T.C
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2008-0002

TÜREVLİ ASAL HALKALARIN DEĞİŞMELİLİĞİ

NECLA KIRCALI

DANIŞMAN
PROF.DR. HATİCE KANDAMAR

AYDIN - 2008

İÇİNDEKİLER

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Necla Kırcalı tarafından hazırlanan Türevli Asal Halkaların Değişmeliliği başlıklı tez, 11.12.2007 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

Unvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Üniversitesi	
Üye: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT	Adnan Menderes Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

İntihal (Aşırma) Beyan Sayfası

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurullara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı: Necla KIRCALI
İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TÜREVLİ ASAL HALKALARIN DEĞİŞMELİLİĞİ

Necla KIRCALI

Adnan Menderes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

Karakteristiği 2 den farklı olan türevli asal halkalarda bazı değişmelilik koşullarını inceleyen makalelerin bir arada özetlenmesi ve Lie idealler için verilen bazı sonuçların (σ,τ)- Lie idealler için de incelenmesini araştıran bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir.

Halkalarla ilgili bazı temel bilgiler 1. Bölümde verilmiştir. 2. Bölümde, türevli asal ve yarı asal halkalarda değişmelilik koşullarını inceleyen bazı makaleler özetlenmiştir. σ ve τ, karakteristiği 2 den farklı asal bir halkanın iki otomorfizması olmak üzere Lie ideal için yapılan bazı sonuçların (σ,τ)- Lie ideal için uyarlanması da bu bölümde yer almaktadır. Teoremlerin hipotezlerine uyan veya uymayan koşullar altında örnekler bulunarak teoremlerin zayıflatılıp zayıflatılamayacağı incelenmiştir. 3. Bölümde, ilk olarak Herstein tarafından ispatlanmış olan bir teorem üzerinde yapılan genelleştirmeler ele alınmıştır.

2008, 61 sayfa

Anahtar sözcükler :

Asal halka, Lie ideal, (σ,τ)- Lie ideal, türev

ABSTRACT

Master's Thesis

COMMUTATİVİTY OF PRIME RİNGS WITH DERİVATION

Necla KIRCALI

Adnan Menderes University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

Followed in this work, we summarised some of the papers that those have some commutativity conditions in a prime rings with derivation of characteristic not 2 and some results that given for Lie ideals have been applied to (σ,τ)- Lie ideals. The plan followed as below:

Some fundamental properties about rings have been given in Chapter 1. In chapter 2., some papers that search commutativity conditions on prime and semiprime rings with derivation have been summarized. Under the condition that R is prime ring of characteristic not 2, σ and τ are automorphisms of R, some results for Lie ideals of R, we applied to (σ,τ)- Lie ideals of R also in this part. We give some examples under conditions fiting or not fitting to the hypotesis of theorems and study whether if theorems can be weakened or not. In chapter 3., we have been considered generalizations over a theorem that proved first by Herstein.

2008, 61 pages

Key Words :

Prime ring, Lie ideal, (σ,τ)- Lie ideal, derivation

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, seminerlerde önemli açıklamalarda bulunan değerli destek, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Hatice KANDAMAR’a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) ve her zaman destekleri ile yanımda olan değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

GİRİŞ

Halkaların değişmeliliği türev içeren bazı koşullar altında araştırılmıştır. Bu çalışmada, R bir halka, d R halkasında türev Z, R halkasının merkezi ve $x, y \in$ R için $[x, y] = xy - yx$ olmak üzere

a) $\forall\ x \in$ R için $[d(x), x] \in Z$
b) $[\ d(R), d(R)] = (0)$
c) $d(R) \subset Z$
d) $d^2(R) \subset Z$
e) $d_1d_2(R) \subset Z$

değişmelilik koşullarına yer verilmiştir. Yukarıdaki koşullar altında bir halkanın değişmeliliği incelenirken çeşitli genelleştirmeler yapılmıştır. Asal halkalar için incelenen bu koşullar daha sonra yarı asal halkalar için de ele alınmıştır. Diğer taraftan d adi türev olmak üzere ele alınan bu koşullar α - türev, (σ,τ) – türev için de incelenmiştir. Bir taraftan da bu koşullarda yer alan R halkası yerine onun ideali, Lie ideali, (σ,τ) - sağ Lie ideali, (σ,τ) - sol Lie ideali alınarak halkanın değişmeliliği araştırılmıştır.

E.C. Posner 1957 yılında bir asal halka ve d R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere her $x \in$ R için $[\ d(x), x] \in Z$ ise R halkasının değişmeli olduğunu ispatlamıştır (Posner, 1957). Daha sonra R. H. Lee ve arkadaşı 1981 yılında aynı teoremin farklı bir ispatını vermiştir (Lee and Lee, 1981).

I. N. Herstein 1970 yılında R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, d R halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere $[\ d(R), d(R)] \subseteq Z$ koşulu sağlanıyorsa R halkasının değişmeli olduğunu ispatlamıştır (Herstein, 1970). Aynı çalışmasında I.N. Herstein $d(R) \subset Z$ koşulu sağlanıyorsa R halkasının değişmeli olduğunu da kanıtlamıştır (Herstein, 1970).

Daha sonra J. Bergen ve arkadaşları, U, karakteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının Lie ideali olmak üzere $d(U) \subset Z$ iken $U \subset Z$ olduğu kanıtlanmıştır (Bergen et al., 1981). 1995 yılında Lie ideali için ispatlanan bu teorem, N. Aydın ve arkadaşı tarafından R halkasının bir (σ,τ)- Lie ideali için genelleştirilmiştir (Aydın ve Soytürk, 1995).

R, karakteristiği 2 den farklı asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(R) \subset Z$ koşulu altında R halkasının değişmeli olduğu, 1981 de P.H. Lee ve arkadaşı tarafından ispatlanmıştır (Lee and Lee, 1981). J. Bergen ve arkadaşları $d^2(R) \subset Z$ koşulunda yer alan R halkası yerine onun bir U Lie idealini alarak $U \subset Z$ olduğunu kanıtlamışlardır (Bergen et al., 1981). 1995 yılında N. Aydın ve arkadaşı bu teoremi, U yu R halkasının (σ,τ)- Lie ideali alarak genelleştirmişlerdir (Aydın ve Soytürk, 1995).

E. C. Posner karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkada iki türevin bileşkesi bir türev oluyorsa o zaman bu türevlerden en az birinin sıfır olduğunu ispatlamıştır (Posner, 1957). 1981 yılında P.H. Lee ve arkadaşı d_1 ve d_2 R halkasının sıfırdan farklı iki türevi olmak üzere $d_1 d_2(R) \subset Z$ iken R halkasının değişmeli olduğunu göstermişlerdir (Lee and Lee, 1981). 1981 yılında J. Bergen ve arkadaşları U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $d_1 d_2(U) = 0$ iken $U \subset Z$ olduğunu kanıtlamışlardır (Bergen et al., 1981).

Halkanın özellikleri incelenirken onun idealleri (sağ, sol, iki yanlı, Lie idealleri) önem taşımaktadır. J. Bergen ve arkadaşları U, karakteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideali ise bu takdirde R halkasının $[R, M] \subset U$ ve $[R, M] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali var olduğunu göstermişlerdir (Bergen et al., 1981). Bu teorem N. Aydın ve arkadaşı tarafından R asal halkasının merkezi ve (σ,τ)-merkezi tarafından kapsanılmayan bir (σ,τ) - Lie ideali için genelleştirilmiştir (Aydın ve Kandamar, 1994). 1999 yılında N. Aydın U,

karakteristiği 2 den farklı bir R yarı asal halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideal ise bu takdirde R halkasının [R, M] $\subset$ U ve [R, M] $\not\subset$ Z olacak biçimde bir M idealinin var olduğunu ispatlayarak, J. Bergen ve arkadaşları tarafından verilen teoremi genelleştirmiştir (Aydın, 1999).
Bu çalışmada, halkanın değişmeliliği konusunda incelenen çalışmalarda yer alan bazı teoremler için örnekler verilmiştir.

N. Aydın ve arkadaşı tarafından ispatlanan "U, U $\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R halkasının (σ,τ)- sol Lie ideali ise U $\subset$ Z dir." teoremi ile "U, R halkasının (σ,τ)- sağ Lie ideali olsun. d(U)$\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir ve ya U$\subset C_{\sigma,\tau}$ dur." teoreminin bazı koşullarının kaldırılamayacağına dair örnek verildi.

1. BÖLÜM: ÖN BİLGİLER

Tanım 1.1.: P, bir R halkasının P $\neq$ R koşulunu sağlayan bir ideali olsun. R halkasının her A, B ideali için AB$\subseteq$ P iken A $\subseteq$ B veya B $\subseteq$ P koşulu sağlanıyorsa P idealine R halkasının **asal ideali** denir.

Teorem 1.2.: R bir halka ve P onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(*i*) P asal idealdir.

(*ii*) $\forall$ *a, b* $\in$ R için *a*R*b* $\subseteq$ P ise *a* $\in$ P veya *b* $\in$ P dir.

(*iii*) $\forall$ *a*, *b* $\in$ R için (*a*) (*b*) $\subseteq$ P ise *a* $\in$ P veya *b* $\in$ P dir.

(*iv*) U, V R halkasının iki sol ideali olmak üzere UV $\subseteq$ P iken U $\subseteq$ P veya V $\subseteq$ P dir.

(*v*) U, V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere UV $\subseteq$ P iken U $\subseteq$ P veya V $\subseteq$ P dir.

Tanım 1.3.: (0) ideali asal ideal olan halkaya **asal halka** denir.

Önerme 1.4.: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(*i*) R asal halkadır.

(*ii*) *a* , *b* $\in$ R için *a*R*b* = 0 ise *a* = 0 veya *b* = 0 dır.

(*iii*) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(*iv*) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.5.: Q, R halkasının bir ideali olsun. R halkasının her A ideali için $A^2 \subseteq$ Q iken A $\subseteq$ Q ise Q idealine R halkasının **yarı-asal ideali** denir.

Teorem 1.6.: Q, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(*i*) Q yarı-asal idealdir.

(*ii*) *a* $\in$ R için *a*R*a* $\subseteq$ Q ise *a* $\in$ Q dur.

(*iii*) *a*$\in$ R için $(a)^2 \subseteq$ Q ise *a* $\in$ Q dur.

(*iv*) U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq$ Q ise U $\subseteq$ Q dur.

(*v*) U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq$ Q ise U $\subseteq$ Q dur.

Tanım 1.7.: R bir halka olsun.

(*i*) Her *a* $\in$ R için, n*a* = 0 eşitliğini sağlayan pozitif n tamsayılarının en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve **Char R = n** ile gösterilir.

(*ii*) R bir halka olsun. $a \in$ R için, $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına R halkasının **nilpotent elemanı** denir. $a^n = 0$ fakat $0 \leq i <$ n için $a^i \neq 0$ ise n ye a elemanının **nilpotentlik indeksi** denir.

(*iii*) B, R halkasının bir ideali olsun. B idealinin her elemanı nilpotent ise B ye R halkasının **nil ideali** denir.

(*iv*) R bir halka ve A, R halkasının bir ideali olsun. $A^n = (0)$ olacak şekilde bir pozitif n sayısı var ise A ya **nilpotent ideal** denir.

Tanım 1.8.: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya **yarı-asal halka** denir.

Tanım 1.9.: R bir halka olsun. R halkasının her elemanı ile değişmeli olan elemanların kümesine R halkasının **merkezi** denir ve Z ile gösterilir.

Özellik 1.10.: R asal halka olsun. $ab, b \in$ Z ise $b = 0$ veya $a \in$ Z dir.

Tanım 1.11.: Bir R halkasında $x, y \in$R için $xy - yx$ ifadesine x ile y nin **komütatör çarpım** denir ve $[x, y]$ ile gösterilir. Her $x, y, z \in$R için

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu özdeşlik **Jacobi özdeşliği** olarak adlandırılır.

Tanım 1.12.: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. Her $a, b \in$ A için $ab - ba \in$ A ($ab + ba \in$ A) oluyorsa A ya R nin **Lie (Jordan) alt halkası** denir.

Uyarı 1.13.: U, V bir R halkasının iki alt kümesi olmak üzere

$$[U, V] = \{ \sum u_i v_i - v_i u_i \mid u_i \in U, v_i \in V \}$$

ile verilir.

Tanım 1.14.: R halkasının U toplamsal alt grubu aynı zamanda $[U,R] \subset U$ koşulunu da sağlıyorsa U ya R halkasının bir **Lie ideali** denir.

Tanım 1.15.: R bir halka, σ, τ : R$\rightarrow$R iki dönüşüm olsun. $x, y \in$R için $x\sigma(y)$ - $\tau(y)$ ifadesi $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. R halkasının bir U toplamsal alt grubu için

(*i*) [U, R]$_{\sigma,\tau}\subset$ U ise U ya R halkasının **(σ,τ) - sağ Lie ideali** denir.

(*ii*) [R, U]$_{\sigma,\tau}\subset$ U ise U ya R halkasının **(σ,τ) - sol Lie ideali** denir.

(*iii*) U, R halkasının hem (σ,τ) - sağ Lie ideali ve hem de (σ,τ) - sol Lie ideali ise U ya R halkasının **(σ,τ) - Lie ideali** denir.

Özellik 1.16.: R bir halka olsun. Her $x, y, z \in$ R için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

***i*)** $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y, z]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(z)]y$

***ii*)** $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y, \sigma(z)] + [x, z]_{\sigma,\tau}\, y$

***iii*)** $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = [[x, z]_{\sigma,\tau}, y] + [x, [y, z]]_{\sigma,\tau}$

Tanım 1.17.: $C_{\sigma,\tau} = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c,\ \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının **(σ,τ) - merkezi** denir.

Tanım 1.18.: R bir halka ve d:R$\rightarrow$R toplamsal bir dönüşüm olsun. $x, y\in$R olmak üzere d(xy) = d(x) y + x d(y) ise d ye R halkasının **türevi** denir.

Önerme 1.19. (Herstein, 1969)**:** R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve 2x = 0 iken x = 0 olan bir halka olsun.(0) $\neq$ U, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman U $\subset$ Z veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Özellik 1.20. (Brauer trick): Bir G grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz.

İspat: (G, $*$) grup olsun. A ve B, G grubunun iki öz alt grubu olmak üzere G = A$\cup$B ve G $\neq$ A olduğunu varsayalım. Bu durumda G = B olduğunu gösterirsek ispat biter.
G $\neq$ A olduğundan $x \in$ G ve $x \notin$ A olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan G = A$\cup$B olduğundan $x \in$B dir. G$\subset$B olduğunu iddia ediyoruz. Eğer G $\not\subset$ B ise $y\in$G ve $y\notin$B olacak biçimde en az bir y elemanı vardır. G = A$\cup$B olduğundan $y \in$ A olur. Bu durumda $x * y \in$ B dir. Gerçekten $x * y \notin$B olsaydı G = A $\cup$B olduğundan $x * y \in$ A olurdu. $y \in$A ve A toplamsal alt grup olduğundan $x\in$A olurdu. Bu $x \notin$A alınışıyla çelişir. O halde $x * y \in$ B bulunur. $x \in$ B ve B toplamsal olduğundan $y \in$B olur, bu da $y \notin$ B oluşuyla çelişir. O halde G $\not\subset$B olamaz. Yani G $\subset$ B dir. Böylece G = B olur.

Önerme 1.21. (Carini, 1985)**:** R yarı asal ve 2-burulmasız bir halka ve d, R halkası üzerinde tanımlı bir türev olsun. I, $d^2(I) = 0$ olacak şekilde R halkasının bir ideali ise bu taktirde d(I) = 0 dır.

Teorem 1.22. (Herstein, 1979)**:** R asal bir halka ve $0 \neq d$, R halkasının bir türevi olsun. Her $x \in$ R için ad(x) = d(x)a olacak şekilde $a \in R$ olsun.

(***i*** **)** Eğer Char R $\neq 2$ ise $a \in Z$ (R halkasının merkezi) olmak zorundadır.

(***ii*****)** Eğer Char R = 2 ise $a^2 \in$ Z dir.

2. BÖLÜM: HALKALARIN DEĞİŞMELİLİĞİ İLE İLGİLİ BAZI ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, türev içeren bazı koşullar altında halkaların değişmeliliği konusunda yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir. Çalışmanın bu bölümünde, R bir halka olmak üzere $x, y \in$ R için $xy - yx$ ifadesi $[x, y]$, R halkasının merkezi ise Z ile gösterilecektir.

2.1 Adi Türev İçeren Değişmelilik Koşulları İle İlgili Çalışmalar

R bir halka, d R halkasında bir adi türev olsun. E. Posner 1957 yılında yaptığı çalışmasında aşağıda verilen teoremleri ispatlamış ve böylece türevli halkaların değişmeliliği konusunda yapılacak araştırmalar için çığır açmıştır.

Teorem 2.1.1.: R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve d_1, d_2 R halkasının iki türevi olsun. $d_1 d_2$, R halkasının bir adi türevi ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 2.1.2.: R bir asal halka, d, R halkasının bir adi türevii olsun. Bu takdirde her $a \in$ R için $a\mathrm{d}(a)$ - $\mathrm{d}(a)a = 0$ oluyorsa d = 0 veya R halkası değişmelidir.

Teorem 2.1.3.: R, bir asal halka, d, R halkasının her $a \in$ R için $a\mathrm{d}(a)$ - $\mathrm{d}(a)a \in$Z koşulunu sağlayan bir adi türevii olsun. Eğer d $\neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

Yardımcı teorem 2.1.2 de R asal halka olmadığında teoremi sağlayan bir örnek vardır.

Örnek: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbf{Z}_2 \right\}$ halkası asal olmayan bir halka olduğunda, R halkasının d: R $\to$ R , d$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ türev dönüşümü altında her $A \in$ R için Ad(A) - d(A) $A \in$ Z iken R halkası değişmelidir.

Çözüm: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbf{Z}_2 \right\}$ asal halka değildir. R halkasının

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elemanları için;

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan R halkası asal değildir.

d: R $\to$R d$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dönüşümü R halkası üzerinde bir türevdir.

i) d, toplamsal bir dönüşümdür.

$$\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = d\left(\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b+d & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix}$$

ii) d(AB) = d(A)B + Ad(B) eşitliğini sağlar.

$$\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = d\left(\begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ad+bc & 0 \\ 0 & ad+bc \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc & bd \\ 0 & bc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad & bd \\ 0 & ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+bc & 2bd \\ 0 & bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+bc & 0 \\ 0 & bc+ad \end{bmatrix}$$

Şimdi her $A \in$ R için $Ad(A) - d(A)A = 0$ olduğunu gösterelim.

$A = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} \in$ R için

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} \mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) - d\left(\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xb & b^2 \\ 0 & xb \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xb & b^2 \\ 0 & xb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{d} \neq 0$ bir türevdir. O halde her $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \in$ R için

$$AB = \begin{bmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} = BA$$

olduğundan R halkası değişmelidir. Bu örnek Teorem 2.1.2 nin R halkasının karakteristiğinin 2 olması ve R halkasının asal olmaması durumunda geçerli olup olmadığı sorusunu akla getirmektedir.

I. N. Herstein 1970 yılında yaptığı çalışmasında aşağıda verilen teoremleri ispatlayarak sonraki yıllarda yapılacak birçok genelleştirme için altyapı oluşturmuştur.

Yardımcı Teorem 2.1.4.: R yarı asal halka ve 2-burulmasız olmak üzere U, R halkasının bir Lie ideali olsun. [U, U] $\subseteq$ Z ise bu takdirde U $\subseteq$ Z dir.

R halkasının yarı asal olmaması durumunda Herstein'ın ispatlamış olduğu bu yardımcı teoremin doğru olmadığına ilişkin bir örnek verelim.

Örnek: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasının U= $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali için

[U, U] $\subseteq$ Z koşulu sağlandığı halde U $\not\subset$ Z dir.

Çözüm: R= $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ halkası yarı asal halka değildir. Çünkü R halkasının

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elemanı için $ARA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

U=$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbf{Z} \right\}$ kümesini ele alalım. U kümesinin R halkasının bir Lie ideali olduğunu gösterelim. Her $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U için

$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U olduğundan U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi $[U,R] \subseteq U$ olduğunu gösterelim.

i $\in$ {1,2,…,n} olmak üzere her $A_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U ve $B_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ R için

$A_i B_i - B_i A_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_i a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U olur.

Diğer taraftan U toplamsal alt grup olduğundan $\sum_i^n (A_i B_i - B_i A_i)$ elemanı da U halkasının elemanıdır. O halde U, R halkasının bir Lie idealidir.

Yukarıda alınan U Lie ideali için $[\mathrm{U},\mathrm{U}] \subseteq \mathrm{Z}$ olduğunu gösterelim. U toplamsal alt grup olduğundan her A_{i}, $B_i \in$ U için [A_{i}, B_i] $\in$ Z olduğunu göstermek yeterlidir.

$A_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B_i = \begin{bmatrix} 0 & b_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$$[A_i, B_i] = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan [A_{i}, B_i] $\in$Z olduğu açıktır.

Aynı zamanda $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U ve $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ R için $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin$ Z elde edilir. Böylece U $\not\subset$ Z dir.

Böylece, yarı asal olmayan R=$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasının sıfırdan farklı U=$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali alındığında [U, U] $\subseteq$ Z koşulu sağlandığı halde U$\not\subset$Z elde edilir.

Aynı yardımcı teoremin R yarı asal halka koşulu altında sağlandığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d, e \in \mathbf{Z} \right\}$ yarı asal halkasının

U = $\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali için [U, U] $\subseteq$ Z koşulu altında U $\subseteq$ Z dir.

Çözüm: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d, e \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasını göz önüne alalım. $M_2(\mathbf{Z})\times\mathbf{Z}$ halkasına izomorf ve $M_2(\mathbf{Z})\times\mathbf{Z}$ yarı asal halka olduğundan R halkası da yarı asal halkadır.

U = $\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbf{Z} \right\}$ kümesi R halkasının bir Lie ideali olduğunu gösterelim.

Her $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U için

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in$$ U olduğundan U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi [U, R] $\subset$ U olduğunu gösterelim.

i $\in$ {1,2,…,n} olmak üzere her $A_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U ve $B_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \end{bmatrix} \in$ R için

$$A_iB_i - B_iA_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{U olur.}$$

Diğer taraftan U toplamsal alt grup olduğundan $\sum_i^n (A_iB_i - B_iA_i)$ elemanı da U halkasının elemanıdır. O halde U, R halkasının bir Lie idealidir.

Yukarıda alınan U Lie ideali için $[\mathrm{U},\mathrm{U}] \subseteq \mathrm{Z}$ olduğunu gösterelim. U toplamsal alt grup olduğundan her A_i, $B_i \in$ U için $[A_i, B_i] \in$ Z olduğunu göstermek yeterlidir.

i $\in$ {1, 2,..., n} olmak üzere

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{U için}$$

$$[A_i, B_i] = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ olduğundan $[A_i, B_i] \in$ Z olduğu açıktır.

R halkasının $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; x \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali için $[\mathrm{U},\mathrm{U}] \subseteq \mathrm{Z}$ koşulu sağlanır.

Aynı zamanda her $A = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U ve her $B = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ s & z & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \in$ R için;

$$AB = \begin{bmatrix} ux & uy & 0 \\ us & ux & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA$$

olduğundan U $\subset$ Z dir.

Yardımcı Teorem 2.1.5.: R yarı asal ve 2-burulmasız bir halka, U, R halkasının bir Lie ideali olsun. R halkasının bir t elemanı [U, U] kümesinin her elemanı ile değişmeli ise U kümesinin her elemanı ile de değişmelidir.

Herstein'ın R yarı asal halka iken kanıtlamış olduğu bu teoremi sağlayan bir örnek verelim.

Örnek: *n* pozitif sabit bir tamsayı olmak üzere R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & nb \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$

halkasının

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali için [U, U] kümesiyle değişmeli olan elemanlarının kümesi T = $\left\{ \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \middle| \; w \in \mathbf{Z} \right\}$ olur. T $\subseteq$ Z olduğundan R halkasının [U, U] ile değişmeli olan her elemanı U ile de değişmelidir.

Çözüm: *n* pozitif sabit bir tamsayı olmak üzere

R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & nb \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$ kümesi asal halka olduğundan aynı zamanda bir yarı asal halkadır.

$0 \neq A = \begin{bmatrix} a & nb \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} u & nv \\ w & m \end{bmatrix} \in$ R elemanları ve her $\begin{bmatrix} x & ny \\ z & t \end{bmatrix} \in$ R için

$\begin{bmatrix} a & nb \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ny \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & nv \\ w & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise $\begin{bmatrix} u & nv \\ w & m \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan R asal halkadır. O halde R aynı zamanda yarı asal halkadır.

Şimdi *n* pozitif sabit bir tamsayı olmak üzere U $= \left\{ \begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}$ kümesinin R halkasının bir Lie ideali olduğunu gösterelim.Her $A = \begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & ny \\ z & -x \end{bmatrix} \in$ U için $\begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & ny \\ z & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & n(b+y) \\ c+z & -(a+x) \end{bmatrix} \in$ U olduğundan R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi [U, R] $\subset$R olduğunu gösterelim. i $\in$ {1,2,…,n} olmak üzere, her A_i $\in$R ve her B_i $\in$ U için

$$A_iB_i - B_iA_i = \begin{bmatrix} a_i & nb_i \\ c_i & -a_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & ny_i \\ z_i & t_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i & ny_i \\ z_i & t_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & nb_i \\ c_i & -a_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} nb_iz_i - ny_ic_i & n(b_it_i - b_ix_i) \\ c_ix_i - 2a_iz_i - t_ic_i & ny_ic_i - nb_iz_i \end{bmatrix} \in \text{U}$$

elde edilir. U toplamsal alt grup olduğundan $\sum_i^n (A_iB_i - B_iA_i)$ elemanı da U halkasının elemanıdır. O halde U, R halkasının bir Lie idealidir.

Şimdi R halkasının [U, U] ile değişmeli olan bütün elemanlarını bulmaya çalışalım.

t = $\begin{bmatrix} w & nv \\ p & q \end{bmatrix}$ $\in$ R, v = $\begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix}$ $\in$ U olsun. Kabulümüze göre,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & nv \\ p & q \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ny \\ z & -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & ny \\ z & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ny \\ z & -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & ny \\ z & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & nb \\ c & -a \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} w & nv \\ p & q \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Bu denklemi *w,p,q,nv* ye göre Mathcad programı ile çözdürürsek,

birinci çözüm,

$w = w$

$p = 0$

$q = w$

$nv = 0$

ikinci çözüm,

$w = w$

$p = -v\dfrac{(\mathrm{cx}-\mathrm{az})}{(\mathrm{xb}-\mathrm{ay})}$

$q = \dfrac{\mathrm{wxb}-\mathrm{wya}+\mathrm{nvzb}-\mathrm{nvyc}}{\mathrm{xb}-\mathrm{ay}}$

$nv = nv$

sonuçlarını elde ederiz ki, bunlardan sadece birinci çözüm a, b, c, x, y, z den bağımsızdır. Bu çözüme bağlı olarak bulduğumuz matrisi yazarsak;

$$t = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \in Z$$

elde ederiz. t, R halkasının merkezinde olduğu için U Lie idealinin de her elemanıyla değişmelidir.

Teorem 2.1.6.: R yarı asal, 2-burulmasız halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer t$\in$ R, bütün tu - ut, u$\in$U ile değişmeli ise t, U nun bütün elemanlarıyla değişmelidir.

Şimdi bu teoremi sağlayan bir örnek verelim.

Örnek: R = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \middle| x,y,z,t \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasının U = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali için R halkasının *ut* – *tu* elemanı ile değişmeli olan bütün t elemanlarının kümesi T = $\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbf{Z} \right\}$ olduğundan t, U kümesinin her elemanı ile değişmelidir.

Çözüm: R = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \middle| x,y,z,t \in \mathbf{Z} \right\}$ halkası asal halka olduğundan aynı zamanda yarı asal halkadır.

U = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbf{Z} \right\}$ kümesi R asal halkasının bir Lie idealidir. Her $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} m & n \\ u & -m \end{bmatrix} \in$ U için

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ u & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+m & b+n \\ c+u & -(a+b) \end{bmatrix} \in$ U olduğundan U, R halkasının toplamsal bir alt grubudur.

Şimdi $[\mathrm{U},\mathrm{R}] \subseteq \mathrm{U}$ olduğunu gösterelim. Her $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in$ R ve

her $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in$ U için $AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} bz - yc & bt - xb \\ cx - 2az + tc & -(bz - yc) \end{bmatrix} \in \mathrm{U}$$

elde edilir. U toplamsal alt grup olduğundan bu elemanların sonlu toplamları da U halkasının elemanıdır. O halde U, R halkasının bir Lie idealidir.

Şimdi R halkasının *A*t – t*A* ile değişmeli olan bütün t elemanlarını bulmaya çalışalım.

t $= \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in$ R, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in$ U olsun.

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\right)-$$
$$\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olması için bu denklemi x, y, z, u ya göre Mathcad programı ile çözersek;

Birinci çözüm için,

$x = x$

$y = 0$

$z = 0$

$u = x$

ikinci çözüm için,

$$x = \frac{(2az + uc)}{c}$$

$$y = \frac{zb}{c}$$

$z = z$

$u = u$

üçüncü çözüm için,

$x = x$

$$y = -\frac{(bzc + 2a^2 z - 2a[z^2(a^2 + cb)]^{1/2})}{c^2}$$

$z = z$

$$u = \frac{-2az + cx + 2[z^2(a^2 + cb)]^{1/2}}{c}$$

dördüncü çözüm için,

$x = x$

$$y = -\frac{(bzc + 2a^2 z + 2a[z^2(a^2 + cb)]^{1/2})}{c^2}$$

$z = z$

$$u = \frac{-2az + cx - 2[z^2(a^2 + cb)]^{1/2}}{c}$$

Sonuçlarını elde ederiz ki bunların içinden sadece birinci çözüm *a, b, c* den bağımsızdır. Birinci çözümden elde edilen matrisi yazarsak;

$$t = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix} \in Z$$

bulunur. t elemanı R halkasının merkezinde olduğundan U Lie idealinin her elemanıyla değişmeli olur.

Teorem 2.1.7.: R yarı asal, 2-burulmasız halka ve W, R halkasının bir alt halkası olsun. U, [W, U] $\subseteq$ W olacak şekilde R halkasının bir Lie ideali olsun. O zaman ya [W, U] = (0) ya da W, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir.

Şimdi bu teoremi sağlayan bir örnek verelim.

Örnek: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d,x \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasının

W = $\left\{ \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \middle| \, p,q,r,y \in \mathbf{Z} \right\}$ alt halkası ve U = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbf{Z} \right\}$ Lie ideali alındığında [W, U] $\subseteq$ W koşulu sağlanır. [W, U] $\neq$ (0) dır.

A = $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{Z} \right\}$, R halkasının W tarafından kapsanan bir idealidir.

Çözüm: R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d,x \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasının yarı asal halka olduğu açıktır.

$$\mathrm{W} = \left\{ \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \middle| \; p, q, r, y \in \mathbf{Z} \right\}$$ R halkasının alt halkasıdır.

Her $A = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ v & -m & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \in \mathrm{W}$ için;

$$\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ v & -m & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+m & q+n & 0 \\ r+v & -(m+p) & 0 \\ 0 & 0 & x+t \end{bmatrix} \in \mathrm{W}$$

olduğundan W, R halkasının bir alt halkasıdır.

$\mathrm{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in \mathbf{Z} \right\}$, $[\mathrm{W},\mathrm{U}] \subseteq \mathrm{W}$ olacak şekilde R halkasının bir Lie idealidir. Önce U kümesinin R halkasının toplamsal alt grubu olduğunu gösterelim.

Her $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{U}$ için

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q & 0 \\ c+r & d+s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{U} \text{ olduğundan}$$

R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi $[\mathrm{U}, \mathrm{R}] \subseteq \mathrm{U}$ olduğunu gösterelim. Her $B \in \mathrm{R}$ ve her $A \in \mathrm{U}$ için

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{U} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \text{ Ï R alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} br - cq & aq + bs - pb - qd & 0 \\ cp + dr - ra - sc & cq - br & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{U}$$

elde edilir ve U toplamsal alt grup olduğundan [U, R] $\subseteq$ U olduğu görülür. O halde U, R halkasının bir Lie idealidir.

U kümesinin [W,U]$\subseteq$W koşulunu sağladığını gösterelim. Her $A_i \in$U, $B_i \in$W için $\sum_i^n (A_iB_i - B_iA_i) \in$W olduğunu göstermeliyiz. $A_i = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ U ve

$B_i = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \in$ W için

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} br - cq & aq - 2bp - qd & 0 \\ 2cp + dr - ra & cq - br & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{W}$$

bulunur. W toplamsal alt grup olduğundan $\sum_i^n (A_iB_i - B_iA_i) \in$ W olur. O halde

[W, U] $\subseteq$ U koşulu sağlanır.[W, U] $\neq$ 0 olduğu açıktır.

Şimdi A = $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{Z} \right\}$ kümesinin W alt halkası tarafından kapsanan R halkasının bir ideali olduğunu gösterelim. A kümesinin R halkasının toplamsal alt grubu olduğu açıktır.

Her $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \in$ R ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \in$ A için

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xt \end{bmatrix} \in A$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & tx \end{bmatrix} \in A$$

elde edilir. Böylece $AR \subset A$ ve $RA \subset A$ bulunur. O halde A, R halkasının bir idealidir.

Yardımcı Teorem 2.1.8.: R yarı asal, 2-burulmasız halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. A $\subseteq$ U, [U, A] $\subseteq$ A ve [A, A] $\subseteq$ Z olacak şekilde R halkasının toplamsal bir alt grup olsun.O zaman [A, U] = 0 dır.

Teorem 2.1.9.: R yarı asal, 2-burulmasız halka ve U, R halkasının bir Lie ideali, V, [V, U] $\subseteq$ V olacak şekilde R halkasının toplamsal alt grubu olsun. O zaman [V, U] = 0 veya R halkasının 0 $\neq$ [M, R] $\subseteq$ V olacak şekilde en az bir M ideali vardır.

R bir asal halka, d R halkasından R halkasına bir adi türev ve Z, R halkasının merkezi olsun. Lee, P. H. ve Lee, T. K. 1981 yılında yaptığı çalışmasında aşağıda verilen teoremleri ispatlamıştır.

Teorem 2.1.10.: R bir asal halka, 0 $\neq$ d : R $\to$ R bir adi türev ve CharR $\neq$ 2 olsun. [d (R), d(R)] $\subseteq$ Z ise bu takdirde R halkası değişmelidir.

İspat: (Lee and Lee, 1981)

Teorem 2.1.11.: R bir asal halka, 0 $\neq$ d : R $\to$ R bir adi türev ve CharR $\neq$ 2 olsun. $d^2(R) \subseteq$ Z ise R halkası değişmelidir.

İspat: (Lee and Lee, 1981)

Teorem 2.1.12.: d_1 ve d_2 R halkasının sıfırdan farklı iki türevi ve CharR $\neq$ 2 olsun. $d_1 d_2 (R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası değişmelidir.

İspat: (Lee and Lee, 1981)

Teorem 2.1.13.: R bir asal halka, $0 \neq d: R \to R$ bir adi türevi ve CharR $\neq$ 2 olsun. $\forall x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu taktirde R halkası değişmelidir.

İspat: (Lee and Lee, 1981)

R bir halka, d R halkasından R halkasına bir adi türev ve Z, R halkasının merkezi olsun. Ram Awtar 1984 yılında yaptığı çalışmasında aşağıda verilen teoremleri ispatlamıştır.

Teorem 2.1.14.: R bir asal halka, CharR $\neq 2$ olmak üzere, $0 \neq d$, R halkasının bir adi türevi olsun. R halkasının $d^2(U) \subseteq Z$ olacak şekilde bir U Lie ideali değişmeli olmasın. Eğer $d(a) = 0$ ve $[a,d(u)] \subseteq Z$ olacak şekilde $a \in R$ varsa $a \in Z$ dir.

İspat: (Awtar, 1984)

Teorem 2.1.15.: R bir asal halka, CharR $\neq$ 2 ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[a,[a, u]] \in Z$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. Bu durumda $[a,U] = 0$ dır. Ayrıca $U \not\subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: (Awtar, 1984)

Teorem 2.1.16.: R bir yarı asal halka, 2-burulmasız halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak şekilde $a \in R$ olduğunu kabul edelim. O zaman $[a,u] = 0$ dır.

İspat: (Awtar, 1984)

Teorem 2.1.17.: R asal bir halka, CharR $\neq$ 2 ve U $\not\subset$ Z, R halkasının bir Lie ideli olsun. Her u $\in$ U için 0 $\neq$ d, R halkasının bir adi türevi olduğunda [a,d(u)] $\in$ Z olacak şekilde a $\in$ R var ise a $\in$ Z dir.
İspat: (Awtar, 1984)

Teorem 2.1.18.: R asal bir halka, CharR $\neq$ 2 ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) \subseteq Z$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir d türevi var ise U $\subseteq$ Z dir.
İspat: (Awtar, 1984)

Teorem 2.1.19.: R asal bir halka, CharR $\neq$ 2 ve U $\not\subset$ Z R halkasının bir Lie ideali olsun. δ d(u) $\subseteq$ Z olacak şekilde R halkasının δ ve d türevleri olsun. O zaman ya d = 0 ya da δ = 0 dır.
İspat: (Awtar, 1984)

Teorem 2.1.20.: R asal bir halka, CharR $\neq$ 2 olmak üzere 0 $\neq$ d, R halkasının bir adi türevi ve U, her u $\in$ U için [u,d(u)] $\in$ Z olacak şekilde R halkasını bir Lie ideali olsun. O zaman U $\subseteq$ Z dir.
İspat: (Awtar, 1984)

1981 yılında Bergen, Herstein ve Kerr tarafından ispatlanan aşağıdaki makale boyunca R karakteristiği 2 den farklı olan asal bir halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Yardımcı Teorem 2.1.21.: U $\not\subset$ Z, R halkasının bir Lie ideali ise $C_R(U)$ = Z dir.
İspat: $C_R(U)$, R halkasının hem bir alt halkası hem de bir Lie idealidir. $C_R(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içermediğinden Teorem 3.1.1 den $C_R(U) \subset Z$ dir. Buradan $C_R(U)$ = Z dir.

Yardımcı Teorem 2.1.22.: $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dur.

İspat: Eğer $[U,U] \not\subset Z$ ise Yardımcı teorem 2.1.21 den $a \in Z$ dir. Böylece $a \in C_R(U)$ dur.

Eğer $[U, U] \subset Z$ ise her $u \in U$, $x \in R$ için $a = [u, [u, x]] \in Z$ dir ve

$$au = [u, [u, x]]u = [u, [u, x]u] = [u, [u, ux]] \in Z \text{ dir.}$$

$a \neq 0$ ise $a \in Z$ olduğundan $u \in Z$ dir. Eğer $a = 0$ ise her $u \in U$, $x \in R$ için $[u, [u, x]] = 0$ olur ki buradan da $u \in Z$ olduğu görülür. Böylece $U \subset Z$ dir.

Her iki durumda da $a \in C_R(U)$ elde edildi.

Yardımcı Teorem 2.1.23.: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali olsun. $aUb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: Yardımcı teorem 3.1.5 den R halkasının $[M, R] \subset U$ iken $[M, R] \not\subset Z$ olacak şekilde bir M ideali vardır. Her $u \in U$, $m \in M$, $y \in R$ için $[mau, y] \in [M, R] \subset U$ olduğundan $[mau, y] \in U$ elde edilir. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= a[mau, y]b = a[ma, y]ub + ama[u, y]b \\ &= am[a, y]ub + a[m, y]aub \\ &= am(ay - ya)ub \\ &= amayub - amyaub = amayub \end{aligned}$$

bulunur. Böylece aMaRUb elde edilir.

$a \neq 0$ ise R, asal halka olduğundan $Ub = 0$ olur.

$\forall x \in R$, $u \in U$ için U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $(ux - xu) \in U$ dur. Buradan

$$0 = (ux - xu)b = uxb - xub = uxb$$

bulunur. Diğer bir değişle $URb = 0$ dır.$U \neq 0$ ve R asal halka olduğu için $b = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 2.1.24.: $0 \neq d$, R halkasının bir adi türevi ve U, $d(U) = 0$ olacak şekilde R halkasının bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir.

İspat: $\forall x \in R$, $u \in U$ için U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $(ux - xu) \in U$ dur. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= d(ux - xu) = d(u)x + ud(x) - d(x)u - xd(u) \\ &= ud(x) - xd(u) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan U, d(R) nin merkezindedir. Teorem 1.22 den $U \subset Z$ dir.

Yardımcı Teorem 2.1.25.: $0 \neq d$, R halkasının bir adi türevi ve U, $d(U) \subset Z$ olacak şekilde R, halkasının bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir

İspat: $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. Yardımcı teorem 2.1.22 dan $V = [U, U] \not\subset Z$ dir.

$\forall u, w \in U$ için $(uw - wu) \in U$ ve hipotezden $d(u), d(w) \in Z$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} d(uw - wu) &= (d(u)w + ud(w)) - (d(w)u + wd(u)) \\ &= d(u)w - d(u)w + ud(w) - ud(w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Başka bir ifadeyle $d(V) = 0$ elde edilir. Yardımcı teorem 2.1.24 den $V \subset Z$ bulunur ki bu baştaki ifade ile çelişir. O zaman $U \subset Z$ dir.

Yardımcı Teorem 2.1.26.: $0 \neq d$, R halkasının bir adi türevi ve U, $U \not\subset Z$ olacak şekilde R, halkasının bir Lie ideali olsun. $td(U) = 0$ (ya da $d(U)t = 0$) ise $t = 0$ olmak zorundadır.

İspat: Her $x \in R$, $u \in U$ için U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $(ux - xu)u \in U$ dur. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= t(d((ux - xu)u)) = t(d(ux - xu))u + t(ux - xu)d(u) \\ &= t(ux - xu)d(u) \qquad \forall x \in R, u \in U \end{aligned}$$

elde edilir. Her $v \in U$, $y \in R$ için x yerine $d(v)y$ yazarsak,

$$\begin{aligned} 0 &= t(ud(v)y - d(v)yu)d(u) = tud(v)yd(u) - td(v)yud(u) \\ &= tud(v)yd(u) \end{aligned}$$

bulunur. Başka bir ifadeyle ise $tud(U)Rd(U) = 0$ dır. R asal halka ve $d(U) \neq 0$ olduğu için $tud(U) = 0$ dır. $d(U) \neq 0$ olduğu için Yardımcı teorem 2.1.23 den $t = 0$ olmalıdır.

Teorem 2.1.27.: $0 \neq d$, R halkasının bir adi türevi ve U, $d^2(U) = 0$ olacak şekilde R halkasının bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir.

İspat: $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. Yardımcı teorem 2.1.22 dan $V = [U, U] \not\subset Z$ dir. Yardımcı teorem 3.1.5 den R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

$m \in [M, R] \subset U \cap M$, $u \in V$ ve $w = d(u) \in d[U, U] \subset U$ olsun. Hipotezden

$0 = d^2(U) = d(w)$ dur.

$\forall y \in R$ ve $mw \in M$ olduğundan $[mw, y] \in [M, R] \subset U$ dur. Hipotezi kullanırsak

$$\begin{aligned} 0 = d^2([mw, y]) &= d^2\{[m, y]w + m[w, y]\} \\ &= d\{d([m, y]w + m[w, y])\} \\ &= d\{[d(m), y]w + m[d(w), y] + [m, d(y)]w + m[w, d(y)]\} \\ &= [d^2(m), y]w + [d(m), d(y)]w + m[d^2(w), y] \\ &+ m[d(w), d(y)] \\ &= 2d(m)d([w,y]) \end{aligned}$$

$CharR \neq 2$ olduğundan $d(m)d([w,y]) = 0$ elde edilir.Başka bir ifadeyle $d([M,R])d([d(v), R] = 0$ dır. $[M, R] \not\subset Z$ olduğundan Yardımcı teorem 2.1.26 den $d([d(v), R] = 0$ dır. $\forall u \in U$, $x \in R$ için

$$0 = d(d(u)x - xd(u)) = d(u)d(x) - d(x)d(u)$$

elde edilir. Bu durumda d(V), d(R) nin merkezindedir. Teorem 1.22 den $d(V) \subset Z$ dir. Yardımcı teorem 2.1.25 dan ise $V \subset Z$ dir. Bu ise baştaki ifademizle çelişir. O zaman $U \subset Z$ dir. İspat biter.

Teorem 2.1.28.: $0 \neq d$, R halkasının bir adi türevi ve U, $d(U) \subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir Lie ideali ise $C_R(d(U)) = Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $a \in C_R(d(U))$ ve $a \notin Z$ olsun.$U \not\subset Z$ olduğundan

Yardımcı teorem 2.1.22 dan $V = [U, U] \not\subset Z$ dir.

Bundan başka, $d(V) \subset U$ olduğundan $\forall u \in V$ için $ad^2(u) = d^2(u)a$ dır.

Kabulümüzden $ad(u) = d(u)a$ dır.

$$\begin{aligned} d(ad(u)) = d(d(u)a) &\Rightarrow d(a)d(u) + ad^2(u) = d^2(u)a + d(u)d(a) \\ &\Rightarrow d(a)d(u) = d(u)d(a) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda ise hem a, hem d(a) d(V) nin merkezindedir.

$d(au - ua) = d(a)u - ud(a) \in d(V)$ dir. Bundan dolayı
$[d(a), [d(a), V] = 0$ elde edilir.Teorem 2.1.27 den $[d(a), V] = 0$ dır ve $V \not\subset Z$ olduğundan Yardımcı teorem 2.1.21 dan $d(a) \in Z$ dir.

Benzer şekilde $a^2 \in C_R(d(U))$ alınırsa $d(a^2) = 2ad(a) \in Z$, Char $R \neq 2$ olduğundan $ad(a) \in Z$ bulunur. $ad(a) \in Z$ iken
$a \notin Z$ ve $d(a) \in Z$ ise $d(a) = 0$ dır. Böylece her $a \in C_R(d(U))$ ve $a \notin Z$ için $d(a) = 0$ bulunur. Eğer $\exists\, b \in C_R(d(U))$ için $d(b) = 0$ oluyor ise $b \in Z$ dir.O zaman
$d(a + b) = d(a) + d(b) = d(b) \neq 0$ dır. Sonuç olarak $a + b \in Z$, $b \in Z$ iken $a \in Z$ elde edilir. Bu ise çelişki yaratır. $C_R(d(U)) \not\subset Z$ dir. $W = \{ x \in R \mid d(x) = 0 \}$ kümesi olsun. $a \in C_R(d(U))$ ise her $u \in U$ için $d(au - ua) = ad(u) - d(u)a = 0$ bulunur. Böylece $[a, U] \subset W$ elde edilir.

$U \not\subset Z$ olduğundan, R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır. $m \in [M, R] \subset U \cap M$ ise $ma \in M$ dir. Böylece her $u \in U$ için
$[ma, u] = m[a, u] + [m, u]a \in U$ dur.

$$d(m[a, u] + [m, u]a) = d(m)[a, u] + m[d(a), u] + m[a, d(u)] + [d(m), u]a + [m, d(u)]a + [m, u]d(a)$$

$a, [a, u] \in W$ olduğundan $d(a) = d[a, u] = 0$ dır.Yukarıdaki eşitlikte kullanırsak

$$d(m[a, u] + [m, u]a) = ((d[m, u])a) + d(m)[u, a]$$

elde edilir. $\forall\, m \in [M, R]$, $u \in U$ için; a, $d([m, u])$ ve $d(m)$ yi merkezlediğinden $d(m)[a, [a, u]] = 0$ dır.R asal halka olduğu için

$$d([M, R]) = 0 \text{ veya } [a, [a, u]] = 0$$

elde edilir.$[M, R]$, R halkasının merkezde olmayan Lie ideali olduğu için Yardımcı teorem 2.1.26 den $[a, [a, u]] = 0$ dır. $U \not\subset Z$ olduğundan Teorem 2.1.27 den $a \in Z$ dir.

2.2. (σ,τ) Türev İçeren Değişmelilik Koşulları İle İlgili Çalışmalar

R karakteristiği 2 den farklı asal halka ve $\sigma,\tau : \mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ iki otomorfizma, d, R halkası üzerinde tanımlı (σ,τ)-türev, Z, R halkasının merkezi ve $\sigma \mathrm{d}=\mathrm{d}\sigma$ ve $\tau \mathrm{d}=\mathrm{d}\tau$ olmak üzere 1991 yılında Kazım Kaya tarafından yapılan çalışmada aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 2.2.1.: $0\neq \mathrm{d}:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ bir (σ,τ)- türev ve $\mathrm{U}\neq(0)$, R halkasının bir ideali olsun. d(U) $\subset$ U ve $[\mathrm{d(U)}, \mathrm{d(U)}]_{\sigma,\tau} \subset \mathrm{C}_{\sigma,\tau}$ ise bu takdirde R halkası değişmelidir.

Teorem 2.2.2.: $\mathrm{d}_1:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ bir (σ,τ) - türev ve $0\neq \mathrm{d}_2:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ bir adi türev olsun. $\mathrm{U}\neq(0)$, R halkasının bir ideali ve $\mathrm{d}_2(\mathrm{U})\subset\mathrm{U}$ olsun. Buna göre $\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2(\mathrm{U})\subset\mathrm{C}_{\sigma,\tau}$ ise bu takdirde R halkası değişmelidir.

Teorem 2.2.3.: U, R halkasının bir (σ,τ)- sağ Lie ideali olsun. [U, U] $\subset \mathrm{C}_{\sigma,\tau}$ ise bu takdirde U $\subset$ Z veya U $\subset \mathrm{C}_{\sigma,\tau}$ dir.

Sonuç 2.2.4.: $(0)\neq\mathrm{M}$, R halkasının bir ideali ve $[\mathrm{M}, \mathrm{R}]_{\sigma,\tau}\subset\mathrm{C}_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Sonuç 2.2.5.: Her x, y, z $\in$ R için $[[\mathrm{x}, \mathrm{y}]_{\sigma,\tau}, \mathrm{z}]_{\sigma,\tau}=0$ ise R halkası değişmelidir.

R karakteristiği 2 den farklı asal halka ve $\sigma, \tau : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ her $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$ için $\sigma\mathrm{d}(\mathrm{r}) = \mathrm{d}\sigma(\mathrm{r})$ ve $\tau\mathrm{d}(\mathrm{r}) = \mathrm{d}\tau(\mathrm{r})$ olacak şekilde iki otomorfizma, Z, R halkasının merkezi ve d, R halkası üzerinde tanımlı bir adi türev olmak üzere 1995 yılında N. Aydın ve M. Soytürk tarafından yapılan çalışmada aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 2.2.6.: U, U $\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R halkasının (σ,τ)- sol Lie ideali ise U $\subset$ Z dir.

Şimdi bu teoremde R halkası asal olmayan bir halka ve σ ile τ örten olmayan homomorfizmalar olarak alındığında teoremin sağlanmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek: R = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbf{Z} \right\}$ halkasının U = $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbf{Z} \right\}$ (σ,τ) sol Lie idealini ele alalım. $\sigma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ ve $\tau : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $\tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ homomorfizmaları için U $\subseteq \mathrm{C}_{\sigma,\tau}$ olduğu halde U $\not\subset$ Z dir.

Çözüm: R = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbf{Z} \right\}$ asal halka değildir.

Çünkü $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır. Fakat $ARB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. O halde R, yarı asal halka değildir. Buradan da R halkasının asal halka olmadığı açıktır.

$\sigma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ olsun. σ, örten olmayan bir endomorfizmadır.

$$\text{i)}\ \sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=\sigma\left(\begin{bmatrix} x+a & y+b \\ 0 & t+c \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+a & 0 \\ 0 & t+c \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}=\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)+\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{ii)}\ \sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=\sigma\left(\begin{bmatrix} xa & xb+yc \\ 0 & tc \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} xa & 0 \\ 0 & tc \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}=\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$$

iii) $\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $\exists\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\in \mathrm{R}$ yoktur. Örten değildir.

$\tau:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $\tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir homomorfizmadır.

$$\text{i)}\ \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=\tau\left(\begin{bmatrix} x+a & y+b \\ 0 & t+c \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} t+c & 0 \\ 0 & x+a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$=\tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)+\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{ii)}\ \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=\tau\left(\begin{bmatrix} xa & xb+yc \\ 0 & tc \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} tc & 0 \\ 0 & xa \end{bmatrix}$$

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} tc & 0 \\ 0 & xa \end{bmatrix}$$

iii) $\tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $\exists\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\in$ R yoktur. Örten değildir.

$\mathrm{U}=\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\middle| a\in\mathbf{Z}\right\}$ R halkasının bir (σ,τ) sol Lie idealidir. Çünkü her $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in$ U için $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{a+b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in \mathrm{U}$ olduğundan U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi $[U, R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğunu gösterelim. $i \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U,\ B_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & t_i \end{bmatrix} \in R \text{ için}$$

$$A_i\sigma(B_i) - \tau(B_i)A_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma\left(\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & t_i \end{bmatrix}\right) - \tau\left(\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & t_i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & 0 \\ 0 & t_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & x_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_i t_i - t_i a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$$

elde edilir. U, R halkasının toplamsal alt grubu olduğu için $\sum_i^n (A_i\sigma(B_i) - \tau(B_i)A_i)$ elemanı da U nun elemanıdır. Aynı işlemler $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ için yapılınca da aynı sonuç elde edilir.

Şimdi $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu gösterelim. Her $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$ ve $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix} \in R$ olmak üzere

$$A\sigma(B) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & at \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \tau(B)A$$

olduğundan $U \subseteq C_{\sigma,\tau}$ dur. $U \not\subset Z$ dir. Çünkü

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$ ve $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in R$ için;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Teoremde σ ve τ örten endomorfizma ve R halkası asal halka olarak alınmazsa U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmaz.

Teorem 2.2.7.: U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali ve d, R halkasının bir adi türevi olsun. d(U)$\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir veya U$\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

N. Aydın ve M. Soytürk tarafından ispatlanan bu teoremde her $r \in$ R için $\sigma d(r)=d\sigma(r)$ *ve* $\tau d(r)=d\tau(r)$ koşulunun kaldırılamayacağını gösteren bir örnek verelim;

R $=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbf{Z}\right\}$ halkasının U = $\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbf{Z}\right\}$ sağ Lie idealini ele alalım. $\sigma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, $\tau : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ homomorfizmaları ve $\mathrm{d} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ türevi için d(U)$\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu halde R halkası değişmeli değildir ve U$\not\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

Örnek: R $=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbf{Z}\right\}$ asal halkadır

$\sigma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$ olsun. σ bir otomorfizmadır.

i) $$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)=\sigma\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+x & -(b+y) \\ -(c+z) & d+t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & -y \\ -z & t \end{bmatrix}= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)+\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

ii) $$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)=\sigma\left(\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ax+bz & -(ay+bt) \\ -(cx+dz) & cy+dt \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -y \\ -z & t \end{bmatrix}= \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

$\tau : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. τ bir otomorfizmadır.

$\mathrm{d}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}\;\; \mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ R halkası üzerinde bir türevdir.

i) d, toplamsal bir dönüşümdür.

$$\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)=\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -(c+z) & (a+x)-(d+t) \\ 0 & (c+z) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -z & x-t \\ 0 & z \end{bmatrix}=\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)+\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

ii) d(AB) = d(A)B + Ad(B) eşitliği sağlanır.

$$\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)=\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -(cx+dz) & (ax+bz)-(cy+dt) \\ 0 & cx+dz \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z & x-t \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

elde edilir.

$\mathrm{U}=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}\middle|\, x,y,z\in\mathbf{Z}\right\}$ R halkasının (σ,τ)- sağ Lie idealidir.

U kümesinin R halkasının toplamsal alt grubu olduğu açıktır.

Her $\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}\in$ U için $\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & a+x \end{bmatrix}\in$U olduğu için

U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi $[\mathrm{U},\mathrm{R}]_{\sigma,\tau}\subset\mathrm{U}$ olduğunu gösterelim. Her $\mathrm{i}\in\{1,2,...,\mathrm{n}\}$ olmak üzere

$A_i=\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & x_i \end{bmatrix}\in\mathrm{U},\; B_i=\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}\in$R için

$$A_i\sigma(B_i)-\tau(B_i)A_i=\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & x_i \end{bmatrix}\sigma\left(\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}\right)-\tau\left(\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(y_ic_i + b_iz_i) & y_id_i - 2x_ib_i - a_iy_i \\ z_ia_i - 2x_ic_i - d_iz_i & -(b_iz_i + c_iy_i) \end{bmatrix} \in$$ U elde edilir. U, R

halkasının toplamsal alt grubu olduğu için $\sum_i^n (A_i\sigma(B_i) - \tau(B_i)A_i) \in$ elemanı da U

nun elemanıdır.

Şimdi d(U) $\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu gösterelim. Her $\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \in$ U ve her $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$ R için

$$d\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - \tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) d\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan d(U) $\subset C_{\sigma,\tau}$ dur. R halkası değişmeli olmayan bir halkadır.

Şimdi ise U $\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu gösterelim.

Her $\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \in$ U ve her $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$ R için

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - \tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}$$

$$\neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan U $\not\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

R halkası üzerinde tanımladığımız d türevi ve σ endomorfizması için $\sigma d \neq d\sigma$ olduğu kolayca görülür.

Sonuç 2.2.8.: U, R halkasının (σ,τ) Lie ideali olsun. d(U) $\subset C_{\sigma,\tau}$ ise U $\subset$ Z dir.

Yardımcı Teorem 2.2.9.: U, R halkasının (σ,τ) Lie ideali ve $a\in R$ olsun.

d(U)a = 0 (ad(U) = 0) ise a = 0 veya $U \subset Z$ dir.

Yardımcı Teorem 2.2.10.: U, R halkasının bir (σ,τ) - Lie ideali olsun. $d^2(U) = 0$ ise $d(U)\subset Z$ dir.

Teorem 2.2.11.: U, R halkasının bir (σ,τ) - Lie ideali olsun. $d^2(U) = 0$ ise $U\subset Z$ dir.

R karakteristiği 2 den farklı asal halka ve $\sigma,\tau : R \to R$ iki otomorfizma; d, R halkası üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir adi türev, U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)- sol Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olmak üzere 1999 yılında N. Aydın ve K. Kaya tarafından yapılan çalışmada aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 2.2.12.: a, b $\in$ R olsun.

i)d_1, R üzerinde $d_1(x) = [x, b]_{\sigma,\tau}$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm ve $ad_1(R) = 0$ $(d_1(R)a = 0)$ ise a= 0 veya $b\in Z$ dir.

ii) $a[R, b]_{\sigma,\tau} = 0$ $([R, b]_{\sigma,\tau}\, a = 0)$ ise a = 0 veya $b \in Z$ dir.

iii) Ua = 0 (aU = 0) ise a = 0 veya $U\subset Z$ dir

İspat: i) Her x, y $\in$ R için yukarda d_1 in tanımından

$$d_1(xy) = [xy, b]_{\sigma,\tau} = x[y, \sigma(b)] + [x, b]_{\sigma,\tau}\, y,$$

yani

$$d_1(xy) = d_1(x)y + x[y, \sigma(b)] \quad \forall\ x, y \in R \tag{1}$$

elde edilir. Soldan a ile çarpıp $ad_1(R) = 0$ olmasını kullanırsak,

$\forall$ x, y $\in$ R için $ax[y, \sigma(b)] = 0$ bulunur. Böylece $aR[y, \sigma(b)] = 0$ olduğu görülür. R asal halka olduğundan a = 0 veya $[y, \sigma(b)] = 0$ bulunur. Bu a = 0 veya $b\in Z$ olmasını gerektirir.

ii) Her x $\in$ R için $d_1(x) = [x, b]_{\sigma,\tau}$ olsun. Eğer $a[R, b]_{\sigma,\tau} = 0$ ise d_1 in tanımından a $d_1(R) = 0$ demektir. Bu ise i) şıkından a = 0 veya $b\in Z$ olmasını gerektirir.

iii) $a[R, U]_{\sigma,\tau} \subset aU = 0$ olduğundan bu teoremin ii) şıkkı kullanılırsa a = 0 veya $U\subset Z$ olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 2.2.13.: d, R halkasının sıfırdan farklı bir adi türevi olsun. d(U) = 0 ise bu taktirde $[U, \sigma(U)] = 0$ ve $[\sigma(U), \tau(U)] = 0$ dır.

İspat: Her u, w, v $\in$ U için hipotezden, $d[wv, u]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Bu ifadeyi açarsak

$$0 = d[wv, u]_{\sigma,\tau} = d(w[v, \sigma(u)] + [w, u]_{\sigma,\tau} v)$$

$$= d(w)\,[v, \sigma(u)] + wd[v, \sigma(u)] + d([w, u]_{\sigma,\tau} v)$$

$$= wd[v, \sigma(u)] \text{ bulunur.}$$

Her u, v, w $\in$ U için $U[U, d(\sigma(U)] = 0$ dır. Yardımcı Teorem 2.2.12 iii) kullanılırsa

$$[U, d(\sigma(U)] = 0 \text{ elde edilir.} \tag{2}$$

Her r $\in$ R, u, v $\in$ R için hipotezden $0 = d[rv, u]_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadeyi açar ve d(U) = 0 olmasını kullanırsak

$$0 = d[rv, u]_{\sigma,\tau} = d(\, r[v, \sigma(u)] + [r, u]_{\sigma,\tau} v) = d(r)[v, \sigma(u)]$$ bulunur. Bu ise $d(R)[U, \sigma(U)] = 0$ olmasını gerektirir.

$d \neq 0$ olduğundan dolayı Yardımcı Teorem 2.1.1 den $[U, \sigma(U)] = 0$ olduğu görülür. Böylece her $s \in R$, u, v $\in$ U için

$$0 = [\,[\,\tau(u)s, u]_{\sigma,\tau}, \sigma(v)] = \tau(u)[[s, u]_{\sigma,\tau}, \sigma(v)] + [\tau(u), \sigma(v)][s, u]_{\sigma,\tau}$$

$$= [\tau(u), \sigma(v)][s, u]_{\sigma,\tau} \text{ olur.} \tag{3}$$

(3) de her $r \in R$ için s yerine sr (r $\in$ R) alınır ve (3) kullanılırsa,

$$0 = [\tau(u), \sigma(v)]R[r, \sigma(u)]$$

bulunur. R asal halka olduğundan son ifade

$$[\tau(u), \sigma(v)] = 0 \text{ veya } [r, \sigma(u)] = 0 \text{ olmasını gerektirir.}$$

Eğer $[r, \sigma(u)] = 0$ ise $\sigma(u) \in Z$, yani u $\in$ Z dir. $u \in Z$ ise $\tau(u) \in Z$ dir. Böylece $\forall u, v \in U$ için $[\tau(u), \sigma(v)] = 0$ bulunur.

Yardımcı Teorem 2.2.14.: d, d(U) = 0 olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir adi türevi ise her u $\in$ U için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

İspat: Yardımcı Teorem 2.2.13 dan $[U, \sigma(U)] = 0 = [\sigma(U), \sigma(U)]$ dır.

Buradan her u, w, v $\in$ U, r $\in$ R için,

$$0 = [[rw,v]_{\sigma,\tau},\ \sigma(u)] = [r[w, v]_{\sigma,\tau} + [r, \tau(v)]w,\ \sigma(u)]$$

$$= r[[w,v]_{\sigma,\tau},\ \sigma(u)] + [r,\ \sigma(u)][w, v]_{\sigma,\tau}$$

$$+ [r,\ \tau(v)][w,\ \sigma(u)] + [r,\ \sigma(u)][w, v]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Buradan ise [U, σ(U)] = 0 = [σ(U), σ(U)] olduğundan her u, v, w $\in$ U, r $\in$ R için

$$[r,\ \sigma(u)][w, v]_{\sigma,\tau} + \ [r,\ \sigma(u)][w, v]_{\sigma,\tau} = 0 \text{ elde edilir.} \qquad (4)$$

(4) ü açıp,

$0 = (r\sigma(u) - \sigma(u)r)(w\sigma(v) - \tau(v)w) + [r\tau(v) - \tau(v)r,\ \sigma(u)]w$

$= r\sigma(u)w\sigma(v) - r\sigma(u)\tau(v)w - \sigma(u)rw\sigma(v) + \sigma(u)r\tau(v)w$

$+ r\tau(v)\sigma(u)w - \tau(v)r\sigma(u)w - \sigma(u)\, r\tau(v)w + \sigma(u)\tau(v)rw$

$\tau(v)\sigma(u) = \sigma(u)\tau(v)$ ve $w\sigma(u) = \sigma(u)w$ elde edilir. Son ifade de bu eşitlikleri kullanırsak, $\forall$ u, w, v $\in$ U, r $\in$ R için

$r\sigma(u)w\sigma(v) - \sigma(u)rw\sigma(v) - \tau(v)rw\sigma(u) + \sigma(u)\tau(v)rw = 0$ elde edilir. (5)

Diğer taraftan [τ(v), σ(u)] = 0 = [w, σ(u)] ve Tanım 1.20 B) özdeşliği kullanılırsa

$$[\tau(v)rw,\ \sigma(u)] = \tau(v)[rw,\ \sigma(u) + [\tau(v),\ \sigma(u)]rw$$

$$= \tau(v)r[w,\ \sigma(u)] + \tau(v)[r,\ \sigma(u)]w$$

$$= \tau(v)[r,\ \sigma(u)]w \text{ olur.}$$

Bu son ifade (5) ifadesinde kullanılırsa her u, w, v $\in$ U, r $\in$ R için

$$[r,\ \sigma(u)]w\sigma(v) - \tau(v)[r,\ \sigma(u)]w = 0$$

dır. Bu son ifade de özellik 1.16 ii) ve [U, σ(U)] = 0 eşitlikleri kullanılırsa,

$$0 = [[r,\ \sigma(u)]w, v]_{\sigma,\tau} = [r,\ \sigma(u)][w,\ \sigma(u)] + [[r,\ \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau}\, w$$

$$= [[r,\ \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau}\, w \qquad \forall u, w, v \in U, r \in R \qquad (6)$$

bulunur. (6) eşitliğinde Yardımcı Teorem 2.2.12 kullanılarak

$\forall$ u, v $\in$ U, r $\in$ R için ,

$$[[r,\ \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau} = 0 \text{ elde edilir.} \qquad (7)$$

(7) eşitliğinde r yerine (s $\in$ R) rs alırsak

$$0 = [[rs,\ \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau} = [r[s,\ \sigma(u)] + [r,\ \sigma(u)]s, v]_{\sigma,\tau}$$

$$= r[[s,\ \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau} + [r, \tau(v)][s,\ \sigma(u)] + [r, \sigma(u)][s,\ \sigma(v)]$$

$$+ [[r,\ \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau}\, s$$

$= [r, \tau(v)][s, \sigma(u)] + [r, \sigma(u)][s, \sigma(v)]$ elde edilir. Bu ise $[r, \sigma(u)+\tau(u)][s, \sigma(u)] = 0$ bulunur. Bu son ifade de s elemanı yerine ($x \in R$ için) xs alınıp, son ifade kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 = [r, \sigma(u)+\tau(u)][xs, \sigma(u)] &= [r, \sigma(u)+\tau(u)]x[s, \sigma(u)] \\ &+ [r, \sigma(u)+\tau(u)][x, \sigma(u)]s \\ &= [r, \sigma(u)+\tau(u)]x[s, \sigma(u)] \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x \in R$ için $[r, \sigma(u)+\tau(u)]R[s, \sigma(u)] = 0$ bulunur.R asal halka olduğundan

$[r, \sigma(u)+\tau(u)] = 0$ veya $[s, \sigma(u)] = 0$ dır.

$\forall\ u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olmasını gerektirir.

Yardımcı Teorem 2.2.15.: a, R halkasının $[a,U] = 0$ olacak şekilde bir elemanı ise $a \in Z$ veya $\forall u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

İspat: $d(x) = [a, x]$ ile tanımlı R halkasının bir iç türevi olsun. O zaman $d(U) = 0$ dır. Buradan $d = 0$ veya $\forall u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir. Yardımcı Teorem 2.2.14 den $d = 0$ ise her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ olur. Bu ise $a \in Z$ veya $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olmasını gerektirir.

Sonuç 2.2.16.: Eğer $[U, U] = 0$ ise her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir.

İspat: $[U, U] = 0$ olsun. Yardımcı Teorem 2.2.15 $U \subset Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir. Eğer $U \subset Z$ ise $\sigma(u)$, $\tau(u) \in Z$ dir. Buradan her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 2.2.17.: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (σ,τ) sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini içerir veya her u $\in$ U için σ(u) + τ(u)$\in$ Z dir.

İspat: U, R halkasının (σ,τ) sol Lie ideali ve alt halkası olduğundan

$\forall$u, v $\in$ U, y$\in$R için,

$$v[y, u]_{\sigma,\tau} \in U \text{ ve } [vy, u]_{\sigma,\tau} \in U \text{ dur.}$$

[v, τ(u)]y = $[vy, u]_{\sigma,\tau} - v[y, u]_{\sigma,\tau}$, U toplamsal alt grup olduğundan son ifade

[v, τ(u)]y $\in$ U olmasını gerektirir.

Böylece [U, τ(U)]R $\subset$ U olur. M = [U, τ(U)]R, R halkasının bir idealidir.

Eğer M $\neq$ (0) ise; U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir. Eğer M = (0) ise R asal halka olduğundan [U, τ(U)] = 0 dır. τ(U) $\subset$ Z veya her u $\in$U için σ(u) + τ(u)$\in$ Z dir. Yardımcı Teorem 2.2.15 den σ(u) + τ(u)$\in$ Z dir.

Yardımcı Teorem 2.2.18.: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (σ,τ) sol Lie ideali ve alt halkası, a, b $\in$ R olsun. Eğer aUb = 0 ise a = 0 veya b = 0 veya her u $\in$U için σ(u)+τ(u)$\in$ Z dir.

İspat: Yardımcı Teorem 2.2.17 den U, $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset [R, U]_{\sigma,\tau} \subset$ U veya her u $\in$U için σ(u)+τ(u) $\in$ Z olacak şekilde R halkasının bir M idealini içerir. Eğer U, R halkasının sıfırdan farklı bir M idealini içerdiğini varsayalım. Bu durumda her m $\in$ M, r $\in$ R için hipotezden,

$$0 = a\,[r, m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b = a\,\tau(m)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b + a[r, m]_{\sigma,\tau}\, bb$$

$$= a\,\tau(m)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b \qquad (8)$$

elde edilir.(8) de m yerine (s $\in$ R için) ms alırsak,

$$0 = a\,\tau(ms)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b = a\,\tau(m)\,\tau(s)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b$$

bulunur. Böylece $a\tau(M)R[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b = 0$ olur. R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$a\tau(M) = 0 \text{ veya } [R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b = 0 \text{ elde edilir.}$$

i) $[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\, b = 0$ olsun. Bu durumda R asal halka olduğundan b = 0 veya σ^{-1}(b) $\in$ Z dir. Yardımcı Teorem 2.2.12 (ii) den b = 0 veya b $\in$Z dir. b $\in$Z ise aURb = aUbR = 0 dır. R asal halka olduğundan aU = 0 veya b = 0 dır. Yardımcı Teorem 2.2.12 (iii) den a = 0 veya $U \subset Z$ veya b = 0 elde edilir. U merkez tarafından kapsanmadığından a = 0 veya b = 0 dır.

ii) $a\tau(M) = 0$ olsun. Bu durumda $\tau^{-1}(a)M = 0$ dır. K = { $r \in R$ | rM = 0 }, R halkasının boştan farklı bir sol idealidir. K $\neq$ 0 kabul edelim. M, R halkasının sağ ideali ve K, R halkasının sol ideali olduğundan $MK \subset M \cap K$ dır.

a) Eğer $M \cap K = 0$ ise MK = 0 dır. R halkası asal ve M, R halkasının sağ ideali olduğundan K = 0 olur. Bu durum ise K $\neq 0$ kabulümüz ile çelişir.

b) Eğer $M \cap K \neq 0$ ise $M \cap K$ içinde sıfırdan farklı bir m' elemanı vardır. Bu $m'M = 0$ olmasını gerektirir.

L = { $m' \in M$ | $m'M = 0$ } olsun. L, R halkasının sıfırdan farklı bir sol idealidir. Eğer L = M ise $M^2 = 0$ olur. R, asal halka olduğu için sıfırdan başka nilpotent ideali yoktur yani M = 0 dır. Bu durum ise M $\neq$ 0 olması durumu ile çelişir. Böylece $L \subset M$ olmalıdır ve $L \cap M = L$ dir. $(L \cap M)(L \cap M) \subset LM = 0$ olduğundan $L^2 = 0$, R halkası asal olduğundan L = 0 dır. Bu durum ise L $\neq 0$ olması durumu ile çelişir. Böylece K = 0 olmak zorundadır. $\sigma^{-1}(a) \in K$ ve K = 0 olduğundan dolayı a = 0 dır.

Teorem 2.2.19.: U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir (σ,τ) sol Lie ideali ve alt halkası olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir veya her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

İspat: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir (σ,τ) sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.17 nin ispatından $[U, \tau(U)]R \subset U$ olduğu açıktır. Öte yandan her u, v $\in$ U, y $\in$ R için U, R halkasının (σ,τ) sol Lie ideali ve alt halkası olduğundan $[y, u]_{\sigma,\tau}$ v$[yv, u]_{\sigma,\tau} \in U$ dur. Böylece $y[v, \sigma(u)] = [yv, u]_{\sigma,\tau} - [y, u]_{\sigma,\tau} \in U$ elde edilir. Buradan $R[U,\sigma(U)] \subset U$ olduğu görülür. U, bir halka olduğundan $M = R[U,\sigma(U)][U, \tau(U)]R \subset U$ olur. O halde M, R halkasının bir idealidir.

i) M $\neq 0$ ise U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içermiş olur.

ii) M = 0 ise $R[U,\sigma(U)][U, \tau(U)]R = 0$ olur. R asal halka olduğundan

$[U,\sigma(U)][U, \tau(U)] = 0$ olur. $\forall u, v, w, w', t \in U$ için

$$0 = [u, \sigma(v)][ww', \tau(t)] = [u, \sigma(v)]w[w', \tau(t)] + [u, \sigma(v)][w, \tau(t)]w' = [u, \sigma(v)]w[w', \tau(t)]$$

$\forall u, v, w, w', t \in U$

Buradan $[U, \sigma(U)]U[U, \tau(U)] = 0$ bulunur. Yardımcı 2.2.18 den

$[U, \sigma(U)] = 0$ veya $[U, \tau(U)] = 0$ veya $\forall u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir.

a) $[U, \sigma(U)] = 0$ ise Yardımcı Teorem 2.2.15 den $\sigma(u) \in Z$ veya $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir. Eğer $\sigma(u) \in Z$ ise $U \subset Z$ dir. Bu hipotezle çelişir. Böylece her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

b) $[U, \tau(U)] = 0$ ise a) ile aynı işlemler yapılıp $\forall u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ elde edilir.

Teorem 2.2.20.: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (σ,τ) sol Lie ideali olsun. R halkasının $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ veya $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ ($\forall u \in U$) sağlayan sıfırdan farklı en az bir M ideali vardır.

İspat: $K = \{ x \in R \mid [R, x]_{\sigma,\tau} \subset U \}$ kümesi tanımlansın. $U \subset K$ olduğundan K kümesi boştan farklıdır. Diğer yandan $[R, K]_{\sigma,\tau} \subset U \subset K$ olduğundan $[R, K]_{\sigma,\tau} \subset K$ dır. O halde K, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (σ,τ) sol Lie idealidir. Böylece

$[r, xy]_{\sigma,\tau} = r\sigma(xy) - \tau(xy)r = r\sigma(x)\sigma(y) - \tau(x)\tau(y) + \tau(y)r\sigma(x) - \tau(y)r\sigma(x)$

$$[r, xy]_{\sigma,\tau} = [r\sigma(x), y]_{\sigma,\tau} + [\tau(y)r, x]_{\sigma,\tau} \in U \qquad \forall x, y \in K, r \in R \tag{9}$$

elde edilir.

(9) eşitliğinden K halkasının R halkasının alt halkası olduğu görülür.

Teorem 2.2.19 den K, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir veya her $k \in K$ için $\sigma(k) + \tau(k) \in Z$ dir. Eğer her $k \in K$ için

$\sigma(k) + \tau(k) \in Z$ ise $U \subset K$ olduğundan her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ elde edilir.

K, R halkasının $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir M idealini içerdiğini kabul edelim. O zaman $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Her $a, b \in M$, $r \in R$ için,

$$0 = [[r, a]_{\sigma,\tau}, b] = [[r, b]_{\sigma,\tau}, a] + [r, [a, b]]_{\sigma,\tau} = [r, [a, b]]_{\sigma,\tau} \tag{10}$$

bulunur.

$d_r(x) = [r, x]_{\sigma,\tau}$, (σ,τ) iç türev; $d_a(x) = [a, x]$ iç türev olarak tanımlansın. Buradan (10) ifadesi $d_r d_a(M) = 0$ ve $d_a(M) \subset M$ olur. [4, Yardımcı Teorem 4] ten $d_a = 0$ veya $d_r = 0$ elde edilir. Bu ifade ise $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olmasını gerektirir. Eğer $R \subset C_{\sigma,\tau}$ ise; $\forall x, r, s \in R$ için

$$0 = [rs, x]_{\sigma,\tau} = r[s, \sigma(x)] + [r, x]_{\sigma,\tau}s = r[s, \sigma(x)]$$

olur. Bu durumda $R[R, R] = 0$ yazılır. R asal halka olduğu için $[R, R] = 0$ olur ki buda R halkasının değişmeliliğini gerektirir. Eğer $M \subset Z$ ise; R halkasının asal ve M, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmasından dolayı R halkası değişmelidir. $U \subset R$ olduğundan, U merkezde $(U \subset Z)$ olur ki bu hipotezle çelişir. O halde $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

3. BÖLÜM: HERSTEIN' IN YAPMIŞ OLDUĞU BİR ÇALIŞMA ÜZERİNE YAPILAN GENELLEŞTİRMELER

İlk olarak Herstein tarafından ispatlanan "R yarı asal ve 2-burulmasız bir halka olmak üzere, U sıfırdan farklı R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının merkezi tarafından kapsanır veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir," teoremini, 1981 yılında Bergen, Herstein ve Kerr tarafından ispatlanan "R, karakteristiği 2 den farklı asal bir halka ve U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideali olmak üzere, R halkasının $[M, R] \subset U$ ancak $[M, R] \not\subset Z$ olacak şekilde bir M ideali vardır" teoremi izlemiştir. 1994 yılında H. Kandamar ve N. Aydın tarafından yukarıda verilen teoremde merkez tarafından kapsanmayan U Lie ideali yerine, R halkasının hem merkez hem de (σ,τ)-merkez tarafından kapsanmayan U (σ,τ)-Lie ideali alınarak R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M idealinin bulunabileceğini kanıtlamışlardır. 1999 yılında ise N. Aydın, 1981 yılında Bergen, Herstein ve Kerr tarafından ispatlanan yukarıdaki teoremde, asal halka yerine yarı asal halka ve Lie ideal yerine (σ,τ) Lie ideal alarak aşağıdaki teoremi ispatlanmıştır. "R yarı asal ve 2-burulmasız halka ve U, $U \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir (σ,τ) Lie ideali olsun. R halkasının $[R, M]_{\sigma,\tau} \subseteq U$ olacak şekilde $(0) \neq M$ ideali vardır. Üstelik $\sigma(m) \neq \tau(m)$ ise $\exists m \in M$ için $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

3.1. Teoremlerin İspatları ve Örnekler

R karakteristiği 2 den farklı olan asal bir halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olsun.

Teorem 3.1.1.: R yarı asal ve 2-burulmasız bir halka olmak üzere, U sıfırdan farklı R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının merkezi tarafından kapsanır veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir.

İspat: İlk olarak U halkasını değişmeli olmayan bir halka olarak alalım.

$\exists x, y \in U$ için $xy - yx \neq 0$ dır. $\exists r \in R$ için U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan $x(yr) - (yr)x \in U$ dur. $(xy - yx)r + y(xr - rx) \in U$ dur. Sonuç olarak

$(xy - yx)R \subset U$ elde edilir. $\forall r, s \in R$ için U, R halkasının bir Lie ideali olduğu için

$((xy - yx)r)s - s((xy - yx)) \in U$ bulunur. Bunu takiben $R(xy - xy)R \subset U$ elde edilir.

$R(xy - xy)R$ idealinin U da olduğunu gösterdik. $R(xy - xy)R =$ (0) ise

$(R(xy - yx))^2 = (0)$ dır. Buradan $R(xy - yx)R(xy - yx) = (0)$ ise xy = yx elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O zaman $R(xy - xy)R \neq (0)$

İkinci olarak U halkasının değişmeli olduğunu kabul edelim. $a \in U, x \in R$ verilsin. $ax - xa \in U$ dur. O zaman kabulümüz gereği a ile değişmelidir.

$\forall x, y \in R$ için $a(a(xy) - (xy)a) = (a(xy) - (yx)a)a$ dır.

$(ax - xa)y + x(ay - ya) = axy - xay + xay - xya = a(xy) - (xy)a$ Bu eşitlikten elde edilen denklemler U halkasının a elemanı ile değişmelidir.

$a(ax - xa)y + x(ay - ya)) = ((ax - xa)y + x(ay - ya))a$ dır. Buradan ise

$(ax - xa)(ay - ya) = -(ay - ya)(ax - xa)$

$2(ax - xa)(ay - ya) = 0$ dır. Yani $(ax - xa)(ay - ya) = 0$ elde edilir. Bu denklemde $\forall r \in R$ için $\forall y \in R$ yerine rx alırsak

$(ax - xa)(a(rx) - (rx)a) = 0$ elde edilir. Buradan ise $(ax - xa)R(ax - xa) = (0)$ bulunur.

R halkası sıfırdan farklı nilpotent ideale sahip olmadığı için $(ax - xa) = 0$ bulunur. Buradan ise a elemanı R halkasının merkezindedir.

1981 yılında Bergen, Herstein ve Kerr tarafından ispatlanan aşağıdaki makale boyunca R karakteristiği 2 den farklı olan asal bir halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Yardımcı Teorem 3.1.2.: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali ise bu takdirde R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

İspat: Char R $\neq 2$ ve U $\not\subset$ Z olduğundan, M = R[U, U]R $\neq$ 0, [U, U] tarafından üretilen R halkasının bir ideali olduğu yerde [M, R]$\subset$U ve [U, U] $\neq 0$ olmasını gerektirir. [M, R]$\not\subset$ Z görmek kolaydır. Eğer [M, R] $\subset$ Z ise [M, [M, R]] = 0 olduğu için bu durumda M$\subset$ Z olmasını zorunlu kılar ve böylece M, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir. Böylece R = Z dir.

R karakteristiği 2 den farklı asal halka $\sigma, \tau : R \to R$ iki otomorfizma, d, R halkası üzerinde tanımlı (σ,τ) türev ve Z, R halkasının merkezi olmak üzere 1994 yılında Neşet Aydın ve Hatice Kandamar tarafından yapılan çalışmada aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 3.1.3.: U, R halkasının (σ,τ) - sağ Lie ideali ve a$\in$R için $[U, a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu takdirde a $\in$ Z veya U $\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: a $\in$ Z ve U $\not\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. O zaman u $\in$ U ve u $\notin$ $C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde bir u elemanı vardır. Her x $\in$ R için hipotezden

$$0 = [[u,a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [u, [a, x]]_{\sigma,\tau} + [[u, x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$$

ve $[[u,x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan,

$$[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. $d_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$ R halkasının bir (σ,τ) - türevi ve $d_a(x) = [a,x]$ R halkasının bir türevi olmak üzere yukarıdaki ifadeden

$$d_u d_a(R) \subset C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. u$\notin C_{\sigma,\tau}$ ve a $\notin$ Z olduğu için d$\neq 0$ ve $d_a \neq$ 0 dır. Buna göre Teorem 2.2.2 den R değişmeli olur ki bu a $\in$ Z alınışıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece a $\in$ Z veya U $\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Yardımcı Teorem 3.1.4.: a$\in$R ve aU = 0 (veya Ua = 0) olsun

a) Eğer U, (σ, τ) - sol Lie ideali ise o zaman a = 0 veya U $\subset$ Z dir.

b) Eğer U, (σ, τ) - sağ Lie ideal ise o zaman a = 0 veya U $\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olur.

ispat: a) Her x, y $\in$ R, u $\in$ U için

$$0 = a[xy, u]_{\sigma,\tau}$$

$$= ax[y, u]_{\sigma,\tau} + a[x, u]_{\sigma,\tau}\, y = ax[y, \sigma(u)]$$

olduğundan (0) = aR [R, σ(U)] bulunur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } U \subset Z$$

elde edilir. Şimdi $\forall$ x, y $\in$ R ve u $\in$ U için Ua = 0 olduğunu kabul edelim. O zaman

$$0 = [xy, u]_{\sigma,\tau}\, a = x\, [y,u]_{\sigma,\tau}\, a + [x, \tau(u)]\, ya = [x, \tau(u)]ya$$

olduğundan [R, τ (u)]Ra = (0) olur. R asal halka olduğundan

$$a \in Z \text{ veya } U \subset Z \text{ dir.}$$

b) Her x, y $\in$ R ve u $\in$ U için $0 = a\,[u, xy]_{\sigma,\tau}$

$$= a\tau(x)[u, y]_{\sigma,\tau} + a\,[u,x]_{\sigma,\tau}\,\sigma(y)$$

$$= a\tau(x)\,[u,y]_{\sigma,\tau} \text{ olduğundan}$$

$aR[U, R]_{\sigma,\tau} = (0)$ bulunur.

R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Ua = 0 olması durumunda

$[u, xy]_{\sigma,\tau} = \sigma(x)[u, y]_{\sigma,\tau} + [u, x]\, y$ özdeşliği kullanılarak istenen görülür.

Teorem 3.1.5.: U, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve a $\in$ R olsun. Buna göre [U, a] = 0 ise a $\in$ Z veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

İspat: Her x $\in$ R, u $\in$ U için $0 = [[u,x]_{\sigma,\tau}, a] = [u\sigma(x) - \tau(x)u, a]$

$$= u\sigma(x)a - \tau(x)ua - au\sigma(x) + a\tau(x)u$$

olur. Buradan [U, a] = 0 olduğu kullanılırsa

$$u[\sigma(x), a] = [\tau(x), a]\, u \quad , \qquad \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (1)$$

elde edilir. (1) eşitliğinde x yerine (y $\in$ R) xy yazılıp (1) eşitliği kullanılırsa

$$0 = [u, x]_{\sigma,\tau}\, [\sigma(y), a] + [\tau(x), a][u, y]_{\sigma,\tau}, \quad \forall x,y \in R, \forall u \in U \qquad (2)$$

bulunur. (2)' de y yerine σ^{-1}(a) (a $\in$ R) alınırsa $[\tau(x), a]\,[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Bu son eşitlikte x yerine (y $\in$ R için) xy yazılıp son eşitlik kullanılırsa

$$[\tau(R), a]R[U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = (0) \qquad (3)$$

elde edilir. R asal halka olduğundan (3) den

$$a \in Z \text{ veya } [U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = (0)$$

bulunur. Yardımcı Teorem 3.1.3 dan $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece ispat biter.

$(0) \neq U$, R nin bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $T(U) = \{a \in R \mid [R, a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ tanımlayalım. $U \subset T(U)$ olduğu açıktır. Çünkü her $u \in U$ için U, R halkasının (σ,τ) sol Lie ideali olduğu için $[r, u]_{\sigma,\tau} \subset U$ yani $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ dur. Bu sebepten $U \subset T(U)$ dur. Üstelik T(U), R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkasıdır.

Yardımcı Teorem 3.1.6.: R bir halka ve U sıfırdan farklı (σ,τ) -sol Lie ideali olsun. O zaman $R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ olur.

İspat: $u,v \in T(U)$, $x \in R$ için T(U) alt halka olduğundan $[u, [x, v]_{\sigma,\tau}] \in T(U)$ ve böylece

$[u, [x,v]_{\sigma,\tau}] = ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + \tau(v)xu$ eşitliği kullanılarak

$$[u, [x, v]_{\sigma,\tau}] + [xu, v]_{\sigma,\tau} = u[x, v]_{\sigma,\tau} - x[\sigma(v), u] \in T(U)$$

elde edilir. $u[x, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan

$$R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$$

olur. Öte yandan $[ux, v]_{\sigma,\tau} = u[x, v]_{\sigma,\tau} + [u, \tau(v)]x \in T(U)$ ve $u[x,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan

$$[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3.1.7.: U, sıfırdan farklı (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a, b \in R$ olsun. Bu taktirde $aT(U)b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: $u \in U$, $v \in T(U)$ ve $y \in R$ alalım. O zaman $[uby, v]_{\sigma,\upsilon} \in U$ olduğundan $0 = a[uby, v]_{\sigma,\tau} b$ olur. Bu ifade açılırsa,

$$a\tau(T(U))UbRb = (0)$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$a\tau(T(U))Ub = (0)$ veya $b = 0$ (4)

olur. Her $x \in R$, $u \in U$, $v \in T(U)$ için (4) ten

$$0 = a\tau(v)[u, x]_{\sigma,\tau} b = a\tau(v)u\sigma(x)b - a\tau(v)\tau(x)ub$$

bulunur.

Burada x yerine ($b \in R$ için) $\sigma^{-1}(bx)$ yazılırsa

$$0 = a\tau(v)\sigma(\sigma^{-1}(bx))b - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(bx))ub$$

$$= a\tau(v)ubxb - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$$

elde edilir. Burada (4) eşitliği kullanılarak

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))RUb = (0)$$

bulunur.

R halkası asal olduğundan

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \text{ veya } Ub = (0) \quad (5)$$

olur.

Ub= 0 ise Yardımcı Teorem 3.1.4 dan b=0 olur.

O halde

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \qquad \forall v \in T(U) \quad (6)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.1.6 dan $[U, \tau(T(U))]R \subset T(U)$ olduğu için

$$[R, [U, \tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau} \subset [R, T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T(U)$$

elde edilir. Böylece $\forall$ $x, y \in R$, $u \in U$ ve $v \in T(U)$ için,

$[\tau(x), [u, \tau(v)]y]_{\sigma,\tau} = \tau(x)([u, \tau(v)]y) - \tau([u, t(v)]y)\tau(x) \in U$ olur.

$0 = a[\tau(x), [u, \tau(v)]y]_{\sigma,\tau} b$ olduğundan bu ifade açılırsa

$$0 = a\tau(x)\sigma([u, \tau(v)]y)b - a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)b \quad (7)$$

bulunur. (7) eşitliğinde x yerine ($z \in R$ için) $x\sigma^{-1}(b)z$, yazılırsa

$$0 = a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u, \tau(v)]y)b$$
$$-a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b \quad (8)$$

elde edilir. $[u, \tau(v)]yx \in T(U)$ olduğundan

$$a\tau([u, \tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b)) \in a\tau(T(U)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0$$

olur. Bu durumda (8) eşitliğinden

$$aR\tau(\sigma^{-1}(b))R\sigma([u, \tau((v)]Rb = 0$$

a = 0 veya b = 0 veya [U, τ (U)] = (0)

elde edilir. U$\not\subset$ Z ve U$\not\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Teorem 3.1.5‘den[U,τ (U)]$\neq$0 dır.

O halde a = 0 veya b =0 dır.

Teorem 3.1.8.: U, (σ,τ)-Lie ideal, U $\not\subset$ Z ve U $\not\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset$U fakat [R, M]$_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

İspat: U**,** R halkasnın bir (σ,τ)-Lie ideali olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.6 den [T(U), τ(T(U))]R $\subset$ T (U) ve R[T(U), σ(T(U))]$\subset$ T(U) olur. T(U), R halkasının alt halkası olduğu için

$$M=R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R\subset T(U)$$

olur. Eğer M = (0) ise; R halkası asal olduğundan

$$[T(U),\sigma(T(U))]\,[T(U),\tau(T(U)]=0$$

elde edilir. $\forall$ u, v, w, z$\in$T(U) için

$$[u,\sigma(v)]\,[w,\tau(z)]=0 \tag{9}$$

olur. (9) eşitliğinde w yerine wt, t$\in$ T (U) yazılırsa

$$[u,\sigma(v)]\,T(U)\,[t,\tau(z)]=0$$

bulunur. Yardımcı Teorem 3.1.7 den

$$[U,\sigma(T(U)]=(0) \text{ veya } [U,\tau(T(U)]=(0)$$

elde edilir. U$\subset$T(U) olduğundan özel olarak [U, σ(U)] = (0) veya [U, τ(U)] = (0) olur. Bu durumda Teorem 3.1.5’dan U $\subset$ Z veya U $\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olur ki bu hipotezle çelişir. O halde M $\neq$(0) dır. Öte yandan $[R, M]_{\sigma,\tau}\subset[R, T(U)]_{\sigma,\tau}$ $\subset$ U dur. Şimdi kabul edelim ki $[R, M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman R ‘yi (σ,τ)-Lie ideal olarak alırsak Yardımcı Teorem 3.1.3 den M $\subset$ Z veya R $\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan R değişmeli halka veya R $\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olur ki bu ise U $\not\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ oluşuyla çelişir. O halde $[R, M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Sonuç 3.1.9.: U, sıfırdan farklı (σ,τ)-Lie ideal, U $\not\subset$ Z ve U $\not\subset$ $C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu taktirde a, b $\in$ R için aUb = 0 ise a = 0 veya b = 0 dır.

İspat: Teorem 3.1.2 den

$$[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U \text{ veya } [R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$$

olacak şekilde R halkasının sıfırdan farlı bir M ideali vardır. Her $x \in R, u \in U$ ve $m \in M$ için

$$0 = a\,[x, \tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)\, m]_{\sigma,\tau}\, b \text{ ifadesi açılırsa}$$

$aR(\sigma(\tau^{-1}(u)\ \tau^{-1}(b))\sigma(m)b = (0)$

olur**.** R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } \sigma(\tau^{-1}(Ub))\sigma(M)b = 0$$

bulunur. Eğer $\sigma(\tau^{-1}(Ub))\sigma(M)b = 0$ ise o zaman $Ub = 0$ veya $b = 0$ olur. Yardımcı Teorem 3.1.4 den $b = 0$ olur.

R karakteristiği 2 den farklı asal halka ve $\sigma,\tau : R \to R$ iki otomorfizma, Z, R halkasının merkezi olmak üzere 1999 yılında N. Aydın tarafından yapılan çalışmada aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 3.1.10.: R bir halka ve $0 \neq U$, R halkasının bir (σ,τ) Lie ideali ve

$T = \{\, c \in R, [R,c]_{\sigma,\tau} \subseteq U \}$ olsun.

i) T, R halkasının bir alt halkasıdır.

ii) U, R halkasının (σ,τ) sağ Lie ideali ise T, R halkasının $[R,T]_{\sigma,\tau} \subseteq U$ ve $U \subseteq T$ olacak şekilde en büyük Lie idealidir.

İspat: i) $\varnothing \neq T$ dır. Çünkü $U \subset T$ dir. T, R halkasının alt halkasıdır.

a) Her a, b $\in$ T için,

$$[r, a]_{(\sigma,\tau)} \in U \text{ , } [r, b]_{(\sigma,\tau)} \in U$$

dur. Her a, b $\in$ T, her r $\in$ R için,

$$[r, a - b]_{(\sigma,\tau)} = [r, a]_{(\sigma,\tau)} - [r, b]_{(\sigma,\tau)} \in U$$

elde edilir. $a - b \in T$ dir.

b) Her a, b $\in$ T, her r $\in$ R için,

$$[r, ab]_{(\sigma,\tau)} = r\sigma(ab) - \tau(ab)x$$

$= x\,\sigma(a)\,\sigma(b) - \tau(a)\tau(b)x - \tau(b)x\sigma(a) + \tau(b)x\sigma(a)$

$= [x\sigma(a), b]_{(\sigma,\tau)} - [\tau(b)x, a]_{(\sigma,\tau)} \in U$

bulunur. $[r, ab]_{(\sigma,\tau)} \in U$ olduğundan T kümesinin tanımından $ab \in T$ dir.

ii) $[R, [R, T]]_{(\sigma,\tau)} \subset U$ dur. Her $x, y \in R$, her $t \in T$ için

$$[x, [y, t]]_{(\sigma,\tau)} = [\,[x, y]_{(\sigma,\tau)}, t] - [[x, t]_{(\sigma,\tau)}, y]_{(\sigma,\tau)} \in U$$

elde edilir. O zaman $[R, [R, T]]_{(\sigma,\tau)} \subset U$ dur. T kümesinin tanımından $[R, T] \subset T$ dir. Buradan T kümesi, R halkasının bir Lie idealidir. $[R, K]_{(\sigma,\tau)} \subset U$ ve $U \subset K$ olacak şekilde K, R halkasının diğer bir Lie ideali olsun. $[R, K]_{(\sigma,\tau)} \subset U$ olduğundan T kümesinin tanımından $K \subset T$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.11.: R yarı asal ve 2-burulmasız bir halka ve $(0) \neq M$, R halkasının bir ideali olsun $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $M \subset Z$ dir. Her $m \in M$ için $\sigma(m) = \tau(m)$ dir.

İspat: $C_{\sigma,\tau} = \{ c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c,\ \forall x \in R \}$ olarak tanımlıdır.

Her $x \in R$, her $m, k \in M$ için $[x, m]_{\sigma,\tau} \in [R, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$

$$0 = [[x, m]_{\sigma,\tau}, k]_{\sigma,\tau} = [[x, k]_{\sigma,\tau}, m]_{\sigma,\tau} + [x, [m, k]]_{\sigma,\tau}$$

$$= [x, [m, k]]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Her $x, y \in R$ için x yerine xy alırsak,

$$0 = [xy, [m, k]]_{\sigma,\tau} = x[y, \sigma([m, k])] + [x, [m, k]]_{\sigma,\tau}\, y$$

$$= x[y, \sigma([m, k])]$$

bulunur. Başka bir ifadeyle $R[y, \sigma([m, k])] = 0$ dır. R yarı asal halka olduğundan

$$[y, \sigma([m, k])] = 0 \qquad (1)$$

elde edilir. $d_m(x) = [m, x]$, m tarafından tanımlanan bir iç türev olsun. (1) den $d_m^2(M) = 0$ dır. Önerme 1.21 den $\forall m \in M$ için $d_m(M) = 0$ dır. Buradan $[M, M] = 0$ dır.

Her $x \in R$, $m, n \in M$ için,

$$[x\sigma(m), n]_{\sigma,\tau} = x[\sigma(m), \sigma(n)] + [x, n]_{\sigma,\tau}\, \sigma(m)$$

$$= [x, n]_{\sigma,\tau}\ \sigma(m) \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunması

$$0 = [[x, n]_{\sigma,\tau}\ \sigma(m), y]_{\sigma,\tau}$$

$$= [x, n]_{\sigma,\tau}\ [\sigma(m), \sigma(y)] + [[x, n]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} \sigma(m)$$

$$= [x, n]_{\sigma,\tau}\ [\sigma(m), \sigma(y)] \qquad (2)$$

olmasını gerektirir. (2) de her $z \in R$ için x yerine $x\sigma(z)$ alıp,

$[x, n]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kullanırsak,

$$0 = [x\sigma(z), n]\sigma([m, y])$$

$$= x[\sigma(z), \sigma(n)]\ \sigma([m, y]) + [x, n]_{\sigma,\tau}\ \sigma(z)\ \sigma([m, y])$$

$$= x[\sigma(z), \sigma(n)]\ \sigma([m, y])$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle $\forall x \in R$ için $R\sigma([z, n])\sigma([m, y]) = 0$ dır. R yarı asal halka olduğundan $\sigma([z, n][m, y]) = 0$ ve $0 \neq \sigma$ bir otomorfizma olduğundan ise

$$[z, n][m, y] = 0 \qquad (3)$$

bulunur.

Her $x, y, z \in R$, $m, n \in M$ için z yerine zx alırsak,

$$0 = [zx, n][m, y] = z[x, n][m, y] + [z, n]x[m, y]$$

$$= [z, n]x[m, y]$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle her $x \in R$ için $[z, n]R[m, y] = 0$ dır.

R, yarı asal halka olduğundan

$$[z, n] = 0 \text{ veya } [m, y] = 0$$

bulunur. Bu durumda $M \subset Z$ dir.

Her $x \in R$, $m \in M$ için $[x, m]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $y \in R$ için

$[[x, m]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

$$0 = [\,[x, m]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} = [x\sigma(m) - \tau(m)x, y]_{\sigma,\tau}$$

$$= x\sigma(m)\sigma(y) - \tau(m)x\sigma(y) - \tau(y)x\sigma(m) - \tau(y)\tau(m)x$$

$$= (\sigma(m) - \tau(m))x\sigma(y) - (\sigma(m) - \tau(m))\ \tau(y)x$$

Geçici olarak y yerine $m \in M$ alırsak,

$$0 = (\sigma(m) - \tau(m))x\sigma(m) - (\sigma(m) - \tau(m))\tau(m)x$$

$$= (\sigma(m) - \tau(m))x\sigma(m) - (\sigma(m) - \tau(m))x\tau(m)$$

$$= (\sigma(m) - \tau(m))x(\sigma(m) - \tau(m))$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle her x $\in$ R için

$$(\sigma(m) - \tau(m))R(\sigma(m) - \tau(m))$$

dir. R yarı asal olduğu için (σ(m) - τ(m)) = 0 dır. O zaman σ(m) = τ(m) bulunur. Her m $\in$ M için $\sigma = \tau$ dır.

Teorem 3.1.12.: R yarı asal ve 2-burulmasız halka ve U, U$\not\subset$Z olacak şekilde R halkasının bir (σ,τ) Lie ideali olsun. R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau} \subseteq$ U olacak şekilde (0) $\neq$ M ideali vardır. Dahası $\exists$ m $\in$ M için σ(m)$\neq$ τ(m) ise $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

İspat: Yardımcı Teorem 3.1.10 den T = {c $\in$ R $|[R,c]_{\sigma,\tau} \subseteq$ U } R halkasının alt halkası ve Lie idealidir. Teorem 3.1.1 den T $\subset$ Z veya T, R halkasının sıfırdan farklı bir M idealini içerir. Böylece T, R halkasının sıfırdan farklı M idealini içerir. T kümesinin tanımından [R, M] $\subset$ U dur. Bundan başka $\exists$m $\in$ M için σ(m) $\neq \tau$(m) için Yardımcı Teorem 3.1.11 den $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ dır.

Yardımcı Teorem 3.1.13.: R yarı asal ve 2-burulmasız halka ve U, U $\not\subset$ Z olacak şekilde R halkasının bir (σ,τ) sol Lie ideali ve a, b $\in$ R olsun. Eğer aUb = 0 ise ya σ(u) + τ(u) $\in$ Z ya a = 0 yada b = 0 dır.

İspat: Kabul edelim ki $\exists$ u $\in$ U için σ(u)+τ(u) $\notin$ Z olsun.

Teorem 2.2.20 ten $[R,M]_{\sigma,\tau} \subseteq$ U ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. Her x $\in$ R, her m $\in$ M için,

$$\begin{aligned} 0 &= a[x, m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b \\ &= a\sigma(m)[x, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b + a[x, m]_{\sigma,\tau}\sigma(\sigma^{-1}(b))b \\ &= a\sigma(m)[x, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b \end{aligned}$$

elde edilir. R asal halka olduğundan a = 0 veya $[R, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}$ b = 0

$[R, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}$ b = 0 ise Yardımcı Teorem 2.2.12 ii) den b = 0 veya b $\in$ Z dir.

b $\in$ Z olamaz. Hipotezden aURb = 0 ise Yardımcı Teorem 2.2.12 iii) den a = 0 veya b = 0 dır.

Yardımcı Teorem 3.1.14.: R asal ve Char$R \neq 2$ olsun ve U, $U \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir (σ,τ) sol Lie ideali olsun. Eğer d(U) = 0 ise $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\exists\ u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \notin Z$ olsun. Teorem 2.2.20 ten $[R,M]_{\sigma,\tau} \subseteq U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. Her $x \in R$, her $m \in M$ için

$$[x, m]_{\sigma,\tau}\sigma(m) = x[\sigma(m), \sigma(m)] + [x, m]_{\sigma,\tau}\sigma(m)$$
$$= [x\sigma(m), m]_{\sigma,\tau} \in U$$

elde edilir. Hipotezden d(U) = 0 olduğundan

$$0 = d([x\sigma(m), m]_{\sigma,\tau}) = d([x, m]_{\sigma,\tau})\sigma(m) + [x, m]_{\sigma,\tau}\, d(\sigma(m))$$
$$= [x,m]_{\sigma,\tau}\, d(\sigma(m)) \qquad \forall x \in R, m \in M \qquad (4)$$

(4) te her $x, y \in R$ için x yerine xy alırsak,

$$0 = [xy, m]_{\sigma,\tau}\ d(\sigma(m)) = (x[y, m]_{\sigma,\tau} + [x, \sigma(m)]y)d(\sigma(m))$$
$$= x[y, m]_{\sigma,\tau}\ d(\sigma(m)) + [x, \sigma(m)]y\, d(\sigma(m))$$
$$= [x, \sigma(m)]y\, d(\sigma(m)) \qquad \forall x, y \in R$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle $[x, \sigma(m)]Rd(\sigma(m)) = 0$ dır. R asal halka olduğundan

$$[x, \sigma(m)] = 0 \text{ veya } d(\sigma(m)) = 0$$

bulunur. Sonuç olarak $m \in Z$ veya $d(\sigma(m)) = 0$ dır.

Kabul edelim ki $K = \{m \in M \mid m \in Z\}$ ve $L = \{m \in M \mid d(\sigma(m)) = 0\}$ olsun. K ve L kümelerinin her biri M halkasının toplamsal alt grubudur.

Üstelik $M = K \cup L$ dir. Brauer trick (özellik 1.20) den bir grup iki öz alt grubun kümesel birleşimine eşit olamaz. Bu yüzden K = M ya da L = M dir.

K = M olursa $M \subset Z$ olduğundan R değişmeli halka olur. Oysa R halkasının alt halkası U, Z tarafından kapsanmaz.

Diğer durumda K = L ise $d(\sigma(m)) = 0$ dır. R asal halka ve $\sigma(M)$, R halkasının sıfırdan farklı ideali olduğundan d = 0 olmalıdır.

Teorem 3.1.15.: R asal halka ve Char$R \neq 2$, U, $U \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir (σ,τ) sol Lie ideali ve $a \in R$ olsun. ad(U) = 0 (yada d(U)a = 0) ise $\forall u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir yada a = 0 dır.

İspat: Kabul edelim ki $\exists$ $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \notin Z$ olsun. Teorem 2.2.20 ten $[R,M]_{\sigma,\tau} \subseteq U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. Her $x \in R$, her $m \in M$ için

$$[x, m]_{\sigma,\tau}\sigma(m) = x[\sigma(m), \sigma(m)] + [x, m]_{\sigma,\tau}\sigma(m)$$

$$= [x\sigma(m), m]_{\sigma,\tau} \in U$$

elde edilir. Hipotezden

$$0 = ad([x, m]_{\sigma,\tau}\sigma(m))$$

$$= ad([x, m]_{\sigma,\tau})\sigma(m) + a[x, m]_{\sigma,\tau} d(\sigma(m))$$

$$= a[x, m]_{\sigma,\tau} d(\sigma(m))$$

olur. Her $x \in R$, her $u \in U$ için, x yerine $d(u)x$ alıp, $ad(U) = 0$ olduğunu kullanılırsa,

$$0 = a[d(u)x, m]_{\sigma,\tau} d(\sigma(m))$$

$$= ad(u)[x, m]_{\sigma,\tau} d(\sigma(m)) + a[d(u), \tau(m)]x\, d(\sigma(m))$$

$$= a[d(u), \tau(m)]x\, d(\sigma(m))$$

bulunur. Başka bir ifadeyle her $x \in R$ için $a[d(u), \tau(m)]Rd(\sigma(m)) = 0$ dır. R asal halka olduğu için,

$$a[d(u), \tau(m)] = 0 \text{ veya } d(\sigma(m)) = 0 \text{ dır.}$$

Kabul edelim ki $L = \{ m \in M \mid a[d(u), \tau(m)] = 0 \}$ ve $K = \{ m \in M \mid d(\sigma(m)) = 0 \}$ olsun. K ve L kümelerinin her biri M halkasının toplamsal alt grubu ve $M = L \cup K$ dır. Yardımcı Teorem3.1.16 un ispatındaki durumdan $L = M$ yada $M = K$ dır.

$M = K$ ise $d(\sigma(M)) = 0$ dır. R asal ve $\sigma(M)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan $d = 0$ dır. Bu ise çelişkidir.

$M = L$ ise her $u \in U$ ve $m \in M$ için $a[d(u), \tau(m)] = 0$ dır.

$$0 = a[d(u), \tau(m)] = a(d(u)\tau(m) - \tau(m)d(u)) \text{ ise}$$

$$0 = 2a\tau(m)d(u) \text{ olur. CharR} \neq 2 \text{ olduğundan } a\tau(m)d(u) = 0$$

elde edilir. R asal halka olduğundan Her $u \in U$ için

$$a = 0 \text{ veya } d(U) = 0 \text{ elde edilir.}$$

$d(U) = 0$ ise Yardımcı Teorem 3.1.16 den $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ bulunur. Kabulümüzle çelişir. O zaman $a = 0$ olmalıdır.

Teorem 3.1.16.: R asal halka ve Char$R \neq 2$ ve U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (σ, τ) Lie ideali, d R halkasının bir türevi ve $a \in R$ olsun. $d(Z) \neq 0$ ise

i) $[d(U),a] = 0$ ise $a \in Z$ ya da her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

ii) $d(U) \subseteq Z$ ise her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

İspat: i) $d(Z) \neq 0$ olduğundan $\exists\ \alpha \in Z$ için $d(\alpha) \neq 0$ dır.

Her $x \in R$, $u \in U$ için

$$[\alpha x, u]_{\sigma,\tau} = \alpha [x, u]_{\sigma,\tau} + [\alpha, \tau(u)]x = \alpha [x, u]_{\sigma,\tau} \in U \qquad (5)$$

Hipotezden $[d(U), a] = 0$ dır. Böylece

$$0 = [\, d(\alpha [x, u]_{\sigma,\tau}), a] = [d(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau}, a] + [\alpha\, d([x, u]_{\sigma,\tau}), a]$$

$$= d(\alpha)[[x, u]_{\sigma,\tau}, a] \qquad \forall x \in R,\ \forall u \in U$$

$d(\alpha) \neq 0$ olduğundan her $x \in R$, her $u \in U$ $[[x, u]_{\sigma,\tau}, a] = 0$

elde edilir. x yerine $\tau(u)x$ yazarsak,

$$0 = [[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau}, a] = [\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}, a] + [[\tau(u), \tau(u)]x, a]$$

$$= \tau(u)[[x, u]_{\sigma,\tau}, a] + [\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}$$

$$= [\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau} \qquad \forall x \in R,\ \forall u \in U \qquad (6)$$

(6) denkleminde her $x, y \in R$ için yerine xy alıp, (6) teki eşitliği kullanılırsa

$$0 = [\tau(u), a][xy, u]_{\sigma,\tau} = [\tau(u), a](x[y, \sigma(u)] + [x, u]_{\sigma,\tau}\, y)$$

$$= [\tau(u), a]x[y, \sigma(u)] + [\tau(u), a]\, [x, u]_{\sigma,\tau}\, y$$

$$= [\tau(u), a]x[y, \sigma(u)]$$

bulunur. Her $x,y \in R$, her $u \in U$ için $[\tau(u), a]R[y, \sigma(u)] = 0$ dır.

R asal halka olduğundan $[\tau(u), a] = 0$ veya $[y, \sigma(u)] = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $K = \{\, u \in U \mid [\tau(u), a] = 0 \,\}$ ve $L = \{\, u \in U \mid u \in Z\}$ olsun. $U = K \cup L$ dir. Brauer trick (Özellik 1.20) önermesinden U = K veya U = L dir.

U = L ise $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O zaman U = K olmalıdır. Yani $[U, \tau^{-1}(a)] = 0$ dır. Teorem 2.2.20 ten $a \in Z$ ya da her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

ii) Kabul edelim ki $\exists\ u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \notin Z$ olsun.(5) ten $\alpha [x, u]_{\sigma,\tau} \in U$ dur. Hipotezden $d(U) \subset Z$ olduğundan

$d(\alpha [x, u]_{\sigma,\tau}) = d(\alpha)[x, u]_{\sigma,\tau} + \alpha\, d([x, u]) \in Z$ dir.

α d([x, u]) $\in$Z olduğundan d(α)$[x, u]_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z elde edilir. Buradan $[x, u]_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z dir.

x yerine τ (u)x alınırsa,

$[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u), \tau(u)] = \tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in Z$ dir.

Buradan ya τ (u) $\in$ Z veya $[x, u]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Kabul edelim ki

$K = \{u \in U | \tau(u) \in Z\}$ ve $L = \{u \in U \mid [x, u]_{\sigma,\tau} = 0, \forall x \in R\}$ kümeleri olsun.

$U = K \cup L$ dır. Brauer trick (Özellik 1.20) den bir grup iki öz alt grubun kümesel birleşimine eşit olamaz. Bu yüzden U = K veya U = L olmalıdır. U $\neq$ K dır. Çünkü U $\not\subset$ Z dir. U = L ise her x $\in$ R, u $\in$U için $[x, u]_{\sigma,\tau} = 0$ (7)

olur. (7) denkleminde her x, y $\in$ R için x yerine xy yazıp, (7) eşitliğini de kullanırsak,

$$0 = [xy, u]_{\sigma,\tau} = x[y, u]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(u)]y = [x, \tau(u)]y$$

elde edilir. Her x,y $\in$ R için [R, U]R = 0 dır. R asal halka olduğundan [R, U] = 0 olur. Buradan U $\subset$ Z elde edilir ki bu durum kabulümüzle çelişir. O halde,

$\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

KAYNAKLAR

Awtar, R., 1973. Lie and Jordan Structure in Prime Rings with Derivation. **Amer. Math. Soc., Vol. 41** (1): 67-74

Awtar, R., 1984. Lie Structure in Prime Rings with Derivations. **Publ. Math. Debrecen, 31**: 209-215

Aydın, N. ve Kaya, K., 1992. Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ) Derivations. **Doğa- Tr. J. of Math., 16**: 169-176

Aydın, N. ve Kandamar, H., 1994. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. **Doğa Tr. 3. of Math., 18**(2): 143-148

Aydın, N. ve Soytürk, M., 1995. (σ,τ) Lie Ideals in Prime Rings with Derivation. **Tr. J. of Mathematics, 19**(2): 239-244

Aydın, N., 1999. Note on Generalized Lie İdeals. **Analele Universty of Timişoara, Vol. 37**: 7-12

Bergen, J., Herstein, I. N. and Kerr, J. W., 1981. Lie Ideals and Derivation of Prime Rings. **J. of Algebra, 71**: 259-267

Carini, L., 1985. Derivations on Lie Ideals in Semiprime Rings. **Rendiconti del Circulo Matematico di Palermo Serie II, Tomo XXXIV**: 122-126

Herstein, I. N., 1987. A Note on Derivations. **Canad. Math. Bull., Vol. 21**(3): 369-370

Herstein, I. N., 1979. A Note on Derivations II. **Canad. Math. Bull., Vol. 22**(4): 509-511

Herstein, I. N., 1970. On the Lie Structure of an Assosiative Rings. **Journal of Algebra, 14**: 561-571

Herstein, I. N., 1969. Topics in Ring Theory. **University of Chicago Press**, Chicago.

Herstein, I. N., 1976. Rings with lnvolution. **University of Chicago Press,** Chicago

Kandamar, H. ve Kaya., K., 1992. Asal Halkalarda (σ,τ)-Türev ve Lie İdealler. **Hacettepe Bulletin of Natural Sciens and Engineering, Vol. 21**: 29-33

Kaya, K., 1991. Asal halkalarda (σ,τ)-Sağ Lie İdealler. **Proc. 4. National Math. Symposiom**, Antakya

Lee, P. H. and Lee, T. K., 1981. On Derivations of Prime Rings. **Chines J. Math., Vol. 9**(2): 107-110

Posner, E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. **Proc. Amer. Math. Soc., 8**: 1093-1100

Mathcad Professional: Matematik programı

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : NECLA KIRCALI

Doğum yeri ve Tarihi : Nazilli – 26/ 06 / 1982

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Ege üniversitesi Meslek Yüksek Okulu – 2006-2007

İLETİŞİM

E – Posta Adresi : njkrcl@hotmail.com

Tarih : 11 / 01 / 2008