8
2.1.3. Tensör Türevi 11
2.1.4. Tip Değiştirme ve Metrik Daraltma Operatörleri 19
2.1.5. Gradiyent, Divergens, Hessiyan ve Laplasiyan Operatörleri 24
2.2. Alt Manifoldlar 29
2.2.1. Tanjant ve Normaller 30
2.2.2. Alt Manifoldlar Üzerinde Temel Eşitlikler 30
2.3. Çarpım Manifoldları 32
2.4. Ricci Solitonlar 34

3. CONCURRENT VEKTÖR ALANLARI VE SINIFLANDIRILMASI . . 35

3.1. Concurrent Vektör Alanları 35
3.2. Concurrent Vektör Alanına Sahip Ricci Solitonlar 36
3.3. Ricci Soliton olan Riemann Alt Manifoldları 43
3.4. Teorem 3.3.1 in Bazı Uygulamaları 47

KAYNAKLAR 53

ÖZGEÇMİŞ 55

SİMGELER DİZİNİ

M^n	n boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$\mathfrak{X}(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanları kümesi
$\mathfrak{X}^*(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün 1-formlar kümesi
$\mathfrak{F}(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün fonksiyonlar kümesi
$\mathfrak{T}_s^r(M)$	M manifoldu üzerindeki $(r,s)-$tipindeki tensör alanları kümesi
$\mathcal{D}$	Tensör türevi
X,Y,V,W	M manifoldu üzerinde vektör alanları
θ,ω	M manifoldu üzerinde 1-formlar
D	M manifoldu üzerinde konneksiyon
∇	M manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu
h	M manifoldu üzerinde ikinci temel form
A	M manifoldu üzerinde şekil operatörü
H	M manifoldu üzerinde ortalama eğrilik vektörü
∇f	f fonksiyonun gradiyenti
Hess f	f fonksiyonunun hessiyanı
div A	A tensör alanının divergensi
Δf	f fonksiyonun laplacianı
Ric	M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü
K	M manifoldunun kesitsel eğriliği
S	M manifoldunun skalar eğriliği

1. GİRİŞ

Einstein manifoldları, Ricci solitonların özel hali olması nedeni ile günümüze kadar konunun hem fiziksel hem de geometrik özelliklerinin incelendiği pek çok çalışma yapılmıştır.

(M^n, g) bir Riemann manifoldu ve (M^n, g, v, λ), potansiyel vektör alanı v olan bir Ricci soliton olmak üzere, Bang-Yen Chen ve Sharief Deshmukh 2015 yılında yaptığı çalışmada, Ricci solitonların potansiyel vektör alanlarının concurrent olması için gerek ve yeter koşulun, (M^n, g, v, λ) Ricci solitonunun shirinking Ricci soliton olması ve F^m boyutlu Einstein manifoldu olmak üzere, M Ricci solitonunun $I \times_s F$ warped çarpım manifolduna izometrik olması olduğunu göstermiştir [7].

Ayrıca, alt manifold teorisinden yararlanılarak, M^n manifoldunun N^m Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olması durumunda, $v \in \mathfrak{X}(N)$ concurrent vektör alanının teğet ve dik bileşenleri sırasıyla v^T ve $v^\perp$ olmak üzere, (M^n, g, v^T, λ) Ricci solitonunun Einstein olması için gerek ve yeter koşulun M^n alt manifoldunun $v^\perp-$umbilik olduğu ispatlanarak her (M^n, g, v^T, λ) totally umbilik alt manifoldun Einstein manifoldu olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Potansiyel vektör alanı bir fonksiyonun gradiyenti olan bir Ricci solitona gradiyent Ricci soliton denir. Gradiyent Ricci solitonlar ve alt manifoldlar ile ilgili olarak M^n alt manifoldu üzerinde her (M^n, g, v^T, λ) Ricci solitonunun potansiyel fonksiyonu $\phi = \frac{1}{2}\tilde{g}(v, v)$ olan gradiyent Ricci soliton olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez içeriğinde bulunan ve diferensiyel geometride kullanılan temel tanım ve teoremler ayrıntıları ile verilecektir.

2.1. Tensörler

M, $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\varphi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, M manifoldunun bir koordinat sistemi olsun. M üzerinde tanımlı bütün diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi $\mathfrak{F}(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{F}(M)$ kümesi, fonksiyonlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile değişmeli halkadır. M manifoldunun her bir p noktasına, p noktasında bir teğet vektörü karşılık getiren fonksiyona, M üzerinde bir *"vektör alanı"* denir. M üzerinde bir vektör alanı

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i$$

biçimindedir. X vektör alanının bileşenleri diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise X vektör alanı diferensiyellenebilir vektör alanıdır.

M manifoldu üzerindeki bütün diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{X}(M)$ kümesi, $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

M manifoldunun bir $\mathcal{U} \subset M$ açığının her bir q noktasına, q noktasında bir kotanjant vektörü karşılık getiren fonksiyona, M üzerinde bir *"1-form"* denir. M üzerinde bir 1-form

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i dx^i$$

biçimindedir. θ 1-formunun bileşenleri diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise θ 1-formu diferensiyellenebilirdir.

M manifoldu üzerindeki bütün diferensiyellenebilir 1-formların kümesi $\mathfrak{X}^*(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{X}^*(M)$ kümesi, $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

2.1.1. Tensör Alanları

Tanım 2.1.1. [1] V, bir K halkası üzerinde modül ve V^*, V modülünden K halkasına tanımlı $K-$lineer fonksiyonların kümesi (duali) olsun. $r,\ s \geq 0$ tamsayıları için (ikisi aynı anda sıfır olmamak koşuluyla),

$$A : (V^*)^r \times V^s \to K$$

$K-$çoklineer fonksiyonuna M manifoldu üzerinde (r,s) tipinde bir *"tensör"* denir.

Tanım 2.1.2. [1] $r,s \geq 0$ tamsayıları için

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$$

$\mathfrak{F}(M)-$çoklineer fonksiyonuna M manifoldu üzerinde (r,s) tipinde bir *"tensör alanı"* denir.
A tensör alanının φ koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = A(dx^{i_1},\ldots,dx^{i_r},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_s})$$

eşitliğiyle tanımlanan M üzerinde reel değerli fonksiyonlardır.

Bileşenleri diferensiyellebilir fonksiyonlar olan tensör alanları diferensiyellebilir tensör alanlarıdır. (r,s) tipinden bütün diferensiyellebilir tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{T}^r_s(M)$ ile gösterilir.

Özel olarak,

$$\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$$

dir. $r \geq 1$ olmak üzere $(r,0)$ tipinde tensör alanları *kontravaryant*, $s \geq 0$ olmak üzere $(0,s)$ tipinde tensör alanları ise *kovaryant* olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.3. $E(\theta,X) = \theta X$ eşitliğiyle tanımlanan
$E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ değerlendirme fonksiyonu, M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanıdır. O halde, E değerlendirme fonksiyonunun M

manifoldu üzerinde $\mathfrak{F}(M)-$ çoklineer olduğunun gösterilmesi gerekir.

Her $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$E(\theta_1 + \theta_2, X) = (\theta_1 + \theta_2)X = \theta_1 X + \theta_2 X = E(\theta_1, X) + E(\theta_2, X)$ ve

$E(f\theta, X) = (f\theta)X = f(\theta X) = fE(\theta, X)$

eşitlikleri sağlandığından, E fonksiyonu birinci bileşene göre $\mathfrak{F}(M)-$lineerdir.

Benzer şekilde her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$, $p \in M$ için,

$E(\theta, X_1 + X_2) = \theta(X_1 + X_2) = \theta X_1 + \theta X_2 = E(\theta, X_1) + E(\theta, X_2)$ ve

$E(\theta, fX)(p) = \theta_p(fX)_p = \theta_p f(p) X_p = f(p)\theta_p X_p = (f(\theta X))(p)$ olduğundan,

$E(\theta, fX) = fE(\theta, X)$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, E fonksiyonu ikinci bileşene göre $\mathfrak{F}(M)-$lineerdir. Sonuç olarak E değerlendirme fonksiyonu $\mathfrak{F}(M)-$çoklineerdir ve M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanıdır.

Örnek 2.1.4. $\omega \neq 0$, 1-form olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $F(X,Y) = X(\omega Y)$ eşitliğiyle $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu tanımlansın. $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$F(X, fY) = X\omega(fY) = X(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fX(\omega Y) = (Xf)\omega Y + fF(X,Y)$$

olduğundan, F fonksiyonu ikinci bileşene göre $\mathfrak{F}(M)-$lineer değildir. Bu yüzden F fonksiyonu bir tensör alanı değildir.

$A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olmak üzere, A tensör alanı M manifoldunun her p noktasında bir değer alır ve bu değer A_p ile gösterilir.

$1 \leq i \leq r$ için, $\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$ olmak üzere, $\theta^i|_p = \alpha^i$ ve $1 \leq j \leq r$ için, $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere, $X_j|_p = x^j$ olsun. Bu durumda, $1 \leq i \leq r$ için, $\alpha^i \in T_p(M)^*$ ve $1 \leq j \leq r$ için, $x_j \in T_p(M)$ dir.

$A_p(\alpha_1, \ldots, \alpha^r, x_1, \ldots, x_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p)$ eşitliğiyle tanımlanan $A_p : (T_p(M)^*)^r \times (T_p(M))^s \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A tensör alanının p noktasındaki değeridir.

Tanım 2.1.5. [1] M manifoldu üzerinde iki tensörün toplamı,

$A,B \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için,

$$A+B : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M),$$

$$\begin{aligned}(A+B)(\theta^1+\omega^1,\ldots,\theta^r+\omega^r,X_1+Y_1,\ldots,X_s+Y_s) &= A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)\\ &\quad +B(\omega^1,\ldots,\omega^r,Y_1,\ldots,Y_s)\end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Tanım 2.1.6. [1] M manifoldu üzerinde tensör çarpımı, $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$ için

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to \mathfrak{F}(M),$$

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(\theta^1,\ldots,\theta^{r+r'},X_1,\ldots,X_{s+s'}) &= A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)\\ &\quad B(\theta^{r+1},\ldots,\theta^{r+r'},X_{s+1},\ldots,X_{s+s'})\end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır. $A\otimes B$, $(r+r', s+s')$ tipinde bir tensör alanıdır.

Örnek 2.1.7. Bir koordinat komşuluğu üzerinde $dx^1 \otimes dx^2$ ve $dx^2 \otimes dx^1$ tensör alanları incelenirse,

$$\begin{aligned}(dx^1\otimes dx^2)(\partial_1,\partial_2) &= dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1,\\ (dx^2\otimes dx^1)(\partial_1,\partial_2) &= dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0\end{aligned}$$

olduğu görülür. $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$ olduğundan tensör çarpımı değişme özelliğini sağlamaz. Ancak $f \in \mathfrak{F}(M)$ için değişme özelliği sağlanır:

$$A\otimes f = f\otimes A = fA$$

Tensör toplamı ve tensör çarpımı işlemleri ile birlikte, $\mathfrak{T}_s^r(M)$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı, $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

$A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ tensör alanı bileşenleri cinsinden,

$$A = \sum A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\ \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

eşitliği ile ifade edilir.

Özel olarak, $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$, bir $\mathfrak{F}(M)-$çoklineer fonksiyonu verilsin.

Her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\bar{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_s))$$

eşitliğiyle tanımlanan $\bar{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu incelenirse,
Her $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\bar{A}(\theta_1 + \theta_2, X_1, \ldots, X_s) &= (\theta_1 + \theta_2)(A(X_1, \ldots, X_s)) \\
&= \theta_1(A(X_1, \ldots, X_s)) + \theta_2(A(X_1, \ldots, X_s)) \\
&= \bar{A}(\theta_1, X_1, \ldots, X_s)) + \bar{A}(\theta_2, X_1, \ldots, X_s)
\end{aligned}$$

ve her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\bar{A}(f\theta, X_1, \ldots, X_s) = (f\theta)(A(X_1, \ldots, X_s)) = f\bar{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s)$$

eşitlikleri sağlandığından $\bar{A}$ fonksiyonunun birinci bileşene göre $\mathfrak{F}(M)-$lineer olduğu görülür. $1 \leq j \leq s$ olmak üzere,
Her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_i, X_{j_1}, X_{j_2} \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\bar{A}(\theta, X_1, \ldots, X_{j_1} + X_{j_2}, \ldots, X_s) &= \theta(A(X_1, \ldots, X_{j_1} + X_{j_2}, \ldots, X_s)) \\
&= \theta\left(A(X_1, \ldots, X_{j_1}, \ldots, X_s) + A(X_1, \ldots, X_{j_2}, \ldots, X_s)\right) \\
&= \theta(A(X_1, \ldots, X_{j_1}, \ldots, X_s)) \\
&\qquad + \theta(A(X_1, \ldots, X_{j_2}, \ldots, X_s)) \\
&= \bar{A}(\theta, X_1, \ldots, X_{j_1}, \ldots, X_s) \\
&\qquad + \bar{A}(\theta, X_1, \ldots, X_{j_2}, \ldots, X_s)
\end{aligned}$$

ve her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\bar{A}(\theta, X_1, \ldots, fX_j, \ldots, X_s) &= \theta(A(X_1, \ldots, fX_j, \ldots, X_s)) \\
&= \theta(fA(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_s)) \\
&= f\bar{A}(\theta, X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_s)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $\bar{A}$ dönüşümü $\mathfrak{F}(M)-$çoklineerdir, $\bar{A} \in \mathfrak{T}_s^1(M)$ dir.

$$A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) = \sum_j A^j_{i_1 \cdots i_s} \partial_j$$

ve $\bar{A}$ tensör alanının bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\bar{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) &= dx^j(A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s})) \\
&= \sum_k A^k_{i_1 \cdots i_s} dx^j(\partial_k) \\
&= A^j_{i_1 \cdots i_s}
\end{aligned}$$

biçimindedir. $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{F}(M)-$çoklineer fonksiyonunun bileşenleri, $\bar{A}$ tensör alanın bileşenleri ile aynı olduğundan A dönüşümünün M manifoldu üzerinde $(1,s)$ tipinde tensör alanı olarak düşünülebileceği görülür.

Tanım 2.1.8. [1] M, n boyutlu bir manifold olmak üzere, M manifoldunun her p noktasına

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

simetrik, bilineer, pozitif tanımlı fonksiyonunu karşılık getiren g dönüşümüne M üzerinde *"Riemann metrik tensör alanı"* denir. g, M manifoldu üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensör alanıdır. Bu metrik ile birlikte, M manifolduna ya da (M,g) ikilisine *"Riemann manifoldu"* denir. g metrik tensör alanı, bileşenleri $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ olmak üzere,

$$g = \sum g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \tag{2.1.1}$$

dir. M manifoldu üzerinde g metrik tensör alanına karşılık gelen $g = [g_{ij}]$ matrisinin tersi, $g^{-1} = [g^{ij}]$ ile gösterilecektir.

2.1.2. Temel İzomorfizmalar

M manifoldu üzerinde 1-formların kümesi $\mathfrak{X}^*(M)$ ile $(0,1)$ tipindeki tensör alanlarının kümesi izormorftur.

Her $X \in \mathfrak{X}(M), [\varphi(\theta)](X) = \theta(X)$ eşitliğiyle tanımlanan $\varphi : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{T}_1^0(M)$ dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)-$lineer bir izomorfizma olduğu gösterilecektir.

Her $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$ için,

$$\begin{aligned}
[\varphi(\theta_1+\theta_2)](X) &= (\theta_1+\theta_2)(X) \\
&= \theta_1(X)+\theta_2(X) \\
&= [\varphi(\theta_1)](X)+[\varphi(\theta_2)](X) \\
&= [\varphi(\theta_1)+\varphi(\theta_2)](X)
\end{aligned}$$

ve her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
[\varphi(f\theta)](X) &= (f\theta)(X) \\
&= f\theta(X) \\
&= [f\varphi(\theta)](X)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından φ dönüşümü $\mathfrak{F}(M)-$ lineerdir.

$\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$ olsun. Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$[\varphi(\theta_1)](X) = [\varphi(\theta_2)](X) \Rightarrow \theta_1(X) = \theta_2(X)$ elde edilir.

Özel olarak, $X = \partial_i$ alınırsa, $p \in M$ için,

$\theta_1|_p(\partial_i|_p) = \theta_2|_p(\partial_i|_p)$ olduğundan $\theta_1 = \theta_2$ dir.

Ayrıca, boy $\mathfrak{X}^*(M) =$ boy $\mathfrak{T}_1^0(M)$ olduğundan φ dönüşümü örtendir. Buradan,

$$\mathfrak{X}^*(M) \cong \mathfrak{T}_1^0(M)$$

olur.

Şimdi, M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ ile $(1,0)$ tipindeki tensör alanlarının kümesinin izomorf olduğu gösterilecektir. Bunun için, her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M), \phi(\theta) = V(\theta)$ eşitliğiyle tanımlı $\phi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{T}_0^1(M)$ dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)-$lineer izomorfizma olması gerekir. Her $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
[\phi(V_1+V_2)](\theta) &= (V_1+V_2)(\theta) \\
&= \theta(V_1+V_2) \\
&= \theta(V_1)+\theta(V_2) \\
&= V_1(\theta)+V_2(\theta) \\
&= (\phi(V_1))(\theta)+(\phi(V_2))(\theta) \\
&= [\phi(V_1)+\phi(V_2)](\theta)
\end{aligned}$$

ve her $V \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
[\phi(fV)](\theta) &= (fV)(\theta) \\
&= \theta(fV) \\
&= f\theta(V) \\
&= f(V)(\theta) \\
&= [f\phi(V)](\theta)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından ϕ dönüşümü $\mathfrak{F}(M)-$lineerdir.

$\phi(V) \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ olsun. Her $p \in M$ için, $\phi(V)|_p : T_p^*(M) \to \mathbb{R}$ bir lineer dönüşümdür. $(T_p^*(M))^*$ uzayının $T_p(M)$ uzayına izomorf olduğu bilindiğinden, $\phi(V)|_p \in T_p(M)$ dir. O halde, $\phi(V) \in \mathfrak{X}(M)$ bulunur. Böylece $[\phi(V)](\theta) = V(\theta)$ olacak şekilde, $V \in \mathfrak{X}(M)$ var olduğundan ϕ dönüşümü örtendir.

Ayrıca, boy $\mathfrak{X}(M) =$ boy $\mathfrak{T}_0^1(M)$ olduğundan ϕ dönüşümü bire birdir. Buradan,

$$\mathfrak{X}(M) \cong \mathfrak{T}_0^1(M)$$

dir.

Önerme 2.1.9. [1] *(M,g) Riemann manifoldu ve $V \in \mathfrak{X}(M)$ için, V^*,*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir 1-form olsun. Bu durumda, $\varphi(V) = V^*$ eşitliğiyle tanımlı $\varphi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ fonksiyonu $\mathfrak{F}(M)-$lineer izomorfizmadır.

İspat: V^*, 1-form olduğundan φ dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)-$lineer olduğu kolaylıkla görülür.

Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$ olsun. İç çarpım fonksiyonunun lineerliğinden, $\langle V - W, X \rangle = 0$ dır. Buradan, $V = W$ elde edilir.

Şimdi, her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için $\varphi(V) = \theta$ olacak şekilde bir $V \in \mathfrak{X}(M)$ olduğu gösterilecektir.

$\theta = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i dx^i$ ve $V = \sum\limits_{i,j} g^{ij} \theta_i \partial_j$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\langle V, \partial_k \rangle &= \langle \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \partial_j, \partial_k \rangle \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i g_{jk} \\
&= \sum_{i} \delta_k^i \theta_i \\
&= \theta_k \\
&= \theta(\partial_k)
\end{aligned}$$

olur. Yani, $\langle V, X \rangle = \theta(X)$ olacak şekilde bir V vektör alanı vardır. Buradan, θ 1-formuna karşılık gelen V vektör alanının bileşenlerinin θ_k fonksiyonları olduğu görülür. Kısaca, θ 1-formuna karşılık gelen V vektör alanının bileşenleri $V^i = g^{ij}\theta_j$ dir. Benzer şekilde, V vektör alanına karşılık gelen θ 1-formunun bileşenleri θ_i olmak üzere $\theta_i = g_{ij}V^j$ dir. $\square$

2.1.3. Tensör Türevi

Bu kısımda tensör cebirinde sık kullanılan bazı diferensiyel operatörler verilecektir.

Tanım 2.1.10. [1] Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için $\mathbf{C}(X \otimes \theta) = \theta X$ eşitliğiyle tanımlanan $\mathbf{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonuna "$(1,1)$ *daraltma*" denir.
$A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ için,

$$\mathbf{C}(A) = \sum_i A_i^i$$

dir.

Tanım 2.1.11. [1] $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için,

$$\begin{aligned} &(C_j^i A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) \\ &\qquad = \mathbf{C}\{A(\theta^1, \ldots, \theta^{i-1}, \cdot, \theta^{i+1}, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_{j-1}, \cdot, X_{j+1}, \ldots, X_s)\} \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanan $C_j^i : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ dönüşümüne A tensör alanının "(i,j) *daraltması*" denir. $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için C_i^j daraltması, $(r-1, s-1)$ tipinde bir tensör alanıdır.

Örnek 2.1.12. $A \in \mathfrak{T}_3^2(M)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Bu durumda $C_3^1(A)$

$$(C_3^1 A)(\theta, X, Y) = \mathbf{C}\{A(\cdot, \theta, X, Y, \cdot)\}$$

eşitliğiyle verilen $(1,2)$ tipinde tensör alanıdır. Bu tensör alanının bileşenleri,

$$\begin{aligned} (C_3^1 A)_{ij}^k &= (C_3^1 A)(dx^k, \partial_i, \partial_j) \\ &= \mathbf{C}\{A(\cdot, dx^k, \partial_i, \partial_j, \cdot)\} \\ &= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m) \\ &= \sum_m A_{ijm}^{mk} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.13. [1] Aşağıdaki iki önermeyi sağlayacak biçimdeki

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M) \quad (r,s \geq 0)$$

$\mathbb{R}-$lineer fonksiyonuna M manifoldu üzerinde (r,s) tipinde bir *"tensör türevi"* denir:

1) Her $A,B \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için,

$$\mathcal{D}(A \otimes B) = (\mathcal{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{D}B). \tag{2.1.2}$$

2) Her $\mathbf{C}$ daraltması ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için,

$$\mathcal{D}(\mathbf{C}A) = \mathbf{C}(\mathcal{D}A). \tag{2.1.3}$$

Özel olarak, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için, $\mathcal{D}f = Df$ dir.

Teorem 2.1.14. [1] *$\mathcal{D}$, M üzerinde bir tensör türevi ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olsun.*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)] \quad = \quad & (\mathcal{D}A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\ & + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\ldots,\mathcal{D}\theta^i,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\ & + \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,\mathcal{D}X_j,\ldots,X_s) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Kolaylık olması amacı ile, teoremin ispatı $r = s = 1$ için yapılacaktır. $\{x^1,\ldots,x^n\}$, M manifoldu üzerinde bir koordinat sistemi olsun. Buna göre, $A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ tensör alanının bileşenleri $A_j^i = A(dx^i,\partial_j)$ olmak üzere,

$$A = \sum_{i,j} A_j^i \, \partial_i \otimes dx^j$$

biçimindedir. Her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için, $\theta = \sum\limits_k \theta(\partial_k)dx^k$ ve $X = \sum\limits_l X(dx^l)\partial_l$ olsun. $\overline{C}$ herhangi iki daraltma operatörünün bileşkesi olmak üzere

$$A(\theta,X) = \overline{C}(A \otimes \theta \otimes X)$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilecektir. Burada $A \otimes \theta \otimes X$, $(2,2)$ tipinde tensör alanıdır.

Eşitliğin sol yanı için,

$$A(\theta,X) = \sum_{i,j} A^i_j \theta_i X^j$$

dir. Diğer taraftan,

$$A \otimes \theta \otimes X = \sum_{i,j,k,l} A^i_j \theta_k X^l \; \partial_i \otimes \partial_l \otimes dx^j \otimes dx^k$$

ve $\overline{C} = \mathbf{C} \circ C^1_2$ için,

$$\overline{C}(A \otimes \theta \otimes X) = \mathbf{C}(C^1_2(A \otimes \theta \otimes X)) \text{ dir.}$$

Kısaca, $B = A \otimes \theta \otimes X$ denirse,

$$C^1_2(B) = \sum_{j,l,m} B^{ml}_{jm} \; \partial_l \otimes dx^j$$

elde edilir. Burada $C^1_2(B) \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ dir. $C^1_2(B)$ tensör alanına $\mathbf{C}$ daraltması uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(C^1_2(B)) &= \mathbf{C}(\sum_{j,l,m} B^{ml}_{jm} \; \partial_l \otimes dx^j) \\
&= \sum_{j,l,m} B^{ml}_{jm} \; \mathbf{C}(\partial_l \otimes dx^j) \\
&= \sum_{j,l,m} B^{ml}_{jm} \; dx^j(\partial_l) \\
&= \sum_{m,p} B^{mp}_{pm} \\
&= \sum_{m,p} B(dx^m, dx^p, \partial_p, \partial_m) \\
&= \sum_{m,p} (A \otimes \theta \otimes X)(dx^m, dx^p, \partial_p, \partial_m) \\
&= \sum_{m,p} A(dx^m, \partial_p)\theta(,\partial_m)X(\partial_p) \\
&= \sum_{m,p} A^m_p \theta_m X^p
\end{aligned}$$

olur.

Buradan, $A(\theta, X) = \overline{C}(A \otimes \theta \otimes X)$ bulunur. Şimdi, $\mathcal{D}$ tensör türevinin tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A(\theta,X)) &= \mathcal{D}(\overline{C}(A\otimes\theta\otimes X)) \\
&= \overline{C}(\mathcal{D}(A\otimes\theta\otimes X)) \\
&= \overline{C}(\mathcal{D}A\otimes\theta\otimes X)+\overline{C}(A\otimes\mathcal{D}\theta\otimes X)+\overline{C}(A\otimes\theta\otimes\mathcal{D}X) \\
&= \mathcal{D}A(\theta,X)+A(\mathcal{D}\theta,X)+A(\theta,\mathcal{D}X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.1.4) eşitliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. □

Bu teoremin sonucu olarak, $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için,

$$(\mathcal{D}\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta X) - \theta(\mathcal{D}X)$$

elde edilir.

Sonuç 2.1.15. [1] *$\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$ tensör türevleri olsun. Bu tensör türevleri, $\mathfrak{F}(M)$ kümesindeki fonksiyonlarda ve $\mathfrak{X}(M)$ kümesindeki vektör alanlarında aynı değerleri alıyorsa, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ dir.*

Aşağıdaki teorem ile bir tensör türevinin fonksiyonlardaki ve vektör alanlarındaki değeri belli ise tensör türevinin tek olarak belli olduğu söylenebilir.

Teorem 2.1.16. [1] *$V \in \mathfrak{X}(M)$ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ verilsin. Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$\delta(fX) = (Vf)X + f(\delta X) \tag{2.1.5}$$

olacak biçimde $\mathbb{R}-$lineer bir $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ fonksiyonu verildiğinde, M üzerinde bir tensör türevi, $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}_0^0 = V : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M) \tag{2.1.6}$$

ve

$$\mathcal{D}_0^1 = \delta \tag{2.1.7}$$

olacak biçimde tek olarak vardır.

İspat: V ile δ verilsin. Bu durumda $\mathcal{D}_0^0$ ile $\mathcal{D}_0^1$ verilmiş demektir. $\mathcal{D}$ bir tensör türevi olacağından, her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için, $\mathcal{D}$ tensör türevinin 1-formlardaki değeri

$$(\mathcal{D}\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta X) - \theta(\mathcal{D}X) = V(\theta X) - \theta(\delta X)$$

eşitliğiyle belirlidir. Şimdi $\mathcal{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ olduğu göstermek için, $\mathcal{D}\theta$ dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)-$lineer olduğu gösterilecektir.
Her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}\theta)(X+Y) &= V(\theta(X+Y)) - \theta(\delta(X+Y)) \\
&= V(\theta X + \theta Y) - \theta(\delta X + \delta Y) \\
&= V(\theta X) + V(\theta Y) - \theta(\delta X) - \theta(\delta Y) \\
&= V(\theta X) - \theta(\delta X) + V(\theta Y) - \theta(\delta Y) \\
&= (\mathcal{D}\theta)(X) + (\mathcal{D}\theta)(Y)
\end{aligned}$$

ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}\theta)(fX) &= V(\theta(fX)) - \theta(\delta(fX)) \\
&= V(f(\theta X)) - \theta[(Vf)X + f(\delta X)] \\
&= (Vf)(\theta X) + fV(\theta X) - (Vf)(\theta X) - f\theta(\delta X) \\
&= f[V(\theta X) - \theta(\delta X)] \\
&= f(\mathcal{D}\theta)(X)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan, $\mathcal{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ dir.

$A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ $(r+s \geq 2)$ için, (2.1.6) ve (2.1.7) eşitlikleri (2.1.4) eşitliğinde kullanıldığında çarpım kuralı

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) &= V(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathcal{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \mathcal{D}X_j, \ldots, X_s)
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

eşitliğine dönüşür. Benzer şekilde $\mathcal{D}A$ dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)-$çoklineer olduğu (2.1.8) eşitliği kullanılarak gösterilebilir. Buradan $\mathcal{D}A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ dir. Burada $\mathcal{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$ $\mathbb{R}-$lineer operatördür.

Şimdi, $\mathcal{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$ $\mathbb{R}-$lineer dönüşümünün tensör türevi tanımındaki (2.1.2) ve (2.1.3) eşitliklerini sağladığı gösterilecektir.

Kolay olması amacıyla, $A, B \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}(A\otimes B))(\theta^1,\theta^2,X_1,X_2) &= V((A\otimes B)(\theta^1,\theta^2,X_1,X_2)) \\
&\quad -[(A\otimes B)(\mathcal{D}\theta^1,\theta^2,X_1,X_2)+(A\otimes B)(\theta^1,\mathcal{D}\theta^2,X_1,X_2)] \\
&\quad -[(A\otimes B)(\theta^1,\theta^2,\mathcal{D}X_1,X_2)+(A\otimes B)(\theta^1,\theta^2,X_1,\mathcal{D}X_2)] \\
&= V(A(\theta^1,X_1)B(\theta^2,X_2)) \\
&\quad -[(A(\mathcal{D}\theta^1,X_1)B(\theta^2,X_2)+(A(\theta^1,X_1)B(\mathcal{D}\theta^2,X_2)] \\
&\quad -[(A(\theta^1,\mathcal{D}X_1)B(\theta^2,X_2)+(A(\theta^1,X_1)B(\theta^2,\mathcal{D}X_2)] \\
&= V(A(\theta^1,X_1))B(\theta^2,X_2)+A(\theta^1,X_1)V(B(\theta^2,X_2)) \\
&\quad -A(\mathcal{D}\theta^1,X_1)B(\theta^2,X_2)-A(\theta^1,X_1)B(\mathcal{D}\theta^2,X_2) \\
&\quad -A(\theta^1,\mathcal{D}X_1)B(\theta^2,X_2)-A(\theta^1,X_1)B(\theta^2,\mathcal{D}X_2) \\
&= (\mathcal{D}A)(\theta^1,X_1)B(\theta^2,X_2)+A(\theta^1,X_1)(\mathcal{D}B)(\theta^2,X_2) \\
&= (\mathcal{D}A\otimes B)(\theta^1,\theta^2,X_1,X_2)+(A\otimes\mathcal{D}B)(\theta^1,\theta^2,X_1,X_2) \\
&= ((\mathcal{D}A\otimes B)+(A\otimes\mathcal{D}B))(\theta^1,\theta^2,X_1,X_2)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\mathcal{D}(A\otimes B) = \mathcal{D}A\otimes B + A\otimes\mathcal{D}B$ eşitliği elde edilir.

Son olarak $\mathcal{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M)$ dönüşümünün daraltma operatörü ile değişmeli olduğunu gösterilecektir.

Her $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(\mathcal{D}\mathbf{C})(X\otimes\theta) = \mathcal{D}(\mathbf{C}(X\otimes\theta)) = \mathcal{D}(\theta X) = V(\theta X)$$

olur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{C}\mathcal{D})(\theta \otimes X) &= \mathbf{C}(\mathcal{D}(X \otimes \theta) \\
&= \mathbf{C}((\mathcal{D}X) \otimes \theta + X \otimes (\mathcal{D}\theta)) \\
&= \mathbf{C}[(\mathcal{D}X) \otimes \theta] + \mathbf{C}[X \otimes (\mathcal{D}\theta)] \\
&= \theta(\mathcal{D}X) + (\mathcal{D}\theta)(X) \\
&= \theta(\delta X) + V(\theta X) - \theta(\delta X) \\
&= V(\theta X)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\mathbf{C}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathbf{C}$ eşitliği sağlanır. □

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.17. [1] $V \in \mathfrak{X}(M)$ olsun.

$$\text{Her } f \in \mathfrak{F}(M) \text{ için } L_V(f) = Vf,$$

$$\text{her } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ için } L_V(X) = [V, X]$$

eşitlikleriyle belirli L_V tensör türevine, V vektör alanına göre *"Lie türevi"* denir.

$$L_V(fX) = [V, fX] = VfX + f[V, X] = VfX + fL_VX$$

olduğundan L_V, Teorem 2.1.16 daki δ operatörünün özelliklerini sağlar.

Tanım 2.1.18. [1] $\{x^1, \ldots, x^n\}$, M^n manifoldunun doğal koordinat sistemi olsun. V ve W, M^n üzerinde vektör alanları olmak üzere, $W = \sum W^i \partial_i$ için,

$$D_V W = \sum V(W^i)\partial_i$$

eşitliğiyle belirli $D_V W$ vektör alanına W vektör alanının V vektör alanına göre *"kovaryant türevi"* denir.

Tanım 2.1.19. [1] M bir Riemann manifoldu olmak üzere, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için aşağıdaki önermeleri sağlayan bir $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $D(V, W) = D_V W$ fonksiyonuna M manifoldu üzerinde "*doğal konneksiyon (bağlantı)*" denir:

(D1) $D_V W$, W vektör alanına göre $\mathbb{R}-$lineerdir.

(D2) $D_V W$, V vektör alanına göre $\mathfrak{F}(M)-$lineerdir.

(D3) $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.20. [1] M bir Riemann manifoldu olmak üzere; $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için,

(D4) $[V,W] = D_V W - D_W V$

(D5) $X\langle V,W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$

önermelerini sağlayan bir tek D konneksiyonuna M manifoldunun "*Levi-Civita konneksiyonu*" denir.

Tanım 2.1.21. [1] A, M üzerinde (r,s) tipinde bir tensör alanı olsun.

Her $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ için,

$$(DA)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

eşitliğiyle tanımlı $(r, s+1)$ tipinde DA tensör alanına, A tensör alanının *"kovaryant diferensiyeli"* denir.

Özel olarak $r = s = 0$ için f fonksiyonunun kovaryant diferensiyeli,

her $V \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$(Df)(V) = D_V f = Vf = df(V)$$

olur.

2.1.4. Tip Değiştirme ve Metrik Daraltma Operatörleri

Tanım 2.1.22. [1] $1 \leq a \leq r$ ve $1 \leq b \leq s$ olsun. $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve X_b^*, $X_b \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanına metrikçe denk olan 1-form olmak üzere,

$$\begin{aligned} & (\downarrow_b^a A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{b-1}, X_b, X_{b+1}, \ldots, X_{s+1}) \\ = \; & \underleftarrow{A(\theta^1, \ldots, \underbrace{X_b^*}_{a.\text{ncı}}, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{b-1}, X_{b+1}, \ldots, X_{s+1})} \\ & b \text{ nci yerdeki bileşene metrikçe denk olan bileşen } a \text{ ncı yere gelir} \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\downarrow_b^a : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(M)$ fonksiyonuna *"indeks azaltma operatörü"* denir.

Örnek 2.1.23. $A \in \mathfrak{T}_2^2(M)$ olsun. Bu durumda $B = \downarrow_2^1 A$, $B(\theta, X, Y, Z) = A(Y^*, \theta, X, Z)$ eşitliğiyle belirli olan, M manifoldu üzerinde $(1,3)$ tipinde bir tensör alanıdır. M manifoldunun doğal koordinat sistemi $\{x^1, \ldots, x^n\}$ ve bu koordinat sisteminin duali $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ olmak üzere, B tensör alanının bu koordinat sistemlerine göre bileşenleri,

$$\begin{aligned} B_{jkl}^i &= B(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= A(\partial_k^*, \partial_i, \partial_j, \partial_l) \\ &= A(\sum_m g_{km} dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l) \\ &= \sum_m g_{km} A_{jl}^{mi} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.24. [1] $1 \leq a \leq r$ ve $1 \leq b \leq s$ olsun. $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve X_b, $\theta^a \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formuna metrikçe denk olan vektör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} & (\uparrow_b^a A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+1}, X_1, \ldots, X_{b-1}, X_{b+1}, \ldots, X_s) \\ = \; & \underrightarrow{A(\theta^1, \ldots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \ldots, \theta^{r+1}, X_1, \ldots, X_{b-1}, X_b, X_{b+1}, \ldots, X_s)} \\ & a \text{ ncı yerdeki bileşene metrikçe denk olan bileşen } b \text{ nci yere gelir} \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\uparrow_b^a$: $\mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(M)$ fonksiyonuna *"indeks artırma operatörü"* denir.

Örnek 2.1.25. $B \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ olsun. Bu durumda $A = \uparrow_2^1 B$, $A(Y^*, \theta, X, Z) = B(\theta, X, Y, Z)$ eşitliğiyle belirli olan, M manifoldu üzerinde $(2,2)$ tipinde bir tensör alanıdır. M manifoldunun doğal koordinat sistemi $\{x^1, \ldots, x^n\}$, bu koordinat sisteminin duali $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ olmak üzere, A tensör alanının bu koordinat sistemlerine göre bileşenleri,

$$A_{kl}^{ij} = \sum_{i,m} g^{im} B_{kml}^{j}$$

biçimindedir.

Ayrıca, daha önce $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ $s-$lineer dönüşümünün M manifoldu üzerinde $(1,s)$ tipinde tensör alanı olarak düşünülebileceği gösterilmişti. Buradan, $\downarrow_1^1 A \in \mathfrak{T}_{s+1}^0(M)$ dir ve

$$(\downarrow_1^1 A)(V, X_1, \ldots, X_s) = \langle V, A(X_1, \ldots, X_s) \rangle$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Örnek 2.1.26. [1] (M, g) Riemann manifoldu üzerinde

$$R(X,Y,Z) = R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

eşitliğiyle tanımlı olan $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ Riemann eğrilik tensörü göz önüne alınsın. Bu durumda R, (M, g) Riemann manifoldu üzerinde $(1,3)$ tipinde tensör alanıdır.
M üzerinde $(0,4)$ tipindeki $\downarrow_1^1 R$ tensör alanının bileşenleri R_{ijkl} olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= (\downarrow_1^1 R)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= \langle \partial_i, R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) \rangle \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R(\partial_i^*, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= R(\sum_m g_{im} dx^m, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= \sum_m g_{im} R(dx^m, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.1.27. [1] M bir Riemann manifoldu, $p \in M$, u_p ve $w_p \in T_p(M)$ uzayında iki lineer bağımsız vektör olsun. u_p ve w_p teğet vektörlerinin gerdiği düzlem Π olmak üzere, her $p \in M$ noktası için,

$$K(u,w) = \frac{\langle R_{uw}u, w\rangle}{\langle u,u\rangle\langle w,w\rangle - \langle u,w\rangle^2}$$

eşitliğiyle elde edilen $K(\Pi)$ sayısına, M manifoldunun p noktasındaki *"kesitsel eğriliği"* denir.

Tanım 2.1.28. [1] R, M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. M manifoldunun *"Ricci eğrilik tensörü"*,

$$Ric = C_3^1(R)$$

eşitliğiyle tanımlıdır. Ricci eğrilik tensörünün koordinat vektör alanlarına göre bileşenleri R_{ij} olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j) &= (C_3^1 R)(\partial_i, \partial_j) \\ &= \mathbf{C}\{R(\cdot, \partial_i, \partial_j, \cdot)\} \\ &= \sum_m R(dx^m, \partial_i, \partial_j, \partial_m) \\ &= \sum_m R_{ijm}^m \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.29. [1] (M,g) Riemann manifoldunun Ricci tensörü *Ric* olmak üzere, $Ric = \lambda g$ olacak biçimde bir λ sabiti var ise M manifolduna *"Einstein manifoldu"* denir.

Tanım 2.1.30. [1] $1 \leq a < b \leq s$, $r \geq 0$ tam sayıları ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için,

$$(C_{ab}A)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{s-2}} = \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots p\cdots q\cdots j_{s-2}}$$

eşitliğiyle tanımlanan $C_{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-2}^r(M)$ dönüşümüne *"metrik daraltma operatörü"* denir.

Bir diğer metrik daraltma operatörü, $1 \leq a < b \leq r$, $s \geq 0$ tam sayıları ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ için,

$$(C^{ab}A)^{i_1\cdots i_{r-2}}_{j_1\cdots j_s} = \sum_{p,q} g_{pq} A^{i_1\cdots p\cdots q\cdots i_{r-2}}_{j_1\cdots j_s}$$

eşitliğiyle tanımlı olan $C^{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^{r-2}(M)$ operatörüdür.

Örnek 2.1.31. $A \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ olsun. Bu durumda, $B = C_{12}A$ olmak üzere $B \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ dir. B tensör alanının bileşenleri,

$$\begin{aligned} B^i_j &= (C_{12}A)^i_j \\ &= \sum_{p,q} g^{pq} A^i_{pqj} \end{aligned}$$

olur.

Lemma 2.1.32. [1] *D_V kovaryant türev ve D kovaryant diferensiyel operatörleri, hem tip değiştirme hem de metrik daraltma operatörleri ile değişmelidir.*

İspat: Kolaylık olması amacıyla, ispatta $\downarrow_1^a$ operatörü kullanılacaktır.

$A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ve $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ metrik tensör alanları için, $g \otimes A \in \mathfrak{T}_{s+2}^r(M)$ olur.
$\downarrow_1^a$ operatörü A tensör alanına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (\downarrow_1^a A)(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_{r-1}}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_{s+1}}) &= A(dx^{i_1}, \ldots, \sum_m g_{j_1 m} dx^m, \ldots, dx^{i_{r-1}}, \partial_{j_2}, \ldots, \partial_{j_{s+1}}) \\ &= \sum_m g_{j_1 m} A^{i_1\cdots m\cdots i_{r-1}}_{j_2\cdots j_{s+1}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan, $g \otimes A$ tensör alanına C_1^a daraltması uygulanırsa, $C_1^a(g \otimes A) \in \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(M)$ olur ve

$$\begin{aligned}
[C_1^a(g\otimes A)](dx^{i_1},\ldots,dx^{i_1},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{s+1}}) &= \mathbf{C}\{(g\otimes A)(dx^{i_1},\ldots,\cdot,\ldots,dx^{i_{r-1}},\cdot,\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{s+1}})\\
&= \sum_m (g\otimes A)(dx^{i_1},\ldots,dx^m,\ldots,dx^{i_{r-1}},\partial_m,\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{s+1}})\\
&= \sum_m g(\partial_m,\partial_{j_1})A(dx^{i_1},\ldots,dx^m,\ldots,dx^{i_{r-1}},\partial_{j_2},\ldots,\partial_{j_{s+1}})\\
&= \sum_m g(\partial_{j_1},\partial_m)A(dx^{i_1},\ldots,dx^m,\ldots,dx^{i_{r-1}},\partial_{j_2},\ldots,\partial_{j_{s+1}})\\
&= \sum_m g_{j_1 m}A^{i_1\cdots m\cdots i_{r-1}}_{j_2\cdots j_{s+1}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliklerden, $\downarrow_1^a A = C_1^a(g\otimes A)$ olduğu görülür. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
D_V(\downarrow_1^a A) &= D_V(C_1^a(g\otimes A))\\
&= C_1^a(D_V(g\otimes A))\\
&= C_1^a(D_V g\otimes A + g\otimes D_V A)\\
&= C_1^a(g\otimes D_V A)\\
&= \downarrow_1^a (D_V A)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi, $D_V(C^{a1}A) = C^{a1}(D_V A)$ olduğu gösterilecektir:

$$\begin{aligned}
D_V(C^{a1}A) &= D_V(C_1^a \downarrow_1^a A)\\
&= C_1^a(D_V(\downarrow_1^a A))\\
&= C_1^a(\downarrow_1^a (D_V A))\\
&= C^{a1}(D_V A).
\end{aligned}$$

D kovaryant diferensiyel operatörü için,

$$(D\downarrow_1^a A)V = D_V(\downarrow_1^a A) = \downarrow_1^a D_V A = (\downarrow_1^a DA)V$$

ve

$$D(C^{a1}A)V = D_V(C^{a1}A) = C^{a1}(D_V A) = (C^{a1}DA)V$$

eşitliklerinden değişme özelliğinin sağlandığı görülür. □

Tanım 2.1.33. [1] M manifoldunun Ricci eğrilik tensörünün herhangi bir C metrik daraltması $\mathbf{C}(Ric)$ fonksiyonuna M manifoldunun *"skaler eğriliği"* denir ve S ile gösterilir.

$$S = \mathbf{C}(Ric) \in \mathfrak{F}(M)$$

biçimindedir.

Doğal koordinat sistemine göre Ric tensör alanının bileşenleri R_{ij} olmak üzere,

$$\begin{aligned}
C_{12}Ric &= (\mathbf{C} \uparrow_1^1)(Ric) \\
&= \mathbf{C}(\uparrow_1^1 \; Ric) \\
&= \mathbf{C}\{(\uparrow_1^1 \; Ric)(\cdot,\cdot)\} \\
&= \sum_m (\uparrow_1^1 \; Ric)(dx^m, \partial_m) \\
&= \sum_{i,m} Ric(g^{im}\partial_i, \partial_m) \\
&= \sum_{i,m} g^{im} Ric(\partial_i, \partial_m) \\
&= \sum_{i,m} g^{im} R_{im}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$$

dir. Ayrıca $R_{ij} = \sum_m R^m_{ijm}$ olduğundan

$$S = \sum_{i,j,m} g^{ij} R^m_{ijm}$$

dir.

2.1.5. Gradiyent, Divergens, Hessiyan ve Laplasiyan Operatörleri

Tanım 2.1.34. [1] $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere, $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formuna metrikçe denk olan vektör alana f fonksiyonunun *"gradiyent vektör alanı"* denir ve grad f vektör alanı ∇f ile gösterilir.

$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ için,

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$$

eşitliği ile belirlidir.

Açık olarak her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\langle \text{grad } f, X \rangle &= \langle \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j, \sum_k X^k \partial_k \rangle \\
&= \sum_{i,j,k} g^{ij} X^k \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \partial_j, \partial_k \rangle \\
&= \sum_{i,j,k} g^{ij} X^k \frac{\partial f}{\partial x^i} g_{jk} \\
&= \sum \delta^i_k \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i \\
&= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^k} X^k \\
&= (\sum_k X^k \partial_k) f \\
&= Xf \\
&= df(X)
\end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.1.9 kullanılarak, grad f vektör alanına karşılık gelen 1-formun df olduğu görülür.

Tanım 2.1.35. [1] $V \in \mathfrak{X}(M)$ olsun. V vektör alanının *divergensi*,

$$\text{div } V = \mathbf{C}(DV)$$

eşitliğiyle tanımlı olan fonksiyondur.

$V = \sum_i V^i \partial_i$ için,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} V &= \mathbf{C}(DV) \\
&= \mathbf{C}\{(DV)(\cdot,\cdot)\} \\
&= \sum_i (DV)(dx^i, \partial_i) \\
&= \sum_i (D_{\partial_i} V)(dx^i) \\
&= \sum_i (dx^i)(D_{\partial_i} V) \\
&= \sum_i \langle \sum_m g^{im} \partial_m, D_{\partial_i} V \rangle \\
&= \sum_{i,m} g^{im} \langle \partial_m, D_{\partial_i} V \rangle \\
&= \sum_{i,m} g^{im} (D_{\partial_i} V)_{;m} \\
&= \sum_i (D_{\partial_i} V)_{;i} \\
&= \sum_i \langle \partial_i, D_{\partial_i} V \rangle \\
&= \sum_i V^i_{;i} \\
&= \sum_i \left[\frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^i_{ij} V^j \right]
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının doğal koordinat sistemine göre $\Gamma^i_{ij} = 0$ olduğundan,

$$\operatorname{div} V = \sum_i \frac{\partial V^i}{\partial x^i}$$

dir.

$A \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ simetrik tensör alanı için div A,

$$\operatorname{div} A = C_{13}(DA) = C_{23}(DA)$$

eşitliğiyle tanımlıdır ve div $A \in \mathfrak{X}^*(M)$ dir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div} A)(\partial_i) &= ((\mathbf{C}\uparrow_3^1)(DA))(\partial_i) \\
&= \mathbf{C}\{(\uparrow_3^1 DA)(\cdot,\cdot,\partial_i)\} \\
&= \sum_j (\uparrow_3^1 DA)(dx^j,\partial_j,\partial_i) \\
&= \sum_{j,k} (DA)(\partial_j,\partial_i,g^{kj}\partial_k) \\
&= \sum_{j,k} g^{kj}(DA)(\partial_j,\partial_i,\partial_k) \\
&= \sum_{j,k} g^{kj}(D_{\partial_k}A)(\partial_j,\partial_i) \\
&= \sum_{j,k} g^{kj}\left[D_{\partial_k}(A(\partial_j,\partial_i)) - A(D_{\partial_k}\partial_j,\partial_i) - A(\partial_j,D_{\partial_k}\partial_i)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Tanım 2.1.36. [1] $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun.

$$\operatorname{Hess} f = D(Df)$$

eşitliğiyle tanımlı $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonuna f fonksiyonun *"Hessiyanı"* denir.

Lemma 2.1.37. [1] *f fonksiyonunun Hessiyanı,* Hess f*, her $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,*

$$(\operatorname{Hess} f)(Y,X) = X(Yf) - (D_XY)f$$

eşitlikliğini sağlayan $(0,2)$ tipinde simetrik tensör alanıdır.

İspat:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Hess} f)(X,Y) &= (D(Df))(X,Y) \\
&= (D_YDf)(X) \\
&= D_Y((Df)X) - (Df)(D_YX) \\
&= D_Y(Xf) - (D_YX)(f) \\
&= Y(Xf) - (D_YX)f
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca,

$$(\text{Hess } f)(X,Y) = \langle D_X(\nabla f), Y\rangle$$

olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi, $\mathfrak{F}(M)-$lineer Hess f fonksiyonunun simetrik olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
(\text{Hess } f)(X,Y) - (\text{Hess } f)(Y,X) &= Y(Xf) - (D_Y X)f - X(Yf) + (D_X Y)f \\
&= Y(Xf) - X(Yf) + (D_X Y)f - (D_Y X)f \\
&= [Y,X](f) + (D_X Y - D_Y X)(f) \\
&= ([Y,X] + [X,Y])(f) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$(\text{Hess } f)(X,Y) = (\text{Hess } f)(Y,X)$$

dir. □

Tanım 2.1.38. [1] $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\Delta f = \text{div } (\text{grad } f)$$

eşitliğiyle tanımlanan Δf fonksiyonuna f fonksiyonunun *"Laplasiyanı"* denir.

Kovaryant diferensiyel operatörü, tip değiştirme operatörleri ile değişmeli olduğundan f fonksiyonunun Laplasiyanı Δf, Hess f tensör alanının metrik daraltmasıdır. Yani,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \text{div } (\text{grad } f) \\
&= \mathbf{C}D(\text{grad } f) \\
&= \mathbf{C}D(\uparrow_1^1 df) \\
&= \mathbf{C} \uparrow_1^1 (Ddf) \\
&= C_{12}(\text{Hess } f)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

2.2. Alt Manifoldlar

Tanım 2.2.1. [5] M^n ve N^m Riemann manifoldları olmak üzere, $\phi : M^n \to N^m$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için, her $p \in M$, $\phi_{*p} : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ dönüşümü bire bir ise ϕ dönüşümüne bir *"daldırma (immersiyon)"* denir.

M^n ve N^m Riemann manifoldlarının metrik tensörleri sırasıyla g ve $\tilde{g}$ olmak üzere, her $p \in M$ ve her $X_p, Y_p \in T_p(M)$ için,

$$g_p(X_p, Y_p) = \tilde{g}_{\phi(p)}(\phi_{*p}X_p, \phi_{*p}Y_p)$$

önermesi sağlanıyorsa ϕ dönüşümüne *"izometrik immersiyon"* denir. Ayrıca, ϕ immersiyonu bire bir ise bu durumda ϕ dönüşümüne *"gömme (imbedding)"*, M manifolduna N manifolduna *"gömülmüş alt manifold"* veya *"N manifoldunun alt manifoldu"* denir.

Tanım 2.2.2. [3] $n-$ boyutlu M manifoldunun her bir p noktasına, $T_p(M)$ uzayının $r-$boyutlu lineer alt uzayını karşılık getiren bir D fonksiyonuna, M manifoldunun *"r−boyutlu distribüsyonu (distribution-dağılım)"* denir.

Her $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ oluyorsa D distribüsyonu *involutivedir*.

Tanım 2.2.3. [6] M, N manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $\phi : M \to N$ fonksiyonu bir imbedding olmak üzere, bir D distribüsyonu her $p \in M$ için $\phi_{*p}(T_p(M)) = D_p$ eşitliğini sağlıyorsa M manifolduna D distribüsyonunun *"integral manifoldu"* denir. D distribüsyonunun M manifoldunu içeren başka bir integral manifoldu mevcut değil ise M manifolduna D distribüsyonunun *"maksimal integral manifoldu"* denir.

Bu tanımdan yararlanarak Frobenius teoremi verilebilir:

Teorem 2.2.4 (Frobenius). [6] D, *N manifoldu üzerinde bir involutive distribüsyon olsun. N manifoldunun her p noktasından geçen tek bir $M(p)$ maksimal integral* *manifoldu vardır. p noktasından geçen her integral manifoldu $M(p)$ maksimal integral manifoldunun açık alt manifoldudur.*

2.2.1. Tanjant ve Normaller

M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Her $p \in M$ için $T_p(M)$ tanjant uzayı $T_p(N)$ uzayının nondejenere bir alt uzayıdır. $T_p(M)$ uzayının ortogonal tümleyeni $T_p(M)^{\perp}$ olmak üzere,

$$T_p(N) = T_p(M) \oplus T_p(M)^{\perp}$$

biçimindedir. M manifolduna teğet vektörlerin kümesi $T_p(M)$ ile ve M manifolduna dik vektörlerin kümesi $T_p(M)^{\perp}$ ile gösterilir. Buna göre, her $x \in T_p(N)$ için,

$$\begin{aligned} tan : T_p(N) &\to T_p(M), \quad tan\, x = x^T \\ nor : T_p(N) &\to T_p(M)^{\perp}, \quad nor\, x = x^{\perp} \end{aligned}$$

dik izdüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$x = x^T + x^{\perp}$$

olarak yazılabilir.

2.2.2. Alt Manifoldlar Üzerinde Temel Eşitlikler

Bu kısımda (M^n, g) Riemann manifoldu olarak, $(N^m, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun $\phi : M^n \to N^m$ izometrik immersiyonu ile birlikte $\phi(M)$ daldırılmış alt manifoldu anlaşılacak ve $\phi(M)$ alt manifoldu M ile gösterilecektir. Ayrıca, M ve N Riemann manifoldları üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.5. [1] $h(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^{\perp}$ eşitliğiyle tanımlanan
$h : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ fonksiyonuna M manifoldunun *"ikinci temel formu"* denir. h fonksiyonu $\mathfrak{F}(M)-$lineer ve simetriktir.

Tanım 2.2.6. [5] $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \underbrace{\nabla_X Y}_{tan} + \underbrace{h(X,Y)}_{nor}$$

eşitliğine *"Gauss formülü"* denir.

Tanım 2.2.7. [5] $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$g(R(X,Y)Z,W) = \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) + \tilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)) - \tilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) \tag{2.2.9}$$

eşitliğine *"Gauss denklemi"* denir.

Tanım 2.2.8. [5] $A(X,\eta) = A_\eta X$ eşitliğiyle tanımlanan $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)$ fonksiyonuna M manifoldunun *"şekil operatörü"* denir. A şekil operatörü self-adjoint bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.9. [5] $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ olmak üzere,

$$\tilde{\nabla}_X \eta = \underbrace{-A_\eta X}_{tan} + \underbrace{D_X \eta}_{nor} \tag{2.2.10}$$

eşitliğine *"Weingarten formülü"* denir. Burada D, M manifoldu üzerinde normal konneksiyondur.

Lemma 2.2.10. [1] *İkinci temel form ile şekil operatörü arasında aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\tilde{g}(h(X,Y),\eta) = g(A_\eta X, Y) \tag{2.2.11}$$

Tanım 2.2.11. [1] M^n manifoldu üzerinde ikinci temel formun izine M manifoldunun *"ortalama eğrilik fonksiyonu"* denir ve ortalama eğrilik vektörü H

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) \text{trace } h \tag{2.2.12}$$

eşitliği ile belirlidir.

Tanım 2.2.12. [4] M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu olmak üzere, $H = 0$ ($h = 0$) ise M^n manifolduna *"minimal alt manifold* (*totally jeodezik alt manifold*)" denir.

2.3. Çarpım Manifoldları

Tanım 2.3.1. [1] (B, g_B) ve (F, g_F) Riemann manifoldları olmak üzere, $g = \pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$ metrik tensörü ile verilen $B \times F$ manifolduna, B ve F manifoldlarının *"Riemann çarpım manifoldu"* denir. Burada, $(p,q) \in B \times F$ için,

$$\pi : B \times F \to B, \qquad \pi(p,q) = p,$$
$$\sigma : B \times F \to F, \qquad \sigma(p,q) = q$$

düzgün izdüşüm fonksiyonlarıdır.

$p \times F = \pi^{-1}(p) = \{(p,r) | r \in F\}$ ve $B \times q = \sigma^{-1}(q) = \{(s,q) | s \in B\}$ kümeleri, $B \times F$ çarpım manifoldunun alt manifoldlarıdır.

Tanım 2.3.2. [1] (B, g_B) ve (F, g_F) Riemann manifoldları olmak üzere, $f \in \mathfrak{F}(B), f > 0$ fonksiyonu verilsin. $g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$ metrik tensörü ile verilen $B \times F$ çarpım manifolduna B ve F manifoldlarının *"warped çarpım manifoldu"* denir ve $B \times_f F$ ile gösterilir.

Her (p,q) noktasında $B \times_f F$ manifolduna teğet x vektörü için,

$$g(x,x) = g_B(d\pi(x), d\pi(x)) + f^2(p) g_F(d\sigma(x), d\sigma(x))$$

olur. Ayrıca, $\pi^{-1}(p)$ ve $\sigma^{-1}(q)$ alt manifoldlarına sırasıyla $M = B \times_f F$ warped çarpım manifoldunun *"lifleri"* ve *"yaprakları"* denir. Lif uzayına teğet vektörlere (p,q) noktasındaki *"dikey vektörler"*, yaprak uzayına teğet vektörlere (p,q) noktasındaki *"yatay vektörler"* denir.

B manifoldu üzerindeki vektör alanlarının $M = B \times_f F$ manifoldu üzerine liftlerinin kümesi $\mathcal{L}(B)$ ile gösterilir. Buna göre, $x \in T_{(p,q)}(\pi^{-1}(p))$ vektörünün $M = B \times_f F$ manifoldu üzerine lifti $\tilde{x}$ olmak üzere, $d\pi(\tilde{x}) = x$ dir. Ayrıca, $v \in T_{(p,q)}(\sigma^{-1}(q))$ için $d\pi(v) = 0$ dır. Benzer şekilde, F manifoldu üzerindeki vektör alanlarının $M = B \times_f F$ manifoldu üzerine liftlerinin kümesi $\mathcal{L}(F)$ ile gösterilir. Buna göre,

$v \in T_{(p,q)}(\sigma^{-1}(q))$ vektörünün $M = B \times_f F$ manifoldu üzerine lifti $\tilde{v}$ olmak üzere, $d\sigma(\tilde{v}) = v$ dir. Ayrıca, $x \in T_{(p,q)}(\pi^{-1}(p))$ için $d\sigma(x) = 0$ olur.

Örnek 2.3.3. Her dönel yüzel (döndürme eksenini kesmemek üzere); B döndürülen eğri, F birim yarıçaplı çember ve $f(b)$ fonksiyonu her $b \in B$ için b noktasından döndürme eksenine uzaklık fonksiyonu olmak üzere, $M = B \times_f F$ warped çarpım manifolduna izomorftur.

Önerme 2.3.4. [1] *$M = B \times_f F$ manifoldu warped çarpım manifoldu üzerinde, $X, Y \in \mathcal{L}(B)$, $V, W \in \mathcal{L}(F)$ için,*

(1) *$D_X Y \in \mathcal{L}(B)$, B üzerinde $D_X Y$ vektör alanının liftidir.*

(2) *$D_X V = D_V X = (\frac{Xf}{f})V$ dir.*

(3) *$(D_V W)^{\perp} = h(V,W) = -(\langle V,W \rangle / f)$ grad$f$ dir.*

(4) *$(D_V W)^T \in \mathcal{L}(F)$, F üzerinde $\nabla_V W$ vektör alanının liftidir.*

önermeleri sağlanır.

Önerme 2.3.5. [1] *$M = B \times_f F$ manifoldu warped çarpım manifoldu olsun. $\gamma = (\alpha, \beta)$ eğrisinin M manifoldu üzerinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki önermenin sağlanmasıdır:*

(1) *B manifoldu üzerinde, $\alpha'' = g_F(\beta', \beta') f \circ \alpha$ grad f dir.*

(2) *F manifoldu üzerinde, $\beta'' = \frac{-2}{f \circ \alpha} \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} \beta'$ dir.*

Sonuç 2.3.6. [1] *$M = B \times_f F$ warped çarpım manifoldu üzerinde X, Y yatay, V, W dikey vektörler ve $k = dim\, F > 1$ olsun. Bu durumda M manifoldunun Ricci tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

(a) *$Ric(X,Y) = Ric_B(X,Y) - \frac{k}{f} H^f(X,Y)$.*

(b) $Ric(X,V) = 0.$

(c) $Ric(V,W) = Ric_F(V,W) - \left\{ \dfrac{\Delta f}{f} - (k-1)\dfrac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \right\}.$

Teorem 2.3.7. [2] (M,g) *bir Riemann manifoldu olmak üzere L ve K bu manifoldu birbirini tamamlayan ve dik kesişen iki yaprak belirtsin. Eğer L totally jeodezik ve K küresel ise,* (M,g) *manifoldu* $B \times_f F$ *warped product manifolduna izomorftur. Burada L ve K yaprakları* $B \times F$ *manifoldunun doğal yapraklarına karşılık gelir.*

2.4. Ricci Solitonlar

Tanım 2.4.1. [7] (M,g) bir Riemann manifoldu ve $v \in \mathfrak{X}(M)$ olsun. $(0,2)$ tipindeki $L_v g$, *Ric* tensörleri sırasıyla g metrik tensör alanının v vektör alanına göre Lie türevini ve Ricci tensörünü göstermek üzere, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{1}{2}L_v g + Ric = \lambda g \tag{2.4.13}$$

eşitliği sağlanıyor ise (M,g) Riemann manifolduna *"Ricci soliton"* denir ve (M,g,v,λ) dörtlüsü ile gösterilir. Burada v vektör alanına Ricci solitonun *"potansiyel vektör alanı"* denir.

$\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ değerleri için sırasıyla (M,g,v,λ) Ricci solitonuna *"shrinking, steady ve expanding Ricci soliton"* denir.

Tanım 2.4.2. [9] v potansiyel alanı, sıfır veya Killing vektör alanı ise (M,g,v,λ) dörtlüsüne *"basit Ricci soliton"* denir.

Tanım 2.4.3. [9] v potansiyel alanı $f \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonunun gradiyenti ise (M,g,v,λ) dörtlüsüne *"gradiyent Ricci soliton"* denir ve (M,g,f,λ) ile gösterilir. f potansiyel fonksiyonu sabit ise (M,g,f,λ) basit Ricci solitondur.

3. CONCURRENT VEKTÖR ALANLARI VE SINIFLANDIRILMASI

3.1. Concurrent Vektör Alanları

Tanım 3.1.1. [7] M bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Herhangi bir $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı için,

$$\nabla_Z v = Z \tag{3.1.1}$$

eşitliğini sağlayan bir v vektör alanına M manifoldu üzerinde *"concurrent vektör alanı"* denir.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayı ve $\{x^1, \ldots, x^n\}$ bu uzayın koordinat sistemi olmak üzere,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

eşitliğiyle tanımlanan pozisyon vektör alanı göz önüne alınsın.

$Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^n)$, $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ için,

$$\begin{aligned} \nabla_Y x &= \sum_{i=1}^{n} Y[x^i] \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= Y \end{aligned}$$

olduğundan x pozisyon vektör alanı $\mathbb{E}^n$ üzerinde concurrent vektör alanıdır.

Örnek 3.1.3. I, $\mathbb{R}$'nin yay uzunluğu s olan bir açık aralığı, (F, g_F) bir Riemann manifoldu olmak üzere, $I \times_s F$ warped çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Önerme 2.3.4 (2) kullanılarak

$v = s\frac{\partial}{\partial s}$ ve $X = \varphi\frac{\partial}{\partial s}$ olmak üzere, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, $V, X \in \mathcal{L}(I)$, $W \in \mathcal{L}(F)$ için,

$$\begin{aligned}
\nabla_Z v = \nabla_{X+W} v &= \nabla_X v + \nabla_W v \\
&= \nabla_X v + \frac{vs}{s} W \\
&= X[s]\frac{\partial}{\partial s} + \frac{(s\frac{\partial}{\partial s})s}{s} W \\
&= \varphi(\frac{\partial s}{\partial s})\frac{\partial}{\partial s} + W \\
&= X + W \\
&= Z
\end{aligned}$$

olduğundan v vektör alanı I üzerinde concurrent vektör alanıdır.

Teorem 3.1.4. [8] (M^n, g) *complete Riemann manifoldu olsun ve* M^n *manifoldu üzerinde bir* x *vektör alanı için* $\nabla x = I$ *eşitliği sağlansın. Bu durumda,* M^n *manifoldu* $n-$*boyutlu Öklid uzayına izomorftur ve* x*, Öklid uzayının bilinen pozisyon vektör alanıdır.*

3.2. Concurrent Vektör Alanına Sahip Ricci Solitonlar

Bu bölümde concurrent vektör alanına sahip Ricci solitonların sınıflandırılması yapılacaktır.

Teorem 3.2.1. [7] (M^n, g, v, λ)*, potansiyel vektör alanı* v *olan bir Ricci soliton olsun.* v *vektör alanının concurrent vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki önermenin sağlanmasıdır:*

(a) (M^n, g, v, λ), $\lambda = 1$ *olan Ricci solitondur.*

(b) M^n, $I \times_s F$ *warped çarpım manifoldunun bir açık alt kümesidir. Burada* I, $\mathbb{R}$ *nin yay uzunluğu fonksiyonu* s *olan açık aralığı ve* F*, Ricci tensörü* $Ric_F = (n-2)g_F$ *eşitliğini sağlayan* $(n-1)-$*boyutlu Einstein manifoldudur.*

İspat: v concurrent vektör alanı olsun.

(M^n, g, v, λ) Ricci soliton ve her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\nabla_X v = X \tag{3.2.2}$$

olur.

Her $p \in M$ için X_p, $v_p \in T_p(M)$ teğet vektörüne dik, birim uzunlukta bir teğet vektörü olmak üzere, M manifoldunun p noktasındaki kesitsel eğriliği $K_p(X_p, v_p)$ sayısıdır. Kolaylık olması amacıyla, p noktasındaki değerler göz önüne alınmayarak işlemlere devam edilecektir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
K(X,v) &= \langle R(X,v)X, v\rangle \\
&= -\langle R(X,v)v, X\rangle \\
&= -\langle [\nabla_X, \nabla_v]v - \nabla_{[X,v]}v, X\rangle \\
&= -\langle \nabla_X \nabla_v v - \nabla_v \nabla_X v - [X,v], X\rangle \\
&= -\langle \nabla_X v - \nabla_v X - [X,v], X\rangle \\
&= 0 \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$Ric(v,v) = \langle Ric(v), v\rangle = 0 \tag{3.2.4}$$

olur.

e_1, M^n manifoldu üzerinde birim teğet vektör alanı ve $\mu \in \mathfrak{F}(M)$ için $v = \mu e_1$ olsun. M^n manifoldu üzerinde e_1 vektör alanının ortonormal genişletilmişi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ çatısı ve bu çatının duali $\{w^1, \ldots, w^n\}$ olmak üzere

$1 \leq i, j \leq n$ için, w_i^j konneksiyon formları

$$\nabla_x e_i = \sum_{j=1}^{n} w_i^j(X) e_j \quad 1 \leq i \leq n \tag{3.2.5}$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

(3.2.2) eşitliğinde $X = e_1$ için

$$e_1 = \nabla_{e_1}(\mu e_1) = (e_1\mu)e_1 + \mu\nabla_{e_1}e_1$$

olur. Buradan,

$$e_1\mu = 1 \tag{3.2.6}$$

$$\nabla_{e_1}e_1 = 0 \tag{3.2.7}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer olarak $k = 2,\ldots,n$ için, $X = e_k$ seçilirse

$$e_k = \nabla_{e_k}(\mu e_1) = e_k(\mu)e_1 + \mu\nabla_{e_k}e_1 \tag{3.2.8}$$

elde edilir. Buradan,

$$e_k\mu = 0 \tag{3.2.9}$$

olur.

(3.2.8) eşitliğindeki $\nabla_{e_k}e_i$ vektör alanı için, $\nabla_{e_k}e_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} w_1^j(e_k)e_j$ olduğundan

$$\mu\Big(\sum_{j=1}^{n} w_1^j(e_k)e_j\Big) = e_k \tag{3.2.10}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlik açık olarak yazıldığında,

$$\mu(w_1^1(e_k)e_1 + w_1^2(e_k)e_2 + \cdots + w_1^k(e_k)e_k + \cdots + w_1^n(e_k)e_n) = e_k \tag{3.2.11}$$

eşitliği elde edilir. $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormal taban ve $w_i^j = -w_j^i$ olduğundan,

$$\mu w_k^1(e_k) = -1 \tag{3.2.12}$$

$$w_j^1(e_k) = 0,\ \ k \neq j \tag{3.2.13}$$

elde edilir.

$\{e_1\}$ ve $\{e_2,\ldots,e_n\}$ kümelerinin gerdiği uzaylar sırasıyla D_1 ve D_2 olsun.
$\nabla_{e_1}e_1 = 0$ olduğundan D_1 distribüsyonunun yaprakları M^n manifoldunun jeodezikleri olacak şekilde D_1 totally jeodezik distribüsyondur.

Kartan yapı denklemleri olarak bilinen

$$\mathrm{d}w^i = -\sum_{j=1}^{n} w^i_j \wedge w^j, \quad i = 1,\ldots,n \tag{3.2.14}$$

eşitliğinde $i = 1$ için, (3.2.13) eşitliği kullanılırsa,

$$dw^1 = -\underbrace{w^1_1 \wedge w^1}_{0} - \underbrace{w^1_2 \wedge w^2 - \cdots - w^1_n \wedge w^n}_{0} = 0$$

elde edilir. Bu durumda $w^1 = \mathrm{d}s$ olacak biçimde en az bir $s \in \mathfrak{F}(M)$ vardır.

Diğer taraftan, $2 \leq i \neq j \leq n$ için

$$\begin{aligned}
g([e_i,e_j],e_1) &= g(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, e_1) \\
&= \langle \nabla_{e_i}e_j, e_1\rangle - \langle \nabla_{e_j}e_i, e_1\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} w^k_j(e_i)e_k, e_1\rangle - \langle \sum_{k=1}^{n} w^k_i(e_j)e_k, e_1\rangle \\
&= w^1_j(e_i) - w^1_i(e_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $[e_i,e_j] \in D_2$ dir. Buradan D_2 involutive bir distribüsyondur. Teorem 2.2.4 den D_2 maksimal integral manifoldudur. Bu durumda, D_2 distribüsyonun M manifoldunun her p noktasından geçen tek bir maksimal integral manifoldu vardır. Buradan, D_2 integrallenebilir bir distribüsyondur.

D_2 distribüsyonun her bir L yaprağının ikinci temel formu $\hat{h}$ olmak üzere,
$2 \leq i,j \leq n$ için (3.2.12) ve (3.2.13) eşitliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\hat{h}(e_i,e_j) &= g(\nabla_{e_i}e_1, e_j)e_1 \\
&= g(\nabla_{e_1}e_i, e_j)e_1 \\
&= -\frac{\delta_{ij}}{\mu}e_1,
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\hat{h}(e_i,e_j) - \frac{\delta_{ij}}{\mu}e_1 \tag{3.2.15}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, D_2 distribüsyonunun her bir L yaprağının ortalama eğriliğinin $-\frac{1}{\mu}$ olduğu görülür.

Ayrıca (3.2.15) eşitliği, D_2 distribüsyonun her bir L yaprağının, ortalama eğrilik vektörü $\hat{H} = -\frac{e_1}{\mu}$ olan M^n manifoldunun totally umbilik hiperyüzeyi olmasını gerektirir. (3.2.9) eşitliğinden, her totally umbilik L yaprağının ortalama eğrilik vektörü normal demetine paralel olduğundan D_2 bir küresel distribüsyondur.

Teorem 2.3.7 den, M^n manifoldunun $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$ için

$$g = ds^2 + f^2(s)g_F \tag{3.2.16}$$

metrik tensör alanı ile verilen $I \times_{f(s)} F$ warped çarpım manifoldu olduğu görülür.

v vektör alanına dik her X birim vektör alanı için,

$$\begin{aligned}
K(X,v) &= \langle R(X,v)X,v\rangle \\
&= -\langle R(v,X)X,x\rangle \\
&= -\langle \frac{(\text{Hess } f)(X,X)}{f}v,v\rangle \\
&= -\frac{(\text{Hess } f)(X,X)}{f}\langle v,v\rangle \\
&= -\frac{f''}{f}
\end{aligned}$$

olur. (3.2.3) eşitliği kullanılırsa, $f''(s) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla f warping fonksiyonu, $a,b \in \mathbb{R}$ için $f(s) = as+b$ olmalıdır.

$a = 0$ olması durumunda $I \times_{f(s)} F$ warped çarpım manifoldu, bir Riemann çarpım manifoldudur. Bu ise Önerme 2.3.5 den D_2 distribüsyonunun her yaprağının M^n manifoldu üzerinde totally jeodezik olmasını gerektirir; ancak bu (3.2.15) eşitliğinde elde edilen sonuçla çelişir. O halde $a \neq 0$ dir.

$f(s) = s$ olsun. Buradan M^n manifoldu, $I \times_s F$ biçiminde bir warped çarpım manifoldudur.

Lie türevinin tanımı ve (3.2.2) eşitliği kullanılarak, her $X,Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ için,

$$(L_v g)(X,Y) = g(\nabla_X v, Y) + g(\nabla_Y v, x) = g(X,Y) + g(X,Y) = 2g(X,Y) \quad (3.2.17)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik Ricci soliton denkleminde yerine yazıldığında,

$$Ric(X,Y) = (\lambda - 1)g(X,Y) \quad (3.2.18)$$

eşitliği elde edilir. Buradan, M^n manifoldunun $(n-1)-$Einstein manifoldu olduğu görülür.

(3.2.4) ve (3.2.18) eşitliklerinden, M^n manifoldu Ricci flattir ve $\lambda = 1$ dir. Yani, (M^n, g, v, λ) shrinking Ricci solitondur.

M^n manifoldu Ricci flat olduğundan ve Sonuç 2.3.6 (c) den, warped çarpım manifoldunun ikinci faktörü F, $Ric_F = (n-2)g_F$ eşitliğini sağlayan Einstein manifoldudur.

Bu teoremin karşıtı için, $\lambda = 1$ ve $M = I \times_s F$ warped çarpım manifoldu olsun. M manifoldu için, $X \in \mathcal{L}(I)$, $v \in \mathcal{L}(F)$, X ve v birbirine dik vektör alanları olmak üzere,

$$K(X,v) = \langle \frac{(\text{Hess } s)(X,X)}{s} v, v \rangle = 0 \quad (3.2.19)$$

dir. Ayrıca, $K(X,v) = -\langle R(v,X)X, x \rangle$ olduğundan

$$Ric(X,X) = 0 \quad (3.2.20)$$

ve

$$Ric(v,v) = 0 \quad (3.2.21)$$

bulunur. Böylece M^n manifoldu Ricci flattir. Buradan, (3.2.20) ve (3.2.21) eşitlikleri göz önüne alınarak $\lambda = 1$ için Ricci soliton denklemi yazılırsa,

$$\frac{1}{2} L_v g = g \quad (3.2.22)$$

eşitliği elde edilir.

Her $W \in \mathfrak{X}(I \times_s F)$ için,

$$\frac{1}{2}(L_v g)(W,W) = g(W,W) \tag{3.2.23}$$

$$\langle \nabla_W v, W \rangle = \langle W, W \rangle \tag{3.2.24}$$

olduğundan $\nabla_W v = W$ dir. Buradan v concurrent vektör alanıdır. □

Sonuç 3.2.2. [7] *Potansiyel alanı concurrent vektör alanı olan steady veya expanding Ricci soliton yoktur.*

Sonuç 3.2.3. [7] *v potansiyel alanı concurrent vektör alanı olan her (M^n, g, v, λ) Ricci soliton gradiyenttir.*

İspat: v concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda, (3.2.17) eşitliğinden

$$\frac{1}{2} L_v g = g$$

olur. Teorem 3.2.1 den $\lambda = 1$ ve $Ric = 0$ olduğu görülür. $f = \frac{1}{2} g(v,v)$ seçilirse, her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, X \rangle &= Xf \\
&= X(\frac{1}{2} g(v,v)) \\
&= \frac{1}{2} X \langle v, v \rangle \\
&= \langle \nabla_X v, v \rangle \\
&= \langle X, v \rangle
\end{aligned}$$

olduğundan $\nabla f = v$ dir. Buradan (M^n, g, v, λ) gradiyent Ricci solitondur. □

Uyarı 3.2.4. [7] *M^n complete Riemann manifoldu ve v, M manifoldu üzerinde concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda M^n manifoldu, Teorem 3.1.4 den $n-$boyutlu Öklid uzayına izomorftur. Ayrıca, $r : U \subset M \to \mathbb{R}$, $r(x) = ||x||^2$*

eşitliğiyle tanımlı orjine uzaklık fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} dr = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} x^i dx^i \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} g^{ij} x^i \partial_i \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} g^{ij} x^i \partial_i \\ &= \nabla r \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i \end{aligned}$$

olduğundan, $v = r\nabla r$ eşitliğiyle tanımlanan v vektör alanı, Örnek 3.1.2 de açıklanan pozisyon vektör alanıdır.

3.3. Ricci Soliton olan Riemann Alt Manifoldları

Bu bölümde (M^n, g), $n-$boyutlu, $(N^m, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve $v \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanının N manifoldu üzerinde concurrent vektör alanı olduğu kabul edilecektir. v vektör alanının sırasıyla $\mathfrak{X}(M)$ ve $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ vektör uzayları üzerindeki dik izdüşümleri v^T ve $v^{\perp}$ ile gösterilecektir. Yine h, A ve D operatörleri ile sırasıyla M manifoldu üzerindeki ikinci temel form, şekil operatörü ve normal konneksiyon gösterilecektir.

Teorem 3.3.1. [7] (M^n, g, v^T, λ) *Riemann manifoldunun Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul her* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *için,*

$$Ric(X,Y) = (\lambda - 1)g(X,Y) - \tilde{g}(h(X,Y), v^{\perp}) \tag{3.3.25}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: v, N^m manifoldu üzerinde bir concurrent vektör alanı olmak üzere $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} X = \widetilde{\nabla}_X v &= \widetilde{\nabla}_X (v^T + v^\perp) \\ &= \widetilde{\nabla}_X v^T + \widetilde{\nabla}_X v^\perp \\ &= \nabla_X v^T + h(X, v^T) + (-A_{v^\perp} X + D_X v^\perp) \\ &= \underbrace{\nabla_X v^T - A_{v^\perp} X}_{tanjant} + \underbrace{h(X, v^T) + D_X v^\perp}_{normal} \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

olur. Tanjant ve normal bileşenler karşılaştırıldığında

$$\nabla_X v^T = A_{v^\perp} X + X \tag{3.3.27}$$

$$h(X, v^T) = -D_X v^\perp \tag{3.3.28}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.3.27) ve (3.3.28) eşitlikleri kullanılarak her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} (L_{v^T} g)(X,Y) &= g(\nabla_X v^T, Y) + g(\nabla_Y v^T, X) \\ &= g(A_{v^\perp} X + X, Y) + g(A_{v^\perp} Y + Y, X) \\ &= g(A_{v^\perp} X, Y) + g(X,Y) + g(A_{v^\perp} Y, X) + g(Y, X) \\ &= 2g(X,Y) + 2g(A_{v^\perp} X, Y) \\ &= 2g(X,Y) + 2\tilde{g}(h(X,Y), v^\perp) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, $L_{v^T} g$ tensörünün değeri Ricci soliton denkleminde yerine yazılırsa, (M^n, g, v^T, λ) dörtlüsünün bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$Ric(X,Y) = (\lambda - 1) g(X,Y) - \tilde{g}(h(X,Y), v^\perp)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. □

Örnek 3.3.2. $S^{m-n}(1)$, $\mathbb{E}^{m-n+1}$ uzayında birim hiperküre ve $\gamma(s)$ bu hiperküre üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. (M^n, g) Riemann alt manifoldu

$$\phi : M^n \to \mathbb{E}^m,\ \phi(s, x_2, \ldots, x_n) = (\gamma(s)x_2, x_2, \ldots, x_n)$$

izometrik immersiyonu ile verilsin. Bu durumda, M^n manifoldu düzdür (flat) ve (M^n, g, x^T, λ) dörtlüsü $\lambda = 1$ olan shrinking Ricci solitondur.

Örneğin daha kolay anlaşılması için $m = 4,\ n = 2$ olduğu durum incelenecektir.

$$\gamma : I \to S^2(1) \subset \mathbb{E}^3, \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$$

eşitliği ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. Buradan $\phi : M^2 \to \mathbb{E}^4$ dönüşümü

$$\phi(s, x_2) = (\gamma_1(s)x_2, \gamma_2(s)x_2, \gamma_3(s)x_2, x_2)$$

eşitliğiyle belirlidir.

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayının metrik tensör alanı $\tilde{g}$ olsun. M^2 manifoldunun metrik tensör alanı g olmak üzere $g = \phi^*\tilde{g}$ dir. Şimdi, her $Y_p, Z_p \in T_p(M)$ için pullback fonksiyonunun tanımı kullanılarak M manifoldu üzerinde g metrik tensör alanının bileşenleri hesaplanacaktır.

Her $Y_p, Z_p \in T_p(M), p \in M^2$ için

$$g_p(Y_p, Z_p) = (\phi^*\tilde{g})_p(Y_p, Z_p) = \tilde{g}|_{\phi(p)}(\phi_* Y_p, \phi_* Z_p) \tag{3.3.29}$$

olmalıdır. Burada,

$$\begin{aligned} \phi_{*p}(Y_p) &= J\phi|_p[Y_p] \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1{}'(s)x_2|_p & \gamma_1(s) \\ \gamma_2{}'(s)x_2|_p & \gamma_2(s) \\ \gamma_3{}'(s)x_2|_p & \gamma_3(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \phi_{*p}(Y_p) = \ (& \gamma_1{}'(s)x_2|_p Y_1 + \gamma_1(s)Y_2, \gamma_2{}'(s)x_2|_p Y_1 + \gamma_2(s)Y_2, \\ & \gamma_3{}'(s)x_2|_p Y_1 + \gamma_3(s)Y_2, Y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\phi_{*p}(Z_p) = \quad (& \gamma_1{}'(s)x_2|_p Z_1 + \gamma_1(s)Z_2, \gamma_2{}'(s)x_2|_p Z_1 + \gamma_2(s)Z_2, \\ & \gamma_3{}'(s)x_2|_p Z_1 + \gamma_3(s)Z_2, Z_2)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\phi_{*p}Y_p$ ve $\phi_{*p}Z_p$ vektörlerinin değerleri (3.3.29) eşitliğinde yerlerine yazıldığında $||\gamma(s)|| = 1$ ve $||\gamma'(s)|| = 1$ eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_p(Y_p, Z_p) &= \tilde{g}|_{\phi(p)}(\phi_* Y_p, \phi_* Z_p) \\
&= (\gamma_1{}'(s))^2 p_2^2 Y_1 Z_1 + \gamma_1{}'(s)\gamma_1(s) p_2 Y_1 Z_2 + \gamma_1{}'(s)\gamma_1(s) p_2 Y_2 Z_1 \\
&\quad + (\gamma_1(s))^2 p_2 Y_2 Z_2 \\
&\quad + (\gamma_2{}'(s))^2 p_2^2 Y_1 Z_1 + \gamma_2{}'(s)\gamma_2(s) p_2 Y_1 Z_2 + \gamma_2{}'(s)\gamma_2(s) p_2 Y_2 Z_1 \\
&\quad + (\gamma_2(s))^2 p_2 Y_2 Z_2 \\
&\quad + (\gamma_3{}'(s))^2 p_2^2 Y_1 Z_1 + \gamma_3{}'(s)\gamma_3(s) p_2 Y_1 Z_2 + \gamma_3{}'(s)\gamma_3(s) p_2 Y_2 Z_1 \\
&\quad + (\gamma_3(s))^2 p_2 Y_2 Z_2 \\
&\quad + Y_2 Z_2 \\
&= Y_1 Z_1 p_2^2 [\underbrace{(\gamma_1{}'(s))^2) + (\gamma_2{}'(s))^2 + (\gamma_3{}'(s))^2}_{1=||\gamma'(s)||}] \\
&\quad + Y_1 Z_2 p_2 [\underbrace{\gamma_1{}'(s)\gamma_1(s) + \gamma_2{}'(s)\gamma_2(s) + \gamma_3{}'(s)\gamma_3(s)}_{\langle\gamma'(s),\gamma(s)\rangle=0}] \\
&\quad + Y_2 Z_1 p_2 [\underbrace{\gamma_1{}'(s)\gamma_1(s) + \gamma_2{}'(s)\gamma_2(s) + \gamma_3{}'(s)\gamma_3(s)}_{\langle\gamma'(s),\gamma(s)\rangle=0}] \\
&\quad + Y_2 Z_2 [\underbrace{(\gamma_1(s))^2) + (\gamma_2(s))^2 + (\gamma_3(s))^2}_{1=||\gamma'(s)||} + 1] \\
&= p_2^2 Y_1 Z_1 + 0 \cdot Y_1 Z_2 p_2 + 0 \cdot Y_2 Z_1 p_2 + 2 Y_2 Z_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$p \in M^2$ için, $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$ kümesi $\mathfrak{T}_2^0(M)$ uzayının doğal tabanı ve bu tabanın duali $\{dx^1 \otimes dx^1, dx^1 \otimes dx^2, dx^2 \otimes dx^1, dx^2 \otimes dx^2\}$ kümesi olmak üzere, $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ metrik tensör alanının bileşenleri

$$\begin{aligned}
(dx^1 \otimes dx^1)(Y_p, Z_p) &= dx^1(Y_p)dx^1(Z_p) = Y_1 Z_1 \\
(dx^1 \otimes dx^2)(Y_p, Z_p) &= dx^1(Y_p)dx^2(Z_p) = Y_1 Z_2 \\
(dx^2 \otimes dx^1)(Y_p, Z_p) &= dx^2(Y_p)dx^1(Z_p) = Y_2 Z_1 \\
(dx^2 \otimes dx^2)(Y_p, Z_p) &= dx^2(Y_p)dx^2(Z_p) = Y_2 Z_2
\end{aligned}$$

eşitlikleriyle belirlidir.

Açık olarak, $g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ olduğundan her $p \in M^2$ için
$g_p = p_2^2 dx^1 \otimes dx^1 + 2dx^2 \otimes dx^2$ olarak bulunur. Ayrıca, g metrik tensör alanına karşılık gelen matris yine g ve bu matrisin tersi g^{-1} olmak üzere,

$$g = \begin{bmatrix} x_2^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ve

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan, M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü $R = 0$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla, M^2 düzdür (flat). Ayrıca, küre üzerindeki x pozisyon vektör alanı için $x^T = x$ dir. Örnek 3.1.2 den x pozisyon vektör alanı, concurrent vektör alanıdır. Böylece Teorem 3.3.1 den (M^2, g, x^T, λ), $\lambda = 1$ olan shrinking Ricci solitondur.

3.4. Teorem 3.3.1 in Bazı Uygulamaları

Tanım 3.4.1. [7] M^n bir Riemann alt manifoldu, $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ ve $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ olsun. M^n manifoldunun şekil operatörü A_η olmak üzere, $A_\eta = \varphi I$ eşitliği sağlanıyorsa M^n manifolduna "*η-umbilik*" denir.

Teorem 3.4.2. [7] *M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu olsun. (M^n, g, v^T, λ) Ricci solitonun basit olması için gerek ve yeter koşul M^n manifoldunun $v^{\perp}$-umbilik olmasıdır.*

İspat: M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu ve (M^n, g, v^T, λ) basit Ricci Soliton olsun. Bu durumda M^n Einstein manifoldudur. Yani, her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için (3.3.27) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
Ric = \lambda g \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} L_{v^T} g = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (L_{v^T} g)(X,Y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad g(\tilde{\nabla}_X v^T, Y) + g(\tilde{\nabla}_Y v^T, X) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad g(\nabla_X v^T + h(X, v^T), Y) + g(\nabla_Y v^T + h(Y, v^T), X) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad g(A_{v^\perp} X + X, Y) + g(A_{v^\perp} Y + Y, X) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2g(X,Y) + 2g(A_{v^\perp} X, Y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad g(X + A_{v^\perp} X, Y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A_{v^\perp} X = -X
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan M^n manifoldu $\varphi = -1$ için $v^\perp$−umbiliktir. □

Sonuç 3.4.3. [7] *M^n, N^m Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve (M^n, g, v^T, λ) Ricci soliton olsun. Bu durumda M basit Ricci solitondur.*

Tanım 3.4.4. [7] $\{e_1, \ldots, e_n\}$, (M^n, g) Riemann manifoldunun bir ortonormal çatısı olsun. M^n manifoldunun *skaler eğriliği* τ,

$$\tau = \sum_{1 \le i \le j \le n} K(e_i, e_j)$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Önerme 3.4.5. [7] *(M^n, g, v^T, λ), N^m manifoldunun minimal alt manifoldu olan bir Ricci soliton olsun. Bu durumda, M^n manifoldunun skaler eğriliği sabittir ve*

$$\tau = \frac{n(\lambda - 1)}{2}$$

biçimindedir.

İspat: M^n, N^m manifoldunun bir minimal alt manifoldu ve (M^n, g, v^T, λ) bir Ricci soliton olsun.

Teorem 3.3.1 den her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$Ric(X,Y) = (\lambda - 1)g(X,Y) - \hat{g}(h(X,Y), v^{\perp}) \tag{3.4.30}$$

olduğu bilinmektedir. M^n minimal alt manifold olduğundan ortalama eğrilik vektörü sıfırdır. Bu durumda,

$$\hat{g}(H, v^{\perp}) = 0 \tag{3.4.31}$$

olur. (3.4.30) eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) = n(\lambda - 1) \tag{3.4.32}$$

elde edilir. Dolayısıyla, M^n manifoldunun skaler eğriliği sabittir ve

$$\tau = \frac{n(\lambda - 1)}{2} \tag{3.4.33}$$

eşitliği ile belirlidir. □

Lemma 3.4.6. [7] *M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $\psi = \frac{1}{2}\tilde{g}(v^{\perp}, v^{\perp})$ ve $\varphi = \frac{1}{2}\tilde{g}(v, v)$ olmak üzere,*

$$\nabla \psi = -A_{v^{\perp}} v^T \tag{3.4.34}$$

ve

$$v^T = \nabla \varphi \tag{3.4.35}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda, Weingarten formülü ve (3.3.27) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla\psi,X) &= X\psi \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v^{\perp},v^{\perp}) \\ &= \tilde{g}(A_{v^{\perp}}X+D_X v^{\perp},v^{\perp}) \\ &= \tilde{g}(D_X v^{\perp},v^{\perp}) \\ &= -\tilde{g}(h(X,v^T),v^{\perp}) \\ &= -g(A_{v^{\perp}}X,v^T) \\ &= g(-A_{v^{\perp}}X,v^T) \\ &= g(-A_{v^{\perp}}v^T,X) \end{aligned}$$

olduğundan $\nabla\psi = -A_{v^{\perp}}v^T$ eşitliği elde edilir. Benzer olarak,

$$\begin{aligned} g(\nabla\varphi,X) &= X\varphi \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v,v) \\ &= \tilde{g}(X,v)) \\ &= \tilde{g}(X,v^T+v^{\perp}) \\ &= \tilde{g}(X,v^T)+\tilde{g}(X,v^{\perp}) \\ &= \tilde{g}(X,v^T) \end{aligned}$$

olduğundan $v^T = \nabla\varphi$ elde edilir. □

Önerme 3.4.7. [7] *N^m manifoldunun her (M^n,g,φ,λ) Ricci soliton alt manifoldu potansiyel fonksiyonu $\varphi = \frac{1}{2}\tilde{g}(v,v)$ olan gradiyent Ricci solitondur.*

Sonuç 3.4.8. [7] *M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu ve (M^n,g,φ,λ) bir gradiyent Ricci soliton olsun. (M^n,g,φ,λ) alt manifoldunun basit Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul N^m manifoldu üzerindeki v concurrent vektör alanının M^n manifolduna dik olmasıdır.*

İspat: M^n, N^m manifoldunun bir alt manifoldu ve $(M^n, g, \varphi, \lambda)$ basit gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda, $\varphi = \frac{1}{2}\tilde{g}(v,v)$ fonksiyonu M manifoldunu üzerinde sabit olduğundan, her $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ için

$$\begin{aligned}
X\varphi &= X(\frac{1}{2}\tilde{g}(v,v)) \\
&= \frac{1}{2}(\tilde{g}(\nabla_X v, v) + \tilde{g}(v, \nabla_X v)) \\
&= \frac{1}{2}(g(X,v) + g(X,v)) \\
&= g(X,v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan, v concurrent vektör alanı M^n manifolduna diktir.

Karşıt olarak, $v \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ ise, $X\tilde{g}(v,v) = 2g(X,v) = 0$ olduğundan $\tilde{g}(v,v)$, M^n manifoldu üzerinde sabittir. Buradan M^n Einstein manifoldudur; yani M^n basit gradiyent Ricci solitondur. $\square$

KAYNAKLAR

[1] O'Neill, B. 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London.

[2] Chen, B. 2011. Pseudo-Riemannian Geometry, $\delta-$invariants and Applications. World Scientific, Singapore.

[3] Chen, B. 1973. Geometry of Submanifolds. Marcel Dekker, Inc., New York.

[4] Chen, B. 1981. Geometry of Submanifolds and Its Applications. Tokyo.

[5] Dajczer, M. 1990. Submanifolds and Isometric Immersions. Publish or Perish,Inc., Texas.

[6] Kobayashi, S., Nomizu, K. 1963. Foundations of Differential Geometry Vol. I, John Wiley & Sons, New York.

[7] Chen, B., Deshmukh, S. 2015. Ricci Solitons and Concurrent Vector Fields, **Balkan J. Geom. Appl.** 20, no. 1, 14-25.

[8] Bivens, I., 1983. Integral Formulas and Hyperspheres in a Simply Connected Space Form, **Proc. Amer. Math. Soc.** 88, no. 1, 113-118.

[9] Chen, B. 2015. Some Results on Concircular Vector Fields and Their Applications to Ricci Solitons, **Bull. Korean Math. Soc.** 52, No. 5, 1535-1547.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Seçkin GÜNSEN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Manisa, 30.05.1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	İzmir Ekonomi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce, Almanca

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
-SCI :

-Diğer :

b) Bildiriler
-Uluslararası :

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2015 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi	: seckin.gunsen@adu.edu.tr
Tarih	: 20.01.2017