T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2016-YL-029

NEUTRİX CALCULUS'UN DİSTRİBÜSYONLARIN KOMPOZİSYONU ÜZERİNE BAZI UYGULAMALARI

Emine ÇAKMAKCI

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. İnci EGE

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Emine ÇAKMAKCI tarafından hazırlanan Neutrix Calculus'un Distribüsyonların Kompozisyonu Üzerine Bazı Uygulamaları başlıklı tez, 06.05.2016 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ	HÜ Fen Fak.	
Üye :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye :	Doç. Dr. İnci EGE	ADÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2016 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

06.05.2016

Emine ÇAKMAKCI

ÖZET

NEUTRİX CALCULUS'UN DİSTRİBÜSYONLARIN KOMPOZİSYONU ÜZERİNE BAZI UYGULAMALARI

Emine ÇAKMAKCI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. İnci EGE
2016, 33 sayfa

Distribüsyonların kompozisyonu, distribüsyon teorisinin geliştirildiği ilk günlerden itibaren üzerinde çalışılan bir problemdir. İngiliz matematikçi Brian Fisher, Van Der Corput'un geliştirdiği neutrix kavramını kullanarak distribüsyonların neutrix kompozisyonunu tanımlamıştır. Bu çalışmada bazı distribüsyonların neutrix kompozisyonlarının varlığını göstermek ve kompozisyonlarını hesaplamak amaçlanmaktadır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci ve ikinci bölümde, giriş ve distribüsyon tanımını verebilmek için gerekli olan test fonksiyonlar uzayı tanımlanmış daha sonra da distribüsyon uzayı ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, neutrix ve neutrix limit kavramları örnekleri ile birlikte verilmiştir.

Son bölümde ise öncelikle neutrix kavramının distribüsyonların kompozisyonunu tanımlamada nasıl kullanıldığına yer verilmiş daha sonra da $x_-^{-s} ln x_-$ ve x_+^r distribüsyonlarının neutrix kompozisyonu ile $x_-^{-s} ln^m x_-$ ve $H(x)$ distribüsyonların neutrix kompozisyonları hesaplanmıştır.

Anahtar Sözcükler
Neutrix, neutrix limit, distribüsyon, neutrix kompozisyon

ABSTRACT

SOME APPLICATIONS OF NEUTRIX CALCULUS TO COMPOSITION OF DISTRIBUTIONS

Emine ÇAKMAKCI

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. İnci EGE
2016, 33 pages

The Composition of distributions is a problem studied from the earliest days of the development of the distribution theory. British mathematician Brian Fisher defined the neutrix composition of distributions using the concept of neutrix limit has been developed by Van Der Corput. In this study, it is intended to show the existence of some distribution of neutrix composition and to calculate compositions of these distributions.

The thesis consists of four chapters.
In the first and second chapter, entry and test functions space, which is necessary to give the definition of distribution, have been defined and after the distribution space and its some properties have been investigated.

In the third chapter, neutrix and neutrix limit concepts have been given with examples.

In the last chapter, how to use the concept of the neutrix on the defining of the composition of distributions has been given and then the neutrix composition of distributions $x_-^{-s} \ln x_-$ and x_+^r, $x_-^{-s} \ln^m x_-$ and $H(x)$ have been calculated.

Key Words
Neutrix, neutrix limit, distribution, composition of neutrix

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Doç. Dr. İnci EGE'ye, tezin biçimlenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na ve araştırma görevlisi hocam Emrah YILDIRIM'a

Lisansüstü eğitimim boyunca her ihtiyacım olduğunda yanımda olan ve yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Gözde ASLAN, Abidin ZAFER ve Burçin ŞAHİN'e

Hayatım boyunca hiçbir zaman sevgisini, fedakarlığını esirgemeyen çalışmalarımda bana cesaret ve güç veren çok kıymetli ailem Cemil KAYA, Ayten KAYA, Celaleddin KAYA ve Cansel KAYA'ya

Çalışmam boyunca gösterdiği sevgi, saygı ve sabırdan dolayı eşim Fatih ÇAKMAKCI'ya

Teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Emine ÇAKMAKCI

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

D	Test fonksiyonları uzayı
D'	Distribüsyonlar uzayı
N	Neutrix
$\delta(x)$	Dirac-Delta fonksiyonu
$H(x)$	Heaviside fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$\beta(a,b)$	Beta fonksiyonu
$D(a,b)$	(a,b) aralığı üzerinde tanımlı test fonksiyonları uzayı
$D'(a,b)$	(a,b) aralığı üzerinde tanımlı distribüsyon uzayı
$\rho(x)$	Rho fonksiyonu
$supp f$	f fonksiyonunun desteği
$*$	Konvolüsyon çarpım
$\square$	Kanıtın bittiğini gösteren simge

1. GİRİŞ

Distribüsyonlar teorisi ilk olarak Sobolev tarafından verilmiş ve daha sonra L. Shwartz tarafından sistematik olarak geliştirilmiştir [17]. Distribüsyon kavramı; fonksiyonel analiz, uygulamalı matematik gibi matematiksel disiplinlerde kullanılmasının yanında fizik ve mühendislik gibi alanlarda da kendine geniş bir yer bulmuştur [5,6,10,15].

Test fonksiyonları üzerinde verilen toplama, skalerle çarpma işlemleri keyfi distribüsyonlara genişletilebilirken; çarpma, kompozisyon ya da değişken değiştirme gibi işlemler sadece belirli distribüsyonlar için yapılabilmektedir. Örneğin, δ^2 ya da $\sqrt{\delta}$ gibi ifadelerin tanımlanmasında distribüsyon teorisi tek başına yeterli değildir. Bu sebeple matematikciler yeni matematiksel yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Bunlardan bir tanesi de B. Fisher tarafından neutrix kavramı kullanılarak verilen distribüsyonların kompozisyonu tanımıdır [13].

Neutrix kavramı van Der Corput tarafından geliştirilmiştir [3]. Yakınsak olmayan integrallerden, uygun olarak tanımlanmış ıraksak parçanın atılması ile elde edilen sonlu parça *Hadamard sonlu toplam* olarak adlandırılır [12]. Hadamard metodu neutrix calculus'un bir uygulaması şeklinde düşünülebilir. Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde $x_-^{-s}\ln x_-$ ile x_+^r distribüsyonlarının neutrix kompozisyonunun ve $x_-^{-s}\ln^m x_-$ ile $H(x)$ distribüsyonlarının neutrix kompozisyonlarının varlığı gösterilerek sonuçları hesaplanmıştır.

2. DİSTRİBÜSYON UZAYI

2.1. Giriş

Bu bölümde test fonksiyonları uzayı üzerinde tanımlı distribüsyonların bazı temel özellikleri verilecektir.

2.2. Test Fonksiyonları ve Distribüsyonlar

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı gerçel(veya karmaşık) değerli bir φ fonksiyonunun desteği $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$ noktalar kümesinin kapanışıdır ve suppφ ile gösterilir. Her mertebeden türevlenebilen gerçel değerli ve desteği kompakt olan bir fonksiyona *test fonksiyonu* denir. Test fonksiyonları kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi ile doğrusal bir uzaydır ve D ile gösterilir.

$\{\varphi_n\} \subset D$ test fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer her n için φ_n fonksiyonları n'den bağımsız olarak aynı sınırlı bölge dışında sıfırlanıyor ve her mertebeden türevleriyle birlikte sıfıra düzgün yakınsak oluyorsa $\{\varphi_n\}$ dizisi D uzayında *sıfıra yakınsaktır* denir.

Örnek 2.1.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\left(-\frac{9}{9-x^2}\right)} & |x| < 3, \\ 0, & |x| \geq 3 \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $\varphi(x)$ her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur ve supp$\varphi = [-3,3]$ kümesidir. φ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(x)$ $(n = 1,2,...)$ dizisi D uzayı içinde sıfıra yakınsar. Fakat $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n})$ $(n = 1,2,...)$ ile tanımlanan $\{\varphi_n\}$ dizisi bütün fonksiyonların dışında sıfırlandığı ortak bir sınırlı bölge bulunamayacağından D uzayında sıfıra yakınsak değildir.

Tanım 2.2. [11] D test fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı bir f fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağlıyor ise *f'ye distribüsyon* denir.

i. Her $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ fonksiyonları ve a_1, a_2 gerçel sayıları için

$$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \rangle = a_1\langle f, \varphi_1 \rangle + a_2\langle f, \varphi_2 \rangle, \quad (f\text{'nin doğrusallığı})$$

ii. D uzayı içerisinde her sıfıra yakınsayan $\{\varphi_n\}$ dizisi için $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ gerçel sayı dizisi de sıfıra yakınsar (f'nin sürekliliği).

D uzayı üzerinde tanımlı distribüsyonlar uzayı D' ile gösterilir. Distribüsyona örnek olarak keyfi yerel toplanabilir ($\mathbb{R}$'nin sınırlı her alt aralığında mutlak integrallenebilir) bir fonksiyonu alabiliriz. Keyfi bir φ test fonksiyonu için f fonksiyonuna karşılık gelen distribüsyonu

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx \tag{2.2.1}$$

ile tanımlarsak f fonksiyoneli Tanım 2.2'de verilen i ve ii koşullarını sağlar. Ayrıca burada integral φ'nin desteği üzerinden alınmaktadır ve değeri sonludur. Böylece $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı her yerel toplanabilir fonksiyon bir distribüsyon tanımlar.

(2.2.1) eşitliği ile tanımlanabilen distribüsyonlara *regüler* ve diğerlerine de *singüler* denir.

Şimdi de (2.2.1) eşitliği ile ifade edilemeyen distribüsyonların varlığını gösterelim. $\varphi \in D$ olmak üzere f distribüsyonunu

$$\langle f, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{2.2.2}$$

ile tanımlayalım. Açık olarak f fonksiyoneli D uzayı üzerinde lineer ve süreklidir ancak (2.2.1) biçiminde ifade edilemez. (2.2.2) eşitliği ile tanımlanan fonksiyonele *Dirac-delta distribüsyonu* denir ve $\delta(x)$ ile gösterilir. Yani,

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$$

biçimindedir.

Genel olarak $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere Dirac-delta distribüsyonu her $\varphi \in D$ için

$$\langle \delta(x-x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0) \tag{2.2.3}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Eğer regüler bir f distribüsyonu

$$\langle f, \varphi \rangle = C \int \varphi(x)dx = \int C\varphi(x)dx$$

biçiminde tanımlı ise f distribüsyonu sabit C distribüsyonu olarak adlandırılır. Örneğin birim fonksiyona karşılık gelen distribüsyon

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int \varphi(x)dx$$

biçiminde tanımlıdır.

2.3. Distribüsyonların Bazı Özellikleri

Tanımından da anlaşılabileceği gibi genel olarak verilen bir distribüsyonun bir noktadaki değeri anlamlı değildir. Örneğin bir distribüsyonun x_0 noktasında sıfır olduğu söylenemez. Ancak, x_0 noktasının bir U komşuluğunda sıfır olması tanımlanabilir.

D uzayı içerisinde $supp\varphi \subset U$ olan her φ test fonksiyonu için $\langle f, \varphi \rangle = 0$ oluyorsa f distribüsyonu x_0 noktasının bir U komşuluğunda *sıfırlanıyor* denir. Böylece bir $f(x)$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının bir U komşuluğunda hemen hemen heryerde sıfır ise f fonksiyonuna karşılık gelen distribüsyon da bu U komşuluğunda sıfırlanır. Dirac-delta $\delta(x-x_1)$ singüler fonksiyonu $x \neq x_1$ olan noktaların keyfi bir komşuluğunda sıfıra eşitlenir.

Eğer bir f distribüsyonu x_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda sıfırlanmıyorsa x_0'a f distribüsyonunun *esas noktası* denir. f distribüsyonunun esas noktalarının oluşturduğu küme f'nin *desteği* olarak adlandırılır. S kümesi, f fonksiyonelinin desteğini kapsayan bir kümeyse bu durumda f, S içinde *yoğunlaşmıştır* denir.

Örnek 2.3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ bir esas noktadır. Aslında, her $x \in \mathbb{R}$ noktası $f(x) = x^2$ fonksiyonu için bir esas noktadır. Böylece f'nin desteği $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesidir.

Sürekli ya da parçalı sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen regüler f distribüsyonunun desteği $f(x) \neq 0$ olan noktalar kümesinin kapanışıdır.

Örnek 2.4.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty : & x = 0, \\ 0 : & x \neq 0 \end{cases}$$

ile tanımlı Dirac-delta fonksiyonuna karşılık gelen ve $x = 0$ noktasında (2.2.3) eşitliği ile tanımlı distribüsyonun desteği $x_0 = 0$ tek nokta kümesidir.

f ve g keyfi iki distribüsyon ve $U \subset \mathbb{R}$ açık bir küme olsun. $f - g$ farkı U kümesi üzerinde sıfırlanıyor ise f ve g distribüsyonları U kümesi üzerinde *çakışıktır* denir. Eğer f ve g distribüsyonları her noktanın keyfi bir komşuluğunda çakışırsa bu durumda her $\varphi \in D$ için $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ biçimindedir. Yani; yerel özellikleri bilinen bir distribüsyon tek olarak belirlenebilir.

f ve g keyfi iki distribüsyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $f + g$ toplamı ve αf çarpımı sırasıyla

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle$$

ve

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \alpha \langle f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha \varphi \rangle$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımla $f + g$ ve αf fonksiyonelleri de birer distribüsyon tanımlar. Böylece D' doğrusal bir uzaydır. Ayrıca f ve g regüler ise $f + g$ ve αf distribüsyonları da regüler olur.

Genel olarak iki distribüsyonun çarpımı tanımlı olmamasına karşın bir distribüsyon ile keyfi mertebeden türevlenebilir bir fonksiyonun çarpımı tanımlanabilir. Öyleyse şimdi, verilen bir f distribüsyonunun sonsuz mertebeden türevlenebilen bir $a(x)$ fonksiyonu ile çarpımını tanımlayalım. İşe öncelikle şunu belirterek başlayalım:

Sonsuz mertebeden türevlenebilen bir $a(x)$ fonksiyonu ve D uzayı içerisindeki bir $\varphi(x)$ fonksiyonunun çarpımı olan $\psi(x) = a(x)\varphi(x)$ fonksiyonu yine D uzayındadır. Ayrıca $\varphi_v(x)$ fonksiyonlar dizisi D uzayı içinde sıfıra yakınsak ise $a(x)\varphi_v(x)$ dizisi de yine D içinde sıfıra yakınsar. Buradan af çarpımı her $\varphi \in D$ için

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle$$

eşitliği ile tanımlanır. af fonksiyoneli doğrusaldır. Ayrıca af sürekli bir fonksiyoneldir. Çünkü eğer $\varphi_v(x) \longrightarrow 0$ ise $a(x)\varphi_v(x) \longrightarrow 0$ ve böylece

$$\langle af, \varphi_v \rangle = \langle f, a\varphi_v \rangle \longrightarrow 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle &= \int f(x)[a(x)\varphi(x)]dx \\ &= \int [a(x)f(x)]\varphi(x)dx \end{aligned}$$

olduğundan yerel toplanabilir bir $f(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen f distribüsyonunun sonsuz mertebeden türevlenebilir bir $a(x)$ fonksiyonu ile çarpımı, $f(x)$'in $a(x)$ ile çarpımına karşılık gelen distribüsyon olur.

f, x_0 noktasını bulundurmayan her kapalı aralıkta yerel toplanabilir bir fonksiyon olmak üzere genel olarak

$$\int f(x)\varphi(x)dx \tag{2.3.4}$$

integrali ıraksaktır. Ancak φ test fonksiyonu x_0'ın bir komşuluğunda sıfırlanırsa (2.3.4) integrali yakınsak olur. Bu sonucu kullanarak yeni bir fonksiyonel inşa edebilir miyiz sorusuna cevap verelim. Ayrıca, elde edilen bu fonksiyonel bir distribüsyon tanımlasın ve x_0 noktasının bir komşuluğunda sıfırlanan her $\varphi \in D$ için (2.3.4) integrali ile aynı değerde olsun. Bu tipteki fonksiyoneller $f(x)$'in *regülerizasyonu (düzenlemesi)* ya da (2.3.4) ıraksak integralin *regülerizasyonu* olarak adlandırılır.

Örneğin $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu için regülerizasyon $a,b>0$ değerleri için

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx+\int_{b}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx \qquad (2.3.5)$$

biçiminde verilebilir.

Regülerizasyon farklı bir yolla da tanımlanabilir: $f(x)$ fonksiyonunun regülerizasyonu, sürekli doğrusal bir fonksiyoneldir ve bu fonksiyonel x_0 noktası hariç her yerde $f(x)$ ile çakışıktır. Gerçekten, x_0'ın bir komşuluğunda sıfırlanan her $\varphi\in D$ test fonksiyonu için (2.3.4) eşitliği ile verilebilen bir f fonksiyoneli varsa; bu durumda f, $x_1\neq x_0$ olan tüm noktalarda $f(x)$ ile çakışıktır. Ayrıca, x_0 noktası hariç $f(x)$ ile çakışan f fonksiyoneli için (2.3.4) integral değeri, $\varphi\in D$ fonksiyonunun x_0 noktasının bir komşuluğunda sıfırlanması koşuluyla korunur. Böylece f fonksiyoneli $f(x)$ fonksiyonunun bir regülerizasyonu olur.

Şimdi de, ıraksak integrallerin düzenlenmesi ile ilgili genel bir yöntem olarak aşağıdaki önermeyi verelim. Kolaylık açısından, önermede x_0 noktası olarak $x_0=0$ alınacaktır.

Önerme 2.5. *$f(x)x^m$ yerel toplanabilir olacak şekilde pozitif bir $m>0$ tamsayısı varsa (2.3.4) ıraksak integrali*

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\Big\{\varphi(x)-\Big[\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0).x^2}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^m(0).x^m}{m!}\Big]H(1-x)\Big\}dx \qquad (2.3.6)$$

biçiminde düzenlenebilir.

İspat. $H(1-x)$ fonksiyonu

$$H(1-x)=\begin{cases}0, & x>1\\ 1, & x<1\end{cases}$$

eşitliği ile tanımlı olmak üzere $x=0$ noktası dışında her yerde yerel toplanabilir bir fonksiyon olan $f(x)$'in regülerizasyonunun

$$\langle f,\varphi\rangle=\int f(x)\Big\{\varphi(x)-\Big[\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0).x^2}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^m(0).x^m}{m!}\Big]H(1-x)\Big\}dx$$

eşitliği ile verilebileceğini gösterelim.

(2.3.6) integrali her $\varphi \in D$ test fonksiyonu için yakınsaktır ve sürekli doğrusal bir fonksiyonel tanımlar. Ayrıca φ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasının bir komşuluğunda sıfırlanıyorsa (2.3.6) integrali yakınsak

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

integrali biçimini alır. Bu durumda f fonksiyoneli, $f(x)$ fonksiyonu ile $x = 0$ noktası dışında her yerde çakışır. Böylece $f(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen distribüsyon (2.3.6) eşitliği ile verilebilir. $\square$

2.4. Distribüsyonların Türevi

Klasik analizde fonksiyonların her zaman türevlenebilir olmadığını biliyoruz. Ancak bu durumun tersine, bir distribüsyonun türevinin her zaman ve her mertebeden var olduğunu ve yine bir distribüsyon tanımladığını göstereceğiz.

Distribüsyonun türevinin tanımını verebilmek için öncelikle birinci mertebeden sürekli türeve sahip bir $f(x)$ fonksiyonu yardımıyla elde edilen

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

eşitliğini göz önüne alalım. Burada φ test fonksiyonu olduğunda $[a,b]$ kapalı aralığı dışında sıfıra eşitlendiği hatırlanarak kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= \langle f, -\varphi' \rangle \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi bu eşitlik yardımıyla bir distribüsyonun türevi tanımını verelim.

f, D üzerinde tanımlı sürekli doğrusal bir fonksiyonel olsun.

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f, -\varphi' \rangle \tag{2.4.7}$$

eşitliği ile tanımlı g fonksiyoneline f distribüsyonunun *türevi* denir ve f' ile gösterilir.

Gösterimimize uygun olarak f' fonksiyonelini

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

biçiminde de ifade edebiliriz.

(2.4.7) eşitliği ile verilen g fonksiyonelinin bir distribüsyon tanımladığı gösterilebilir. Böylece her distribüsyon bir türeve sahiptir. Genel olarak; verilen bir f distribüsyonunun n. türevi her $\varphi \in D$ için

$$\langle f^{(n)}(x), \varphi(x)\rangle = (-1)^n \langle f(x), \varphi^{(n)}(x)\rangle$$

eşitliği ile tanımlanır.

Böylece verilen bir f distribüsyonunun her mertebeden türevi vardır.

Örnek 2.6. Heaviside fonksiyonu

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlıdır ve yerel integrallenebilirdir. Heaviside fonksiyonuna karşılık gelen distribüsyonu H ile tanımlayalım ve türevini bulalım. Her $\varphi \in D$ için,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{H}'(x), \varphi(x)\rangle &= -\langle \mathrm{H}(x), \varphi'(x)\rangle \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) \\ &= \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle \end{aligned}$$

olduğundan $H'(x) = \delta(x)$ biçimindedir.

Genel olarak $\delta(x)$ distribüsyonunun n. türevi,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{H}^{(n+1)}(x), \varphi(x)\rangle &= \langle \delta^{(n)}(x), \varphi(x)\rangle \\ &= (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.7.

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlı x_+^λ fonksiyonuna karşılık gelen distribüsyon

$-r-1 < \lambda < -r$ $(r \in Z^+)$ değerleri için Gel'fand ve Shilov tarafından

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0)\right] dx \tag{2.4.8}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır [11].

$\lambda > -r-1$ ve $\lambda \neq -1, -2, ..., -r$ değerleri için (2.4.8) eşitliği

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx &= \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - ..... - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{r-1}(0)\right] dx \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi^{k-1}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Ayrıca (2.4.9) eşitliğini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx &= \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - ..... - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{r-1}(0)\right] dx \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - ..... - \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}\varphi^{r-2}(0)\right] dx \\ &+ \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!(\lambda+r)} \end{aligned}$$

şeklinde yazarsak bu integralin $\lambda = -r$ değeri için ıraksak olduğu görülür. Eşitliğin sağ tarafındaki ıraksak kısım ihmal edildiğinde kalan integral yakınsak olur. Böylece Gel'fand ve Shilov $\lambda = -r$ değeri için x_+^{-r} fonksiyonuna karşılık gelen dstribüsyonu

$$\langle x_+^{-r}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-r} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - ..... - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{r-1}(0)\mathrm{H}(1-x)\right] dx \tag{2.4.10}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Ancak burada x_+^{-r} distribüsyonunun x_+^{λ} distribüsyonunun $\lambda = -r$ noktasındaki değeri olmadığını özellikle vurgulamamız gerekir. Örneğin x_+^{λ} $(\lambda \neq -1, -2, ...)$ distribüsyonu için

$$\frac{d}{dx}x_+^{\lambda} = \lambda x_+^{\lambda-1} \tag{2.4.11}$$

eşitliği sağlanır. Fakat, $r = 1, 2, ...$ olmak üzere x_+^{-r} distribüsyonu için (2.4.11) eşitliği geçerli değildir.

Çünkü her $\varphi \in D$ için;

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx}x_+^{-r}, \varphi(x)\rangle &= -\langle x_+^{-r}, \varphi'(x)\rangle \\
&= -\int_0^{\infty} x^{-r}\Big[\varphi'(x) - \varphi'(0) - ..... - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^r(0)\mathrm{H}(1-x)\Big]dx \\
&= -\int_0^{1} x^{-r}\Big[\varphi'(x) - \varphi'(0) - ..... - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^r(0)\Big]dx \\
&- \int_1^{\infty} x^{-r}\Big[\varphi'(x) - \varphi'(0) - ..... - \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}\varphi^{r-1}(0)\Big]dx
\end{aligned}$$

yazılır ve kısmi integral alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx}x_+^{-r}, \varphi(x)\rangle &= -\int_0^{\infty} rx^{-r-1}\Big[\varphi(x) - \varphi(0) - ..... - \frac{x^r}{r!}\varphi^r(0)\mathrm{H}(1-x)\Big]dx \\
&+ \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu sonuçtan yola çıkılarak

$$\frac{d}{dx}x_+^{-r} = -rx_+^{-r-1} + \frac{(-1)^r}{r!}\delta^r(x)$$

eşitliği elde edilir [11].

x_+^{λ} fonksiyonunun λ_0 noktası komşuluğunda Taylor serisi açılımına bakıldığında karşımıza

$$x_+^{\lambda}\ln^s x_+ = \frac{d^s x_+^{\lambda}}{d\lambda^s} \qquad (s = 1, 2, ...)$$

eşitliği ile tanımlı distribüsyon çıkar. $\lambda > -1$ ve $s = 1, 2, \ldots$ değerleri için bu yerel integrallenebilir bir fonksiyondur.

$-r-1 < \lambda < -r, \quad s = 1, 2, \ldots$ değerleri için $\varphi \in D$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle x_+^\lambda \ln^s x_+, \varphi \rangle &= \int_0^\infty x^\lambda \ln^s x \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-2} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} x_i - \ldots \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} H(1-x) x^{r-1} \Big] dx \\ &+ \frac{(-1)^s s! \varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!(\lambda + r)^{s+1}} \end{aligned}$$

Bu eşitliğin en sonundaki ifade $\lambda = -r$ değeri için ıraksadığı açıktır.

Gelfand ve Shilov bu ıraksak parçayı yok sayarak geriye kalan integralle $F(x_+, -r) \ln^s x_+$ distribüsyonunu tanımlamışlardır. Yani $\varphi \in D$ için

$$\begin{aligned} \langle F(x_+, -r) \ln^s x_+, \varphi(x) \rangle &= \int_0^\infty x^{-r} \ln^s(x) \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-2} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} x_i \\ &- \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} H(1-x) x^{r-1} \Big] dx \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır.

$x_+^{-r} \ln^s x_+$ fonksiyonuna karşılık gelen distribüsyona alternatif Özçağ ve Fisher tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [1].

Öncelikle $x_+^{-1} \ln^s x_+$ distribüsyonu

$$\frac{d}{dx} (\ln^{s+1} x_+) = (s+1) x_+^{-1} \ln^s x_+$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Genel olarak $x_+^{-r} \ln^s x_+$ distribüsyonunun $r, s = 1, 2, \ldots$ değerleri için

$$x_+^{-r} \ln^s x_+ = F(x_+, -r) \ln^s x_+ + \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \psi_s(r-1) \delta^{(r-1)}(x)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Burada

$$\psi_s(r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ s \sum_{i=1}^r \frac{\psi_{s-1}(i)}{i}, & r \geq 1 \end{cases}$$

ve $\psi_0(r) = \sum_{i=1}^r i^{-1}$ dir.

3. NEUTRIX VE NEUTRIX LİMİT

3.1. Tanımlar ve Örnekler

Bu bölümde üzerinde çalışacağımız bazı özel distribüsyonların kompozisyonunu tanımlayabilmemiz için gerekli olan neutrix ve neutrix limitin tanımları yapılacak ve örnekler verilecektir. Neutrix kavramı [3]'de verilmiştir. Hadamard sonlu parçanın elde edilmesinde kullanılan yöntem, Neutrix Calculus'un bir uygulaması olarak düşünülebilir.

Tanım 3.1. [3] $N' \neq \emptyset$ bir küme ve N'' toplamsal değişmeli bir grup olsun.
$f : N' \to N''$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli grubu N ile gösterelim. Eğer N içindeki tek sabit fonksiyon sıfır fonksiyonu ise, N kümesine *neutrix* denir ve N içerisindeki fonksiyonlar da *ihmal edilebilir fonksiyonlar* olarak adlandırılır.
Böylece $f \in N$ ve her $x \in N'$ için $f(x) = c$(sabit) ise $c = 0$ olmalıdır.

Örnek 3.2. N' tanım kümesi $[0,1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ kapalı aralığı ve N kümesi, N' üzerinde tanımlı $acosx + bx^4$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu küme olsun. O halde N bir neutrixtir. Gerçekten;

$$acosx + bx^4 = c \quad ise \quad a = b = c = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.3. Tanım kümesi $N' = (0,1)$ açık aralığı, değer kümesi $N'' = \mathbb{R}$ olmak üzere $f(\varepsilon) = a\varepsilon^{-1/2} + b(\ln\ln\varepsilon^{-1})^2 + o(\varepsilon)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ biçiminde tanımlanan fonksiyonların N kümesini göz önüne alalım. ($o(\varepsilon)$ fonksiyonları $\lim_{\varepsilon\to 0} o(\varepsilon) = 0$ şeklindedir). Bu durumda N bir neutrixtir. Gerçekten, $\forall\varepsilon \in N'$ için $a\varepsilon^{-1/2} + b(\ln\ln\varepsilon^{-1})^2 + o(\varepsilon) = c$ ise $a = b = c = 0$ olur.

Tanım 3.4. [3] N', X topolojik uzayının bir alt uzayı ve b noktası da N' uzayına ait olmayan bir limit noktası olsun. $N = \{f : N' \to N'' \mid \lim_{x\to b} f(x) = c \text{ ise } c = 0\}$

kümesi ile toplamsal değişmeli N grubu tanımlansın. f N' üzerinde tanımlı reel (veya komplex) değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x) - c \in N$ olacak şekilde bir c sabiti bulunabiliyorsa, bu durumda c sabitine $f(x)$ fonksiyonunun *neutrix limiti* denir ve

$$\mathrm{N}-\lim_{x \to b} f(x) = c$$

ile gösterilir.

Not 3.5. Tanım 3.4'de verilen N kümesi bir neutrix tanımlar. Çünkü $f \in N$ ve her $x \in N'$ için $f(x) = c$ ise bu durumda $x \to b$ iken $f(x) = c$ ve böylece $c = 0$ elde edilir.

Not 3.6. Eğer neutrix limit varsa tektir. Gerçekten, N bir neutrix ve c_1 ve c_2 sayıları f fonksiyonunun N neutrixine göre iki neutrix limiti ise neutrix limit tanımından

$$\mathrm{N}-\lim_{x \to b} f(x) = c_1, \quad \mathrm{N}-\lim_{x \to b} f(x) = c_2$$

ve N toplamsal değişmeli bir grup olduğundan

$$(f(x) - c_1) - (f(x) - c_2) = c_2 - c_1 \in N$$

elde edilir. N kümesi neutrix olduğundan içindeki tek sabit fonksiyon sıfır fonksiyonu olacağından
$c_2 - c_1 = 0$ yani $c_1 = c_2$ bulunur.

Neutrix limit ile ilgili önemli sorulardan birisi de normal anlamda tanımlanan limit ile neutrix limit arasında bir ilişkinin var olup olmadığına yöneliktir. Bu soruya aşağıdaki örnek yardımıyla cevap verilebilir.

Örnek 3.7. N neutrixi $\lim_{x \to b} f(x) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan bir küme olsun.
Bu durumda N bir neutrixdir ve $x \to b$ için $f(x)$ fonksiyonunun normal limiti c ise neutrix limiti de vardır ve değeri c sayısıdır.

Örnek 3.8. N neutrixi Örnek 3.3'deki gibi olsun.

$$f(\varepsilon) = 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\varepsilon^2 + 4} + 5(\ln\ln\varepsilon^{-1})^2$$

fonksiyonu için

$$f(\varepsilon) - 2 \in N$$

olacağından

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = 2$$

olur.

Örnek 3.9. Tanım kümesi $N' = (0, \frac{1}{2})$ açık aralığı, değer kümesi $N'' = \mathbb{R}$ olan

$$\varepsilon^{\lambda}\ln^{r-1}\varepsilon, \quad \ln^r\varepsilon, \quad o(\varepsilon) \quad (\lambda < 0, \quad r = 1, 2, ...)$$

biçiminde ve $\varepsilon \to 0$ için $o(\varepsilon) \to 0$ olan fonksiyonların sonlu doğrusal toplamlarından oluşan N neutrixini gözönüne alalım.
Beta fonksiyonu $\beta(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu > 0$ değerleri için

$$\beta(\lambda,\mu) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt$$

şeklinde tanımlıdır [1]. $\lambda > -r$, $\mu > -s$, $\lambda \neq 0, -1, ..., -r+1$, $\mu \neq 0, -1, ..., -s+1$ değerleri için Gel'fand ve Shilov $\beta(\lambda,\mu)$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda,\mu) &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\lambda-1}\Big[(1-t)^{\mu-1} - \sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu)}{i!\Gamma(\mu-i)}t^i\Big]dt \\
&+ \sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu)}{2^{\lambda+i}i!\Gamma(\mu-i)(\lambda+i)} + \\
&+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\mu-1}\Big[t^{\lambda-1} - \sum_{i=0}^{s-1}\frac{(-1)^i\Gamma(\lambda)}{i!\Gamma(\lambda-i)}(1-t)^i\Big]dt
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1}\frac{(-1)^i\Gamma(\lambda)}{2^{\mu+i}i!\Gamma(\lambda-i)(\mu+i)}\Big]dt$$

eşitliği ile tanımlamışlardır [11].

Şimdi $\lambda > -r, \quad \mu > -s, \quad \lambda \neq 0, -1, ..., -r+1, \quad \mu \neq 0, -1, ... -s+1$ değerleri için $\beta(\lambda, \mu)$ fonksiyonunu neutrix limit yardımıyla tanımlayalım.

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{\lambda-1}\left[(1-t)^{\mu-1} - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-i)i!}t^i\right]dt$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i\Gamma(\mu)}{i!(\lambda+i)\Gamma(\mu-i)}(2^{-\lambda-i} - \varepsilon^{\lambda+i})$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} (1-t)^{\mu-1}\left[t^{\lambda-1} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(-1)^i\Gamma(\lambda)}{i!\Gamma(\lambda-i)}(1-t)^i\right]dt$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1} \frac{(-1)^i\Gamma(\lambda)}{i!(\mu+i)\Gamma(\lambda-i)}(2^{-\mu-i} - \varepsilon^{\mu+i})$$

olarak yazılır ve neutrix limite geçilirse $\beta(\lambda, \mu)$ fonksiyonu

$$\beta(\lambda, \mu) = \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt \tag{3.1.1}$$

eşitliği ile tanımlanır [7].

Genel olarak $\beta(\lambda, \mu)$ Beta fonksiyonunun tanımı tüm λ ve μ gerçel değerleri için (3.1.1) eşitliği ile tanımlanabilir.

Şimdi, neutrix calculus'un distribüsyonlara uygulaması ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 3.10. N neutrixi, tanım kümesi $N' = (0, \infty)$ olmak üzere örnek 3.9'da verilen ihmal edilebilir fonksiyonlardan oluşan küme olarak alınsın. O zaman, $\lambda \neq -1, -2, ...$ değerleri ve her $\varphi \in D$ için

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^\lambda \varphi(x)dx$$

biçimindedir [8]. Gerçekten; $\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, ..., -n$ değerleri için

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^\lambda \varphi(x)dx = \int_{\varepsilon}^{1} x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - ... - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx$$

$$+ \int_{1}^{\infty} x^\lambda \varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}(1-\varepsilon^{\lambda+k})$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa istenen elde edilir.

4. DİSTRİBÜSYONLARIN NEUTRİX KOMPOZİSYONU

4.1. Tanımlar ve Gösterimler

Kompozisyon tanımını vermeden önce, bir distribüsyona yakınsayan keyfi mertebeden türevlenebilen fonksiyonların regüler bir dizisini oluşturacağız. Bunun için ilk olarak; distribüsyon anlamında Dirac-delta $\delta(x)$ fonksiyonuna yakınsayan regüler fonksiyonların bir dizisini kullanacağız. Böyle dizileri oluşturmanın pek çok yolu vardır. Bu tezde, Temple tarafından geliştirilen δ-dizisinden yararlanılacaktır.

$\rho(x)$ fonksiyonu her mertebeden türevi olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

(i) $\rho(x) = 0, \quad |x| \geq 1,$

(ii) $\rho(x) \geq 0,$

(iii) $\rho(x) = \rho(-x),$

(iv) $\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1.$

Bu durumda $n = 1, 2, ...$ değerleri için $\delta_n(x) = n\rho(nx)$ ile tanımlı $\{\delta_n\}$ dizisi her mertebeden türevlenebilen ve Dirac-delta fonksiyonuna yakınsayan bir dizidir.

Not 4.1. Yukarıda verilen $\rho(x)$ fonksiyonuna örnek olarak;

$$k^{-1} = \int_{-1}^{1} e^{-(1-x^2)^{-1}} dx$$

olmak üzere

$$\rho(x) = \begin{cases} ke^{-(1-x^2)^{-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu verilebilir.

(a, b) aralığı üzerinde tanımlı her mertebeden türevli ve kompakt desteği (a, b) içerisinde olan fonksiyonlar uzayını $D(a, b)$ ile ve $D(a, b)$ uzayı üzerinde tanımlı distribüsyon uzayını $D'(a, b)$ ile gösterelim.

Keyfi bir f distribüsyonu için $\{f_n\}$ dizisini

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (f*\delta_n)(x) \\ &= \langle f(t), \delta_n(x-t)\rangle \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-t)\delta_n(t)dt \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $\{f_n\}$ her mertebeden türevlenebilir fonksiyonların bir dizisidir ve f distribüsyonuna yakınsar.

Neutrix kompozisyonun tanımında kullanılacak olan N neutrixi, tanım kümesi $N' = \mathbb{Z}^+$(pozitif tamsayılar kümesi), değer kümesi $N'' = \mathbb{R}$ ve ihmal edilebilir fonksiyonları

$$n^\lambda \ln^{r-1} n, \quad \ln^r n, \quad (\lambda > 0, \quad r = 1,2,...)$$

ile $n \to \infty$ için sıfıra yakınsayan fonksiyonların sonlu doğrusal toplamlarından oluşan kümedir.

Tanım 4.2. [2] F, D' uzayı içerisinde bir distribüsyon, f yerel toplanabilir bir fonksiyon ve $n = 1,2,...$ için $\{F_n(x)\}$ dizisi $F_n(x) = (F*\delta_n)(x)$ biçiminde tanımlı olsun. Her $\varphi \in D(a,b)$ için

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(f(x))\varphi(x)dx = \langle h(x), \varphi(x)\rangle$$

ise, (a,b) açık aralığı üzerinde $F(f(x))$ kompozisyonu vardır ve *h distribüsyonuna eşittir* denir.

Tanım 4.3. [13, 14] F ve f fonksiyonları D' uzayında iki distribüsyon ve $m,n = 1,2,...$ değerleri için $F_n(x) = (F*\delta_n)(x)$ ve $f_m(x) = (f*\delta_m)(x)$ ile tanımlı olsun. Eğer her $\varphi \in D(a,b)$ için

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \left[\underset{m\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(f_m(x))\varphi(x)dx \right] = \langle h(x), \varphi(x)\rangle$$

ise, (a,b) açık aralığı üzerinde $F(f(x))$ kompozisyonu vardır ve *h distribüsyonuna eşittir* denir.

Not 4.4. Her sınırlı yerel toplanabilir f fonksiyonu için Tanım 4.3 Tanım 4.2'nin bir genellemesidir.

Teorem 4.5. *[16] $s = 1, 2, ...$ değerleri için $[H(x)]^{-s}$ distribüsyonu vardır ve*

$$[H(x)]^{-s} = H(x) \tag{4.1.1}$$

biçimindedir.

Teorem 4.6. *[16] $s = 1, 2, ...$ değerleri için $[H(x)]_-^{-s}$ ve $[H(x)]_+^{-s}$ distribüsyonları vardır ve*

$$[H(x)]_-^{-s} = 0 \tag{4.1.2}$$

$$[H(x)]_+^{-s} = H(x) \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlıdır.

x_-^{-s} ve $x_-^{-1}\ln x_-$ distribüsyonları $s = 1, 2, ...$ değerleri için

$$x_-^{-s} = \frac{(\ln x_-)^{(s)}}{(s-1)!} \quad ve \quad x_-^{-1}\ln x_- = -\frac{1}{2}(\ln^2 x_-)' \tag{4.1.4}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır [10]. Ayrıca x_+^{-s} ve $x_+^{-1}\ln x_+$ distribüsyonları $s = 1, 2, ...$ değerleri için

$$x_+^{-s} = \frac{(-1)^{s-1}(\ln x_+)^{(s)}}{(s-1)!} \quad ve \quad x_+^{-1}\ln x_+ = \frac{1}{2}(\ln^2 x_+)' \tag{4.1.5}$$

eşitlikleri ile verilmiştir [10].

Burada x_-^{-s} ve x_+^{-s} distribüsyonlarının Gelfand ve Shilov [11] tarafından verilen tanımlar ile aynı olmadığına dikkat edilmelidir. $x_-^{-r-1}\ln x_-$ ve $x_+^{-r-1}\ln x_+$ distribüsyonları $r = 1, 2, ...$ değerleri için sırası ile

$$x_-^{-r-1}\ln x_- = \frac{x_-^{-r-1} + (x_-^{-r}\ln x_-)'}{r} \tag{4.1.6}$$

ve

$$x_+^{-r-1}\ln x_+ = \frac{x_+^{-r-1} - (x_+^{-r}\ln x_+)'}{r} \tag{4.1.7}$$

eşitlikleri ile verilmiştir [6]. (4.1.6) ve (4.1.7) eşitliklerinde tümevarım yapılırsa

$$x_-^{-r-1}\ln x_- = \phi(r)x_-^{-r-1} - \frac{(\ln^2 x_-)^{(r+1)}}{2r!} \tag{4.1.8}$$

$$x_+^{-r-1}\ln x_+ = \phi(r)x_+^{-r-1} + \frac{(-1)^r(\ln^2 x_+)^{(r+1)}}{2r!} \tag{4.1.9}$$

eşitlikleri elde edilir [9]. Burada görülen $\phi(r)$ fonksiyonu

$$\phi(r) = \begin{cases} \sum_{i=1}^r i^{-1}, & r = 1,2,..., \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.2. $x_-^{-s}\ln x_-$ ve x_+^r Distribüsyonlarının Neutrix Kompozisyonu

Teorem 4.7. *[4] $r,s = 1,2,...$ değerleri için $(x_+^r)_-^{-s}$ distribüsyonu vardır ve*

$$c(\rho) = \int_0^1 \ln t\rho(t)dt$$

olmak üzere

$$(x_+^r)_-^{-s} = \frac{(-1)^{rs+s}c(\rho)}{r(rs-1)!}\delta^{(rs-1)}(x) \tag{4.2.10}$$

biçimindedir.

Şimdi $x_-^{-s}\ln x_-$ ve x_+^r distribüsyonlarının kompozisyonuna geçmeden önce bu kompozisyonların varlığını göstermek için yararlanacağımız ve ispatları kolaylıkla yapılabilecek olan bazı lemmalar verelim.

Lemma 4.8. *[4] $r = 0,1,2,...$ değerleri için*

$$\textbf{\textit{(i)}} \int_{-1}^1 v^i\rho^{(r)}(v)dv = \begin{cases} 0, & 0 \le i < r, \\ (-1)^r r!, & i = r \end{cases} \tag{4.2.11}$$

$$\textbf{\textit{(ii)}} \int_0^1 v^r \ln v\rho^{(r)}(v)dv = \frac{1}{2}(-1)^r r!\phi(r) + (-1)^r r!c(\rho) \tag{4.2.12}$$

Lemma 4.9. *[4] $r = 0, 1, 2, ...$ değerleri için*

$$\int_0^1 v^r \ln^2 v \rho^{(r)}(v) dv = (-1)^r r! [\phi_1(r) + 2\phi(r) c(\rho) + c_1(\rho)] \tag{4.2.13}$$

Burada $c_1(\rho)$ ve $\phi_1(r)$ fonksiyonları sırasıyla

$$c_1(\rho) = \int_0^1 \ln^2 t \rho(t) dt$$

$$\phi_1(r) = \begin{cases} 0, & r = 0, 1, \\ \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\phi(i)}{i+1}, & r = 2, 3, ... \end{cases}$$

Lemma 4.10. *[4] $r = 0, 1, 2, ...$ değerleri için*

$$\textbf{\textit{(i)}} \int_0^1 v^r \ln(1-v) dv = -\frac{\phi(r+1)}{r+1} \tag{4.2.14}$$

$$\textbf{\textit{(i)}} \int_0^1 v^r \ln^2(1-v) dv = \frac{2\phi_2(r+1)}{r+1} \tag{4.2.15}$$

(4.2.15) eşitliğinde geçen $\phi_2(r)$ fonksiyonu

$$\phi_2(r) = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{\phi(i)}{i}$$

tanımlıdır.

İlk olarak Teorem 4.6'nın bir genellemesi olan ve [4]'de ispatlanan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.11. *[4] $x_-^{-s} \ln x_-$ ve $H(x)$ distribüsyonlarının kompozisyonu ile $x_+^{-s} \ln x_+$ ve $H(x)$ distribüsyonlarının kompozisyonu $s = 1, 2, ...$ değerleri için vardır ve*

$$[H(x)]_-^{-s} \ln[H(x)]_- = 0 \tag{4.2.16}$$

$$[H(x)]_+^{-s} \ln[H(x)]_+ = \phi(s-1) H(x) \tag{4.2.17}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

İspat. $H(x)$ ve $x_-^{-s}\ln x_-$ distribüsyonları (4.1.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$[H(x)]_-^{-s}\ln[H(x)]_- = \phi(s-1)[H(x)]_-^{-s} - \frac{(\ln^2[H(x)]_-)^{(s)}}{2(s-1)!}$$

eşitliği elde edilir. (4.1.2) eşitliğinden $[H(x)]_-^{-s} = 0$ olduğundan şimdi $(\ln^2[H(x)]_-)^{(s)}$ kompozisyonunu hesaplayalım.

$$(\ln^2[H(x)]_-)_n^{(s)} = \ln^2[H(x)]_- * \delta_n^{(s)}(x)$$

olduğundan

$$I = \ln^2[H(x)]_- * \delta_n^{(s)}(x) = \begin{cases} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)_-\delta_n^{(s)}(t)dt, & x>0, \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt, & x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x>0, \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt, & x<0 \end{cases}$$

elde edilir. $nt = v$ dönüşümü ile kısmi integrasyon yapılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} I &= \operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt \\ &= \operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} n^s \int_0^1 (\ln v - \ln n)^2 \rho^s(v)dv = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece her $\varphi(x) \in D(a,b)$ için

$$\begin{aligned} \operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \langle I, \varphi\rangle &= \operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \langle [[H(x)]_-^{-s}\ln[H(x)]_-]_n, \varphi(x)\rangle \\ &= \int_a^b \varphi(x) \int_0^1 (\ln v - \ln n)^2 \rho^s(v)dvdx = 0 \end{aligned}$$

olduğundan (4.2.16) eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.1.9) eşitliğinden yararlanarak $(\ln^2[H(x)]_+)^{(s)}$ kompozisyonunu inceleyelim.

$$(\ln^2[H(x)]_+)^{(s)} * \delta_n(x) = \begin{cases} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)\delta_n^{(s)}(t)dt, & x>0, \\ \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt, & x<0 \end{cases}$$

$nt = v$ dönüşümü yapılarak kısmi integrasyon alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)\delta_n^{(s)}(t)dt &= n^s \int_{-1}^{1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{in^i}\right)^2 \rho^{(s)}(v)dv \\ &= 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi(i)}{i+1} n^{s-i-1} \int_{-1}^{1} v^{i+1}\rho^{(s)}(v)dv\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$i+1 > s$ değerleri için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)\delta_n^{(s)}(t)dt = 0 \tag{4.2.18}$$

ve

$i+1 < s$ değerleri için (4.2.11) eşitliği kullanılarak

$$\mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)\delta_n^{(s)}(t)dt = 0 \tag{4.2.19}$$

bulunur.

Son olarak $i+1 = s$ değeri için (4.2.11) eşitliğinden

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)\delta_n^{(s)}(t)dt = 2(-1)^s(s-1)!\phi(s-1) \tag{4.2.20}$$

olur. Benzer şekilde I integralinin neutrix limiti alınarak

$$\mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt = 0 \tag{4.2.21}$$

eşitliği elde edilir.

$a < 0 < b$ olmak üzere $\varphi(x)$, $D(a,b)$ uzayında keyfi bir test fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathrm{N-}\lim_{n\to\infty}\langle \ln^2[H(x)]_+)^{(s)} * \delta_n(x), \varphi(x)\rangle &= \mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} \int_a^0 \varphi(x) \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dtdx \\ &+ \mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} \int_0^b \varphi(x) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(1-t)\delta_n^{(s)}(t)dtdx\end{aligned}$$

olur.

(4.1.9) eşitliğinden

$$[H(x)]_+^{-s}\ln[H(x)]_+ = \phi(s-1)[H(x)]_+^{-s} + \frac{(-1)^{s-1}(\ln^2[H(x)]_+)^{(s)}}{2(s-1)!}$$

yazılırsa (4.1.3) ile (4.2.18)-(4.2.21) eşitlikleri kullanılarak (4.2.17) eşitliği elde edilir. $\square$

$x_-^{-s}\ln x_-$ distribüsyonunu $F_s(x)$ ile gösterelim. İspatını verdiğimiz son teoremde $r=0$ değeri için $F_s(x_+^r)$ kompozisyonunu hesapladık. Şimdi ise bu kompozisyonu $r=1,2,...$ değerleri için hesaplayacağız.

Teorem 4.12. *[4] $F_s(x_+^r)$ distribüsyonu $r,s=1,2,...$ değerleri için*

$$F_s(x_+^r) = \frac{(-1)^{s+rs}}{2r(rs-1)!}[2c(\rho)\phi(s-1)+\phi_1(s)$$

$$+\phi_2(s)+c_1(\rho)-\phi^2(s)]\delta^{(rs-1)}(x) \tag{4.2.22}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

İspat. $\varphi(x)$, $D(a,b)$ uzayında keyfi bir test fonksiyonu olmak üzere $F_s(x_+^r) = (x_+^r)_-^{-s}\ln(x_+^r)_-$ yazarak $\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle[F_s(x_+^r)]_n,\varphi(x)\rangle$ (4.1.8) eşitliğinde x yerine x_+^r yazarak neurix limitine bakalım.

$$(x_+^r)_-^{-s}\ln(x_+^r)_- = \phi(s-1)(x_+^r)_-^{-s} - \frac{(\ln^2(x_+^r)_-)^{(s)}}{2(s-1)!} \tag{4.2.23}$$

eşitliği elde edilir. $r,s=1,2,...$ değerleri için

$$(\ln^2(x_+^r)_-)*\delta_n^{(s)}(x) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^2(x_+^r-t)_-\delta_n^{(s)}(t)dt$$

$$= \begin{cases} \int_{x^r}^{\frac{1}{n}} \ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dt, & 0\le x\le n^{-\frac{1}{r}}, \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt, & x<0, \\ 0, & x>n^{-\frac{1}{r}} \end{cases}$$

olacağından Taylor teoremi kullanılarak $0<\varepsilon<1$, $a<0<b$ ve $supp\varphi\subset(a,b)$ olmak üzere

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{rs-1}\frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) + \frac{x^{rs}}{r!}\varphi^{(rs)}(\varepsilon x)$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned}\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\int_a^0\int_0^{\frac{1}{n}}\ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)\varphi(x)dtdx\\+\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)\varphi(x)dtdx\\=\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}I_1+\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}I_2\end{aligned}$$

neutrix limit değerlerini hesaplayalım. I integrali için

$$I_1=\int_a^0\int_0^{\frac{1}{n}}\ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)\varphi(x)dtdx=(\int_0^{\frac{1}{n}}\ln^2 t\,\delta_n^{(s)}(t)dt)(\int_a^0\varphi(x)dx)\qquad(4.2.24)$$

yazarsak neutrix'in tanımından

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}I_1=0\qquad(4.2.25)$$

elde edilir.

Şimdi de I_2 integrali için $nt=v$ ve $x^r=ut$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}I_2=\sum_{i=0}^{rs-1}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}x^i\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dtdx\\+\frac{1}{(rs)!}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)\varphi^{(rs)}(\varepsilon x)x^{rs}dtdx\\=\sum_{i=0}^{rs-1}\frac{\varphi^i(0)}{ri!}n^{s-(i+1)/r}\int_0^1\rho^{(s)}(v)v^{(i+1)/r}\\\times\int_0^1[\ln(v-uv)-\ln n]^2u^{(i+1)/r-1}dudv+\frac{n^{-\frac{1}{r}}}{(rs)!}\int_0^1\rho^{(s)}(v)v^{(i+1)/r}\\\times\int_0^1[\ln(v-uv)-\ln n]^2u^{(i+1)/r-1}\varphi^{(rs)}(\varepsilon(uv/n)^{1/r})dudv\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$i=0,1,...,rs-2$ değerleri için verilen integralin neutrix limit değeri hesaplanırsa

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}x^i\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dtdx=0\qquad(4.2.26)$$

ve

$i=rs$ değeri için

$$\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}x^{rs}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}|\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)|dtdx=O(n^{-\frac{1}{r}})$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}} x^{rs}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}} \ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dtdx = 0 \qquad (4.2.27)$$

elde edilir.

$i = rs-1$ değeri için

$$\begin{aligned}
&\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}} x^{rs-1}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}} \ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dtdx \\
&= \frac{1}{r}\int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s\int_0^1 [\ln(v-uv)-\ln n]^2 u^{s-1}dudv \\
&= \frac{1}{r}\int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s\int_0^1 \ln^2(v-uv)u^{s-1}dudv \\
&-\frac{2}{r}\ln n\int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s\int_0^1 \ln(v-uv)u^{s-1}dudv \\
&+\frac{\ln^2 n}{r}\int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s dv\int_0^1 u^{s-1}du = J_1+J_2+J_3
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
rJ_1 &= \int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s\ln^2 v dv\int_0^1 u^{s-1}du \\
&+2\int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s\ln v dv\int_0^1 \ln(1-u)u^{s-1}du \\
&+\int_0^1 \rho^{(s)}(v)v^s dv\int_0^1 \ln^2(1-u)u^{s-1}du
\end{aligned}$$

olacağından $4.8-4.10$ lemmaları kullanılarak

$$\begin{aligned}
rJ_1 &= (-1)^s(s-1)![\phi_1(s)+2\phi(s)c(\rho)+c_1(\rho)] \\
&+(-1)^{s-1}(s-1)!\phi(s)[\phi(s)+2c(\rho)]+(-1)^s(s-1)!\phi_2(s) \\
&= (-1)^s(s-1)![\varphi_1(s)+c_1(\rho)-\phi^2(s)+\phi_2(s)]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, J_2 ve J_3 integrallerinin neutrix limitlerinin

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\, J_2 = \underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\, J_3 = 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n}}\ln^2(x_+^r-t)\delta_n^{(s)}(t)dt,\varphi(x)\rangle\\
=&\,\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{rs-1}\frac{\varphi^i(0)}{i!}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}x^i\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dtdx\\
&+\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(rs)(\xi x)}}{(rs)!}\int_0^{n^{-\frac{1}{r}}}\int_{x^r}^{\frac{1}{n}}x^{rs}\ln^2(t-x^r)\delta_n^{(s)}(t)dtdx\\
=&\,\frac{(-1)^s(s-1)!}{r(rs-1)!}\varphi^{(rs-1)}(0)[\phi_1(s)+\phi_2(s)+c_1(\rho)-\phi^2(s)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(s-1)!}\langle\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n}}\ln^2(x_+^r-t)_-\delta_n^{(s)}(t)dt,\varphi(x)\rangle\\
=&\,\frac{(-1)^s[\phi_1(s)+\phi_2(s)+c_1(\rho)-\phi^2(s)]}{r(rs-1)!}\varphi^{(rs-1)}(0)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece (4.2.10) ve (4.2.23) eşitlikleri kulanılarak

$$
\begin{aligned}
F_s(x_+^r)=&\,\frac{(-1)^{s+rs}[\phi_1(s)+\phi_2(s)+c_1(\rho)-\phi^2(s)]}{2r(rs-1)!}\delta^{(rs-1)(x)}\\
&+\phi(s-1)\frac{(-1)^{rs+s}c(\rho)}{r(rs-1)!}\delta^{(rs-1)}(x)
\end{aligned}
$$

(4.2.22) eşitliği elde edilmiş olur. □

(4.2.22) eşitliğinde x yerine $-x$ yazarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.13. *[4] $r,s=1,2,\ldots$ değerleri için $F_s(x_-^r)$ distribüsyonu*

$$
\begin{aligned}
F_s(x_-^r)=&\,\frac{(-1)^{s-1}}{2r(rs-1)!}[2c(\rho)\phi(s-1)+\phi_1(s)\\
&+\phi_2(s)+c_1(\rho)-\phi^2(s)]\delta^{(rs-1)}(x)
\end{aligned}
\tag{4.2.28}
$$

ile verilir.

4.3. $x_-^{-s}\ln^m x_-$ ve $H(x)$ Distribibüsyonlarının Neutrix Kompozisyonu

Teorem 4.14. *[4] $s,m = 1,2,\ldots$ değerleri için $x_-^{-s}\ln^m x_-$ ve $H(x)$ distribüsyonlarının kompozisyonu vardır ve*

$$(H(x))_-^{-s}\ln^m(H(x))_- = 0 \tag{4.3.29}$$

eşitliği ile ifade edilir.

İspat. $F_{s,m}(x) = x_-^{-s}\ln^m x_-$ ve $G_{s,m}(x) = (\ln^{m+1} x_-)^{(s)}$ olmak üzere $G_{s,m}(x)$ fonksiyonu

$$G_{s,m}(x) = \sum_{i=0}^{m} c_{s,m,i} x_-^{-s}\ln^i x_-$$

eşitliği ile yazılabilir. Bu eşitlikde $i \leq m-s$ ise $c_{s,m,i} = 0$ şeklindedir.
$D(a,b)$ uzayında alınan keyfi bir φ fonksiyonu için

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty}\langle G_{s,m,n}(H(x)),\varphi(x)\rangle$$

neutrix limitini hesaplayalım.
$G_{s,m}(x) = (\ln^{m+1} x_-)^{(s)}$ eşitliği kullanılarak

$$G_{s,m,n}(x) = (\ln^{m+1} x_-)^{(s)} * \delta_n(x) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^{m+1}(x-t)_-\delta_n^{(s)}(t)dt$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} G_{s,m,n}(H(x)) &= \begin{cases} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \ln^{m+1}(1-t)_-\delta_n^{(s)}(t)dt, & x>0, \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^{m+1} t\,\delta_n^{(s)}(t)dt, & x<0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x>0, \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^{m+1} t\,\delta_n^{(s)}(t)dt, & x<0 \end{cases} \end{aligned}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{n}} \ln^{m+1} t\,\delta_n^{(s)}(t)dt &= n^s\int_0^1 \ln^{m+1}\left(\frac{v}{n}\right)\rho(v)dv \\ &= n^s\int_0^1 [\ln v - \ln n]^{m+1}\rho(v)dv \end{aligned}$$

olduğundan neutrix limit yardımıyla

$$\begin{aligned}\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\langle G_{s,m,n}(H(x)),\varphi(x)\rangle &= \underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\int_a^0 \varphi(x)\int_0^{\frac{1}{n}} \ln^{m+1} t\,\delta_n^{(s)}(t)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $G_{s,m}(H(x))$ kompozisyonu vardır ve

$$G_{s,m}(H(x)) = 0 \tag{4.3.30}$$

olarak elde edilir.

$i = 0,1,2,...,m-1$ ve $s = 1,2,...$ değerleri için $F_{s,i}(H(x)) = 0$ olsun. $m = 1$ değeri için (4.1.2) eşitliğinden $F_{s,i}(H(x)) = 0$ eşitliği doğrudur.

O halde

$$G_{s,m}(H(x)) = \sum_{i=0}^{m-1} c_{s,m,i}F_{s,i}(H(x)) + c_{s,m,m}F_{s,m}(H(x))$$

yazabileceğimizden ve $c_{s,m,m} \neq 0$ olduğundan (4.3.30) eşitliğini ve kabulümüzü kullanarak $F_{s,m}(H(x)) = 0$ elde ederiz. Böylece (4.3.29) eşitliği elde edilir. Bu ise teoremin ispatını bitirir. □

KAYNAKLAR

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A. 1992. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Reprint of the 1972 Edition, Dover, New York.

[2] Antosik, P., Mikusinski, J., Sikorski, R. 1973. Theory of Distributions: The Sequential Approach. PWN-Polish scientific Publishers, Warsawa.

[3] Van der Corput, J. G. 1959. Introduction to the Neutrix Calculus. **J. Analyse Math.,** 7: 291-398.

[4] Ege, I. 2012. Some Results on the Composition of Distributions. **Sarajevo Journal of Mathematics,** Vol. 8 (20): 119-131.

[5] Fisher, B. 1985. On Defining the Change of Variable in Distributions. **Rostock Math. Kolloq.,** 28: 75-86.

[6] Fisher, B. 1985. On Defining the Distribution $(x_+^r)_-^{-s}$. **Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod-Mat. Fak. Ser. Mat.,** 15 (1): 119-128.

[7] Fisher, B., Kuribayashi, Y. 1987. Neutrices and the Beta Function. **Rostock Math. Kolloq.,** 32: 56-66.

[8] Fisher, B. 1989. Neutrices and Distributions. **Conferances on Complex Analysis and Applications,** pp. 169-175, Sofia.

[9] Fisher, B., Kananthai, A., Sritanatana, G., Nonlaopan, K. 2005. The Composition of the Distributions $x_-^{-ms}\ln x_-$ and $x_+^{r-p/m}$. **Integral Transforms Spec. Funct.,** 16 (1): 13-19.

[10] Gasiorowicz, S. 1996. Elementary Particle Physics. J. Wiley and Sons Inc., New York.

[11] Gel'fand, I. M., Shilov, G. E. 1964. Generalized Functions, Vol. I. Academic Press.

[12] Hadamard, J. 1952. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differntial Equations. Dover Publications, Inc., New York.

[13] Kou, H., Fisher, B. 1992. On the Composition of Distributions. **Publ. Math. Debrecen,** 40 (3-4): 279-290.

[14] Koh, E. L., Li, C. K. 1992. On the Distributions δ^k and $(\delta')^k$. **Math. Nachr.,** 157: 243-248.

[15] Jack Ng, Y., Van Dam, H. 2005. Neutrix Calculus and Quantum Field Theory. **J. Phys. A:Math. Gen.,** 38: L317-L323.

[16] Özçağ, E., Ege, I., Gürçay, H. 2007. On Powers of the Heaviside Function for Negative Integers. **J. Math. Anal. Appl.,** 326: 101-107.

[17] Schwartz, L. 1957. Theorie Des Distributions, Vols. I and II. Actualites Scientifiques et Industrielles, Hermann and Cie, Paris.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Emine ÇAKMAKCI
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Karaman, 02.01.1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	matematikci70@hotmail.com