

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
2016-YL-050

GAMZE POTANSİYELLERİN
YARI KLASİK YAKLAŞIMDA İNCELENMESİ

Gamze TOKER

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Gamze TOKER tarafından hazırlanan "Gamze Potansiyellerin Yarı Klasik Yaklaşımda İncelenmesi." başlıklı tez, 29.08.2016 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Yrd. Doç. Dr. Fatih ERMAN	İzmir Yüksek Teknoloji Enst.	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ	Adnan Menderes Üniv.	
Üye	:		
Üye	:		

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

29.08.2016

Gamze TOKER

ÖZET

GAMZE POTANSİYELLERİN YARI KLASİK YAKLAŞIMDA İNCELENMESİ

Gamze TOKER

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU
2016, 35 sayfa

Bu tezde, bozon gazlarının termodinamik özelliklerini bulmak için kullanılan yarı klasik yaklaşım, manyetik tuzaklamaya gamze potansiyeller eklenerek oluşturulan tuzakları da içerecek biçimde geliştirilmiştir. Bu tuzaklama potansiyellerinin matematiksel bir modeli oluşturularak bozonların bu tarz tuzaklardaki termodinamik nicelikleri hesaplanmıştır. Manyetik tuzaklara gamze potansiyelleri eklendiğinde tuzaklanan bozonların yoğunluk maddeye geçiş sıcaklığı olan kritik sıcaklığın arttığı gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Bozon Gazı, Gamze Potansiyeli, Tuzaklama Potansiyeli, Bose-Einstein Yoğuşukluğu, Kritik Sıcaklık

ABSTRACT**INVESTIGATION OF THE DIMPLE POTENTIALS IN SEMICLASSICAL APPROXIMATION**

Gamze TOKER

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Haydar UNCU

2016, 35 pages

In this thesis, the semiclassical approximation which is used to find the thermodynamic properties of boson gases is generalized such that it includes also the trapping potentials which are created by using dimple potentials in addition to magnetic traps. Developing a mathematical model of these trapping potentials, the thermodynamical quantities of bosons in such traps are calculated. It is shown that the critical temperature which indicates the transition to condensation increases when the dimple potentials are added to magnetic traps.

Key Words: Boson Gas, Dimple Potential, Trapping Potential, Bose-Einstein Condensation, Critical Temperature

ÖNSÖZ

Bozonların 0 K sıcaklığına yakın sıcaklıklardaki davranışları sonucu oluşan Bose-Einstein yoğunluğu üzerine yapılan çalışmalar özellikle yoğunluğuna derişik gazlarda deneysel olarak elde edilmesi ile artmıştır. Bu tez de yoğunluk madde elde edilmesi için kullanılan tuzak potansiyellerine ek olarak kullanılan gamze potansiyellerin bozon gazının termodinamiksel özelliklerine etkisi olan teorik bir model oluşturulmuştur. Tez çalışmamda bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her aşamasında bana yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Haydar Uncu'ya teşekkürlerimi sunarım. Destek ve sevgilerini esirgemeyen aileme teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Gamze TOKER

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Bose-Einstein Yoğuşukluğu ve Tuzaklama Potansiyelleri	1
2. YARI KLASİK YAKLAŞIM	4
2.1. Yarı Klasik Yaklaşımda Bozon Gazının İncelenmesi	4
2.2. Yarı Klasik Yaklaşımda Etkileşmeyen Bose Gazı	8
3. MODİFİYE EDİLMİŞ YARI KLASİK YAKLAŞIM	12
3.1. Bozon Gazın MYKY Altında İncelenmesi	12
3.1.1. Etkin Termodinamik Limit ve Enerji İfadesi	14
3.2. Öz Isı ve Sürekliliği	15
4. GAMZE POTANSİYELLER İÇİN MYKY	18
4.1. Tuzak Potansiyellerim MYKY Aracılığıyla İncelenmesi	18
4.2. Öz Isı	23
4.3. Bir Boyut İçin Sonuçlar ve Karşılaştırma	26
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	30
KAYNAKLAR	31
EKLER	33
EK1. KİMYASAL POTANSİYELİN SICAKLIĞA BAĞLILIĞI	33
1.1. Kimyasal Potansiyelin Sıcaklığa Göre Türev İfadesi	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER DİZİNİ

a	Gamze Potansiyelin Genişliği
C_N	Özısı
d	Boyut
E	Enerji
k_B	Boltzmann Sabiti
L_0	Karakteristik Uzunluk
m	Kütle
N	Toplam Parçacık sayısı
N_0	Taban Durumdaki Parçacık Sayısı
N_u	Uyarılmış Durumlardaki Parçacık Sayısı
N_g	Gamze Potansiyel Parçacık Sayısı
N_T	Tuzak Durumdaki Parçacık Sayısı
n	Enerji Seviyeleri
p	Gamze Potansiyelin Tuzaklama Boyutu
s	Tuzaklama Boyutu
T	Sıcaklık
T_c	Kritik Sıcaklık
U_0	Gamze Potansiyelin Derinliği
z	Uçuculuk
Z	Bölüşüm Fonksiyonu
δ	Dirac Delta Fonksiyonu
ε	Enerji Değerleri
θ	Basamak Fonksiyonu
λ_T	Dalga Boyu
μ	Kimyasal Potansiyel
$\rho(\varepsilon)$	Durum Yoğunluğu
ω_0	Osilatör Frekansı
ω_α	Karakteristik Frekans

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Gamze Potansiyel vs. Kritik Sıcaklık $N = 10^6$	26
Şekil 4.2. Gamze Potansiyel vs. Kritik Sıcaklık $N = 10^8$	27
Şekil 4.3. Gamze Potansiyel vs. Kritik Sıcaklık $N = 10^{10}$	28

1. GİRİŞ

1.1. Bose-Einstein Yoğuşukluğu ve Tuzaklama Potansiyelleri

Etkileşmeyen bozonların buldukları sistemin taban durumunda toplanması ile oluşan Bose-Einstein yoğuşması (BEY), S.N. Bose ve A. Einstein tarafından 1924 yılında teorik olarak öngörülmüştür. Einstein, Bose'un 1924 yılında ayırdedilemez parçacıklar için oluşturduğu istatistik modeli, etkileşmeyen kütleli bozonları da içine alacak şekilde geliştirdi [1]. Bose ve Einstein çok düşük sıcaklıklarda etkileşmeyen parçacıklardan oluşan bozon gazının parçacıklarının gözlemlenebilir bir oranının taban enerji seviyesinde toplanacağını gösterdiler.

Bozonların 0 K sıcaklığına yakın sıcaklıklardaki davranışları sonucu oluşan Bose-Einstein yoğuşukluğu üzerine çalışmalar özellikle yoğuşukluğun derişik gazlarda deneysel olarak elde edilmesi ile artmıştır [2–5]. Bose-Einstein yoğuşuk maddesinin özelliklerini belirleyen parametreler, kendisine eşit ve daha düşük sıcaklıklarda yoğuşukluğun gözlemlenmeye başlandığı sıcaklık olan kritik sıcaklık, yoğuşukluk oranı ve faz uzayı yoğunluğudur. Bu parametreler, bozon gazını tuzaklamak için kullanılan manyetik alanın değerine ve gaz içindeki bozonların etkileşmesine bağlı olarak değişmektedir.

BEY, elde etmek için yapılan deneylerde, bozonlar genellikle zamana bağlı manyetik alanlar kullanılarak tuzaklanır. Manyetik tuzaklama yolu ile elde edilen Bose-Einstein yoğuşuk maddesini incelerken, manyetik alanın yoğuşukluk üzerine oluşturduğu etki genel olarak bir harmonik salıncı potansiyeli ile betimlenmektedir [6]. Bu tarz tuzaklama potansiyelleri içindeki bozonların davranışları hem kuantum mekaniği kullanılarak hem de yarı klasik yaklaşımda incelenmiştir [2, 6, 7]. Ancak tuzaklama sürecini betimleyen tek potansiyel harmonik salıncı potansiyeli değildir [6]. Tuzaklamak, bozonları (ya da başka tür parçacıkları) uzayın bir bölgesine toplamak anlamına gelir. Diğer bir deyişle, tuzaklamanın amacı bozonları

uzayın belli bir bölgesine toplanmasını sağlamaktır. Deneylerde, tuzaklanan parçacıkların belli bir uzay bölgesinden kaçmamaları istendiğinden, parçacıkların bir denge noktası etrafında hareket etmeleri sağlanır. Bu yüzden parçacıklar denge noktasından uzaklaştıkça parçacıklara denge noktasına doğru kuvvet etkilemelidir. Bu parçacıkları sürekli denge noktasına çeken potansiyellerin ifadesi mutlak değer kullanılarak yazılabilir [7, 8]:

$$U(\vec{r}) = \hbar \sum_{\alpha=1}^d \frac{\omega_{\alpha}}{2} \left| \frac{r_{\alpha}}{l_{\alpha}} \right|^{n_{\alpha}}. \quad (1.1.1)$$

Burada $l_{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\alpha}}}$ tuzaklama potansiyeli tarafından belirlenen karakteristik uzunlukları, ω_{α} tuzaklama potansiyelinin karakteristik frekanslarını gösterirken, n_{α} değerleri potansiyelin biçimini belirleyen üslerdir. (1.1.1) denklemindeki potansiyel ifadesi oldukça genel bir tuzaklama potansiyelidir. Çünkü farklı yönlerde farklı tür tuzaklamaları mümkün kılmaktadır.

Yukarıda harmonik salıncı potansiyeli etkisindeki bozon gazının hem kuantum mekaniği kullanılarak hem de yarı klasik yaklaşımda incelendiğini belirtmiştik [2, 6, 7]. Ancak (1.1.1) denklemi ile verilen birçok potansiyel için kuantum mekaniksel bir inceleme yapmak olası değildir çünkü bu potansiyellerin birçoğu çözülebilen potansiyeller değildir. Bu yüzden bu denklem ile verilen tuzaklama potansiyellerinin içindeki bozon gazlarının termodinamiksel özellikleri genellikle yarı klasik yaklaşım aracılığı ile incelenmektedir.

Son yıllarda yapılan deneysel çalışmalarda üç boyuttan daha düşük boyutlara hapsedilmiş bozon gazları elde edilmiştir [9]. (1.1.1) denkleminde $d = 1$ ya da $d = 2$ alınarak bu tarz potansiyellerde betimlenebilir. Ancak yarı klasik yaklaşım düşük boyutlarda iyi sonuç vermemektedir. Bu yüzden 2005 yılında V.I. Yukalov tarafından modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir [7]. Bu modifiye edilmiş yöntem sayesinde hem düşük boyutlardaki harmonik tuzak potansiyelleri hem de farklı tuzaklama potansiyelleri yarı klasik yaklaşım aracılığı ile incelenebilmektedir.

Manyetik tuzaklama ile birlikte, lazer ışığı kullanılarak kısa erimli tuzaklamalar oluşturmak mümkündür [10–13]. Bu tarz tuzaklamalar gamze potansiyeller olarak adlandırılmaktadır.

Gamze potansiyelleri, tuzaklanmış bozonların faz uzayı yoğunluğunu ve kritik sıcaklık olarak adlandırılan Bose-Einstein yoğunluğuna geçiş sıcaklığını arttırmak için kullanılmaktadır. Deneysel (1.1.1) denkleminde verilen, yoğunluk madde elde edilmesi için kullanılan tuzak potansiyellerine ek olarak kullanılan gamze potansiyellerin bozonların davranışlarının hem termodinamiksel hem de dinamik özelliklerin değiştirdiği gözlenmiştir [12–15].

Literatürde, gamze potansiyellerin özdeş bozonlardan oluşan sistemlere (Bose gazı) etkisini inceleyen deneysel çalışmalar olduğu gibi [10–13], bu etkileri açıklamaya çalışan teorik modellerde bulunmaktadır [12, 14–17]. Bu tezin amacı, yukarıda bahsedilen, V.I. Yukalov tarafından geliştirilen Bose gazlarının modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımla incelenmesini, gamze potansiyelleri de içerecek biçimde geliştirmektir.

Tezin içeriği kısaca şöyle özetlenebilir. 2 ve 3. bölümlerde tezin bütünselliğini sağlamak amacıyla sırasıyla yarı klasik yaklaşım ve modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşım tanıtılmıştır. 4. bölümde yarı klasik yaklaşım, gamze potansiyelleri içeren tuzak potansiyellerini de kapsayacak şekilde genelleştirilmiştir. 5. bölümde sonuçlar tartışılmaya çalışılmıştır.

2. YARI KLASİK YAKLAŞIM

2.1. Yarı Klasik Yaklaşımda Bozon Gazının İncelenmesi

Bose-Einstein Yoğuşukluğu (BEY), bozonlardan oluşan gazların mutlak 0 K sıcaklığına çok yakın değerlere kadar soğutulmasıyla ortaya çıkar. Bu sıcaklıklarda, bozonik maddenin parçacıklarının çoğu temel enerji seviyesine iner ve bir kuantum durumu makroskobik olarak gözlemlenebilir hale gelmiş olur.

Bozon gazlarının istatistiksel mekanik kullanılarak incelenmesi ile Bose-Einstein yoğuşukluğunun neden oluştuğu anlaşılabilir. Büyük kanonik toplulukta bozonlar için bölüşüm fonksiyonunun ifadesi;

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\exp(-\beta \varepsilon_i + \alpha \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i) \right] \quad (2.1.1)$$

şeklindedir [18]. Burada n_i bir enerji düzeyindeki ortalama parçacık sayısı iken ε_i tek parçacık durumlarının enerji değerleridir. (2.1.1) denklemindeki β ve α nın ifadeleri; k_B Boltzmann sabitini göstermek üzere,

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (2.1.2)$$

$$\alpha = \frac{\mu}{k_B T} \quad (2.1.3)$$

şeklindedir. Bose gazının toplam parçacık sayısının ifadesi (2.1.1) denkleminde verilen partiyon fonksiyonu kullanılarak, birkaç ara işlemden sonra

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \frac{1}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/k_B T] - 1} \quad (2.1.4)$$

şeklinde bulunur [18]. Bu denklemlerde μ kimyasal potansiyeli, k_B Boltzmann sabitini, ε_i ler ise tek parçacık durumlarının enerji değerlerini göstermektedir. Yozaşma olması durumunda birden fazla ε_i aynı enerji değerine sahip olabilir. (2.1.4) denkleminde etkileşmeyen bozonların bir ε_i enerji seviyesindeki ortalama sayısının

$$n_i = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/k_B T] - 1} \quad (2.1.5)$$

olduğu görülmektedir. Bu dağılımın sağ tarafındaki ifade Bose dağılımı olarak adlandırılır.

Bose gazının ortalama enerjisi bu dağılım kullanılarak

$$E = \sum_i \varepsilon_i n_i \quad (2.1.6)$$

denklemini aracılığı ile bulunur. Bir parçacık başına düşen öz ısı (c_N) ifadesi enerjinin sıcaklığa (T) göre türevi alınarak bulunur:

$$c_N = \frac{1}{N} \frac{\partial E}{\partial T}. \quad (2.1.7)$$

(2.1.4) ve (2.1.5) denklemleri kullanılarak bozon gazının birçok termodinamik özelliği belirlenebilir. Bunun için, verilen bir sıcaklıkta, parçacık sayısı belirli bir sistemin, kimyasal potansiyelini bulmak gerekir. Bu değer, verili bir sıcaklık için (2.1.4) denklemi μ için çözümlenerek elde edilir. Ancak (2.1.4) denklemindeki toplam birçok hamiltoniyen için hesaplanamamaktadır. Neyse ki, kuantum mekaniksel enerji seviyeleri \hbar sabitinin değerinin düşüklüğünden dolayı genellikle birbirine çok yakındır. Böylece, (2.1.4) denklemindeki toplam ifadesi integrale dönüştürülerek, toplam iyi bir yaklaşıklıkla hesaplanabilir. Yani sıcaklığın parçacık sayısına bağıllığı (2.1.4) denklemi yerine

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.1.8)$$

denklemini ile hesaplanır. Burada $n(\varepsilon)$, (2.1.5) denkleminde yola çıkarak

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] - 1} \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu yaklaşım, yarı klasik yaklaşım olarak adlandırılır. (2.1.8) denkleminde $\rho(\varepsilon)$ durum yoğunluğunu ifade eder. (2.1.8) denkleminde toplam parçacık sayısına taban durumunun katkısı bir terim olarak ayrıca eklenmiştir. Bunun nedeni, durum yoğunluğu $\rho(\varepsilon)$ hesaplanırken taban durumunda oluşan hatadır.

Klasik faz uzayı kullanılarak durum yoğunluğu

$$\rho(\varepsilon) = \int \frac{d^D r d^D p}{(2\pi\hbar)^D} \delta[\varepsilon - (\varepsilon p + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2)] \quad (2.1.10)$$

denklemi ile hesaplanır. Buradan $\rho(\varepsilon)$ için bulunan ifade üçüncü bölümde anlatılacağı üzere genellikle c ve s birer sabit olmak üzere

$$\rho(\varepsilon) = c\varepsilon^s \quad (2.1.11)$$

şeklindedir. (2.1.11) denklemi kullanılırsa $\varepsilon = 0$ için (yarı klasik yaklaşımda taban durumu) $\rho(0) = 0$ bulunur. Diğer bir deyişle klasik faz uzayı kullanılarak elde edilen durum yoğunluğu hesabında taban durumu sayılmamaktadır. Bu hatayı giderebilmek için (2.1.8) denkleminde N_0 terimi ayrı olarak yazılmaktadır. Bunun sonucunda denklemin sağ tarafındaki ikinci terim olan integralin değerinin uyarılmış durumlardaki parçacık sayısını verdiği görülür:

$$N_u = \int_0^\infty \rho(\varepsilon)n(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] - 1} d\varepsilon. \quad (2.1.12)$$

(2.1.12) denkleminin alabileceği maksimum değer integralin $\mu = 0$ olduğundaki değeridir ¹:

$$N_{u_{max}}(T) = \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)}{\exp[\varepsilon/(k_B T)] - 1} d\varepsilon. \quad (2.1.13)$$

Verili bir sıcaklıkta $N_{u_{max}}(T) > N$ ise bu sıcaklıkta bütün parçacıkların uyarılmış seviyelerde olabileceği görülür. Böylece bu sıcaklığın bozonların taban durumunda toplanmaya başladığı kritik sıcaklıktan fazla olduğu söylenebilir:

$$T > T_c \Rightarrow N_u = N \rightarrow \mu < 0, z < 1. \quad (2.1.14)$$

Bu denklemde görülen $z = \exp(\beta\mu)$ ifadesi uçuculuk olarak adlandırılır. Ancak sıcaklık düştükçe (2.1.13) integralinin değeri azalır ve bir sıcaklıkta $N_{u_{max}}(T) = N$ olur. Bu sıcaklıkta tüm parçacıklar halen uyarılmış durumlarda olsa bile

¹ Kimyasal potansiyel 0 dan büyük olamaz. Çünkü 0 dan büyük kimyasal potansiyel değeri bazı durumlarda negatif ortalama parçacık sayısı olduğu gibi fiziksel olmayan bir sonuca yol açar.

sıcaklığın biraz daha düşürülmesi bazı parçacıkların artık uyarılmış seviyelere yerleşemeyeceği dolayısıyla taban durumuna yerleşeceği anlamına geldiğinden $N_{u_{max}}(T) = N$ şartı kritik sıcaklığı tanımlayan eşitlik olarak da düşünülebilir:

$$T = T_c \Rightarrow N_u = N \text{ ve } z = 1 (\mu = 0). \quad (2.1.15)$$

Diğer bir deyişle kritik sıcaklık, T_c , taban durumunda parçacıkların toplanmaya başladığı sıcaklıktır. Bu sıcaklık yarı klasik yaklaşımda kimyasal potansiyelin sıfıra eşit olduğu en yüksek sıcaklık olarak da tanımlanabilir. Sıcaklık daha da azaltılırsa artık $N_{u_{max}}(T) < N$ olur, yani bu sıcaklıklarda sistemdeki tüm parçacıklar uyarılmış durumlara yerleşemez:

$$N_u < N \Rightarrow T < T_c \rightarrow \mu = 0 \rightarrow z = 1. \quad (2.1.16)$$

Bu sıcaklıklarda $N_u = N_{u_{max}}(T)$ olurken geriye kalan parçacıklar taban durumuna yerleşir:

$$N_0 = N - N_u. \quad (2.1.17)$$

Yukarıdaki tartışmalardan da anlaşılacağı üzere BEY, bozon gazı sıcaklık belli bir sıcaklığın altına düştükten sonra oluşmaya başlar. Bu sıcaklığa kritik sıcaklık (T_c) denir. Bu sıcaklıktan daha düşük sıcaklıklarda toplam parçacık sayısı, uyarılmış seviyelerdeki parçacık sayıları ile taban durumundaki parçacık sayılarının toplamına eşittir:

$$N = N_0 + N_u. \quad (2.1.18)$$

Kritik sıcaklığın üstündeki sıcaklıklarda ise uyarılmış seviyelerdeki parçacık sayısı toplam parçacık sayısına eşittir.

Sistemin ortalama enerjisi yarı klasik yaklaşımda, her iki durum için

$$E = \int_0^{\infty} \rho(\epsilon)n(\epsilon)\epsilon d\epsilon \quad (2.1.19)$$

integrali aracılığı ile bulunabilir. Ancak bu integral alınırken $T > T_c$ için μ değeri (2.1.8) denkleminde bulunurken, $T < T_c$ için $\mu = 0$ alınır.

2.2. Yarı Klasik Yaklaşımında Etkileşmeyen Bose Gazı

Bozonlar genellikle manyetik alanlar kullanılarak tuzaklanır [2, 6]. Manyetik tuzaklar ile bozonların etkileşimini en iyi betimleyen potansiyel modeli harmonik salınıcı potansiyelleridir [2, 6]. Üç boyutta en genel harmonik salınıcı potansiyeli,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2) \quad (2.2.20)$$

şeklindedir. Üç yöndeki farklı frekansların çarpımı kullanılarak, harmonik salınıcı için karakteristik bir frekans tanımlanabilir:

$$\omega_0 = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}. \quad (2.2.21)$$

Üç boyutta harmonik salınıcı potansiyelinin durum yoğunluğu,

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_0^3} \quad (2.2.22)$$

şeklindedir [6]. Bu ifadeyi (2.1.8) denkleminde yerine koyarsak uyarılmış durumdaki parçacık sayısı (N_u),

$$N_u = \frac{2}{(\hbar\omega_0)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1} d\varepsilon \quad (2.2.23)$$

halini alır. (2.2.23) denklemindeki integral alınarak $T > T_c$ için üç boyutlu harmonik salınıcı için toplam parçacık sayısı

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_0} \right)^3 g_3(z) \quad (2.2.24)$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikte bulunan $g_n(z)$ ifadesinin tanımı

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (2.2.25)$$

şeklindedir. Harmonik salınıcı potansiyeli tuzaklanmış bozon gazının $T > T_c$ enerjisi (2.2.22) ifadesindeki durum yoğunluğu, (2.1.12) denkleminde yerine konarak elde edilen

$$E = \frac{1}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty \frac{z\varepsilon^3}{\exp(\beta\varepsilon) - 1} d\varepsilon \quad (2.2.26)$$

ifadesinden bulunur. (2.2.26) denklemindeki integral hesaplandığında

$$E = 3k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(z) \quad T > T_c \quad (2.2.27)$$

elde edilir. Bu enerji ifadesinin türevi alınarak (C_N) nin sıcaklıkla değişimi

$$C_N = 12k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(z) - 9k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^3 \frac{g_3(z)}{g_2(z)} \quad T > T_c \quad (2.2.28)$$

şeklinde yazılır. Bu işlem yapılırken hesaplanması zor olan kimyasal potansiyelin sıcaklığa bağlılığını içeren terimi sadeleştirmek için toplam parçacık sayısı N nin sabit olması dolayısıyla elde edilen $\partial N / \partial T = 0$ eşitliği kullanılmıştır.

Enerjinin $T < T_c$ için sıcaklıkla değişimi (4.1.8) denkleminde $\mu = 0 \rightarrow z = 1$ alınarak bulunur:

$$E = 3k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(1) \quad T < T_c . \quad (2.2.29)$$

$T < T_c$ için öz ısının sıcaklıkla değişimini bulmak için (2.2.29) ifadesinin türevi alınmalıdır. Bu yapılarak öz ısının $T < T_c$ için sıcaklıkla değişimi

$$C_N(T) = 12k_B \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(1) \quad (2.2.30)$$

şeklinde edilir.

Şimdi faz geçişlerini incelemek amacıyla enerjinin ve öz ısının, $T = T_c$ etrafında sürekli olup olmadığını inceleyelim. Sıcaklık T_c ye yaklaşırken enerjinin sağdan ve soldan limit değerleri,

$$E(T \rightarrow T_c^-) = 3k_B T_c \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(1) \quad (2.2.31)$$

$$E(T \rightarrow T_c^+) = 3k_B T_c \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(1) \quad (2.2.32)$$

şeklinededir. $E(T \rightarrow T_c^-) = E(T \rightarrow T_c^+)$ olduğundan enerjinin sıcaklıkla değişimi süreklidir.

Sıcaklık T_c ye yaklaşırken öz ısının sağdan ve soldan limit değerleri,

$$C_N(T \rightarrow T_c^-) = 12k_B \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(1) \quad (2.2.33)$$

$$C_N(T \rightarrow T_c^+) = 12k_B \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_0} \right)^3 g_4(1) - 9k_B \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_0} \right)^3 \frac{g_3(1)}{g_2(1)} \quad (2.2.34)$$

şeklindedir. $C_N(T \rightarrow T_c^-) \neq C_N(T \rightarrow T_c^+)$ eşit olmadığından $T = T_c$ de birinci dereceden faz geçişi vardır. Bu süreksizlik T_c değerinin kritik sıcaklık olduğunu göstermektedir.

Benzer işlemler bir boyutta harmonik salıncı potansiyeli altında hareket eden bozon gazı için yapılırsa sorun çıkmaktadır. Bir boyutta harmonik salıncı potansiyeli,

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (2.2.35)$$

şeklindedir. Harmonik salıncı potansiyeli altında hareket eden bir parçacığın enerji seviyeleri,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.2.36)$$

elde edilir. Yukarıda belirtilen sorunun ne olduğunu göstermek için bir boyutta benzer hesaplamaları yapalım. Taban durumu enerjisi sıfır alınırsa enerji seviyelerinin ifadesi;

$$E_n = n \hbar \omega \quad (2.2.37)$$

şeklinde yazılır. Buradan belli bir ε enerjisine kadar $n = \frac{\varepsilon}{\hbar \omega}$ tane durum olduğu görülür. Bu ifadesinin türevi alınarak, bir boyutta durum yoğunluğu,

$$\rho(\varepsilon) = \frac{d \sum n(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{\hbar \omega} \quad (2.2.38)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeyi (2.1.8) denkleminde yerine koyarsak uyarılmış durumdaki parçacık sayısı,

$$N_u = \frac{1}{\hbar \omega} \int_0^\infty \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1} d\varepsilon \quad (2.2.39)$$

şeklinde elde edilir. $T > T_c$ için uyarılmış durumdaki parçacık sayısı toplam parçacık sayısına eşit olduğundan, toplam parçacık sayısının sıcaklığa bağlılığını veren ifade

$$N = \frac{k_B T}{\hbar \omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \frac{k_B T}{\hbar \omega} g_1(z) \quad (2.2.40)$$

şeklinde bulunur. Bir boyutta, $g_1(1)$ sonsuza ıraksadığından taban enerjisini sıfır kabul eden yarı klasik yaklaşım, anlamlı sonuçlar vermez. Yarı klasik yaklaşımda, $\Delta E \ll k_B T$ koşulu kabul edildiğinden, hesap yapıldığı için genellikle taban durumu enerjisi sıfır alınır. Ancak bir boyutta harmonik salıncı örneğinde gördüğümüz gibi bu, zaman zaman sorunlara yol açmaktadır. Bu yüzden özellikle düşük boyutlarda yarı klasik yaklaşımı modifiye etmek gerekmektedir.

Bu bölümü bitirmeden son bir hatırlatma yapmakta yarar vardır. Daha önce de belirttiğimiz gibi, yarı klasik yaklaşımda tuzaklama potansiyelindeki tek parçacık enerji seviyelerinin kesikli olması sonucu elde edilen (2.1.4) ve (2.1.5) toplamlarının bir çok sistem için hesaplanamamasından dolayı, enerjilerin kesikliliğini yok sayıp, durum yoğunluğu kullanılarak toplamlar integrale dönüştürülür. Bu yüzden yarı klasik yaklaşımı kullanabilmek için uzayda tuzaklama potansiyelinin değişimini belirleyen karakteristik uzunluk l_0 , parçacıkların termal dalga boyundan çok daha büyük olmalıdır. İstatiksel mekanikte ısısal de Broglie dalga boyu genellikle $\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{1/2}$ şeklinde tanımlanırken, l_0 tuzaklama potansiyelince belirlenen karakteristik uzunluktur.

3. MODİFİYE EDİLMİŞ YARI KLASİK YAKLAŞIM

3.1. Bozon Gazın MYKY Altında İncelenmesi

Klasik faz uzayı kullanılarak bir $U(\vec{r})$ potansiyeli altında hareket eden parçacıkların durum yoğunluğu için (2.1.10) denklemi kullanılarak

$$\rho(\varepsilon) = \frac{(2m)^{d/2}}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)\hbar^d} \int_{V_\varepsilon} [\varepsilon - U(\vec{r})]^{(d/2-1)} d^d\vec{r} \quad (3.1.1)$$

bulunur [7]. Burada V_ε , potansiyelin, parçacığın enerjisinden daha küçük olduğu uzay bölgelerini göstermektedir:

$$V_\varepsilon \equiv \{\vec{r} | U(\vec{r}) \leq \varepsilon\} \quad (3.1.2)$$

Bazı değişken tanımlamaları yaparak, (1.1.1) denkleminde verilen potansiyele karşılık gelen durum yoğunluğunun ifadesini yazmayı kolaylaştırabiliriz. Bu amaçla biz de [7] çalışmasındaki tanımları kullanacağız:

$$\omega_\alpha = \frac{\hbar}{ml_\alpha^2} \quad (3.1.3)$$

$$\omega_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^d \omega_\alpha \right)^{1/d} \quad (3.1.4)$$

$$l_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^d l_\alpha \right)^{1/d} \quad (3.1.5)$$

$$s = \frac{d}{2} + \sum_{\alpha=1}^d \frac{1}{n_\alpha}. \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) denkleminde s tuzaklama boyutu olarak adlandırılır. (1.1.1) denklemini (3.1.1) denkleminde yerine koyup integral hesaplandığında $d \geq 1$ ($s \geq 1/2$) durum yoğunluğunun ifadesi, (3.1.4), (3.1.5) ve (3.1.6) de tanımlanan değişkenler cinsinden

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\chi_d} \frac{\varepsilon^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad (3.1.7)$$

şeklini alır. Buradaki χ_d çarpanının ifadesi

$$\chi_d = \frac{\pi^{d/2}}{2^s} \prod_{\alpha=1}^d \frac{(\hbar\omega_\alpha)^{1/2+1/n_\alpha}}{\Gamma(1+1/n_\alpha)} \quad (3.1.8)$$

biçimindedir.

Bu durum yoğunluğu ifadesi kullanılarak toplam parçacık sayısı ve enerji

$$N = N_0 + \int_{\varepsilon_{min}}^{\infty} \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) d(\varepsilon) = N_0 + \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_{\varepsilon_{min}}^{\infty} \frac{\varepsilon^{s-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \quad (3.1.9)$$

$$E = \int_{\varepsilon_{min}}^{\infty} \varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) d(\varepsilon) = \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_{\varepsilon_{min}}^{\infty} \frac{\varepsilon^s}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \quad (3.1.10)$$

integralleri aracılığı ile ifade edilmektedir. Toplam parçacık sayısı için gerekli integralleri hesaplamak amacıyla $u = \beta\varepsilon$ değişken dönüşümü yapılarak integral alındığında

$$g_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{u_{min}}^{\infty} \frac{z u^{s-1}}{e^u - z} du \quad (3.1.11)$$

ile tanımlanan $g_s(z)$ fonksiyonu cinsinden, toplam parçacık sayısı,

$$N = \frac{1}{\chi_d} (k_B T)^s g_s(z) \quad (3.1.12)$$

şeklinde bulunur. Burada $u_{min} = \beta\varepsilon_{min}$ şeklindedir. Kuantumlu sistemlerin taban durumlarının enerjileri genellikle çok küçük olduğundan, ve $s \geq 1$ için $g_s(1)$ değeri iraksamadığından, taban durumu enerjisini sıfır almak hesapları basitleştirmektedir. Bunun sonucunda yarı klasik yaklaşımın $k_B T \ll \Delta E$ eşitsizliğinin sağlandığı sıcaklıklarda iyi bir yaklaşım olduğu söylenebilir. Bu yüzden çok parçacıklı sistemlerde düşük boyutlu sistemler hariç, sistemin minimum enerjisini sıfır seçmekte bir sorun yoktur. Ancak düşük boyutlu sistemlerde ($s \leq 1$) sistemin taban durumunu sıfır seçmek sorunludur. Çünkü, bu durumda $g_s(1)$ değeri iraksar. Bu yüzden, bu tür sistemler için, kuantum mekaniksel olarak çözülebilir durumlarda, kuantum mekaniğinden bulduğumuz taban enerjisi alınabilir. Eğer çözüm mümkün değilse, enerjinin minimumu için

$$\varepsilon_{min} = \frac{\hbar^2 k_{min}^2}{2m} \quad (3.1.13)$$

ifadesi iyi bir yaklaşımdır. Bu denklemdeki k_{min} ifadesi; (3.1.5) denklemi kullanılarak

$$k_{min} = \frac{1}{l_0} \quad (3.1.14)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$g_s(1)$ ıraksamıyorsa, $g_s(z)$ fonksiyonunun bir önceki bölümde verilen (2.2.25) denklemi ile eşdeğer olan

$$g_s(z) = \int_0^\infty \frac{zu^{s-1}}{e^u - z} du \quad (3.1.15)$$

tanımını kullanılmakta sorun yoktur. Ancak $s \leq 1$ için $g_s(1)$ ıraksadığından, düşük boyutlu sistemler için $g_s(z)$ fonksiyonunun tanımı

$$g_s(z) = \frac{1}{\Gamma_s} \int_{u_{min}}^\infty \frac{zu^{s-1}}{e^u - z} du \quad (3.1.16)$$

şeklinde değiştirilerek, yarı klasik yaklaşım bu durumlara da genelleştirilebilmektedir. Diğer bir deyişle, modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşım, $g_s(1)$ değeri ıraksadığında enerjinin minimumunu sıfır yerine taban durumu değeri olarak elde edilen bir yaklaşımdır. Bu düzeltmeler yapıldıktan sonra her boyuttaki sistem için

$$N = N_0 + \frac{(k_B T)^S}{\chi_d} g_s(z) \quad (3.1.17)$$

eşitliği kullanılabilir. Böylece $\mu \rightarrow 0$, $z \rightarrow 1$ ve $N_0 \rightarrow 0$ olduğunda tüm sistemler için kritik sıcaklık (T_c) ifadesi;

$$T_c = \frac{\chi_d N}{g_s(1)} \quad (3.1.18)$$

şeklinde yazılır.

3.1.1. Etkin Termodinamik Limit ve Enerji İfadesi

Yarı klasik yaklaşımın modifiye edilmiş halinde enerji ifadesi,

$$E = \int_{\epsilon_{min}}^\infty \frac{\epsilon g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (3.1.19)$$

şeklindedir. Verilen bir dış potansiyelde eşitlik (3.1.19) da; (3.1.7) ve (3.1.11) ifadeleri yerine konulup integral alındığında

$$E = \frac{1}{\chi_d} s(k_B T)^{s+1} g_{s+1}(z) \quad (3.1.20)$$

halini alır. Bulunan enerji ifadesi kullanılarak bir parçacık başına düşen ortalama enerji:

$$\frac{E}{N} = \frac{sg_{s+1}(z)}{N\chi_d} (k_B T)^{s+1} \quad (3.1.21)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Etkin termodinamik limit $N \rightarrow \infty$ limitinde hesap yapmak demektir. Bu durumda enerji kapsamlı bir parametre olduğundan, $E \rightarrow \infty$ olmaktadır. Çünkü her bir parçacığın enerjisi olacaktır ve sonsuz tane parçacığın enerjisi toplanırsa enerji sonsuz bulunur. Ancak, termodinamik limitin fiziksel olarak anlamlı olabilmesi için $\frac{E}{N}$ sonlu olmalıdır. (3.1.21) denkleminde paydaki değerlerin hepsi sonludur. O halde $N \rightarrow \infty$ limitinde (3.1.21) denkleminde $\frac{E}{N}$ nin sonlu olabilmesi için paydanın da sonlu kalması gerekir. Bunu sağlamanın tek yolu $N \rightarrow \infty$ için $\chi_d \rightarrow 0$ olmasıdır. Bu yüzden N sonsuza giderken, $N\chi_d$ çarpımının sonlu kaldığı limit durumu etkin termodinamik limit olarak adlandırılabilir.

3.2. Öz Isı ve Sürekliliği

Bir sistemin faz geçişi yapıp yapmadığını ortaya koyan özellik, termodinamik niceliklerinin ya da türevlerinin sürekli olup olmadığıdır. Bir önceki bölümde yazılan enerji ifadelerinden enerjinin sürekli olduğu görülmektedir. Bose gazlarında faz geçişlerini incelemek amacıyla bu bölümde parçacık başına düşen öz ısı (C_N) nin sürekli olup olmadığı araştırılacaktır. Öz ısı (C_N) nin ifadesi enerjinin sıcaklığa (T) ye göre türevi alınarak bulunur.

$$C_N = \frac{1}{N} \frac{\partial E}{\partial T} \quad (3.2.22)$$

N sabit olduğundan,

$$\frac{\partial N}{\partial T} = 0 \quad (3.2.23)$$

olacaktır. Bu eşitlik kullanılarak $\frac{E}{N}$ ifadesinin T ' ye göre türevi alındığında parçacık başına düşen öz ısı, $T > T_c$ için

$$C_N = s(s+1)k_B \frac{g_{s+1}(z)}{g_s(z)} - s^2 k_B \frac{g_s(z)}{g_{s-1}(z)} \quad (3.2.24)$$

şeklinde bulunur.

$T < T_c$ için, (3.1.20) ve (3.1.21) denklemlerinde $\mu = 0$ yani $z = 1$ alınarak hesaplandığında, öz ısının ifadesi,

$$C_N = s(s+1)k_B \left(\frac{T}{T_c}\right)^s \frac{g_{s+1}(1)}{g_s(1)} \quad (3.2.25)$$

olarak hesaplanır.

(3.2.24) ve (3.2.25) denklemleri kullanılarak sıcaklık T_c ye yaklaşırken soldan ve sağdan limit değerleri sırasıyla

$$C_N(T \rightarrow T_c^-) = s(s+1)k_B \frac{g_{s+1}(1)}{g_s(1)} \quad (3.2.26)$$

$$C_N(T \rightarrow T_c^+) = s(s+1)k_B \frac{g_{s+1}(1)}{g_s(1)} - s^2 k_B \frac{g_s(1)}{g_{s-1}(1)} \quad (3.2.27)$$

şeklinde bulunur. Buradan C_N deki süreksizlik hesaplanabilir:

$$\Delta C_N = C_N(T \rightarrow T_c^+) - C_N(T \rightarrow T_c^-) = -s^2 \frac{g_s(1)}{g_{s-1}(1)} \quad (3.2.28)$$

$s > 2$ için, (3.2.28) denkleminde $g_s(1) = \zeta(s)$ ifadesi yerine konulduğunda öz ısının süreksizliği

$$\Delta C_N = -s^2 \frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)} \quad (3.2.29)$$

biçiminde bulunur. $s > 2$ aralığında modifiye edilmiş ve modifiye edilmemiş yarı klasik yaklaşım aynı sonucu vermektedir. Yarı klasik yaklaşımda $s < 2$ $\zeta(s-1) \rightarrow \infty$ olduğu için $\Delta C_N = 0$ olduğundan tuzak potansiyelleri için ısı sığasında bir süreksizlik olmayacağını öngörür. Oysa modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımda (3.1.16) denkleminde görüldüğü üzere $g_{s-1}(1)$ için de sonludur. Bu yüzden

daha gerçekçi olan bu yaklaşımda $s < 2$ için de ısı sığasında süreksizlik olacağı öngörülür. Bu da bize Bose gazının her boyut ve tuzaklama potansiyelinde bir faz geçişi yapacağını gösterir.

4. GAMZE POTANSİYELLER İÇİN MYKY

4.1. Tuzak Potansiyellerim MYKY Aracılığıyla İncelenmesi

Bu bölümde, modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşım [7], tuzaklama potansiyellerinin gamze potansiyel içerdiği durumları da kapsayacak şekilde genelleştirilecektir. Tuzaklama potansiyeline ek olarak gamze potansiyel eklendiğindeki potansiyel

$$U(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^d \frac{\hbar\omega_{\alpha}}{2} \left| \frac{r_{\alpha}}{l_{\alpha}} \right|^{n_{\alpha}} - u_0 \sum_{\beta=1}^b \left(1 - \left| \frac{r_{\beta}}{a_{\beta}} \right|^{m_{\beta}} \right) \theta(a_{\beta} - |r_{\beta}|) \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a_{β} , ($\beta = 1, \dots, b$) değerleri farklı boyutlarda gamze potansiyelin genişliğini, u_0 derinliğini, θ basamak fonksiyonunu göstermektedir. İkinci toplamın üssü b ise, gamze potansiyelin uygulandığı boyut sayısını göstermektedir. Gamze potansiyeller, deneylerde, manyetik olarak tuzaklanan bozonların üzerine çok dar bir bölgede etki eden lazer ışığının etkisini modellemede kullanılmaktadır [11–14]. Bu etkinin çok dar bir bölgede oluşması nedeni ile bu tarz tuzaklar üç ya da daha düşük boyutlu bir dış potansiyel ve bir boyutlu gamze potansiyel ile betimlenmiştir [12]. Buradan uygulanan gamze potansiyelin boyutunun uzayın boyutundan az olabileceği sonucu çıkmaktadır. Bu yüzden (4.1.1) denklemindeki b değeri d değerine eşit olmak zorunda değildir, b değeri d değerine eşit ya da daha küçüktür. Bu noktadan itibaren kavram karmaşıklığı oluşmaması amacıyla (4.1.1) denkleminde verilen ilk terime dış potansiyel, ikinci terime gamze potansiyeli, toplam potansiyele ise tuzaklama potansiyeli adını vereceğiz.

Gamze potansiyel içeren tuzaklama potansiyellerinin minimumu, (4.1.1) denklemindeki gamze potansiyel teriminden dolayı 0 değil $-U_0 = -bu_0$ dır. Bunun sonucunda, tuzaklama potansiyeline karşılık gelen hamiltoniyenin enerji değerleri ε , negatif değerler alabilmektedir. Bir önceki bölümde d boyutta durum yoğunluğunun ifadesini veren (3.1.1) denkleminde de görülebileceği gibi negatif

enerji değerlerindeki ($\varepsilon < 0$) durum yoğunluğu dış potansiyele bağlı değildir, yani sadece gamze potansiyeline bağlıdır. Bu bilgi kullanılarak $\varepsilon < 0$ enerji değerleri için durum yoğunluğu analitik olarak hesaplanabilir.

(4.1.1) potansiyel ifadesindeki ikinci terim olan gamze potansiyel (3.1.1) denkleminde yerine konarak elde edilen durum yoğunluğu ifadesi, gamze potansiyel için tuzaklama boyutu (p) olarak adlandırılabilir

$$p = \frac{b}{2} + \sum_{\beta=1}^b \frac{1}{m_{\beta}} \quad (4.1.2)$$

bir üs içermektedir. Durum yoğunluğu ifadesi ayrıca gamze potansiyelin farklı boyutlardaki genişlikleri olan a_j , ($j = 1, 2, \dots, b$) değerlerine de bağlıdır. Bu genişlikler kullanılarak gamze potansiyelin etkin genişliği olarak da adlandırılabilir

$$(a_1 \dots a_b)^{\frac{1}{b}} = a_0 \quad (4.1.3)$$

değişkenini tanımlayalım. (4.1.2) ve (4.1.3) denklemindeki parametreleri kullanarak gamze potansiyeli için durum yoğunluğunun ifadesi (3.1.1) denklemini aracılığıyla

$$\rho_g(\varepsilon_-) = \frac{(\varepsilon + U_0)^{p-1}}{\chi_b \Gamma(p)} \quad (4.1.4)$$

biçiminde elde edilir. Burada χ_b parametresi

$$\chi_b = \left[\frac{(2ma_0)^{b/2} \prod_{\beta=1}^b \Gamma(1 + \frac{1}{m_{\beta}})}{\pi \hbar^2 U_0^{p-b/2}} \right]^{-1} \quad (4.1.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sıfırdan büyük enerji değerlerindeki durum yoğunluğu hem dış potansiyele hem de gamze potansiyeline bağlıdır. Bu yüzden bu enerji değerlerindeki durum yoğunluğu, (4.1.1) denkleminde verilen potansiyel ifadesinin bütünü (3.1.1) denkleminin içine yerleştirilerek bulunmalıdır. Ancak bu yapıldığında elde edilen integral alınmamakta ya da alınabildiği ender durumlarda da elde edilen durum yoğunluğu ifadesi ters trigonometrik fonksiyonlar cinsinden

çıkmaktadır. Bu durum yoğunluğu ifadeleri (2.1.12) ve (2.1.19) ifadelerinde yerine konulduğunda elde edilen integraller hesaplanamamaktadır. Ancak bu zorluk gamze potansiyellerin çok kısa erimli olması nedeni ile gamze potansiyelin $\varepsilon > 0$ enerji değerlerindeki durum yoğunluğunu etkilemediği kabulü yapılarak aşılabilir. Bu kabul altında $\varepsilon > 0$ değerlerindeki enerjilerin durum yoğunluğu (4.1.1) denklemdeki birinci terime karşılık gelen dış potansiyellerin durum yoğunluğunun aynısı olur. Bu durum yoğunluğunun ifadesi de bir önceki bölümde verilen (3.1.7) denklemdeki durum yoğunluğu ifadesidir. Ancak gamze potansiyeller içeren durumlarda enerji negatif ve pozitif iki bölgeye ayrıldığından bu durum yoğunluğu ifadesini

$$\rho(\varepsilon_+) = \frac{\varepsilon^{s-1}}{\chi_d \Gamma(s)} \quad (4.1.6)$$

şeklinde göstereceğiz. Bu eşitlikteki d ifadesi uzayın boyutunu gösterirken χ_d ifadesinin $d \geq 1$ için genel formu bir önceki bölümde (3.1.8) denklemde verilmiştir.

Şimdi (4.1.4) ve (4.1.6) denklemlerindeki durum yoğunluklarını kullanarak gamze potansiyel içeren tuzaklama potansiyellerinin içindeki bozon gazının parçacık sayısının ve enerjisinin sıcaklığa bağlılığını öncelikle $T > T_c$ için bulalım. (4.1.4) ve (4.1.6) denklemleri (2.1.12) denklemde yerine konulduğunda gamze potansiyel içeren tuzaklama potansiyellerinin içindeki bozon gazının parçacık sayısının sıcaklığa bağlı ifadesi elde edilir:

$$N = \frac{1}{\chi_b \Gamma(p)} \int_{-U_0}^0 \frac{(\varepsilon' + U_0)^{p-1} d\varepsilon'}{e^{\beta(\varepsilon' - \mu)} - 1} + \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{s-1} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad T > T_c. \quad (4.1.7)$$

Benzer şekilde durum yoğunluğu ifadeleri (2.1.19) denklemde yerine konulduğunda gamze potansiyel içeren tuzaklama potansiyellerinin içindeki bozon gazının enerji ifadesi

$$E = \frac{1}{\chi_b \Gamma(s)} \int_{-U_0}^0 \frac{(\varepsilon' + U_0)^{p-1} \varepsilon' d\varepsilon'}{e^{\beta(\varepsilon' - \mu)} - 1} + \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^s d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad T > T_c \quad (4.1.8)$$

şeklinde elde edilir. Bu integraller alınıp tuzak içindeki parçacık sayısının sıcaklığa bağlı ifadesini açıkça bulmak için bazı tanımlar yapmak yararlı olacaktır. Bu amaçla ilk olarak,

$$G_\alpha(y, t) = y \int_0^t \frac{u^{\alpha-1} du}{e^u - y} \quad (4.1.9)$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon (4.1.9) denklemindeki integral alındığında $ye^{-u} < 1$ için,

$$G_\alpha(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^\alpha} \gamma(\alpha, nt) \quad (4.1.10)$$

toplamı ile de ifade edilebilir. Bu denklemdaki $\gamma(\alpha, nt)$ çarpanı

$$\gamma(\alpha, nt) = \int_0^{nt} u^{\alpha-1} e^{-nu} du$$

şeklinde tanımlanmış Γ fonksiyonu cinsinden ifade edilmektedir. Bu tanımlar kullanılarak gamze potansiyeli için parçacık sayısının ifadesi,

$$N_g = \frac{1}{\chi_b \Gamma(p)} \int_{-U_0}^0 \frac{(\varepsilon' + U_0)^{p-1} d\varepsilon'}{e^{\beta(\varepsilon' - \mu)} - 1} \quad T > T_c \quad (4.1.11)$$

olarak bulunur. Dış potansiyel içindeki parçacık sayısının ifadesi, gamze potansiyelin dış potansiyelin enerji aralığında, $\varepsilon > 0$, durum yoğunluğunu değiştirmedığı kabul edildiğinden daha önce modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımdaki sonuç kullanılarak

$$N_T = \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{p-1} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad T > T_c \quad (4.1.12)$$

şeklinde bulunur.

(4.1.12) denklemindeki integral, $g_s(z)$ fonksiyonu aracılığı ile ifade edilebildiğinden dış potansiyel içindeki parçacık sayısı

$$N_T = \frac{1}{\chi_d} (k_B T)^s g_s(z) \quad T > T_c \quad (4.1.13)$$

şeklinde ifade edilir. Gamze potansiyeli içindeki parçacık sayısı ise (4.1.11) denklemindeki integral alınarak

$$N_g = \frac{(k_B T)^p}{\chi_b \Gamma(p)} G_\alpha(z', \beta U_0) \quad T > T_c \quad (4.1.14)$$

bulunur. Burada $z' = e^{\beta(U_0 + \mu)}$ ve $u = \beta \epsilon$ olarak alınmıştır.

(4.1.13) ve (4.1.14) denklemleri kullanılarak gamze potansiyel içeren tuzaklama potansiyelleri etkisindeki bozonların toplam parçacık sayısının ifadesi,

$$N = N_g + N_T = \frac{(k_B T)^p}{\chi_b \Gamma(p)} G_p(z', \beta n U_0) + \frac{(k_B T)^s}{\chi_g} g_s(z) \quad T > T_c \quad (4.1.15)$$

olarak elde edilir. Burada $\beta = \frac{1}{k_B T}$ şeklinde tanımlıdır.

Enerji ifadeleri daha çok ısı sığasının bulunmasında kullanıldığından enerjinin sıcaklıkla değişimini bir sonraki kısım olan öz ısı bölümünde inceleyeceğiz.

$T < T_c$ için $\mu = -U_0$ olduğundan toplam parçacık sayısının ifadesi (4.1.15) denkleminde $\mu = -U_0$ konarak elde edilir:

$$N = N_g + N_T = \frac{(k_B T)^p}{\chi_b \Gamma(p)} G_p(1, \beta n U_0) + \frac{(k_B T)^s}{\chi_g} g_s(e^{-\beta U_0}) \quad T < T_c \quad (4.1.16)$$

Bu ifade, gamze potansiyel için tuzaklama boyutunun düşük olduğu $p < 1$ durumlar için iraksar. Bu tür durumlardaki iraksaklık, aynı bir önceki bölümde olduğu gibi sistemin enerji spektrumu potansiyelin minimumu yerine, 0 K kinetik enerji ifadesi kullanılarak elde edilen

$$-U_0 + \epsilon_{min} = -U_0 + \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \quad (4.1.17)$$

değerinden başlatılarak giderilebilir. Burada $k_{min} = (a_1)^{-1}$ olup a_1 gamze potansiyelin genişliğidir.

4.2. Öz Isı

Bu bölümde gamze potansiyeli ve tuzaklama içerisindeki faz geçişlerini incelemek amacıyla parçacık başına düşen öz ısı (c_N) nin sürekli olup olmadığı araştırılacaktır. Öz ısı (c_N) nin ifadesi enerjinin sıcaklığa (T) göre türevi alınarak bulunur. Gamze potansiyel içeren enerji ifadesi $T > T_c$ için,

$$E = \frac{1}{\chi_b \Gamma(p)} \int_{-U_0}^0 \frac{(\epsilon' + U_0)^{p-1} \epsilon' d\epsilon'}{e^{\beta(\epsilon' - \mu)} - 1} + \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\epsilon^s d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (4.2.18)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlikte toplamdan önceki kısım gamze potansiyel kısmı iken ikinci kısım tuzaklama içerisindeki kısmı göstermektedir: Yani (4.2.18) eşitliğindeki

$$E_g = \frac{1}{\chi_b \Gamma(p)} \int_{-U_0}^0 \frac{(\epsilon' + U_0)^{p-1} \epsilon' d\epsilon'}{e^{\beta(\epsilon' - \mu)} - 1} \quad (4.2.19)$$

terimi enerjiye gamze potansiyelden gelen katkı olarak adlandırılabilir

$$E_T = \frac{1}{\chi_d \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\epsilon^s d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} = \frac{1}{\gamma_d} s (k_B T)^{s+1} g_{s+1}(z) \quad (4.2.20)$$

dış potansiyel içindeki enerjisi sıfırdan büyük bozonların katkısı olarak düşünülebilir. (4.2.20) denklemindeki integral alınarak gamze potansiyel içindeki yani enerjisi sıfırdan küçük bozonların toplam enerjiye katkısı

$$E_g = \frac{(k_B T)^{p+1}}{\chi_b \Gamma(p)} G_{p+1}(z', \beta U_0) - \frac{(k_B T)^p U_0}{\chi_b \Gamma(p)} G_p(z', \beta U_0) \quad (4.2.21)$$

biçiminde bulunur. Bozon gazının toplam enerjisi, gamze ve dış potansiyellerin içindeki bozonların sırasıyla (4.2.20) ve (4.2.21) denklemlerinde verilen enerji ifadeleri kullanılarak $T > T_c$ için

$$E = \frac{(k_B T)^{p+1}}{\chi_b \Gamma(p)} G_{p+1}(z', \beta U_0) - \frac{(k_B T)^p U_0}{\chi_b \Gamma(p)} G_p(z', \beta U_0) + \frac{1}{\gamma_d} s (k_B T)^{s+1} g_{s+1}(z) \quad (4.2.22)$$

olarak bulunur.

Sıcaklık, kritik sıcaklıktan düşük olduğunda ($T < T_c$) $\mu = -U_0$ olduğundan, $z' = e^{\beta(-U_0+U_0)} = e^0 = 1$ olur. Ayrıca $\mu = -U_0$, $z = e^{\beta\mu}$ da yerine konulduğunda, $z = e^{-\beta U_0}$ olur. Bu ifadeler ve (4.2.22) denklemi kullanılarak $T < T_c$ için enerji ifadesi

$$E = \frac{(k_B T)^{p+1}}{\chi_b \Gamma(p)} G_{p+1}(1, \beta U_0) - \frac{(k_B T)^p U_0}{\chi_b \Gamma(p)} G_p(1, \beta U_0) + \frac{1}{\gamma_d} s (k_B T)^{s+1} g_{s+1}(e^{-\beta U_0}) \quad (4.2.23)$$

bulunur. Bu denklemdeki ilk iki terim $T < T_c$ için gamze potansiyelin içindeki bozonların enerji ifadesidir:

$$E_g = \frac{(k_B T)^{p+1}}{\chi_b \Gamma(p)} G_{p+1}(1, \beta U_0) - \frac{(k_B T)^p U_0}{\chi_b \Gamma(p)} G_p(1, \beta U_0) \quad T < T_c. \quad (4.2.24)$$

(4.2.23) denklemdeki son terim ise $T < T_c$ için dış potansiyeldeki bozonların enerji ifadesidir:

$$E_T = \frac{1}{\gamma_d} s (k_B T)^{s+1} g_{s+1}(e^{-\beta U_0}) \quad T < T_c. \quad (4.2.25)$$

Öz ısı ifadelerini bulmak için de gamze potansiyel ile dış potansiyelin öz ısıya katkılarını ayrı ayrı hesaplayalım. Gamze potansiyelin öz ısı ifadesi $T > T_c$ için, (4.2.22) denklemde verilen ifadenin T sıcaklığına göre türevi alınarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{N \chi_b \Gamma(p)}{k_B} c_{N_g} &= (p+1)(k_B T)^p G_{p+1}(z', \beta U_0) - p \left((k_B T)^{p-1} \lambda \right. \\ &+ \left. (k_B T)^{p-2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + (k_B T)^{p-1} U_0 \right) G_p(z', \beta U_0) \quad (4.2.26) \\ &+ (p-1) \left((k_B T)^{p-2} U_0 \lambda + (k_B T)^{p-3} U_0 \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) G_{p-1}(z', \beta U_0). \end{aligned}$$

Bu denklemdeki λ , $\lambda = \mu + U_0$ şeklinde tanımlıdır. $T < T_c$ için ise öz ısı, (4.2.23) denklemde verilen ifadenin T sıcaklığına göre türevi alınarak hesaplanır:

$$c_{N_g} = \frac{k_B}{N \chi_g \Gamma(p)} \left\{ (p+1)(k_B T)^p G_{p+1}(1, \beta U_0) - p(k_B T)^{p-1} U_0 G_p(1, \beta U_0) \right\}. \quad (4.2.27)$$

(4.2.26) ve (4.2.27) denklemleri kullanılarak sıcaklık T_c ye yaklaşırken alttan ve üstten limit değerleri,

$$c_{N_g}(T \rightarrow T_c^-) = \frac{k_B}{N\chi_g\Gamma(p)} \left\{ (p+1)(k_B T_c)^p G_{p+1}(1, \beta_c U_0) - p(k_B T_c)^{p-1} U_0 G_p(1, \beta_c U_0) \right\} \quad (4.2.28)$$

ve

$$\begin{aligned} c_{N_g}(T \rightarrow T_c^+) &= \frac{k_B}{N\chi_b\Gamma(p)} \left\{ (p+1)(k_B T_c)^p G_{p+1}(1, \beta_c U_0) \right. \\ &\quad - p \left((k_B T_c)^{p-2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \Big|_{T=T_c^+} \right) + (k_B T_c)^{p-1} U_0 \right) G_p(1, \beta_c U_0) \\ &\quad \left. + (p-1) \left((k_B T_c)^{p-3} U_0 \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \Big|_{T=T_c^+} \right) \right) G_{p-1}(1, \beta_c U_0) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

şeklinindedir. Buradan gamze potansiyelin öz ısıdaki süreksizliğe katkısı hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \Delta c_{N_g} &= c_N(T \rightarrow T_c^+) - c_N(T \rightarrow T_c^-) = \frac{k_B}{N\chi_g\Gamma(p)} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \Big|_{T=T_c^+} \right) \times \\ &\quad \left\{ -p(k_B T_c)^{p-2} G_p(1, \beta_c U_0) + (p-1) U_0 (k_B T_c)^{p-3} G_{p-1}(1, \beta_c U_0) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Dış potansiyelden kaynaklanan süreksizlik (4.2.20) ve (4.2.25) denklemleri kullanılarak elde edilen c_{N_T} ifadelerinden hesaplanmalıdır. $T > T_c$ için c_{N_T} ifadesi (4.2.20) denkleminin sıcaklığa göre türevinden

$$c_{N_T} = \frac{1}{N\chi_d} \left[s(s+1)k_B(k_B T)^s g_{s+1}(z) - sk_B(k_B T)^{s-1} \left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) g_s(z) \right] \quad T > T_c \quad (4.2.31)$$

olarak bulunurken, $T < T_c$ için c_{N_T} (4.2.25) denkleminin sıcaklığa göre türevinden

$$c_{N_T} = \frac{1}{N\chi_d} \left[s(s+1)k_B(k_B T)^s g_{s+1}(e^{-\beta U_0}) + sk_B(k_B T)^{s-1} U_0 g_s(e^{-\beta U_0}) \right] \quad T < T_c \quad (4.2.32)$$

bulunur. Bu iki denklemin sırasıyla sıcaklık T_c ye yukarıdan ve aşağıdan yaklaşan limitlerinin farkı alınırsa Δc_{N_T}

$$\Delta c_{N_T} = -\frac{s(k_B T_c)^{s-2}}{N\chi_g} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \Big|_{T=T_c^+} \right) g_s(e^{-\beta_c U_0}) \quad (4.2.33)$$

bulunur. Bu ifade gamze potansiyelden kaynaklanan öz ısı süreksizliğine eklenerek tuzak içindeki bozon gazının öz ısı süreksizliği

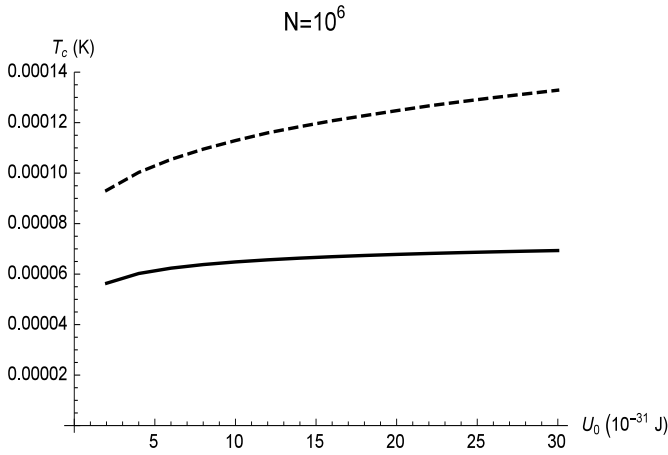
$$\Delta c_N = -\frac{s(k_B T_c)^{s-2}}{N \chi_g} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \Big|_{T=T_c^+} \right) g_s(e^{-\beta_c U_0}) + \frac{k_B}{N \chi_g \Gamma(p)} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \times \{ -p(k_B T_c)^{p-2} G_p(1, \beta_c U_0) + (p-1) U_0 (k_B T_c)^{p-3} G_{p-1}(1, \beta_c U_0) \} \quad (4.2.34)$$

biçiminde bulunur.

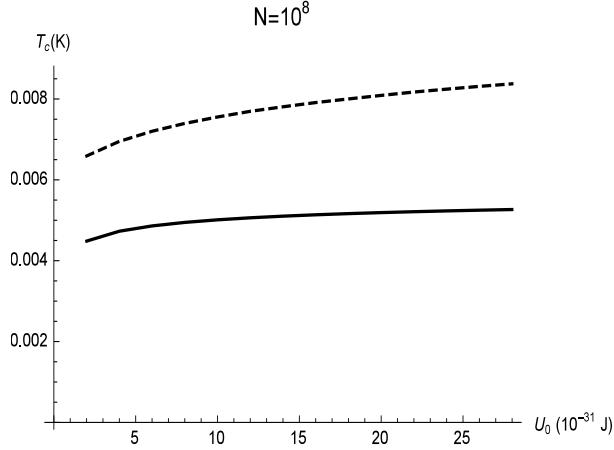
Gamze potansiyel içeren süreksizlik ifadesi bir ilginçlik barındırmaktadır. Çünkü bu ifadedeki ilk terim negatif iken ikinci terim U_0 değişkeninin büyüklüğüne göre pozitif ve negatif olabilir. Yani bu tür tuzaklarda U_0 ın derinliği değiştirilerek süreksizliğin işareti değiştirilebilir hatta belli U_0 değerleri için süreksizlik ortadan kaldırılabılır.

4.3. Bir Boyut İçin Sonuçlar ve Karşılaştırma

Modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşım gamze potansiyelleri de içeren tuzaklama potansiyellerine genelleştirebilmek için, dış potansiyelin durum yoğunluklarının gamze kısmından etkilenmediği kabulünü yapmıştık. Bu bölümde, yaptığımız



Şekil 4.1. Gamze Potansiyel vs. Kritik Sıcaklık $N = 10^6$



Şekil 4.2. Gamze Potansiyel vs. Kritik Sıcaklık $N = 10^8$

kabulün geçerliliğini araştırmak ve bu kabul altında geliştirilen modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımın hangi koşullar altında iyi sonuçlar verdiğini bulmaya çalışacağız. Bunun için sonuçlarımızı, gamze potansiyeli, kesilmiş parabolik model olarak adlandırılan ve

$$V_g(x) = -U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); |x| < a \quad (4.3.35)$$

şeklinde ifade edilen potansiyelle betimleyip, harmonik dış potansiyel ve gamze potansiyel içindeki bozon gazının termodinamiksel niceliklerini bir boyutta kuantum mekaniksel olarak inceleyen çalışma ile karşılaştıracacağız [19]. Gamze potansiyel bu şekilde betimlendiğinde tuzaklama potansiyelinin ifadesi

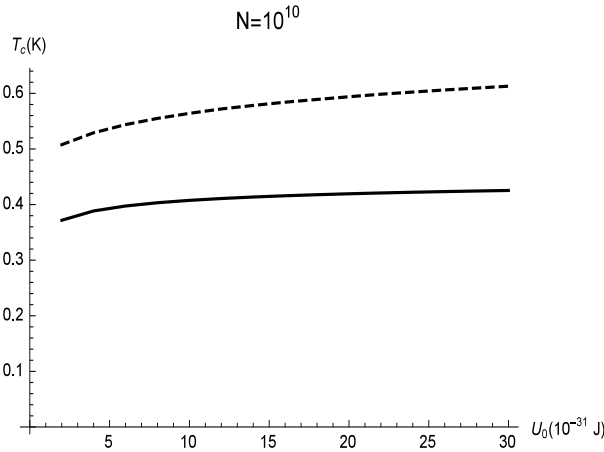
$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{için } |x| > a \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{için } |x| \leq a \end{cases} \quad (4.3.36)$$

şeklini almaktadır. (4.3.36) denkleminde verilen potansiyel, (4.1.1) denkleminde verilen potansiyelin özel bir halidir. (4.1.1) denkleminde $d = b = 1$, $n_1 = m_1 = 2$, $\omega_1 = \omega$, $l_1 = (\hbar/(m\omega))^{1/2}$, $u_0 = U_0$, $a_1 = a$ alındığında (4.3.36) elde edilir. O halde gamze potansiyeller için geliştirdiğimiz modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımla yaptığımız hesabı, [19] çalışmasında kuantum mekaniksel olarak yapılan hesapla karşılaştırarak yaklaşımımızı test edebiliriz. Bu amaçla modifiye edilmiş yarı

klasik yaklaşım kullanarak kritik sıcaklığın, gamze potansiyelin derinliği ile değişimini bularak, [19] çalışmasında aynı durum için yapılan kuantum mekaniksel hesapla karşılaştıracamız.

4.1, 4.2 ve 4.3 şekillerinde sırasıyla toplam parçacık sayısı $N = 10^6$, $N = 10^8$ ve $N = 10^{10}$ iken, bir boyutta dış potansiyel harmonik, gamze potansiyel kesilmiş parabolik potansiyel alındığında kritik sıcaklığın potansiyelin derinliği ile değişiminin hem kuantum mekaniksel hem de modifiye edilmiş yarı klasik hesapla elde edilmiş sonuçlarını gösteriyoruz. Bu grafiklerde kesikli çizgiler kuantum mekaniksel hesabı gösterirken, düz çizgiler modifiye edilmiş yarı klasik hesapla elde edilen sonuçları göstermektedir. Bu grafiklerden modifiye edilmiş yarı klasik hesabın kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimini nitel olarak doğru bir biçimde betimlediği görülmektedir. Ancak değerler nicel olarak oldukça farklıdır. Yalnız bu farklılığın parçacık sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir. O halde parçacık sayısı arttıkça yarı klasik yaklaşımın nicel olarak da doğru sonuçlar verdiği söylenebilir.

Gamze potansiyel içeren tuzaklama potansiyelleri için kuantum mekaniksel hesaplar ancak çok özel durumlarda yapılabilir. Oysa modifiye edilmiş yarı



Şekil 4.3. Gamze Potansiyel vs. Kritik Sıcaklık $N = 10^{10}$

klasik yaklaşım bize her durum için hesap yapma olanağı verdiğiinden en azından sistemin termodinamiksel niceliklerin değişimini nitel olarak betimlemede yararlı olacaktır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, V.I. Yukalov tarafından geliştirilen bozon gazlarının modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımla incelenmiş ve gamze potansiyelleri de içerecek biçimde geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, gamze potansiyellerin matematiksel bir modeli oluşturulmuş ((4.1.1) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terim) ve bozonların bu tarz tuzaklardaki termodinamik özellikleri hesaplanmıştır.

Yarı klasik yaklaşım düşük boyutlu sistemlerde ıraksamalara yol açmaktadır. Bunun nedeni yarı klasik yaklaşımda enerji spektrumunun minimumunun sıfır seçilmesidir. Modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımda bu ıraksama sorunu enerjinin minimumunu sıfır yerine kuantum mekaniksel taban durumu değeri olarak elde ederek çözülmüştür. Böylece yarı klasik yaklaşımın enerji spektrumunun minimumunun sıfır olmadığı durumlara da geliştirilebileceği gösterilmiştir. Bu model gamze potansiyeller içeren tuzaklara uygundur çünkü gamze potansiyel içeren tuzaklarda da enerjinin spektrumu sıfırdan farklı negatif değerlerden başlamaktadır.

Modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşımı gamze potansiyelleri de içeren tuzaklama potansiyellerine genelleştirebilmek için, dış potansiyelin durum yoğunluklarının gamze kısmından etkilenmediği kabulünü yaptık. Yaptığımız kabulün geçerliliğini araştırdık ve bu kabul altında geliştirilen modifiye edilmiş yarı klasik hesabın kritik sıcaklığın gamze potansiyelin derinliği ile değişimini nitel olarak doğru bir biçimde betimlediğini gördük. Ancak elde edilen değerler nicel olarak oldukça farklılıklar gösterebilmektedir. Bu farklılığın parçacık sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir. O halde parçacık sayısı arttıkça yarı klasik yaklaşımın nicel olarak da doğru sonuçlar verdiği söylenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Einstein, A. 1924. Qunatentheorie der einatomigen idealen gases. In:Sitzungsberichte der Preussichen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp.261-267, Berlin.
- [2] Ketterle, W., van Druten, N.J. 1996. Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or threedimensions. **Phys. Rev. A.**, 54: 656-660.
- [3] Davis, K.B., Mewes, M.-O., Andrews, M.R., Van Druten, N.J., Durfee, D.S., Kurn, D.M., Ketterle, W. 1995. Bose Einstein condensation in a gas of sodium atoms. **Phys. Rev. Lett.**, 75: 3969-3973.
- [4] Anderson, M.H., Ensher, J.R., Matthews, M.R., Wiemann, C.E., Cornell, E.A. 1995. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. **Science**, 269: 198-201.
- [5] Bradley, C.C., Sackett, C.A., Tollett, J.J., Hulet, R.G. 1995. Evidence of Bose Einstein condensation in atomic gas with attractive interactions. **Phys. Rev. Lett.**, 75: 1687-1690.
- [6] Pethick, C.J., Smith, H. 2002. Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases. 2.baskı, Cambridge University Press, pp.62-65, Cambridge.
- [7] Yukalov, V.I., 2005. Modified Semiclassical approximation for trapped Bose gases, *Phys Rev A.*, 72 033608.
- [8] Salasnich, L., 2000. Ideal quantum gases in D-dimensional space and power-law potentsils, **Jour. of Math. Phys.**, 41: 8016
- [9] Görlitz, A., Vogels, J. M., Leanhardt, A. E., Raman, C., Gustavson, T. L., Abo-Shaer, J. R., Chikkatur, A. P., Gupta S., Inouye S., Rosenband, T., Ketterle, W., 2001. Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions, **Phys. Rev. Lett.**, 87: 130402.
- [10] Stamper-Kurn, D.M., Miesner, H.-J., Chikkatur, A.P., Inouye, S., Stenger, J., Ketterle, W. 1998. Reversible Formation of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2194-2197.
- [11] Pinkse, P.W.H., Mosk, A., Weidemüller, M., Reynolds, M.W., Hijmans, T.W., Walraven, J.T.M. 1997. Adiabatically Changing the Phase-Space Density of a Trapped Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 78: 990-993.

- [12] Garrett, M.C., Ratnapala, A., van Ooijen, E.D., Vale, C.J., Weegink, K., Schnelle, S.K., Vainio, O., Heckenberg, N.R., Rubinsztein-Dunlop, H., Davis, M.J. 2011. Growth dynamics of a Bose-Einstein condensate in a dimple trap without cooling. *Phys. Rev. A.*, 83: 013630 1-9
- [13] Jacob, D., Mimoun, E., De Sarlo, L., Weitz, M., Dalibard, J., Gerbier F. 2011. Production of sodium Bose Einstein condensates in an optical dimple trap. **New Journal of Physics**, 13: 06522 1-16.
- [14] Ma, Z.-Y., Foot, C.J., Cornish, S.L. 2004. Optimized evaporative cooling using a dimple potential: an efficient route to Bose Einstein condensation. **J. Phys. B.**, 37: 3187-3195.
- [15] Uncu, H., Tarhan, D., Demiralp, E., Mustecaplioglu, O.E. 2007. Bose-Einstein condensate in a harmonic trap decorated with Dirac delta functions. **Phys. Rev. A.**, 76: 013618 1-7.
- [16] Goold, J., O'Donoghue, D., Busch, Th. 2008. Low-density, one-dimensional quantum gases in the presence of a localized attractive potential. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.**, 41: 215301-215308.
- [17] Aydın, Ç.M., Uncu, H., Deniz, C.2013. A Parabolic model for dimple potentials. *Physica Scripta*, 03500688 1-10.
- [18] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. 1997. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. 2.Baskı, Springer, pp.314-319, Berlin.
- [19] Aydın, Ç.M., 2013. Gamze Potansiyelin Bose Einstein Yoğuşuk Maddesinin Termodinamik Özelliklerine Etkisi. Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi(Basılmamış), Aydın.

EK1. KİMYASAL POTANSİYELİN SICAKLIĞA BAĞLILIĞI

1.1. Kimyasal Potansiyelin Sıcaklığa Göre Türev İfadesi

Gamze potansiyellerin özısı (c_N) hesaplamalarındaki bazı terimlerde bulunan $\partial\mu/\partial\beta$ ifadesini kimyasal potansiyel μ nun, sıcaklığa bağıllığı açık bir biçimde bilinmediğinden ayrıca hesaplamak gerekmektedir. Bu ek kısmında bu ifadenin hesaplanması toplam parçacık sayısının sabit olması kullanılarak hesaplanacaktır. Parçacık sayısı sabit olduğunda parçacık sayısının sıcaklığa göre türevi sıfırdır:

$$\frac{\partial N}{\partial T} = -\frac{k_B}{(k_B T)^2} \frac{\partial N}{\partial \beta} = 0 \quad (1.1.1)$$

Parçacık sayısının sıcaklığa (T) bağlı ifadesi, gamze potansiyellerin modifiye edilmiş yarı klasik yaklaşım metninde

$$N = \frac{1}{\chi_b \Gamma(p)} \beta^{-s'} G(z', p, \beta U_0) + \frac{\beta^{-s}}{\chi_g} g_s(z) \quad (1.1.2)$$

şeklinde bulunmuştu.

$$\frac{\partial}{\partial \beta} G(z', p, \beta U_0) = \frac{\partial G(z', p, \beta U_0)}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \beta} + \frac{\partial G(z', p, \beta U_0)}{\partial (\beta U_0)} \frac{\partial (\beta U_0)}{\partial \beta} \quad (1.1.3)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \beta} z = \frac{\partial}{\partial \beta} \exp \beta \mu = \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \quad (1.1.4)$$

ifadeleri kullanılarak $\partial\mu/\partial\beta$ ifadesi bulunabilir.

$f_1(z', p-1, \beta U_0)$ ve $f_2(z', p-1, \beta U_0)$ ifadelerini tanımlayıp,

$$\begin{aligned} f_1(z', p-1, \beta U_0) &= p(k_B T)^{p+1} G(z', p, \beta U_0) + s \frac{\chi_b}{\chi_g} \Gamma(p) (k_B T)^{s+1} g_s(z) \\ &- (p-1)(k_B T)^p U_0 G(z', p-1, \beta U_0) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

ve

$$\begin{aligned} f_2(z', p-1, \beta U_0) &= p^{-1}(k_B T)^p G(z', p-1, \beta U_0) - k_B T (U_0)^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} z'^n \exp -n\beta U_0 \\ &+ \frac{\chi_b}{\chi_g} \Gamma(p) (k_B T)^s g_{s-1}(z) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

olmak üzere, $(\mu + \beta \partial\mu/\partial\beta)$ ifadesi,

$$\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = \frac{f_1(z', p-1, \beta U_0)}{f_2(z', p-1, \beta U_0)} \quad (1.1.7)$$

şeklinde bulunur.

ÖZ GEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Gamze TOKER
Doğum Yeri ve Tarihi : AYDIN 24/11/1989

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi
Fen Fak., Fizik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Aydın Efeler Halk Eğitim Merkezi

İLETİŞİM

E-posta Adresi : gamzetokerfizik@gmail.com
Tarih : 29.08.2016