

**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2017-YL-019**

**İKİNCİ TİP VOLTERRA
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
KARARLILIK BÖLGELERİNİN İNCELENMESİ**

Neşe DEMİREL

**Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL**

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Neşe DEMİREL tarafından hazırlanan "İkinci Tip Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Kararlılık Bölgelerinin İncelenmesi" başlıklı tez, 30.05.2017 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT	Yaşar Üni. Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla .../.../2017 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

30.05.2017

Neşe DEMİREL

ÖZET

İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIK BÖLGELERİNİN İNCELENMESİ

Neşe DEMİREL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL
2017, 55 sayfa

Bu tez 2. tip Volterra-integro diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ve kararlılık bölgelerinin elde edilmesi ile ilgilidir. Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, ikinci tip Volterra-integro diferansiyel denklemler hakkında bilgi verilmiş olup integral denklemler ve 2.tip Volterra-integro diferansiyel denklemlerin özetle uygulama alanlarına değinilmiştir. Ayrıca ikinci tip Volterra-integro diferansiyel denklemler üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, ikinci tip Volterra integral denklemlerin nümerik çözümlerinin varlık ve teklifi ile ilgili koşullara değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, 2. Volterra integral denklem için nümerik metotlar ele alınmıştır ve 2. Volterra integral modelinin kararlılık bölgeleri incelenmiştir. Ayrıca gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm değerleri hesaplanarak sonuçlar tablo halinde gösterilmiştir.

Tezin son bölümünde ise 2. Volterra-integro diferansiyel denklemleri için nümerik metotlar ele alınmış ve bu denklemlerin kararlılık bölgeleri incelenmiştir. Elde edilen nümerik çözümler gerçek çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Volterra, Kararlılık Bölgesi, Integro-Diferansiyel Denklemler

ABSTRACT**EXAMINING STABILITY REGIONS OF SECOND TYPE VOLTERRA
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Neşe DEMİREL

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Korhan GÜNEL

2017, 55 pages

This thesis consists of obtaining the stability regions and numerical solutions of second kind Volterra-integro differential equations. This thesis essentially consists of five chapters.

In the introduction chapter, the information about the second kind Volterra integro-differential equations is given, and the applications the integral equations and second kind Volterra integro-differential equations are discussed briefly. In addition, the studies about second kind Volterra integro-differential equations that has been done so far is given.

In the second chapter, the conditions related to the existence and uniqueness of the numerical solution of second kind Volterra integral equations are mentioned.

In the third chapter, the numerical methods for second kind Volterra integral equations are tackled, and the stability regions of the second type are obtained. The exact solutions and obtained numerical results were also shown on a table for comparison.

In the last part of the thesis, the stability regions and numerical methods for second kind Volterra-integro differential equations are investigated. The obtained numerical solutions are compared with exact solutions.

Key Words: Volterra, Stability Regions, Integro-Differential Equations

ÖNSÖZ

Çalışmamda yardımını, sabrını, anlayışını ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam sayın Yard. Doç. Dr Korhan GÜNEL'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olup maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Neşe DEMİREL

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
ÇİZELGELER DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Volterra-İntegro Diferansiyel Denklemler	1
2. İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLER	5
2.1. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemler	5
2.2. Volterra İntegral Denklemin Diferansiyel Denklemlerle İlişkisi	5
2.3. Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüşmesi	7
2.4. İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi	10
2.5. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemleri ve Çözümün Varlığı	11
3. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM İÇİN NÜMERİK METOTLAR VE KARARLILIK ANALİZİ	13
3.1. Yamuklar Kuralı	13
3.2. Yamuklar Kuralının Kararlılığı	14
3.3. Simpson Kuralı ve Yamuklar Kuralı	21
3.4. Yamuklar Kuralı ve Simpson Kuralının Kararlılık Analizi	27
3.5. Simpson Kuralı	29
3.6. Simpson Yönteminin Kararlılığı	34
4. VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ	37
4.1. θ -Metodu	38
4.2. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Kararlılık Analizi	46
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	İntegrasyon sırasının değişimi.	6
Şekil 4.1	Açık Euler ve Yamuklar Kuralı için kararlılık bölgesi	41
Şekil 4.2	Kapalı Euler ve Yamuklar Kuralı için kararlılık bölgesi	44
Şekil 4.3	Yamuklar ve Yamuklar Kuralı için kararlılık bölgesi	46

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	$\lambda = 12$ ve $f(t) = 13e^{-t} - 12$ için 3.9 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri	17
Çizelge 3.2	$\lambda = -12$ ve $f(t) = 13e^{-t} - 12$ için 3.9 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri	18
Çizelge 3.3	$\lambda = 7$ ve $f(t) = 1$ için 3.9 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri	19
Çizelge 3.4	$\lambda = 1$ ve $f(t) = 1$ için 2.7 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri	20
Çizelge 3.5	Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı	22
Çizelge 3.6	$\lambda = -1, f(t) = \cos(t), t_{max} = 2$ için Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralının nümerik ve gerçek değerleri	23
Çizelge 3.7	Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve Yamuklar kuralı	25
Çizelge 3.8	$\lambda = -1, f(t) = \cos(t), t_{max} = 2$ için Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve Yamuklar kuralının nümerik ve gerçek değerleri	27
Çizelge 3.9	Simpson 1 Kuralı	30
Çizelge 3.10	Simpson1 Kuralı $\lambda = -1, f(t) = \cos(t), t_{max} = 2$ için nümerik ve gerçek değerleri	32
Çizelge 3.11	Simpson 2 Kuralı	33
Çizelge 3.12	Simpson2 Kuralı $\lambda = -1, f(t) = \cos(t), t_{max} = 2$ için nümerik ve gerçek değerleri	34
Çizelge 4.1	(4.1) denkleminin yakınsaklık mertebeleri	39
Çizelge 4.2	$\lambda = -1$ ve $f(t) = 1$ Yamuklar kuralı ve açık Euler metodunun gerçek çözümü $u(t) = \sin(t)$	41
Çizelge 4.3	$\lambda = -1$ ve $f(t) = 1$ Yamuklar kuralı ve kapalı Euler metodunun gerçek çözümü $u(t) = \sin(t)$	43
Çizelge 4.4	$\lambda = -1$ ve $f(t) = 1$ Yamuklar kuralının gerçek çözümü $u(t) = \sin(t)$	45

1. GİRİŞ

1.1. Volterra-İntegro Diferansiyel Denklemler

İntegral denklemlerin gerçek hayatta pek çok alanda uygulanabilirliğinden söz edilebilir. Bunlar matematik, fizik problemleri, mühendislik bilimleri, jeofizik, elektrik ve manyetizma, gazların kinetik teorisi, biyolojideki kalıtım olayları, kuantum mekaniği, matematiksel ekonomi ve kuyruk teorisi gibi alanlardır. Fiziksel olayların bir çok modellemeleri integro-diferansiyel denklemler ile ifade edilmektedir. Bu tip denklemler akışkanlar dinamiği, teorik fizik, salgın hastalıkların modellemeleri, biyolojik modellemeler, kimyasal kinetik, nano-hidrodynamic, cama şekil verme, çöldeki rüzgarların dalgalanma olayı gibi çeşitli alanlarda kullanılır. Diğer pek çok disiplinde lineer olmayan integro-diferansiyel denklemler de kendini göstermektedir.

İntegro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için çeşitli nümerik yöntemler yarım asırdan fazla bir süredir bilim insanlarını meşgul etmektedir [8]. Adomian ayrıştırma yöntemi, homotopi sapma yöntemi, hibrit fonksiyonları, tau yöntemi, Runge-Kutta yöntemleri, Galerkin yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi (Ji-Huan He tarafından önerilen) (VIM) nümerik çözüm yöntemlerinin başlıcalarındandır [14].

Son yıllarda, kuvvet serisi yöntemi (PSM), lineer Volterra integral denklemler sistemi ve ikinci tür Volterra denklem sistemi adı diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için kullanılır. Volterra integro-diferansiyel denklem ilk kez 1920'lerin sonlarına doğru Volterra tarafından verilmiştir [10]. Volterra araştırma çalışmalarında nüfus büyüme modelinin kalıtsal etkilerini incelemiştir. Bu araştırma çalışmaları benzer denklemlerle birlikte ortaya çıkan hem diferansiyel denklemler hem de integral operatörler ile sonuçlanmıştır. Volterra integro-diferansiyel denklem teorisi yarım yüzyıl içinde hızla gelişmiştir.

Matematikçi bilim adamları Volterra integral denklemini birinci ve ikinci tip olmak üzere ikiye ayırmışlardır. Birinci tip Volterra integral denklemi:

$$f(t) = \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad (t \geq a). \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir. (1.1) integral denkleminde f bilinen bir fonksiyon, t bilinmeyen bir fonksiyondur.

Lineer Volterra integral denklemin ikinci tipi :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad (t \geq a). \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilir. (1.2) integral denkleminde K çekirdek fonksiyonu olarak adlandırılır.

Lambert and Brunner (1973) Volterra integro-diferansiyel denklemlerin doğrusal çok adım metodu kullanarak elde edilen nümerik çözümler için zayıf kararlılık teorisini geliştirmiş ve bu teori ile ilgili diferansiyel denklemler teorisi arasında ilişki kurmuşlardır [4].

Baker ve Keech (1978), birinci ve ikinci tip Volterra integral denklemlerinin adımlar metodu ile nümerik çözümlerinde oluşabilecek yığılma hatalarını göz önünde bulundurarak bu denklemlerin kararlılık bölgelerini incelemiştir [6].

Houven and Wolkenfelt (1978), ikinci tür Volterra integral denklemler için çok adımlı metotların kararlılık özelliklerini analiz etmişlerdir [5].

Lineer çok adımlı metotlar, adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kuadratik kurullarla konvolüsyon tipinin temelini oluşturur. Lubich (1983), bu metotların kararlılığını Volterra integro-diferansiyel denklemleri ve ikinci tür Volterra integral denklemleri için incelemiştir [7].

John T Edwards, Neville J. Ford ve Jason A. Roberts (2003), (1.1) integral denkleminin çözümü için kararlılık özelliğinin yaklaşık çözümüne uygun bir şekilde yeniden üretilebileceğini göstermişlerdir [9].

Chengming Huang (2007), gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini incelemiştir [11]. Çok boyutlu lineer sistemler için Pouzet tipinin lineer çok adımlı metodun kararlılığını araştırmıştır. 0-Kararlı ve A-Kararlı çok adımlı metodun gecikmeli bağımsız kararlılığını tamamen korunabilirliğini kanıtlamıştır [11].

Huang ve Vandewalle (2009), gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için Runge-Kutta-Pouzet metodunun kararlılığı üzerine çalışmışlardır. Analitik ve nümerik kararlılık bölgeleri arasındaki kıyaslamaları incelemiştirler [12].

Tezin geri kalan bölümünün organizasyonu kısaca şöyledir. İkinci bölümde, ikinci tip Volterra integral denklemlerin diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi, diferansiyel denklemlerin Volterra integral denklemlere dönüştürülmesi ve nümerik çözümün varlığı ve tekliği konularına değinilecektir.

Üçüncü bölümde, ikinci tip Volterra integral denklemler için nümerik metotlar tanıtılacak (yamuklar kuralı, simpson $\frac{1}{3}$ ve simpson $\frac{3}{8}$ kuralları) ve örnekler ile yöntemlerden elde edilen yaklaşık çözümler, denklemlerin gerçek çözümleri ile karşılaştırılacaktır. Ayrıca kararlılık analizi yapılacaktır.

Dördüncü bölümde, ikinci tip Volterra-integro diferansiyel denklemlerinin nümerik metodları tanıtılacak ve nümerik metotlardan elde edilen çözümler gerçek çözümlerle karşılaştırılarak kararlılık bölgeleri çizilecektir.

2. İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLER

2.1. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemler

İntegral denklem ifadesi ilk olarak Du Bois-Reymond tarafından 1883 yılında ortaya atılmıştır. İntegral denklemler, lineer integral denklemler ve lineer olmayan integral denklemler olarak ikiye ayrılır. İntegral denklemler (2.1) denklemindeki gibi integral altında $u(s)$ gibi bir bilinmeyeni ihtiva eder. İkinci tip lineer Volterra integral denklem:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad t \geq a, \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. (2.1) denkleminde $f(t)$ bilinen bir fonksiyondur ve denklemini homojen yapmayan fonksiyon olarak isimlendirilir. $K(t, s)$ fonksiyonu integral denklemin çekirdeğidir. Bu tezde tekil olmayan çekirdekler ele alınacaktır. İkinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemini (2.2) eşitliği ile

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t \mathcal{K}(t, s, u(s))ds, \quad t \geq a, \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir.

2.2. Volterra İntegral Denklemin Diferansiyel Denklemlerle İlişkisi

Lineer integro-diferansiyel denklemlerin belirli türleri için, azaltma entegrasyonu doğrudan yapılabilir [8]. (2.3) şeklinde verilen bir lineer denklem düşünelim.

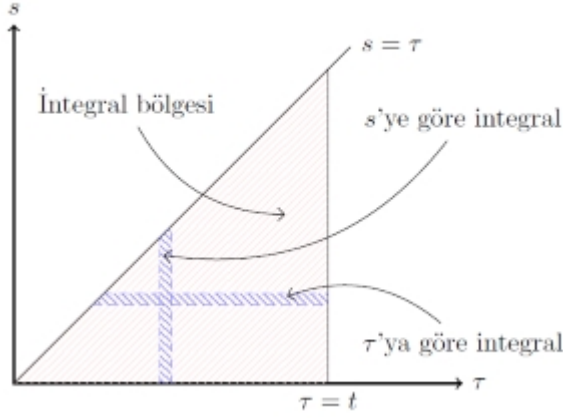
$$u'(t) = \int_0^t k(t, s)f(s)ds + g(t), \quad u(0) = u_0, \quad (2.3)$$

(2.3) denkleminin integrali alındığında,

$$u(t) = \int_0^t \int_0^\tau k(\tau, s)u(s)dsd\tau + G(t), \quad (2.4)$$

elde edilmiş olur. (2.4) denkleminde

$$G(t) = f_0 + \int_0^t g(\tau)d\tau.$$



Şekil 2.1. İntegrasyon sırasının değişimi.

biçimindedir. Bu integralde Şekil 2.1 ile gösterildiği üzere Analiz'in temel kurallarından biri olan integral sırasını değiştirme işlemi uygulanıp (2.4) integral denklemi tekrar düzenlenirse,

$$u(t) = \int_0^t M(t, s)f(s)ds + G(t), \quad (2.5)$$

denklemi elde edilir ve bu denklemde,

$$M(t, s) = \int_s^t k(\tau, s)d\tau. \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece (2.3) denklemi ikinci tip Volterra integro-diferansiyel denklemine dönüştürülmüş olur. $k(\tau, s) = \tau - s$ ifadesi (2.6) denkleminin çekirdeğidir.

Bu gibi argümanlar, yüksek mertebeden integro-diferansiyel denklemi, integral denkleme indirgemek için de kullanılabilir.

Tanım 2.1 (2.1) denkleminde çekirdek K , $(\tau - s)$ 'nin bir fonksiyonu olarak, $K(\tau, s) = k(\tau - s)$ şeklinde yazılabiliyor ise çekirdek K fonksiyonuna Volterra integral denkleminde konvolüsyon tipindeki çekirdek adı verilir.

Eğer integral denklemi lineer ve çekirdeği konvolüsyon tipinde ise bu integral denklemler Laplace Dönüşümü ile çözülebilir [8].

Örnek 2.2 Aşağıda verilen integral denklemini Laplace dönüşümü ile çözelim.

$$u(t) = 1 + \int_0^t \sin(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

Çözüm: (2.7) denkleminin Laplace dönüşümü $\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{L}\left(1 + \int_0^t \sin(t - \tau)u(\tau)d\tau\right)$ Laplace dönüşümü uygulanır ve elde edilen $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{U(s)}{s^2 + 1}$ denklemi düzenlenirse, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$ elde edilir.

Ardından $\mathcal{L}^{-1}(U(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right)$ eşitliğiyle verilen ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, $u(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$ gerçek çözümü elde edilir.

2.3. Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüşmesi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \quad (2.8)$$

lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Sayıları n tane olan, $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1, \dots, y^{n-1}(0) = c_{n-1}$ başlangıç koşullarının verildiğini kabul edelim.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

dönüşümünü uygularsak, bu ifade

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) = u(x), \\ \Rightarrow \int_0^x d \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) &= \int_0^x u(x)dx \\ \Rightarrow \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) &= \int_0^x u(x)dx + c_{n-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde hesaplanarak türev mertebesi, bir mertebe düşürülmüş olur. (2.9) ifadesini (2.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u(x) + a_1(x) \int_0^x u(t)dt + c_{n-1}a_1(x) + \cdots + c_1xa_n(x) + c_0a_n(x) = f(x)$$

elde edilir. Bu ifade de

$$u(x) + a_1(x) \int_0^t u(t)dt = f(x) - c_{n-1}a_1(x) - \cdots - c_1a_n(x) - c_0a_n(x) \quad (2.10)$$

şeklinde düzenlenirse, eşitliğin sağ tarafı x in bir fonksiyonu olup bu $F(x)$ ile gösterilebilir. Burada

$$a_{n-1}(x) + a_n(x) = f_1(x)$$

$$a_n(x) = f_0(x)$$

$a_1(x) + xa_2(x) + \cdots = f_{n-1}(x)$ şeklinde göstermek sureti ile (2.10) denklemi

$$F(x) = f(x) - c_{n-1}f_{n-1}(x) + \cdots + c_1f_1(x) + c_0f_0(x) \quad (2.11)$$

formuna dönüştürülür. Ayrıca

$$\left(\overbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x u(t)dt \cdots dt}^{n \text{ adet}} = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt \right) \quad (2.12)$$

denklemi tek katlı integral şeklinde ifade edilebilir.

Dolayısıyla,

$$u(x) + a_1(x) \int_0^x u(x)dx + \cdots + \overbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x u(x)dx \cdots dx}^{n \text{ adet}} = F(x)$$

bağıntısı (2.12) yardımıyla ve belirli integral özelliklerinden

$$u(x) = \int_0^x (a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)) u(t)dt = F(x) \quad (2.13)$$

biçimde yazılır. (2.13) denkleminde parantez içi ifade $K(x, t)$ fonksiyonu olarak göz önüne alınırsa,

$$K(x, t) = a_1(x) + \dots + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu çekirdek, fonksiyon olarak yerine yazılırsa genel formu (2.1) denklemi ile verilen ve aşağıdaki gibi elde edilen

$$F(x) = \int_0^x K(x, t)u(t)dt + u(x)$$

ikinci tip Volterra integral denklemine indirgemiş oluruz. Böylece (2.8) ile verilen diferansiyel denklem, bir integral denkleme dönüştürülmüş olur.

Örnek 2.3 :

$x = 0$ için $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları ile verilen, diferansiyel denklemi integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x, \quad (2.14)$$

Çözüm :

$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$ olsun. Bir kez integral alındığında $\frac{dy}{dx} = \int_0^x u(x)dx + c_1$

olur ve $y'(0) = 1$ başlangıç koşulu ile $\frac{dy}{dx} = 1 + \int_0^x u(x)dx$

halini alır. Tekrar integral alınırsa $y(0) = 0$ koşulu ile (2.12) ifadesinden

$$y(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.15)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem (2.14) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$u(x) = \cos(x) - x + \int_0^x (t-x)u(t)dt \quad (2.16)$$

ikinci tip Volterra integral denklemi elde edilmiş olur.

2.4. İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

İntegral denklemin diferansiyel denkleme dönüşmesi için Leibnitz formülünün uygulanması yeterlidir. Leibnitz formülü

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt &= \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt + F(x, B(x)) \frac{dB}{dx} \\ &\quad - F(x, A(x)) \frac{dA}{dx} \end{aligned} \quad (2.17)$$

olup, burada $A(x)$ ve $B(x)$ sabitler olması halinde, $\frac{dA}{dx} = 0$, $\frac{dB}{dx} = 0$ olacağından formül,

$$\frac{d}{dx} \int_A^B F(x,t)dt = \int_A^B \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt \quad (2.18)$$

olarak kullanılır.

Örnek 2.4 : Aşağıda verilen integral denklemi diferansiyel denkleme dönüştürelim.

$$\sin x = u(x) - \int_0^x u(t) \tan t dt \quad (2.19)$$

Çözüm: Verilen integral denklemde her iki tarafın türevi alınır ;

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \int_0^x u(t) \tan t dt = \cos x$$

denklemini elde ederiz. (2.17) eşitliği ile verilen Leibnitz formülüne göre,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x u(t) \tan t dt = \int_0^x 0 \cdot dt + u(x) \tan(x) \cdot 1 = u(x) \tan(x)$$

bulunur. Böylece (2.19) integral denklemi

$$u'(x) - u(x) \cdot \tan(x) = \cos(x)$$

şeklindeki, birinci mertebeden lineer diferansiyel denkleme dönüşür.

2.5. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemi ve Çözümün Varlığı

İkinci tür Volterra integro-diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü için nümerik metodun yaygın şekli

$$u(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t, s, u(s)) ds + f(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.20)$$

biçimindedir. (2.20) denkleminde $u(t)$ 'in bilinmediği, $f(t)$ fonksiyonu ile \mathcal{K} çekirdeğinin bilindiği varsayılmak üzere,

- $f(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ aralığında sürekli fonksiyon,
- $\mathcal{K}(t, s, z)$ çekirdeği $(0 \leq s \leq t \leq T)$, $-\infty < z < \infty$ aralığında sürekli,
- Çekirdek (2.21) eşitsizliği ile tanımlı Lipschitz koşulunu sağlayacak,

$$|\mathcal{K}(t, s, z_1) - \mathcal{K}(t, s, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|, \quad (2.21)$$

şekildeyse $0 \leq s \leq t \leq T$ ve $\forall z_1, z_2$ için $[0, T]$ aralığında $u(t)$ çözümü tek ve sürekli. Bu sonucun ispatı için bakınız [1–3, 8].

3. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM İÇİN NÜMERİK METOTLAR VE KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde (2.2) denkleminin $h > 0$ sabit adım uzunluğuna bağlı nümerik çözümlerini hesaplamak amacıyla, öncelikle $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ için $t_k = a + kh$ kuadratür noktalarını oluşturalım. (2.2) denkleminde $n = 1, 2, \dots$ için $u(t_n)$ denklemin t_n noktasındaki gerçek çözümünü ve $\tilde{u}(t_n)$ ise denklemin yaklaşık çözümünü belirtsin. Bu durumda (2.2) denkleminin sağ tarafında $t = t_n$ olarak nümerik integrasyon uygularsak yaklaşık çözümü elde edebiliriz. İntegrasyon kuralı kullanılırsa (2.2) denklemi

$$\int_a^{a+nh} g(t)dt \approx h \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} g(t_k) \quad (3.1)$$

formuna dönüşür. (3.1) integral denklemi yeniden düzenlenirse

$$\tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} K(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)), n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

denklemi elde edilir. Yaklaşık çözüm olan $\tilde{u}(t_n)$ değeri uygun koşullar altında tanımlıdır. Adımlar metodu ile hesaplamada başlangıçta yaklaşık çözüm $\tilde{u}(t_0) = \tilde{f}(t_0)$ olarak alınır. Eğer w_k ağırlık fonksiyonları düzgün sürekli ise, yeterince küçük h sabit adım uzunluğu ve Kısım 2.5 ile verilen koşullar altında denklemin tek çözümü vardır.

3.1. Yamuklar Kuralı

Yamuklar kuralını kullanıyorsak, $\tilde{u}(t_n)$ çözümü

$$\tilde{u}_n = f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} K(t_n, t_0, \tilde{u}_0) + \sum_{k=1}^{n-1} K(t_n, t_k, \tilde{u}_k) + \frac{1}{2} K(t_n, t_n, \tilde{u}_n) \right\}$$

biçimindedir.

Bu denklemi

$$\tilde{u}_n - \frac{\lambda h}{2} K(t_n, t_n, \tilde{u}_n) - X_n = 0, \quad (3.3)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. (3.3) denkleminde

$$X_n = f(t_n) + h \left(\frac{1}{2} K(t_n, t_0, \tilde{u}_0) + \sum_{k=1}^{n-1} K(t_n, t_k, \tilde{u}_k) \right), \quad (3.4)$$

olarak ifade edilmektedir.

3.2. Yamuklar Kuralının Kararlılığı

2. tip Volterra integral denklemlerinin nümerik kararlılığını incelemek için,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0), \quad u(0) = 1, \quad (3.5)$$

denklemini ele alalım. (3.5) denkleminde nümerik integrasyon uygularsak

$$\tilde{u}_n = f_n + \lambda \sum_{j=0}^n \alpha_{n,j} \tilde{u}_j, \quad n = r, r+1, \dots \quad (3.6)$$

elde ederiz. (3.6) denkleminde yamuklar kuralı gereğince $\alpha_{n,0} = \alpha_{n,n} = \frac{h}{2}$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $\alpha_{n,j} = h$ şeklindedir.

Bu durumda daha açık olarak,

$$\tilde{u}_n = f_n + h\lambda \left[\frac{1}{2} \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 + \dots + \tilde{u}_{n-1} + \frac{1}{2} \tilde{u}_n \right] \quad (3.7)$$

ve

$$\tilde{u}_{n+1} = f_{n+1} + h\lambda \left[\frac{1}{2} \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 + \dots + \tilde{u}_{n-1} + \tilde{u}_n + \frac{1}{2} \tilde{u}_{n+1} \right] \quad (3.8)$$

eşitlikleri yazılabilir. Eğer (3.8) denkleminde (3.7) denklemini çıkarırsak, $n = 1, 2, 3, \dots$ ve $\tilde{u}(0) = f(0)$ için $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ olacak şekilde $\Delta f_n = \tilde{u}_{n+1} \left(1 - \frac{\lambda h}{2} \right) - \tilde{u}_n \left(1 + \frac{\lambda h}{2} \right)$ elde edilir. Bu denklem düzenlenirse $\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)$ eşitliği elde edilir. \tilde{u}_n dizisinin en genel halini elde etmek için aşağıdaki işlemleri sırasıyla yapalım.

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_0 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)$$

$$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right) = \tilde{u}_0 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right) \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right) = \tilde{u}_0 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)^2$$

$$\tilde{u}_3 = \tilde{u}_2 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right) = \tilde{u}_0 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)^3$$

⋮

$\tilde{u}_n = \tilde{u}_0 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)^n$ dizisi oluşturulur. $\tilde{u}_0 = 1$ olduğunda \tilde{u}_n dizisinin yakınsak olabilmesi için yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)^n$$

limitinin var olması gerekmektedir.

Burada $\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| = \gamma$ olsun.

Eğer $|\gamma| < 1$, $\lambda < 0$, $h > 0$ verildiğinde $h > 0$ için integral denklem **kararlı** bir yapı sergiler.

Eğer $|\gamma| > 1$, $\lambda > 0$ ve $h > 0$ verildiğinde $h > 0$ için integral denklem **kararsız** bir yapı sergiler.

Örnek 3.1 ile 2. tip lineer Volterra integral denkleminin gerçek çözümü bulduktan sonra yaklaşık çözümü yamuklar yöntemi ile hesaplanmış ve farklı λ değerleri için integral denklemin nümerik kararlılık durumları adım adım incelenmiştir.

Örnek 3.1 $\lambda = 12$, $h = \frac{1}{5}$ ve $f(t) = 13e^{-t} - 12$ olmak üzere aşağıda verilen denklemin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini hesaplayalım.

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds, \quad (t \geq 0) \quad (3.9)$$

Gerçek Çözüm: (3.9) denkleminde Laplace dönüşümü uyguladığımızda

$$u(s) = \frac{13}{s+1} - \frac{12}{s} + \frac{12}{s} u(s)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$u(s) = \frac{1}{s+1}$$

denklemine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $u(t) = e^{-t}$ gerçek çözümü elde edilir.

Yaklaşık Çözüm:

$$u(t) = 13e^{-t} - 12 + \lambda \int_0^t u(s)ds$$

denklemine yamuklar kuralını uygulayalım.

$$\tilde{u}_n = 13e^{-t} - 12 + h\lambda \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} \tilde{u}_k, \quad n = r, r+1, \dots$$

Bu denkleminde yamuklar kuralı gereğince $\left(\alpha_{n,0} = \alpha_{n,n} = \frac{h}{2}\right)$ olarak belirlenir.

Böylece

$$u_n(t) = 13e^{-t} - 12 + h\lambda \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + \dots + u_{n-1} + \frac{u_n}{2}\right)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu denkleminde u_n çekilirse,

$I(i) = h\lambda \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + \dots + u_{n-1}\right)$ olmak üzere

$$u_n = \frac{13e^{-t} - 12 + I(i)}{1 - h\lambda}$$

yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Çizelge 3.1 ile $h = 0.2, 0.1$ ve 0.05 için elde edilen nümerik çözümler listelenmektedir.

Çizelge 3.1' i analiz edecek olursak görüldüğü üzere bulunan yaklaşık değerler birbirinden oldukça farklı ve kararsız bir davranış sergiler. Yukarıda $\gamma = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}$ olarak tanımlamıştık. $\lambda = 12$ ve $h = 0.2$ için $\gamma = -11$ olacaktır. h adım uzunluğu daima pozitiftir. Bu durumda $h > 0$ ve $\lambda > 0$ için $|\gamma| > 1$ olduğundan yukarıda bahsedildiği üzere metod kararsız bir yapı sergiler. Bu durum Çizelge 3.1'de gözlemlenmektedir.

Çizelge 3.1. $\lambda = 12$ ve $f(t) = 13e^{-t} - 12$ için 3.9 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri

	Nümerik	Nümerik	Nümerik	Gerçek
t_i	$h = 1/5$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.20	0.7825	0.8304	0.8209	0.8187
0.40	1.0392	0.8665	0.6974	0.6703
0.60	-3.5330	3.6962	0.8723	0.5488
0.80	45.3292	50.8142	4.2989	0.4493
1.00	-493.3267	806.2103	46.1610	0.3679
1.20	5430.9282	12893.7849	545.0327	0.3012
1.40	-59736.6612	206295.9895	6480.0793	0.2466
1.60	657106.1789	3300732.0914	77080.7950	0.2019
1.80	-7228165.5888	52811710.4004	916909.2956	0.1653
2.00	79509823.4247	844987363.8982	10907056.2249	0.1353

Örnek 3.2 $\lambda = -12$, $h = \frac{1}{5}$ ve $f(t) = 13e^{-t} - 12$ olmak üzere (3.9) denkleminin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini hesaplayalım.

Gerçek çözüm: (3.9) denkleminin Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$u(t) = \frac{24}{11}e^{-12t} - \frac{13}{11}e^{-t}$$

gerçek çözümü elde edilir.

Yaklaşık Çözüm:(3.9) denkleminin yamuklar kuralı uygulandığında, $I(i) = h\lambda\left(\frac{u_0}{2} + u_1 + \dots + u_{n-1}\right)$ olmak üzere

$$u_n = \frac{13e^{-t} - 12 - I(i)}{1 + h\lambda}$$

yaklaşık çözümü elde edilir. Farklı h değerleri için bahsedilen integral denklemin nümerik çözümleri Çizelge 3.2'de listelenmiştir.

Çizelge 3.2' i analiz edelim. Çizelgede görüldüğü gibi bulunan yaklaşık değerler birbirine olabildiğince yakın ve kararlı bir davranış sergiler. Yukarıda $\gamma = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}$ olarak tanımlamıştık. $\lambda = -12$ ve $h = 0.2$ için $\gamma = 0.09090$ olarak bulunur. $h > 0$ ve $\lambda < 0$ için $|\gamma| < 1$, o halde $h > 0$ için bu metod kararlıdır.

Çizelge 3.2. $\lambda = -12$ ve $f(t) = 13e^{-t} - 12$ için 3.9 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri

t_i	Nümerik $h = 1/5$	Nümerik $h = 1/10$	Nümerik $h = 1/20$	Gerçek
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.20	-1.1620	-0.8304	-0.7840	-0.7697
0.40	-0.7713	-0.7830	-0.7766	-0.7742
0.60	-0.6479	-0.6475	-0.6472	-0.6470
0.80	-0.5290	-0.5305	-0.5308	-0.5309
1.00	-0.4332	-0.4344	-0.4347	-0.4348
1.20	-0.3547	-0.3556	-0.3559	-0.3560
1.40	-0.2904	-0.2912	-0.2914	-0.2914
1.60	-0.2377	-0.2384	-0.2386	-0.2386
1.80	-0.1946	-0.1952	-0.1953	-0.1954
2.00	-0.1594	-0.1598	-0.1599	-0.1599

Örnek 3.3 $\lambda = 7$, $h = \frac{1}{5}$ ve $f(t) = 1$ için (3.9) integral denkleminin gerçek çözümü ve yaklaşık değerini hesaplayalım.

Gerçek Çözüm:(3.9) denklemin Laplace dönüşümü uyguladığımızda

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

gerçek çözümünü elde ederiz.

Yaklaşık Çözüm: (3.9) denklemin yamuklar kuralı uygulandığında $I(i) = h\lambda \left[\frac{u_0}{2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2} \right]$ olmak üzere,

$$u_n = \frac{1 + I(i)}{1 - h\lambda}$$

Tablo 3.3 ile farklı h değerleri için örneklenen yaklaşık çözüm elde edilmiş olur.

Çizelge 3.3. $\lambda = 7$ ve $f(t) = 1$ için 3.9 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri

t_i	Nümerik	Nümerik	Nümerik	Gerçek
	$h = 1/5$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.20	5.6667	4.3136	4.1147	4.0552
0.40	32.1111	18.6072	16.9306	16.4446
0.60	181.9630	80.2643	69.6638	66.6863
0.80	1031.1235	346.2289	286.6439	270.4264
1.00	5843.0329	1493.4962	1179.4468	1096.6332
1.20	33110.5199	6442.3593	4853.0418	4447.0667
1.40	187626.2794	27789.8221	19968.6960	18033.7449
1.60	1063215.5831	119874.4395	82164.7197	73130.4418
1.80	6024888.3045	517091.5172	338081.2225	296558.5653
2.00	34141033.7254	2230530.8643	1391094.7844	1202604.2842

Çizelge 3.3 ü incelediğimizde, bulunan yaklaşık değerler birbirinden oldukça farklıdır. $\gamma = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}$ olarak tanımladık. Burada $\lambda = 7$ ve $h = \frac{1}{5}$ için $\gamma = 5.\bar{6}$ olarak bulunur. $h > 0$ ve $\lambda > 0$ için $\gamma > 1$ olduğunda Çizelge 3.3'de gözlenebileceği üzere bu metot kararsızdır.

Örnek 3.4 $\lambda = 1$ ve $f(t) = 1$ için (2.7) denkleminin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini hesaplayalım.

Gerçek Çözüm: (2.7) denkleme Laplace dönüşümü uygulandığında, $u(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$ gerçek çözümü elde edileceğini gösterdik.

Yaklaşık Çözüm: (2.7) denkleme yamuklar kuralı uygulandığında, $I(i) = \left[\frac{\sin(t_i - t_0)u_0}{2} + \dots + \sin(t_i - t_{i-1})u_{i-1} \right]$ olmak üzere $u_i = 1 + I(i)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Farklı h sabit adım uzunlukları için elde edilen nümerik çözümler Çizelge 3.4 ile özetlenmiştir.

Çizelge 3.4. $\lambda = 1$ ve $f(t) = 1$ için 2.7 denkleminin nümerik ve gerçek değerleri

t_i	Nümerik $h = 1/5$	Nümerik $h = 1/10$	Nümerik $h = 1/20$	Gerçek
0.00	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.20	1.01986693	1.01996664	1.01999165	1.02000000
0.40	1.07946509	1.07986590	1.07996645	1.08000000
0.60	1.17878655	1.17969579	1.17992389	1.18000000
0.80	1.31781809	1.31945297	1.31986314	1.32000000
1.00	1.49654125	1.49913279	1.49978304	1.50000000
1.20	1.71493223	1.71872927	1.71968208	1.72000000
1.40	1.97296202	1.97823509	1.97955843	1.98000000
1.60	2.27059629	2.27764161	2.27940993	2.28000000
1.80	2.60779546	2.61693885	2.61923408	2.62000000
2.00	2.98451469	2.99611552	2.99902805	3.00000000

3.3. Simpson Kuralı ve Yamuklar Kuralı

Simpson $\frac{1}{3}$ ve $\frac{3}{8}$ kuralları

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(t, s, u(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.10)$$

denkleminde kolaylıkla uygulanabilir. Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı aralık sayısı çift ise ve $\frac{3}{8}$ kuralı ise aralık sayısı 3 ile bölünebiliyorsa uygulanır. Eğer aralık sayısı çift değil ise yamuklar kuralı uygulanarak

$$\int_a^{a+nh} g(t) dt \approx h \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} g(t_k), \quad (3.11)$$

değeri hesaplanır. Ek olarak, Yamuklar kuralı, Simpson kuralı ile (3.11) denklemindeki değişimleri vermek için birleştirilebilir. Örneğin, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\int_0^{(2n+1)h} g(t) dt \approx \frac{h}{2}(g(0) + g(h)) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n g(2kh) + \frac{2h}{3} \sum_{k=0}^n g((2k+1)h), \quad (3.12)$$

şeklinde verebiliriz.

(3.12) denkleminde, n, h sabit ve $h \rightarrow 0$ iken Yamuklar ve Simpson $1/3$ yöntemleri sırayla $O(h^4)$ ve $O(h^3)$ yerel kesme hatasını verir. n aralık sayısını belirtmek üzere, eğer n çift sayı ise 3.11 denklemindeki α ağırlıkları aşağıdaki eşitliklerle belirlenir.

$$\alpha_{n,0} = \alpha_{n,n} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Eğer n tek sayı ise denklemin baş kısımlarına Yamuklar kuralını uygulamak için ağırlık fonksiyonu olarak;

$$\alpha_{n,0} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2},$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2} - 1,$$

$$\alpha_{n,n-1} = \frac{5}{6} \text{ için } n \geq 3;$$

$$\alpha_{n,n} = \frac{1}{2} \text{ için } n \geq 3.$$

katsayıları kullanılır.

Nümerik çözüm için 2.tip Volterra integral denklemi $\alpha_{n,k}$ ağırlık değerleri Çizelge (3.5) ile verilmiştir.

Çizelge 3.5. Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$					
3	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$			
5	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3} + \frac{h}{3}$			
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$	
⋮				

Örnek 3.5 $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$ için (3.9) denkleminin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini Simpson 1 kuralı yardımıyla hesaplayalım.

Gerçek Çözüm: (3.9)denklemin Laplace dönüşümü uygulandığında, $u(t) = \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t) + e^{-t})$ gerçek çözümü elde edilir.

Yaklaşık Çözüm:

(3.9) denkleminde Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı uygulandığında, $I(i) = \left[\frac{h}{2} K(t_i, t_0)u_0 + \dots + K(t_i, t_{i-1})u_{i-1} \right]$ olmak üzere

$$u_i = \frac{\cos(t) + \lambda I(i)}{1 - \frac{h\lambda}{3} K(t(i), t(i))} \quad (3.13)$$

iterasyon formülü elde edilir ve bu iterasyon kullanılarak Çizelge 3.6 ile verilen nümerik çözümler bulunur.

Çizelge 3.6. $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$, $t_{max} = 2$ için Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralının nümerik ve gerçek değerleri

t	nümerik	nümerik	gerçek
t_i	$h = 1/5$	$h = 1/10$	
0.2	0.80006053	0.80006392	0.80006400
0.4	0.60097955	0.60098122	0.60098135
0.6	0.40474779	0.40475224	0.40475239
0.8	0.21433802	0.21433965	0.21433979
1.0	0.03335109	0.03335527	0.03335538
1.2	-0.13424415	-0.13424364	-0.13424356
1.4	-0.28444597	-0.28444284	-0.28444281
1.6	-0.41343709	-0.41343828	-0.41343830
1.8	-0.51787712	-0.51787534	-0.51787542
2.0	-0.59505128	-0.59505435	-0.59505449

Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ metodu uygulandığında Çizelge(3.5) elde edilir. (2.20) denkleminde $f(t)$ ve K fonksiyonu yeterince düzgün ise (3.1) yaklaşık denklemin 2.mertebeden yakınsaktır. Yamuklar kuralı oldukça basittir, fakat doğruluğu yeterince hassas değildir. Simpson kuralı daha kesin sonuçlar vermektedir.

İkinci yaklaşım olarak, eğer n tek sayı ise denklemin son kısımlarına Yamuklar kuralını uygulanırsa,

$$\int_0^{(2n+1)h} g(t)dt \approx \frac{4h}{3} \sum_{k=0}^{n-1} g(2kh) + \frac{2h}{3} \sum_{k=0}^n g((2k+1)h) + \frac{h}{2} g(2nh) + g((2n+1)h), \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir.

Verilen dizinin yerel kesme hatası $h \rightarrow 0$ iken $O(h^3)$ ile belirlenir. Bu yaklaşımda nümerik çözüm için 2.tip Volterra integral denkleminin α ağırlık fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır ve ağırlık katsayıları Çizelge (3.7) ile verilmiştir.

Eğer n çift sayı ise:

$$\alpha_{n,0} = \alpha_{n,n} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Eğer n tek sayı ise:

$$\alpha_{n,0} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{n,1} = \frac{5}{6} \quad \text{için } n \geq 3;$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2};$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{2}{3} \quad \text{için } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2} - 1,$$

$$\alpha_{n,n} = \frac{1}{3} \quad \text{için } n \geq 3.$$

katsayıları kullanılmaktadır.

Çizelge 3.7. Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve Yamuklar kuralı

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$					
3	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$				
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$			
5	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$		
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$	
⋮				

Örnek 3.6 $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$ için (3.9) denkleminin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini hesaplayalım.

Gerçek Çözüm: (3.9) denkleme Laplace dönüşümü uygulandığında, $u(t) = \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t) + e^{-t})$ gerçek çözümü elde edilir.

Yaklaşık Çözüm:

(3.9) denkleme Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve yamuklar kuralı uygulandığında, $I(i) = \left[\frac{h}{2} K(t_i, t_0)u_0 + \dots + K(t_i, t_{i-1})u_{i-1} \right]$ olmak üzere

$$u_i = \frac{\cos(t) + \lambda I(i)}{1 - \frac{h\lambda}{3} K(t(i), t(i))} \quad (3.15)$$

iterasyon formülü bulunur ve bu iterasyon kullanılarak Çizelge 3.8 ile verilen yaklaşık çözümler hesaplanır.

Çizelge 3.8. $\lambda = -1, f(t) = \cos(t), t_{max} = 2$ için Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve Yamuklar kuralının nümerik ve gerçek değerleri

t	nümerik	nümerik	gerçek
t_i	$h = 1/5$	$h = 1/10$	
0.2	0.80006053	0.80006392	0.80006400
0.4	0.60097955	0.60425877	0.60098135
0.6	0.36826447	0.40991178	0.40475239
0.8	0.22345885	0.22024476	0.21433979
1.0	0.02710118	0.03909484	0.03335538
1.2	-0.12470095	-0.12938060	-0.13424356
1.4	-0.26937097	-0.28098655	-0.28444281
1.6	-0.40885553	-0.41175381	-0.41343830
1.8	-0.48974138	-0.51817637	-0.51787542
2.0	-0.59807635	-0.59741628	-0.59505449

3.4. Yamuklar Kuralı ve Simpson Kuralının Kararlılık Analizi

İlk olarak Yamuklar kuralı ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralını inceledik. (3.9) denkleminde $f(t) = 1$ ve $K(t, s) = 1$ alınarak aralık sayısı çift ve tek nokta aralıklarında Simpson $\frac{1}{3}$ kuralını uyguladık. Simpson $\frac{1}{3}$, Simpson $\frac{3}{8}$ ve Yamuklar kuralının sayısal çözümleri incelendi. Ağırlık fonksiyonları çizelgeler halinde gösterildi. Şimdi (3.9) denkleminin kararlılığını Yamuklar kuralı ve Simpson kuralını kullanarak inceleyelim.

$$\tilde{u}_0 = 1,$$

$$\tilde{u}_1 = 1 + \frac{h\lambda}{2} [\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1],$$

$$\tilde{u}_2 = 1 + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2],$$

$$\tilde{u}_3 = 1 + h\lambda \left[\frac{1}{2}(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1) + \frac{1}{3}(\tilde{u}_1 + 4\tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) \right]$$

İşlemler tekrar edilirse iterasyon formülü

n çift ise;

$$\tilde{u}_n = 1 + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + 2\tilde{u}_2 + \dots + 2\tilde{u}_{n-2} + 4\tilde{u}_{n-1} + \tilde{u}_n],$$

$$\tilde{u}_{n+2} = 1 + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + 2\tilde{u}_2 + \dots + 2\tilde{u}_{n-2} + 4\tilde{u}_{n-1} + 2\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+2}],$$

n tek ise;

$$\tilde{u}_n = 1 + h\lambda \left[\frac{1}{2}(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1) + \frac{1}{3}(\tilde{u}_1 + 4\tilde{u}_2 + \dots + 2\tilde{u}_{n-2} + 4\tilde{u}_{n-1} + \tilde{u}_n) \right]$$

$$\tilde{u}_{n+2} = 1 + h\lambda \left[\frac{1}{2}(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1) + \frac{1}{3}(\tilde{u}_1 + 2\tilde{u}_2 + \dots + 2\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+2}) \right],$$

olacak şekilde genelleştirilir. Böylece,

$$\tilde{u}_{n+2} - \tilde{u}_n = \frac{h\lambda}{3} [(\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+2})], n = 0, 1, 2, \dots$$

eşitliği elde edilir. Denklemleri tekrar düzenlediğimizde,

$$\tilde{u}_{n+2} \left(1 - \frac{h\lambda}{3} \right) - \tilde{u}_{n+1} \frac{4h\lambda}{3} - \tilde{u}_n \left(1 + \frac{h\lambda}{3} \right) = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) denkleminde $\alpha = \left(1 - \frac{h\lambda}{3} \right)$, $\beta = -\frac{4h\lambda}{3}$ ve $\gamma = -\left(1 + \frac{h\lambda}{3} \right)$ olarak alındığında,

$$\alpha\tilde{u}_{n+2} + \beta\tilde{u}_{n+1} + \gamma\tilde{u}_n = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu iterasyon denkleminin genel çözümü, $\tilde{u}_n = At_1^n + Bt_2^n$, formundadır. Bu denklemde karakteristik denklem $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, şeklindedir ve ($t_1 \neq t_2$) olmak üzere t_1 ve t_2 denklemin kökleri $t_{1,2} = \frac{-\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ olarak bulunur. Verilen h ve λ değişkenlerine bağlı kuvvet serisi $t_1 = 1 + h\lambda + O(h^2)$ ve $t_2 = -\left(1 - \frac{h\lambda}{3} \right) + O(h^2)$ için düzenlenirse, $t_1 - t_2 = 2\left(1 + \frac{h\lambda}{3} \right) + O(h^2)$ olarak bulunur.

$\tilde{u}(0) = 1$ ve $At_1 + Bt_2 = \tilde{u}(1)$ alındığında

$$A + B = 1$$

ve

$$At_1 + Bt_2 = \tilde{u}(1) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}$$

elde edilir. Buradan $A = \frac{\tilde{u}_1 - t_2}{t_1 - t_2}$, $B = 1 - A = \frac{t_1 - u_1}{t_1 - t_2}$ olarak bulunur.

Nihayetinde kh sabit olmak üzere, $\lim_{h \rightarrow 0} B = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} A = 1$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} t_1^k = e^{(\lambda kh)}$.

Sonuç olarak $|\tilde{u}(k) - u(kh)| \rightarrow 0$ elde edilir.

3.5. Simpson Kuralı

Simpson kuralı potansiyel olarak Trapez kuralına göre daha kesin sonuçlar verir, fakat yalnızca n aralık sayısı çift olduğunda uygulanabilir. Adım sayısı tek olduğunda ek bir formül kullanılmalıdır. Standart Simpson metodunun çift olmayan adım aralıklarında Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı uygulanabilmektedir. Eğer Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı t_0, t_1, t_2, t_3 , noktalarında kullanıldı ise ağırlık fonksiyonu olarak aşağıdaki katsayılar kullanılır. Eğer $n \geq 2$ için verilen katsayılar:

n çift sayı ise ;

$$\alpha_{n,0} = \alpha_{n,n} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

n tek sayı ise;

$$\alpha_{n,0} = \frac{3}{8},$$

$$\alpha_{n,1} = \alpha_{n,2} = \frac{9}{8},$$

$$\alpha_{n,3} = \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n3},$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{4}{3}, \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2},$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{2}{3}, \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2},$$

$$\alpha_{n,n} = \frac{1}{3} \text{ için } n \geq 5.$$

katsayıları kullanılmaktadır. $\alpha_{n,k}$ ağırlık fonksiyonlarının tablosu Çizelge 3.9 ile verilmiştir.

Çizelge 3.9. Simpson 1 Kuralı

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$							
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$						
3	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$					
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
5	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$			
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$		
7	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8} + \frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$	
⋮					

Burada Kronecker δ_{ij} temsil eder;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = j, \\ 0 & \text{eğer } i \neq j, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlık fonksiyonlarının sayısal gösterimi Simpson 1 kuralı olarak adlandırılır ve dördüncü mertebeden yakınsama verir.

Örnek 3.7 $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$ için (3.9) denkleminin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini Simpson 1 kuralı yardımıyla hesaplayalım.

Gerçek Çözüm: (3.9) denkleminde Laplace dönüşümü uygulandığında, $u(t) = \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t) + e^{-t})$ gerçek çözümü elde edilir.

Yaklaşık Çözüm:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0 &= \cos(t), \\ \tilde{u}_1 &= \cos(t) + \frac{h\lambda}{2} [\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1], \\ \tilde{u}_2 &= \cos(t) + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2], \\ \tilde{u}_3 &= \cos(t) + \frac{3h\lambda}{8} [\tilde{u}_0 + 3\tilde{u}_1 + 3\tilde{u}_2 + \tilde{u}_3]\end{aligned}$$

denklemleri genelleştirildiğinde

n tek ise;

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= \cos(t) + \frac{3h\lambda}{8}(\tilde{u}_0 + 3\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) + \frac{9h\lambda}{24}\tilde{u}_3 + \frac{4h\lambda}{3}\tilde{u}_4 + \frac{2h\lambda}{3}\tilde{u}_5 \\ &+ \dots + \frac{4h\lambda}{3}\tilde{u}_{n-1} + \frac{h\lambda}{3}\tilde{u}_n\end{aligned}\quad (3.17)$$

n çift ise;

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{n+2} &= \cos(t) + \frac{3h\lambda}{8}(\tilde{u}_0 + 3\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) + \frac{9h\lambda}{24}\tilde{u}_3 + \frac{4h\lambda}{3}\tilde{u}_4 + \frac{2h\lambda}{3}\tilde{u}_5 \\ &+ \dots + \frac{2h\lambda}{3}\tilde{u}_n + \frac{4h\lambda}{3}\tilde{u}_{n+1} + \frac{h\lambda}{3}\tilde{u}_{n+2}\end{aligned}\quad (3.18)$$

elde edilir. Tekrar düzenlenirse

$\tilde{u}_{n+2} - \tilde{u}_n = \frac{h\lambda}{3}[(\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+2})]$, genel hali elde edilmiş olur. Çizelge 3.10 ile yaklaşık değerler verilmiştir.

Eğer Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı $t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$, noktalarında kullanıldı ise ağırlık fonksiyonu olarak aşağıdaki katsayılar kullanılır. $\alpha_{n,k}$ ağırlık fonksiyonları Çizelge 3.11 ile verilmiştir.

n çift sayı ise ;

$$\begin{aligned}\alpha_{n,0} &= \alpha_{n,n} = \frac{1}{3}, \\ \alpha_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\ \alpha_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Çizelge 3.10. Simpson1 Kuralı $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$, $t_{max} = 2$ için nümerik ve gerçek değerleri

t	nümerik	nümerik	gerçek
t_i	$h = 1/5$	$h = 1/10$	
0.2	0.80006053	0.80006392	0.80006400
0.4	0.60097955	0.60098123	0.60098135
0.6	0.40474567	0.40475227	0.40475239
0.8	0.21433855	0.21433969	0.21433979
1.0	0.03334910	0.03335531	0.03335538
1.2	-0.13424319	-0.13424358	-0.13424356
1.4	-0.28444796	-0.28444278	-0.28444281
1.6	-0.41343575	-0.41343821	-0.41343830
1.8	-0.51787918	-0.51787526	-0.51787542
2.0	-0.59504959	-0.59505426	-0.59505449

n tek sayı ise;

$$\alpha_{n,0} = \frac{1}{3}, n \geq 5,$$

$$\alpha_{n,2k} = \frac{2}{3}, k = 1, 2, 3, \dots, \frac{n-5}{2},$$

$$\alpha_{n,2k+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}, k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-5}{2},$$

$$\alpha_{n,n-3} = \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n3},$$

$$\alpha_{n,n-1} = \frac{9}{8},$$

$$\alpha_{n,n} = \frac{3}{8}.$$

Çizelge 3.11. Simpson 2 Kuralı

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$							
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$						
3	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$					
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
5	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$			
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$		
7	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{3h}{8} + \frac{h}{3}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	
⋮					

Örnek 3.8 $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$ için (3.9) denkleminin gerçek çözümünü ve yaklaşık değerini Simpson 2 kuralı yardımıyla hesaplayalım.

Gerçek Çözüm: (3.9) denkleme Laplace dönüşümü uygulandığında, $u(t) = \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t) + e^{-t})$ gerçek çözümü elde edilir.

Yaklaşık Çözüm:

$$\tilde{u}_0 = \cos(t),$$

$$\tilde{u}_1 = \cos(t) + \frac{h\lambda}{2} [\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1],$$

$$\tilde{u}_2 = \cos(t) + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2],$$

$$\tilde{u}_3 = \cos(t) + \frac{\lambda h}{8} [3\tilde{u}_0 + 9\tilde{u}_1 + 9\tilde{u}_2 + 3\tilde{u}_3]$$

⋮

Sonuç olarak, n çift sayı ise;

$$\tilde{u}_n = \cos(t) + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \dots + 4\tilde{u}_{n-1} + \tilde{u}_n],$$

$$\tilde{u}_{n+2} = \cos(t) + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \dots + 2\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+2}],$$

n tek sayı ise;

$$\tilde{u}_n = \cos(t) + \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_0 + 4\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2] + \frac{h\lambda}{8} [3\tilde{u}_2 + \dots + 9\tilde{u}_{n-1} + 3\tilde{u}_n]$$

Çizelge 3.12. Simpson2 Kuralı $\lambda = -1$, $f(t) = \cos(t)$, $t_{max} = 2$ için nümerik ve gerçek değerleri

t	nümerik	nümerik	gerçek
t_i	$h = 1/5$	$h = 1/10$	
0.2	0.80006053	0.80006392	0.80006400
0.4	0.60097955	0.60098123	0.60098135
0.6	0.40474567	0.40475226	0.40475239
0.8	0.21433855	0.21433967	0.21433979
1.0	0.03335204	0.03335528	0.03335538
1.2	-0.13424393	-0.13424364	-0.13424356
1.4	-0.28444255	-0.28444286	-0.28444281
1.6	-0.41343775	-0.41343831	-0.41343830
1.8	-0.51787202	-0.51787539	-0.51787542
2.0	-0.59505313	-0.59505442	-0.59505449

3.6. Simpson Yönteminin Kararlılığı

İkinci tip lineer Volterra integral denklemi;

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t u(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (3.19)$$

biçimindedir. Bu denkleme Yamuklar kuralını ve Simpson kuralını uygulayalım.

$$\tilde{u}_n = f_n + \lambda \sum_{j=0}^n \alpha_{n,j} \tilde{u}_j, \quad n = r, r+1, \dots \quad (3.20)$$

$$u_0 = 1,$$

$$u_1 = 1 + \frac{h\lambda}{2} [u_0 + u_1],$$

$$u_2 = 1 + \frac{h\lambda}{3} [u_0 + 4u_1 + u_2],$$

$$u_3 = 1 + h\lambda \left[\frac{u_0}{2} + \frac{5u_1}{6} + \frac{4u_2}{3} + \frac{u_3}{3} \right],$$

$$u_4 = 1 + \frac{h\lambda}{3} [u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_4]$$

⋮

$$u_{n-1} = 1 + h\lambda \left[\frac{1}{2}u_0 + \frac{5}{6}u_1 + \frac{4u_2}{3} + \dots + \frac{4u_{n-2}}{3} + \frac{u_{n-1}}{3} \right],$$

$u_{n+1} = 1 + h\lambda \left[\frac{u_0}{2} + \frac{5u_1}{6} + \frac{4u_2}{3} + \dots + \frac{2u_{n-1}}{3} + \frac{4u_n}{3} + \frac{u_{n+1}}{3} \right]$ elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_{n-1} = \frac{h\lambda}{3} [\tilde{u}_{n-1} + 4\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1}], \quad n = 1, 3, \dots$$

olarak bulunur. Denklem yeniden düzenlenirse,

$$\tilde{u}_{n+1} \left(1 - \frac{h\lambda}{3} \right) - \tilde{u}_n \frac{4h\lambda}{3} - \tilde{u}_{n-1} \left(1 + \frac{h\lambda}{3} \right) = 0$$

bulunur. Bu denklemin köklerini bulmak için,

$$\left(1 - \frac{h\lambda}{3} \right) \mu^2 - \frac{4h\lambda}{3} \mu - \left(1 + \frac{h\lambda}{3} \right) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $h\lambda$ reel ise, $h\lambda \neq 0$ iken, köklerden biri, $\mu = \pm 1$ iken $h\lambda = 0$ ve $|\mu| > 1$ elde edilir.

4. VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ

Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin genel formu;

$$u'(t) = F \left(t, u(t), \int_0^t K(t, s, u(s)) ds \right), u(0) = u_0 \quad (4.1)$$

şekindedir. Bölüm boyunca (4.1) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminin eşsiz çözümünün varlığı için F ve K fonksiyonları düzgün yakınsak varsayılacaktır.

Burada $n = 0, 1, \dots$ için $t_n = t_0 + nh$ kuadratür noktalarında elde edilen değerler olan $u(t_n)$ gerçek çözümü ve \tilde{u}_n ise t_n noktasındaki yaklaşık çözümünü belirtir. F ve K sürekli fonksiyonlar olmak üzere basit Lipschitz koşulları,

$$|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)| \leq L_1 |u_1 - u_2|,$$

$$|F(t, v_1, w) - F(t, v_2, w)| \leq L_2 |v_1 - v_2|,$$

$$|F(t, v, w_1) - F(t, v, w_2)| \leq L_3 |w_1 - w_2|,$$

eşitsizlikleri ile verilir. $0 \leq s \leq t \leq T$ için Lipschitz koşullarını sağlayan (4.1) denklemi sürekli türemlenebilir benzersiz çözüme sahiptir.

Baker ve Keech [6], Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini incelemek için, (4.2) eşitliği ile verilen ikinci tip test denklemi üzerinde çalışmışlardır.

$$f(t) - \lambda \int_0^t f(u) du = g(t), \quad (4.2)$$

(4.2) denklemi, türevi alınarak adi diferansiyel denkleme indirgenebildiğinden dolayı özeldir. Bu işlem sonucunda aşağıdaki birinci mertebeden test denklemi elde edilir.

$$f'(t) = \lambda f(t) + g'(t),$$

Şimdi (4.1) formundaki integro diferansiyel denklemin nümerik çözümünü elde edebilmek amacıyla θ metodunu inceleyelim.

4.1. θ -Metodu

(4.1) denkleminde θ -metodu uygulanırsa $\theta \in [0, 1]$ için

$$\tilde{z}(t_n) = h \sum_{j=0}^n w_{n,j} K(t_n, t_j, \tilde{u}_j) \approx \int_{t_0}^{t_n} K(t, s, u(s)) ds$$

olacak şekilde (5.1) eşitliği elde edilir.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h[(1 - \theta)F(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n) + \theta F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})] \quad (4.3)$$

Eğer θ metodu için $\theta = 0, \frac{1}{2}$ veya 1 olarak alınır, $w_{n,j} = 1$ katsayı değerleriyle birlikte,

$$\tilde{z}(t_n) = h(1 - \theta)K(t_n, t_0, \tilde{u}_0) + h \sum_{j=1}^{n-1} w_{n,j} K(t_n, t_j, \tilde{u}_j) + \theta h K(t_n, t_n, \tilde{u}_n)$$

integrali yaklaşık olarak hesaplanabilir.

(5.1) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ koyulduğunda

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{h}{2} [F(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n) + F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})]. \quad (4.4)$$

denklemini elde ederiz. O zaman kullanılan yamuklar kuralı,

$$\tilde{z}(t_n) = \frac{h}{2} K(t_n, t_0, \tilde{u}_0) + h \sum_{j=1}^{n-1} K(t_n, t_j, \tilde{u}(t_j)) + \frac{h}{2} K(t_n, t_n, \tilde{u}_n)$$

biçimindedir ve yerel kesme hatası aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Eğer K ve F yeterince pürüzsüz ise yamuklar kuralının yakınsaklık mertebesi $O(h^3)$ olarak belirlenir ve uygun Lipschitz koşulları altında, $h \rightarrow 0$ iken K ve F fonksiyonları $\sup_{0 \leq t_r \leq T} |u(t_r) - \tilde{u}_r| = O(h^2)$ koşulunu sağlar.

Eğer $\theta = 0$ alınır (5.1) denklemini,

$$\tilde{z}(t_n) = h \sum_{j=0}^{n-1} K(t_n, t_j, \tilde{u}(t_j))$$

olacak şekilde

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + hF(t_n, \tilde{u}(t_n), \tilde{z}(t_n)) \quad (4.5)$$

açık Euler metodu formuna dönüşür ve yerel kesme hatası $O(h^2)$ olan, $O(h)$ mertebeden yakınsaktır.

$\theta = 1$ alındığında (5.1) denklemini

$$\tilde{z}(t_n) = h \sum_{j=1}^n K(t_n, t_j, \tilde{u}(t_j))$$

olacak şekilde

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + hF(t_{n+1}, \tilde{u}(t_{n+1}), \tilde{z}(t_{n+1})). \quad (4.6)$$

eşitliğiyle geri Euler metodu elde edilir ve yerel kesme hatası $O(h^2)$ ve $O(h)$ mertebeden yakınsaktır. (4.5) ve (4.6) denklemleri birleştirildiğinde Çizelge 4.1 ile verilen yakınsaklık mertebeleri elde edilir.

Çizelge 4.1. (4.1) denkleminin yakınsaklık mertebeleri

ODE	kuadratik	Euler(açık)	Yamuklar Kuralı	Geri Euler
	Euler		$O(h)$	$O(h)$
Yamuklar		$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h)$
Geri Euler		$O(h)$	$O(h)$	$O(h)$

Genel olarak, integro-diferansiyel denklemin sayısal çözümü $u'(t) = f(t, u(t))$ ya da $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$ diferansiyel denklemlerine bağlıdır. Bu diferansiyel denklemlerin kombinasyonları aşağıdaki temel esaslara göre seçilebilir.

- Yakınsama mertebeleri,
- Hatanın asimptotik özellikleri,
- Kararlılık özellikleri,
- Açık denklemlerin çözülme ihtiyacı.

Örnek 4.1 : $\lambda = -1$, $f(t) = 1$ ve $t_{max} = 1$ olmak üzere aşağıda verilen integro-diferansiyel denklemine yamuklar kuralı ve açık Euler yöntemini uygulayalım.

$$u' = f(t) + \lambda \int_{t_0}^t u(s)ds, t \geq 0, u(0) = 0. \quad (4.7)$$

Çözüm:

Gerçek çözüm: $u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda}t)}$ olarak bulunur. $\lambda = -1$ seçilirse $u(t) = \sin(t)$ elde edilir.

$$u' = F \left(f(t), \int_{t_0}^t K(t,s)u(s)ds \right)$$

$$u' = F(t_k, u_k)$$

$u_{k+1} = u_k + hF(t_k, u_k)$ açık Euler metodu biçimindedir. Burada $u_{k+1} = u(t_{k+1})$ olduğundan dolayı

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + hF(t_k, u(t_k))$$

şeklinde yazılabilir.

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + h \left[f(t_k) + \lambda \int_{t_0}^{t_k} K(t,s)u(s)ds \right] \quad (4.8)$$

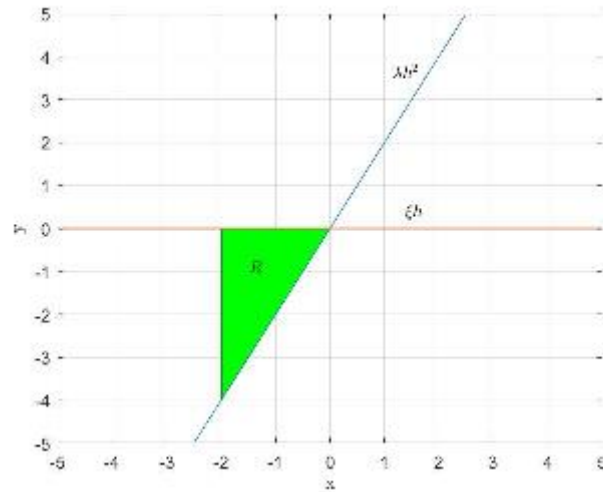
4.8 denkleminde yamuklar kuralı uygulandığında

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + hf(t_k) + h\lambda K(t_k, t_0)u(t_0) + \frac{h\lambda}{2}K(t_k, t_k)u(t_k) + h\lambda \sum_{j=1}^{k-1} K(t_k, t_j)u(t_j) \quad (4.9)$$

denkleminde elde edilir. Farklı h değerlerine göre elde edilen nümerik çözümler Çizelge 4.2 ile özetlenmiştir ve Şekil 4.1 ile uygulanan metodun kararlı olduğu bölge verilmiştir.

Çizelge 4.2. $\lambda = -1$ ve $f(t) = 1$ Yamuklar kuralı ve açık Euler metodunun gerçek çözümü $u(t) = \sin(t)$

t_i	Gerçek	Nümerik $h = 0.1$	Nümerik $h = 0.05$
0.1	0.00000000e+00	0.00000000e+00	1.00000000e+00
0.2	9.98334166e-02	1.00000000e-01	9.99375000e-02
0.3	1.98669331e-01	1.99500000e-01	1.99125625e-01
0.4	2.95520207e-01	2.97502500e-01	2.96570619e-01
0.5	3.89418342e-01	3.93019988e-01	3.91293671e-01
0.6	4.79425539e-01	4.85084863e-01	4.82340743e-01
0.7	5.64642473e-01	5.72759213e-01	5.68792167e-01
0.8	6.44217687e-01	6.55144344e-01	6.49771933e-01
0.9	7.17356091e-01	7.31389956e-01	7.24456555e-01
1.0	7.83326910e-01	8.00702898e-01	7.92083440e-01



Şekil 4.1. Açık Euler ve Yamuklar Kuralı için kararlılık bölgesi

Örnek 4.2 : $\lambda = -1$, $f(t) = 1$ ve $t_{max} = 1$ olmak üzere aşağıda verilen integro-diferansiyel denklemine yamuklar kuralı ve kapalı Euler yöntemini uygulayalım.

$$u' = f(t) + \lambda \int_{t_0}^t u(s)ds, t \geq 0, u(0) = 0. \quad (4.10)$$

Çözüm:

Gerçek çözüm: $u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda}t)}$ dir. $\lambda = -1$ seçilirse $u(t) = \sin(t)$ elde edilir.

$u_{k+1} = u_k + hF(t_{k+1}, u_{k+1})$ kapalı Euler metodu biçimindedir.

$u(t_{k+1}) = u(t_k) + h \left[f(t_{k+1}) + \lambda \int_{t_0}^{t_{k+1}} K(t, s)u(s)ds \right]$ denklemine yamuklar kuralı ve kapalı Euler metodu uygulanırsa

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + h \left[f(t_{k+1}) + \frac{h\lambda}{2} K(t_{k+1}, t_0)u(t_0) + \frac{h\lambda}{2} K(t_{k+1}, t_{k+1})u(t_{k+1}) + h\lambda \sum_{j=1}^k K(t_{k+1}, t_j)u(t_j) \right] \quad (4.11)$$

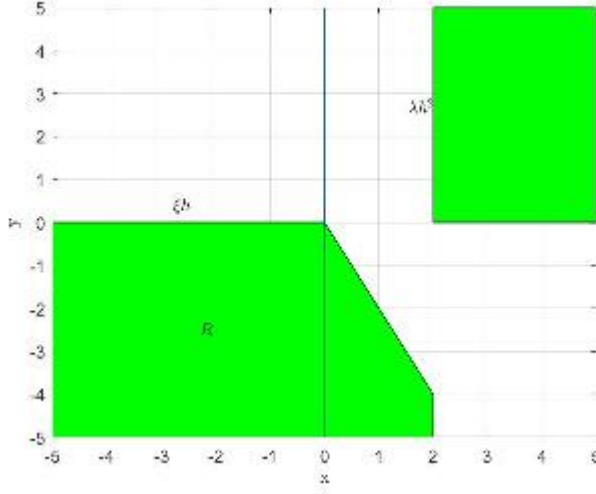
elde edilir. Ancak 4.11 denkleminin yeniden düzenlenmesi ve $u(t_{k+1})$ değerinin yalnız bırakılması, özellikle çekirdek fonksiyonu $K(t, s, u(s))$ lineer değilse her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda (4.11) denkleminin sağ tarafında yer alan $u(t_{k+1})$ terimi yerine (4.8) eşitliğinde verilen değer yerine konularak (4.11) denklemi elde edilir. Bu yaklaşım kapalı formdaki tüm nümerik metodlar için rahatlıkla uygulanabilir. Elde edilen denklem düzenlenirse

$$u(t_{k+1}) = \frac{u(t_k) + h \left[f(t_{k+1}) + \frac{h\lambda}{2} K(t_{k+1}, t_0)u(t_0) + h\lambda \sum_{j=1}^k K(t_{k+1}, t_j)u(t_j) \right]}{\left[1 - \frac{h^2\lambda}{2} K(t_{k+1}, t_{k+1}) \right]}$$

denklemini bulunur. Çizelge 4.3 elde edilen sonuçlar belirtilen yaklaşımla hesaplanmıştır. Şekil 4.2 ise uygulanan metodun kararlı olduğu bölgeyi göstermektedir.

Çizelge 4.3. $\lambda = -1$ ve $f(t) = 1$ Yamuklar kuralı ve kapalı Euler metodunun gerçek çözümü $u(t) = \sin(t)$

t_i	Gerçek	Nümerik $h = 0.1$	Nümerik $h = 0.05$
0.1	0.00000000e+00	0.00000000e+00	1.00000000e+00
0.2	9.98334166e-02	9.95024876e-02	9.98128120e-02
0.3	1.98669331e-01	1.98509938e-01	1.98878118e-01
0.4	2.95520207e-01	2.96034739e-01	2.96204634e-01
0.5	3.89418342e-01	3.91099119e-01	3.90815966e-01
0.6	4.79425539e-01	4.82744923e-01	4.81760398e-01
0.7	5.64642473e-01	5.70043244e-01	5.68120460e-01
0.8	6.44217687e-01	6.52103813e-01	6.49022175e-01
0.9	7.17356091e-01	7.28084048e-01	7.23643898e-01
1.0	7.83326910e-01	7.97197677e-01	7.91224655e-01



Şekil 4.2. Kapalı Euler ve Yamuklar Kuralı için kararlılık bölgesi

Örnek 4.3 : $\lambda = -1$, $f(t) = 1$ ve $t_{max} = 1$ olmak üzere aşağıda verilen integro-diferansiyel denkleminin integral denklem ve adi diferansiyel denklem kısmına yamuklar kuralını uygulayalım.

$$u' = f(t) + \lambda \int_{t_0}^t u(s)ds, t \geq 0, u(0) = 0.$$

Çözüm: Gerçek çözüm: $u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \sinh(\sqrt{\lambda}t)}}$ dir. $\lambda = -1$ seçilirse $u(t) = \sin(t)$ elde edilir.

$$u' = f(t) + \lambda \int_{t_0}^t K(t, s)u(s)ds$$

denkleminin hem integral hem de adi diferansiyel denklem kısmına yamuklar kuralını uygulayalım.

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}[F(t_k, u_k) + F(t_{k+1}, u_{k+1})]$$

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}f(t_k) + \lambda \int_{t_0}^{t_k} K(t_k, s)u(s)ds + f(t_{k+1}) + \lambda \int_{t_0}^{t_{k+1}} K(t_{k+1}, s)u(s)ds$$

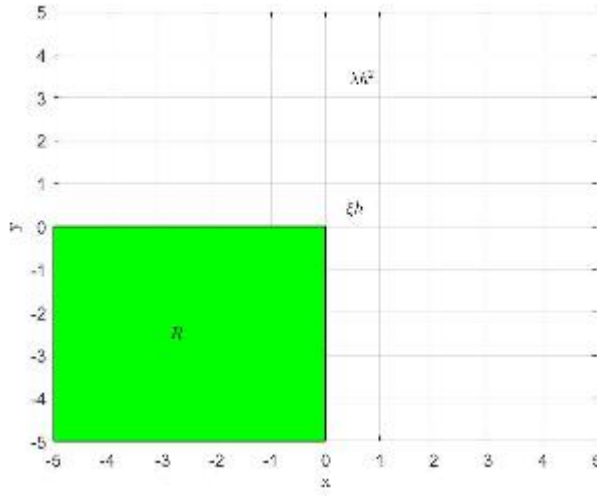
Bu denklem tekrar düzenlendiğinde

$$u_{k+1} = \frac{u_k + \frac{h}{2} \{f(t_k) + \frac{h\lambda}{2} (K(t_k, t_0)u_0 + K(t_k, t_k)u_k + hI_1 + \frac{\lambda h}{2} K(t_{k+1}, t_0)u_0 + hI_2)\}}{1 - \frac{\lambda h^2}{4} K(t_{k+1}, t_{k+1})}$$

elde edilir. Çizelge 4.4 görüldüğü üzere elde edilen sonuçlar belirtilen yaklaşımla hesaplanmıştır. Şekil 4.3 ise metotun kararlı olduğu bölgeyi göstermektedir.

Çizelge 4.4. $\lambda = -1$ ve $f(t) = 1$ Yamuklar kuralının gerçek çözümü $u(t) = \sin(t)$

t_i	Gerçek	Nümerik $h = 0.1$	Nümerik $h = 0.05$
0.1	0.00000000e+00	0.00000000e+00	1.00000000e+00
0.2	9.98334166e-02	1.08955224e+00	1.09482217e+00
0.3	1.98669331e-01	1.17865894e+00	1.18144669e+00
0.4	2.95520207e-01	1.25648102e+00	1.25648792e+00
0.5	3.89418342e-01	1.32218796e+00	1.31916745e+00
0.6	4.79425539e-01	1.37506571e+00	1.36882836e+00
0.7	5.64642473e-01	1.41452429e+00	1.40494216e+00
0.8	6.44217687e-01	1.44010431e+00	1.42711431e+00
0.9	7.17356091e-01	1.45148220e+00	1.43508852e+00
1.0	7.83326910e-01	1.44847408e+00	1.42874969e+00



Şekil 4.3. Yamuklar ve Yamuklar Kuralı için kararlılık bölgesi

4.2. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.12) eşitliği ile verilen integro-diferansiyel denklemin kararlılık analizini incelenecektir.

$$u'(t) = \xi u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds, t \geq 0, u(0) = 1, \quad (4.12)$$

(4.12)

Nümerik metotların kararlılık bölgelerinin tespitinde λ reel veya kompleks değerli sabit bir katsayı olmak üzere metot $u'(t) = \lambda u(t)$ test denkleminde uygulanabilir.

Lineer çok adımlı metotlarla ilişkili olan $\varrho(r) = \sum_{v=0}^k \alpha_v r^v$ ve $\sigma(r) = \sum_{v=0}^k \beta_v r^v$ polinomları

$$\sum_{v=0}^k (\alpha_v - \lambda h \beta_v) \tilde{u}_{n-v} = 0 (n \geq k)$$

eşitliğini verir.

Lineer test denkleminde ξ ve λ reel değerli sabit katsayılar olsun. Böyle bir denklem bir dereceye kadar sınırlıdır. (4.12) ile verilen integro-diferansiyel denkleminin çözümü olan $u(t)$, $t \rightarrow \infty$ için sifra yakınsar, ancak ve ancak

$\xi < 0$, $\lambda < 0$ ve (4.12) denkleminin özdeğerleri $\tilde{\lambda}_i$ için $Re(\tilde{\lambda}_i) < 0$, $i = 0, 1$ olmalıdır. (4.12) denkleminde $u''(t) = \xi u'(t) + \lambda u(t)$ denkleminin çözümü $u(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ biçimindedir. Burada $r^2 - \xi r - \lambda = 0$ denklemin kökleri r_1, r_2 .

Lineer çok adımlı metodlarda

$$\sum_{v=0}^k \alpha_v u_{n+v} = h \sum_{v=0}^k \beta_v K(t_v, u_v, \tilde{z}_v) \quad (4.13)$$

kareleme kuralı ile

$$\tilde{z}_n = h \sum_{v=0}^k K(t_n, t_j, \tilde{u}_j)$$

Aşağıdaki tanımlar, adi diferansiyel denklemlerin durumunda standart tanıma benzerdir.

Tanım 4.4 *Lineer çok adımlı metodların kararlılık teorisinde, adi diferansiyel denkleme (ϱ, σ) standart argümanı uygulandığında, basit koşullar altında aşağıdaki iki durum sağlanır.*

i) $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = \text{sabit}$

ii) (ϱ, σ) yerel kesme hatası kararlıdır.

Bu argümanın basit uzantısının aşağıdaki gibi olacağını farzedelim.

i) $\frac{\partial F}{\partial y} = \xi = \text{sabit}$, $\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial K}{\partial y} = \eta$ sabit.

ii) (ϱ, σ) yerel kesme hatası olmak üzere

$$\sum_{v=0}^k \left[(\alpha_v - h\xi\beta_v) e_{n+v} - h^2 \lambda \sum_{j=0}^{n+v} \gamma_{n+v,j} e_j \right] = \text{sabit} \quad (4.14)$$

$n \rightarrow \infty$ iken (4.14) denkleminin davranışına karşılık gelen homojen denklemin çözümlerinin davranışı ile aşağıdaki denklem belirlenir.

$$\sum_{v=0}^k \left[(\alpha_v - h\xi\beta_v) u_{n+v} - h^2 \lambda \sum_{j=0}^{n+v} \gamma_{n+v,j} u_j \right] = \text{sabit}. \quad (4.15)$$

Tanım 4.5 $n \rightarrow \infty$ iken (4.15) denkleminin tüm çözümleri sıfıra yakınsıyorsa, h, ξ ve λ değerleri ve (4.12) denklemi için lineer çok adımlı metot mutlak kararlıdır denir.

Tanım 4.6 (4.12) denklemi için lineer çok adımlı metodun R mutlak kararlılık bölgesi $(h\xi, h^2\lambda)$ düzlemi ile tanımlıdır.

Tanım 4.7 (4.12) denklemi için R mutlak kararlılık bölgesi $h\xi < 0, h^2\lambda < 0$ koşullarıyla sınırlanan çeyrek düzlemi içeriyorsa, lineer çok adımlı metot A -kararlıdır denir.

(4.13) lineer çok adımlı denklemi (4.12) test denkleminde uygulandığında

$$\sum_{v=0}^k \alpha_v u_{n+v} = h \sum_{v=0}^k \beta_v (\xi \tilde{u}_{n+v} + \lambda \tilde{z}_{n+v}). \quad (4.16)$$

$[(\varrho, \sigma); (\varrho^*, \sigma^*)]$ mutlak kararlılığının R düzleminde kararlılık polinomunun tüm sıfırları için $(h\xi, h^2\lambda)$ noktası, $(r, h\xi, h^2\lambda) = \varrho^*(r)[\varrho(r) - \xi h\sigma(r)] - \lambda h^2\sigma^*(r)\sigma(r)$, birim diskin içindeki konumdur. İntegro diferansiyel denklem için A -kararlı yöntemin en belirgin örneği, (ϱ, σ) ve (ϱ^*, σ^*) her ikisi de yamuklar kuralında ortaya çıkmaktadır. (ϱ, σ) ve (ϱ^*, σ^*) özgül özelliklerin etkisi, $[(\varrho, \sigma); (\varrho^*, \sigma^*)]$ kararlılık özellikleri üzerine $k = m = 1$ durumunda örneklenebilir, $[(\varrho, \sigma); (\varrho^*, \sigma^*)]$ 'nin bazı kombinasyonları için mutlak kararlılığın R bölgesinde çizimi için:

$$(\varrho, \sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} \varrho = r - 1, & \sigma = 1, \text{ Euler kuralı} \\ \varrho = r - 1, & \sigma = \frac{1}{2}(r + 1), \text{ Yamuklar kuralı} \\ \varrho = r - 1, & \sigma = 1, \text{ Geri Euler kuralı} \end{array} \right\}$$

$$\tilde{z}_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{Euler kuralının tekrarlı uygulaması} \\ \text{Yamuklar kuralının tekrarlı uygulaması} \\ \text{Geri Euler kuralının tekrarlı uygulaması} \end{array} \right\}$$

kullanılır.

Sonuç olarak bu bölümde Euler kuralı, yamuklar kuralı ve geri Euler kuralı için elde edilen kararlılık bölgeleri Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 ile özetlenmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle Volterra integral denklemleri ile adi diferansiyel denklemler arasındaki ilişki incelenmiştir.

Ayrıca farklı tipteki Volterra integral denklemi ve Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümleri Yamuklar ve Simpson yöntemleri uygulanarak yaklaşık olarak hasaplanmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümler denklemlerin gerçek çözümü ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, (4.1) denkleminde θ -metodu kullanılmış ve

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h[(1 - \theta)F(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n) + \theta F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})] \quad (5.1)$$

denkleminde $\theta = 0, \frac{1}{2}$ veya 1 olarak alınıp, $w_{n,j} = 1$ katsayı değerleriyle elde edilen Yamuklar kuralı, Açık Euler ve Kapalı Euler metotları uygulanmıştır. Volterra integro-diferansiyel denkleminde uygulanan bu metotlar için yaklaşık çözümler hesaplanmış ve denklemin gerçek çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Yanı sıra yöntemlerin kararlılık analizleri yapılarak yöntemlerin kararlı olduğu bölgeler belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Tricomi, F.G. 1957. Integral Equations. Interscience, 235 sf., New York.
- [2] Smithies, F. 1958. Integral Equations. Cambridge University Press, 172 sf., England.
- [3] Davis, H. T. 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, 566 sf., New York.
- [4] Lambert and Brunner 1973. Stability of Numerical Methods for Volterra Integro-Differential Equations. **Computing**, 12:75-89.
- [5] Van Der Houwen, P. J. and Wolkenfelt 1978. On the Stability of Multistep Formulas for Volterra Integral Equations of the Second Kind. **Computing**, 24:341-347.
- [6] Baker, Christopher and Keech, Malcolm 1978. Stability Regions in the Numerical Treatment of Volterra Integral Equations. **Siam J. Numer. Anal.**, 15(2):394-417.
- [7] Lubich, CH 1983. On the Stability of Linear Multistep Methods for Volterra Convolution Equations. **IMA J. Numer. Anal.**, 3(4):439-465.
- [8] Linz, P. 1985. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Studies in Applied Mathematics, 225 sf., Philadelphia.
- [9] Edwards, T. John, Ford, J. Neville and Roberts, A. Jason 2003. Bifurcations in numerical methods for Volterra-integro differential equations. Department of Matematics, Chester College, 123 sf., UK.
- [10] Erdem, Yılmaz 2004. Lotka Volterra sistemleri ve sayısal çözümleri. Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- [11] Huang, Chengming 2007. Stability of linear multistep methods for delay integro-differential equations. **Computers and Mathematics with Applications**, 55:2830-2838.
- [12] Huang, Chengming and Vandewalle, Stefan, 2009. Stability of Runge-Kutta-Pouzet methods for Volterra integro-differential equations with delays. **Frontiers of Mathematics in China**, 4(1):63-87.
- [13] Filiz, Ali 2010. Numerical solution of some Volterra equations. PhD Thesis, The Univesity of Manchester.

- [14] Darania, Parviz and Shali, J. Ahmadi 2015. Convergence analysis of product integration method for nonlinear weakly singular Volterra-Fredholm integral equations. **Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA)**, 2(1):57-69.

ÖZGEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Neşe DEMİREL
Doğum Yeri ve Tarihi : DENİZLİ, 09.01.1991

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Akdeniz Üniversitesi
Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.

İŞ DENEYİMİ**İLETİŞİM**

E-posta Adresi : nesse.demirel@hotmail.com
Tarih : 13.07.2015