

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
2014-YL-025**

**J1-J2 HEISENBERG XXZ SPİN SİSTEMLERİNDE
KUANTUM DOLAŞIKLIĞIN İNCELENMESİ**

Alev ŞAHİNTAŞ

**Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ**

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Alev ŞAHİNTAŞ tarafından hazırlanan J1-J2 Heisenberg XXZ Spin Sistemlerinde Kuantum Dolaşıklığın İncelenmesi başlıklı tez, 27.06.2014 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye :	Prof. Dr. Halil YARANERİ	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Fatih ERMAN	İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla .../.../2013 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN**

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

27.06.2014

Alev ŞAHİNTAŞ

ÖZET**J1-J2 HEISENBERG XXZ SPİN SİSTEMLERİNDE
KUANTUM DOLAŞIKLIĞIN İNCELENMESİ**

Alev ŞAHİNTAŞ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ
2014, 65 sayfa

Kuantum mekaniğinin başlangıcından günümüze kadar geçen zamanda düşük boyutlu sistemler daima önemli bir çalışma konusu olmuştur. Bu nedenle bu tezde düşük boyutlu spin sistemlerinden biri olan DM etkileşmesine sahip en yakın ve ikinci en yakın komşu kubit etkileşmelerini içeren dört kubitlik anizotropik Heisenberg XXZ modeline ait dolaşıklık incelemeleri yapılmıştır. İlk olarak taban durum dolaşıklığına ait hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen temel bulgulardan, DM etkileşmesinin ve tedirginliğin sırasıyla en yakın ve ikinci en yakın komşu kubitler arasındaki taban durum dolaşıklıkları üzerinde etkin rol oynadıkları görülmüştür. İkinci olarak DM etkileşmesi, tedirginlik ve anizotropi parametrelerine sıcaklığın da bir kontrol parametresi olarak eklenmesiyle sisteme ait ısısal dolaşıklık hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Bu hesaplamalar sonucu, sıcaklık ve tedirginlik parametresinin özellikle ikinci en yakın komşu kubitler arası dolaşıklık üzerinde yapıcı etkiler sergilediği görülmüştür. Sonuç olarak DM etkileşmesi ile birlikte sadece en yakın komşuların değil ikinci en yakın komşu etkilerinin de dikkate alınması ile daha genel bir Heisenberg modeli oluşturulmuş ve bu modelde bahsedilen kontrol parametrelerinin birbirlerine göre değişen etkilerinin kullanılması ile dolaşıklığın etkin kontrolünün sağlanabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Anizotropi parametresi, DM etkileşmesi, dolaşıklık, $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ model, kubit.

ABSTRACT**INVESTIGATION OF QUANTUM ENTANGLEMENT IN J_1 - J_2
HEISENBERG XXZ SPIN SYSTEMS**

Alev ŞAHİNTAŞ

M.Sc. Thesis, Department of Physics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Cenk AKYÜZ
2014, 65 pages

Since the beginning of the quantum mechanics, low-dimensional systems have always emerged as an important research field. Therefore, in this thesis, we examined the entanglement properties of the one of the low-dimensional system called anisotropic four qubit Heisenberg XXZ system with DM interaction. This system has both the nearest neighboring and the next nearest neighboring interaction. First, calculations of the ground state entanglement are carried out. From the essential evidences obtained, we see that DM interaction and the frustration play an active role on the ground state entanglement between the nearest neighboring and the next nearest neighboring qubits, respectively. Second, thermal entanglement calculations of the system are fulfilled with the conjunction of the temperature and other control parameters such as DM interaction, anisotropy and frustration. As a result of calculations, we see that both temperature and frustration parameters exhibit positive effects on the thermal entanglement especially between the next nearest neighboring qubits. Finally, we construct a more general Heisenberg model by considering not only the nearest neighboring interaction but also the next nearest neighboring interaction and DM interaction. So, we show that effective control of entanglement can be obtained by employing competing effects of the control parameters in this model.

Key Words

Anisotropy parameter, DM interaction, entanglement, $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ model, qubit.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada; anizotropi parametresinin, DM etkileşmesinin, sıcaklığın ve tedirginlik parametresinin bir boyutta spin-1/2 J_1 - J_2 Heisenberg XXZ modelinin dolaşıklığı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bunun için dolaşıklık ölçüsü olarak eş-uyum kullanılmıştır.

Tez çalışmam boyunca yardım, destek ve anlayışını her zaman hissettiğim değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca gerek bugüne kadar aldığım üniversite eğitim sürecinde gerekse tez yazım sürecinde destek olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU'ya teşekkür ederim. Latex programını kullanırken karşılaştığım problemleri çözmemde yardımlarını eksik etmeyen arkadaşlarım Melike ÇIBIK AYDIN ve Sedat KORKMAZ'a, manevi desteklerini eksik etmeyen arkadaşlarım Büşra KILIÇGEDİĞİ, Elif Asena KILIÇ, Gizem ÇAKAL ve Sema YAMAK'a ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Alev ŞAHİNTAŞ

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
KISALTMALAR	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Kubit	3
2.2. Kuantum Mantık Kapıları	5
2.2.1. Tek Kubitlik Kuantum Mantık Kapıları	5
2.2.2. Çok Kubitlik Kuantum Mantık Kapıları	7
2.3. Kuantum Devreleri	8
2.3.1. Kubit Kopyalayan Devre	9
2.3.2. Bell Durumları Oluşturan Devre	10
3. KUANTUM DOLAŞIKLIK	13
3.1. Dolaşıklık	13
3.2. Dolaşıklık Uygulamaları	17
3.2.1. Kuantum Teleportasyon	17
3.2.2. Dolaşıklık Değiş Tokuşu	21
3.2.3. Kuantum Yoğun kodlama	23
4. SPİN MODELLERİ VE LİTERATÜRDEN BAZI ÇALIŞMALAR	25
4.1. Spin Modelleri	25
4.2. Literatürden Bazı Çalışmalar	26
5. BİR BOYUTTA J_1 - J_2 HEISENBERG XXZ MODELİ	27
5.1. Model ve Hesaplamalar	27
5.2. Sonuçlar	37
5.2.1. Taban Durum Dolaşıklığı	37
5.2.2. Isısal Dolaşıklık	46

6. SONUÇ ve TARTIŞMA 57

KAYNAKLAR 61

ÖZGEÇMİŞ 65

SİMGELER DİZİNİ

Δ	Anizotropi parametresi
J	Komşu spinler arasındaki çiftlenme sabiti
$ \beta_{xy}\rangle$	Bell Durumları
D	Dzialoshinski-Moriya(DM) etkileşme parametresi
X, Y, Z, H, U_{KD}	Kuantum Kapıları
M	Ölçme
$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$	Pauli Spin Matrisleri
α	Tedirginlik parametresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	KDEĞİL kuantum mantık kapısının devre gösterimi	7
Şekil 2.2	Ölçme işleminin devre gösterimi.	8
Şekil 2.3	Kubit kopyalayan devre	9
Şekil 2.4	Bell Durumlarını üreten kuantum devresi	10
Şekil 3.1	Teleportasyon için kullanılan devre	18
Şekil 5.1	En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	38
Şekil 5.2	En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	39
Şekil 5.3	En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	40
Şekil 5.4	En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	41
Şekil 5.5	İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	42
Şekil 5.6	İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	43
Şekil 5.7	İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	44
Şekil 5.8	İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	45

Şekil 5.9	En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri . . .	47
Şekil 5.10	En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri . . .	48
Şekil 5.11	En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri . . .	49
Şekil 5.12	En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri . . .	50
Şekil 5.13	İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	51
Şekil 5.14	İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	52
Şekil 5.15	İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	53
Şekil 5.16	İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri	54

KISALTMALAR

- AFM** : Antiferromanyetik durum
DM : Dzialoshinski-Moriya Etkileşmesi
NN : En yakın komşu kubit çiftleri
FM : Ferromanyetik durum
NNN : İkinci en yakın komşu kubit çiftleri

1. GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarına doğru bilinen klasik fizik teorilerinin tüm fiziksel olayları açıklamakta yeterli olduğuna inanılıyordu. Ancak bu yıllarda mevcut teoriler Karacisim ışıması, Compton olayı , Fotoelektrik olay gibi bazı fiziksel olayları açıklamakta yetersiz kalmıştır ve böylece 30 yıl süren bir arayışın sonunda kuantum mekaniği doğmuştur. Kısaca tanımlamak gerekirse; kuantum mekaniği mikroskobik sistemleri (atom,çekirdek vs.) matematiksel nesnelere(dalga fonksiyonları)cinsinden tanımlayan ve matematiksel nesnelere fiziksel içeriğe dönüştürmek üzere bir dizi kurallar veren bilimsel bir yöntemdir.

Kuantum mekaniksel sistemlerin, enformasyon işlemlerinde kullanılması ise kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon teorisi olarak adlandırılan disiplinler arası bir çalışma alanı oluşturur. Bu yapısı nedeniyle de kuantum mekaniği, bilgisayar bilimi, enformasyon teorisi ve kriptoloji gibi pek çok alanla etkileşir.

Kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon alanının önemli bir başarısı, fiziksel teorilerin oluşturulması için basit ancak sezgisel olarak elde edilemeyen yasalar ortaya koyan kuantum mekaniği hakkında, sezgi ve anlayışımızı arttıracak gelişmeler sunmasıdır. Örneğin; 1980'lerin başında Einstein'ın görelilik teorisine aykırı olmasına karşın kuantum etkileri kullanılarak ışıktan daha hızlı sinyal göndermenin olasılığı üzerine dikkatler toplanmıştı. Bu aslında bilinmeyen bir kuantum durumunun kopyalanması problemi ve gerçekleşmesi halinde kuantum mekaniği etkileri kullanılarak ışıktan daha hızlı bir şekilde sinyal gönderme olasılığı mümkün olacaktır, ancak kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon teorisinin ilk sonuçlarından biri olan kopyalanamama teoreminin bulunmasıyla, bunun mümkün olmadığı anlaşılmıştır.

Kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon alanının gelişmesi ve olgunlaşmasıyla birlikte yeni alt alanlar da ortaya çıkmıştır [1]. Bunlardan

en çok çalışılan dolaşıklık (entanglement) kavramıdır [2]. Dolaşıklık tamamen kuantum mekaniksel bir kavram olup, alt sistemlerden oluşmuş bir kuantum sisteminin parçaları arasındaki kuantum korelasyonu olarak tanımlanabilir.

Düşük boyutlu sistemler, çok parçacıklı sistemlerin incelenmesi için basit modeller sunmasından dolayı önemli bir çalışma konusu oluşturur [3]. Bu modeller bir boyutta spin etkileşmeleri içeren Heisenberg ve Ising modelleri olup bazı kristal yapıların fiziksel özelliklerini açıklamak için kullanıldıkları gibi gösterdikleri dolaşıklık özellikleri nedeniyle kuantum teleportasyon [4–7], süper-yoğun kodlama, dolaşıklık değiş-tokuşu [8–11] ve kuantum kriptoloji gibi kuantum enformasyon alanı uygulamalarına potansiyel adaydırlar. Bir boyutta Heisenberg modeli katıhal sistemleri içerisinde sıklıkla çalışılan basit ancak gerçekçi bir örnek olup literatürde bu modelin dolaşıklığının çalışıldığı pek çok çalışma bulunur [12, 13]. Heisenberg modelinde spinler arası etkileşmelerde en yakın komşu spinlerin yanında ikinci en yakın komşu spinlerinde dikkate alınması ile ($J_1 - J_2$ modeli) basit bir genelleme yapılabilir. Spin-spin etkileşmelerinden başka spin yörünge etkileşmesinden kaynaklanan Dzialoshinski-Moriya(DM) etkileşmesine sahip spin sistemleri ile yapılmış çalışmalarda bulunmaktadır [14–18]. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar DM etkileşmesinin dolaşıklık için önemli olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada da DM etkileşmesine sahip spin-1/2 $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sisteminin taban durum dolaşıklığı ve ısısal dolaşıklığı incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon teorisine ait kavramlardan [19,20] kısaca bahsedilecektir.

2.1. Kubit

Klasik bilgisayarlar, en küçük bilgi saklama ve işleme birimi olan bitlerden yapılandırılmıştır. Bit (binary digit), klasik hesaplama ve klasik enformasyonun temel bir kavramıdır. Klasik bir bit 0 veya 1 gibi iki farklı durumu temsil etmek için kullanılır ve bu durumların yalnız birinde bulunabilir. Kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon alanında ise temel kavram kuantum bit diğer adıyla kubitdir. Bir kuantum bit matematiksel olarak iki boyutlu kompleks vektör uzayında tanımlanan bir durum vektörüdür. Bu uzayda bulunan bir ortonormal baz vektörleri kümesi;

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

olarak seçilebilir. Bir bit ile bir kubit arasındaki fark, bir kubitin

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.1.2)$$

şeklinde $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumlarının lineer bir kombinasyonu durumunda da bulunabilmesidir. Buradaki α ve β katsayıları ise kompleks katsayılardır. Klasik bir bit'i 0 veya 1 durumlarından hangisinde bulunduğunu belirlemek için inceleyebiliriz. Ancak bir kubitinin onun kuantum durumunu kesin olarak belirlemek için inceleyemeyiz yani bir kubitinin durumunu belirleyecek olan α ve β katsayılarını belirleyemeyiz. Kuantum mekaniğine göre bu kuantum durumu hakkında sadece kısıtlı bir bilgi edinebiliriz. Bir kubit gözlemlenene kadar $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumları arasındaki tüm durumlarda sürekli olarak bulunur

ve ölçüldüğünde, ölçüm sonucuna göre olasılıksal olarak 0 veya 1 sonucunu verir. Bu nedenle (2.1.2) böyle bir kubit ölçtüğümüzde $|\alpha|^2$ olasılığıyla $|0\rangle$ veya $|\beta|^2$ olasılığıyla $|1\rangle$ sonucunu elde ederiz. Olasılıklar toplamı 1 olmak zorunda olduğundan

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (2.1.3)$$

olacaktır. Bu koşulu geometrik olarak kubit durumunun birim uzunluğa normalize edilmesi olarak yorumlayabiliriz. Böylece genel olarak bir kubit kuantum durumunun iki boyutlu kompleks vektör uzayında bir vektör olduğunu söyleyebiliriz. İki klasik bitimiz olsaydı 00, 01, 10 ve 11 şeklinde dört olası durumumuz olurdu. Benzer olarak iki kubitlik bir sistem $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ ve $|11\rangle$ şeklinde dört baz durumuna sahip olacaktır. Her durumla ilgili bir kompleks katsayı içermek üzere iki kubit ifade eden durum vektörü

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle, \quad (2.1.4)$$

şeklinde bu dört durumun süperpozisyonu durumunda bulunur. İki kubitlik önemli bir kuantum durumu olarak Bell durumunu (EPR çifti) verebiliriz

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.1.5)$$

Bell durumu kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon alanlarında yer alan kuantum teleportasyon ve süper-yoğunluklu kodlama gibi pek çok olayda anahtar rol oynar. $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları bir kubit için çok sayıdaki olası kompütasyonel baz durumlarından sadece biridir. Diğer olası bir seçim

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.1.6)$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.1.7)$$

kümesi olabilir. (2.1.2)'deki kuantum durumu $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ kuantum durumları cinsinden tekrar ifade edecek olursak

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle, \quad (2.1.8)$$

elde edilir. Burada $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ durumları artık yeni baz durumlarıdır. Bu yeni baza göre ölçme yapılabilir ve ölçüm sonucunda $|\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|^2$ olasılığı ile "+" , $|\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|^2$ olasılığı ile "-" bulunur. Ölçme sonrası durumlar ise sırasıyla $|+\rangle$ veya $|-\rangle$ olacaktır.

2.2. Kuantum Mantık Kapıları

Mantık kapıları [21] bilginin işlenip bir formdan diğerine dönüştürülmesi için işlem yapan elemanlardır. Şimdi klasik mantık kapılarından hareket edip basitten başlayarak kuantum mantık kapılarına ve bunların uygulamalarına bakalım.

2.2.1. Tek Kubitlik Kuantum Mantık Kapıları

Tek bitlik klasik bir mantık kapısı olan DEĞİL (NOT) kapısını düşünelim. Bu kapı $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ şeklinde bir dönüşüm yapıp 0 ve 1 durumlarını yer değiştirir. Klasik durumdakine benzer şekilde kubitler için de bu tür bir dönüşüm yapan bir KUANTUM-DEĞİL kapısı düşünülebilir. Bu kapı dönüşümünü yaparak, ele aldığı $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ kubitini, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumlarının kendi aralarında yer değiştiği

$$|\psi'\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle, \quad (2.2.9)$$

şeklinde belirtilen karşı bir kuantum durumuna çevirir.

Kuantum mantık kapılarının matrislerle gösterilmesi kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon teorisinde alışılmış bir yöntemdir ve bu kapıların

yapmış olduğu işlemlerin anlaşılmasında kolaylık sağlar. Bunu görmek için KUANTUM-DEĞİL kapısının

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

ile verilen matris formundaki gösterimine ve bu kapının yapmış olduğu işleme bakalım. Eğer $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ kuantum durumu

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.2.11)$$

şeklindeki gibi vektör gösteriminde yazılırsa, KUANTUM-DEĞİL kapısının bu kuantum durumuna uygulanmasından elde edilecek sonuç

$$X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.2.12)$$

olur. Böylece bir kubitte etki eden kuantum mantık kapıları 2×2 'lik matrislerle ifade edilmiş olur, ancak tüm 2×2 'lik matrisleri kuantum mantık kapısı olarak düşünemeyiz. Kuantum mantık kapılarını temsil eden matrisler üniter olmak zorundadırlar. Kuantum mantık kapılarını oluşturmak için üniterlik dışında herhangi bir koşul yoktur. Herhangi bir üniter matris geçerli bir kuantum mantık kapısı olarak belirlenebilir. Bu nedenle çok sayıda tek kubitlik kuantum mantık kapısı vardır. Bu noktada ilginç olan ise klasik olarak sadece DEĞİL kapısının tek bitlik bir kapı olmasıdır. Tek kubitlik önemli kuantum mantık kapılarından ikisi

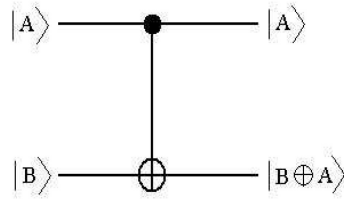
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.13)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.14)$$

şeklindeki Z kapısı ve H Hadamard kapısıdır. Z kapısı $|0\rangle$ kuantum durumunu değişmeden bırakıp $|1\rangle$ kuantum durumunun sadece işaretini değiştirir. Hadamard kapısı ise $|0\rangle$ kuantum durumunu $\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ şeklinde $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kuantum durumuna, $|1\rangle$ kuantum durumunu ise $\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ şeklindeki $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ arasındaki başka bir kuantum durumuna çevirir. Aynı zamanda $H^2 = I$ şeklindedir. Buradan da H Hadamard kapısının bir duruma iki kere uygulanması ile hiçbir sonucun elde edilemeyeceğine varılabilir.

2.2.2. Çok Kubitlik Kuantum Mantık Kapıları

Şimdi çok kubitli kuantum mantık kapılarının nasıl çalıştığına kısaca bakalım. KONTROLLÜ-DEĞİL (KDEĞİL) kapısı çok kubitlik bir kuantum mantık kapısıdır. Bu kapı kontrol kubit ve hedef kubit olarak bilinen iki giriş kubitine sahiptir. Şekil 2.1'de KDEĞİL kapısı için devre gösterimi görülmektedir.



Şekil 2.1. KDEĞİL kuantum mantık kapısının devre gösterimi

Burada yukarıdaki çizgi kontrol kubit, aşağıdaki çizgi ise hedef kubitidir. KDEĞİL kuantum mantık kapısının çalışması şöyledir; Eğer kontrol kubit 0 ise hedef kubit aynen kalır, eğer kontrol kubit 1 ise hedef kubit değişir

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle,$$

$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle,$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle,$$

$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle.$$

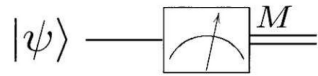
Tek kubitlik kuantum mantık kapılarında olduğu gibi KONTROLLÜ-DEĞİL kuantum mantık kapısını ifade etmenin diğer bir yolu da

$$U_{KD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$

şeklindeki matris gösterimidir. Tek kubitlik kuantum mantık kapılarında olduğu gibi burada da olasılık korunacağı için U_{KD} üniter bir matris olmalıdır. Kuantum mantık kapılarını klasik mantık kapılarından ayıran en önemli özellik, kuantum mantık kapılarının geri dönüşlü olmasıdır. Böylece bir kuantum mantık kapısı her zaman başka bir kuantum mantık kapısı aracılığıyla geri döndürülebilir.

2.3. Kuantum Devreleri

Kuantum devreleri [22], kuantum mantık kapılarından ve bunlar arasındaki bağlantılardan oluşur. Bu şekilde oluşturulmuş devrelerin okunuşu soldan sağa doğrudur. Devredeki her bir çizgi bağlantıyı temsil eder ancak bu bağlantının klasik devrelerde olduğu gibi fiziksel bir tel olması gerekmez. Bu bağlantı foton gibi uzayda bir noktadan başka bir noktaya hareket eden bir parçacık olabilir. Devreye giren tüm durumların, baz durumlarında olması genellikle kabul edilen bir durumdur. Ölçme kuantum devrelerinde önemli bir işlemdir. Ölçme işlemi devre modeli Şekil 2.2’de olduğu gibi gösterilir.

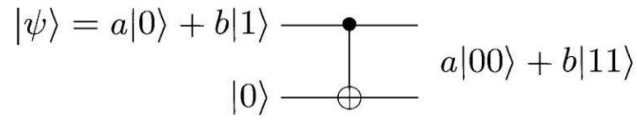


Şekil 2.2. Ölçme işleminin devre gösterimi.

Daha önce de tanımlamış olduğumuz gibi bu işlem $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ şeklindeki tek bir kubitin kuantum durumunu $|\alpha|^2$ olasılığıyla 0 veya $|\beta|^2$ olasılığıyla 1 sonucunu veren olasılıksal M klasik bitine çevirir. Devre üzerinde de klasik bitin kubitinden farklı olarak gösterilmesi için iki çizgi ile belirtilir.

2.3.1. Kubit Kopyalayan Devre

Kuantum devrelerinin en önemlisi bir kubit kopyalayan devredir. Bu devrede kullanılan KDEĞİL kuantum mantık kapısı, kuantum enformasyon teorisinin önemli bir özelliğini gösterir.



Şekil 2.3. Kubit kopyalayan devre

Şekil 2.3’de olduğu gibi durumu bilinmeyen $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ şeklindeki bir kubit KDEĞİL kapısı kullanarak kopyalamaya çalışalım. Şekilden de görüldüğü gibi iki kubitlik girdi durumu

$$[a|0\rangle + b|1\rangle]|0\rangle = a|00\rangle + b|10\rangle,$$

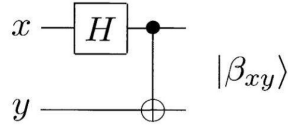
şeklinde yazılabilir. KDEĞİL kapısı verilen girdi durumuna uygulandığında elde edilen çıktı durumu $a|00\rangle + b|11\rangle$ olur. Buradan anlaşıldığı gibi $|\psi\rangle|\psi\rangle$ oluşturmak için sadece $|\psi\rangle$ ’nin $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ olduğu girdi durumlarının Şekil 2.3’deki devreye uygulanmasıyla kopyalama gerçekleşir. Yani $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ şeklinde kodlanmış klasik bilgiyi kopyalamak için kuantum devreleri kullanılabilir. Fakat daha genel bir $a|0\rangle + b|1\rangle$ durumu için kopya durumu

$$|\psi\rangle|\psi\rangle = a^2|00\rangle + ab|01\rangle + ab|10\rangle + b^2|11\rangle,$$

olur ve ifadelerinin karşılaştırılması sonucu $ab = 0$ olmadıkça kopyalama devresi girdiğimiz kuantum durumunu kopyalayamaz. Böylece bilinmeyen bir kuantum durumunun kopya edilemeyeceğini söyleriz. Kubitlerin bu kopyalanmama özelliği "kopyalanamama teoremi veya kopya yok" olarak bilinir ve klasik ile kuantum enformasyon arasındaki en temel farklardan birini oluşturur.

2.3.2. Bell Durumları Oluşturan Devre

Bell durumları [23] kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon teorisinde çok önemli bir yer tutar. Şekil 2.4'de görülen devre Bell durumlarını üreten kuantum devresidir. Şekilden de görüldüğü gibi bu devre bir Hadamard kapısından ve



Şekil 2.4. Bell Durumlarını üreten kuantum devresi

onu takip eden bir KDEĞİL kapısından oluşur. Kullanılan bu kuantum devresi $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ şeklindeki dört baz durumunu

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}},$$

durumlarına dönüştürür. Bu durumlar Bell durumları veya EPR çiftleri olarak bilinirler. Kapının yapmış olduğu işlemi $|00\rangle$ durumu üstünde açıklayacak olursak, ilk olarak Hadamard kapısına $|00\rangle$ durumu uygulanır. Hadamard kapısı ilk kubit $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ şeklinde bir süperpozisyon durumuna dönüştürür. Bunun sonucunda $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} |0\rangle$ kuantum durumu oluşur. Daha sonra elde edilen bu durum KDEĞİL

kuantum mantık kapısına uygulanır ve $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ bulunur. Diğer kompütasyonel baz durumları için de benzer işlemler yapılarak Bell durumları elde edilir.

3. KUANTUM DOLAŞIKLIK

3.1. Dolaşıklık

Kompozit kuantum sistemlerinde gözlenen, kuantum mekaniğinin en çarpıcı ve sezgilerle anlaşılamayan olgusu dolaşıklıktır. Dolaşıklık kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon işlemleri için bir kaynaktır çünkü klasik olarak yapılması mümkün olmayan iletişim ve enformasyon işlemlerinin gerçekleştirilmesi için dolaşıklık kullanılır. Kuantum enformasyon işlemlerinde dolaşıklığın rolü çok çeşitlidir. Dolaşıklığı kuantum mekaniğinin ilk yıllarında olduğu gibi bir gizem olarak ele almak yerine, son yıllarda kuantum hesaplama ve kuantum enformasyon teorisi kapsamında yapıldığı gibi bazı işlemleri klasik karşılıklarına göre daha hızlı ve daha güvenli bir şekilde gerçekleştirmek için kullanabileceğimiz bir kaynak olarak görmek daha iyi bir anlayış oluşturur. Kuantum durumlarının bu yeni görünümlerinin ortaya koyduğu sonuçlar nedeniyle, dolaşık durumlar oluşturmak için deneysel çalışmalar ve dolaşıklığın matematiksel yapısını anlamak için de teorik çalışmalar son yirmi yılda yoğun bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Bir sistemin verili bir durumunun dolaşıklığını karakterize etmek zordur. Sistem çok parçacıklı olabilir. Bunun yanında sistem saf (pure) veya karışım (mixed) durumlarda bulunabilir. Dolaşıklık, sistemin tüm parçacıkları arasında olabileceği gibi iki veya daha fazla alt parçacık arasında olabilir. Tüm bu özellikleri içerecek şekilde, herhangi bir sistemin dolaşıklığını genel olarak belirleyecek bir kavram henüz geliştirilememiştir. Yapılan çalışmalar en çok çalışılan iki veya daha çok parçacıklı sistemlerin herhangi iki parçası arasındaki dolaşıklıktır. Bu sistemleri oluşturan alt parçalar genelde iki seviyeli kuantum sistemleridir. Bunun sebebi ise bu sistemlerin öngörülen kuantum bilgisayarların temelini oluşturacağı düşüncesidir.

İki parçacıklı sistemlerde, sistemin vektör uzayı \mathbf{H} , iki alt sistemin vektör uzaylarının tensör çarpımı şeklinde yazılabilir

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} \otimes \mathbf{H}^{(2)}. \quad (3.1.1)$$

Durumlar, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ yoğunluk matrisi ile tanımlanmıştır. Eğer ρ çarpım durumların bir konveks kombinasyonu şeklinde yazılabiliyorsa ayrılabilir bir durumdur.

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j^{(1)} \otimes \rho_j^{(2)}, \quad (3.1.2)$$

buradaki ağırlık faktörleri $p_j \geq 0$ olup, $\sum_j p_j = 1$ koşulunu sağlarlar. Eğer ρ ayrılabilir değil ise dolaşıktır denir. Eğer dalga fonksiyonu

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle^{(1)} \otimes |\psi\rangle^{(2)}, \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu durum ayrılabiliridir. Burada anlatılanlar için şu örnekler verilebilir:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |00\rangle \text{ ayrılabilir durum,} \\ |\beta_{00}\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \text{ dolaşık durum (Bell durumu),} \\ |\beta_{11}\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \text{ dolaşık durum (Bell durumu).} \end{aligned}$$

Bunları yoğunluk matrisleri cinsinden de yazabiliriz:

$$\rho = |00\rangle\langle 00| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned}
\rho = |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho = |\beta_{11}\rangle\langle\beta_{11}| &= \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

Burada bahsedilen şekilde bir kuantum durumunun dolaşık veya ayrılabilir olduğunu test etmek çok pratik bir yol değildir. Bu nedenle ayrılabilirliği veya dolaşıklığı test etmek için daha işlemsel kriterlere ihtiyaç duyarız. Bu açıdan baktığımızda saf ve karışım durumlar için ayrılabilirlik kriterleri kuantum durumlarının dolaşıklığını nitel olarak belirler. Örneğin saf durumlar için Schmidt ayrışması (Schmidt decomposition) ve karışım durumlar için ise pozitif ve tam pozitif eşleşmeler (positive and complete positive maps) kullanılarak durumların dolaşıklığı nitel olarak belirlenebilir.

Bir kuantum durumunun dolaşıklığını nicel olarak belirlemek oldukça zordur, ancak bazı durumlarda iyi sonuçlar veren dolaşıklık ölçüleri bulunmaktadır. E ile gösterdiğimiz dolaşıklık ölçüleri bazı koşulları sağlamak zorundadırlar ancak bu koşulların hepsinin gerekli olup olmadığı kesin olmamakla birlikte, bazı ölçüler de bu koşulların bazılarını uymazlar. Şimdi kısaca bu koşullara bakalım:

1. Dolaşıklık hiç bir zaman negatif olmaz:

$$E(\rho) \geq 0.$$

2. Bir kuantum durumu ayrılabilir ise dolaşıklığı sıfırdır:

$$E(\rho) = 0.$$

3. Dolaşıklık yerel işlemler ve klasik iletişim altında artmaz.

4. İki yoğunluk matrisinin arasındaki uzaklığın sıfıra gittiği durumda, bu yoğunluk matrislerinin dolaşıklıkları arasındaki fark da sıfıra gider

$$\|\rho - \sigma\| \rightarrow 0 \text{ için } E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0.$$

5. Toplanabilirdir

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho).$$

6. ρ ve σ gibi iki yoğunluk matrisinin tensör çarpımının dolaşıklığı bunların ayrı ayrı dolaşıklıklarının toplamından büyük olamaz

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma).$$

7. Dolaşıklık ölçüsü $0 < \lambda < 1$ aralığında konveks bir fonksiyon olmalıdır

$$E(\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1-\lambda)E(\sigma).$$

Örneğin iki kısımlı bir sistemin $|\psi\rangle$ ile verilmiş bir saf durumu için bu sisteme ait indirgenmiş yoğunluk matrisinin von Neumann entropisi iyi bir dolaşıklık ölçüsüdür

$$E_{VN}(\rho) = S(\rho_{ind}) = -Tr(\rho_2 \log \rho_2) = -Tr(\rho_1 \log \rho_1).$$

Karışım durumlar için ise tek bir dolaşıklık ölçüsü yoktur. Dolaşıklık maliyeti (entanglement cost), oluşum dolaşıklığı (entanglement of formation), dolaşıklık

görelî entropisi (relative entropy of entanglement) ve damıtılabilir dolaşıklık (distillable entanglement) gibi ölçüler kullanılabilir.

Görüldüğü gibi dolaşıklık ölçüsü olarak farklı kavramlar önerilmiştir, ancak oluşum dolaşıklığı yöntemiyle geliştirilmiş olan eş-uyum (concurrency) yöntemi iki parçacıktan oluşmuş sistemlerin dolaşıklığı için en çok kullanılan yöntem olmuştur [24, 25]. Tezin kapsamında çalışılmış olan DM etkileşmesine sahip dört kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ zincirinin dolaşıklığının incelenmesinde de eş-uyum yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle göre yoğunluk matrisi ve spin-terslenmiş yoğunluk matrisinin çarpımı

$$R(\rho) = \rho(\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (3.1.7)$$

matrisi ile tanımlanır. $R(\rho)$ matrisinin özdeğerleri $\sqrt{\lambda_1} > \sqrt{\lambda_2} > \sqrt{\lambda_3} > \sqrt{\lambda_4}$ olacak şekilde eş-uyum

$$C(\rho) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}),$$

ifadesi ile verilir.

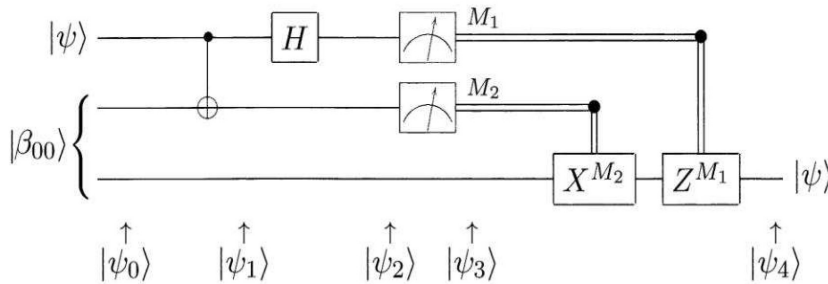
3.2. Dolaşıklık Uygulamaları

3.2.1. Kuantum Teleportasyon

Kuantum teleportasyon, verici ile alıcı arasında kuantum durumlarını hareket ettirip bir yerden başka bir yere gönderebilen bir yöntemdir. Kuantum teleportasyonun nasıl çalıştığını anlamak için şu örneğe bakalım. Alice, Bob ile iletişim kurmak için Bob'a $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ şeklinde durumu bilinmeyen bir kubit göndermek istemektedir. Bu iletişimin gerçekleşmesi için Alice ve Bob sadece klasik bir iletişim aracı ve bir çift dolaşık kubite sahiptirler. Alice için bunu gerçekleştirmenin bir yolu kubiti ölçüp, ölçme sonucuna göre kubiti tahmin edip bunu klasik bir iletişim kanalıyla Bob'a anlatmaktır. Ancak bu şekilde bir

kuantum durumu tam doğrulukla aktarılamaz. Genel olarak durumu bilinmeyen bir kubit klasik anlamda olduğu gibi kopyalanıp aktararak ifade edilemez. Bu işlem, bilinmeyen bir kuantum durumunda bulunan bir kubitin kopyalanamayacağı şeklinde belirtilen kuantum enformasyon teorisinin çok temel bir ilkesini ihlal etmek demektir. Alice Bob'a durumu bilinmeyen bu $|\psi\rangle$ kubitini ancak teleportasyon ile gönderebilir. Böylece bu kuantum durumu bir yerden başka bir yere aktarılmış olur. Yapılan iş kopyalanma değildir sadece kubitin bir yerden başka bir yere taşınmasıdır. Bu işlemin maksimum dolaşık bir çift kubit kullanılarak nasıl gerçekleştirileceği sorusuna ise Bennet vd. [28] tarafından yanıt verilmiştir .

Teleportasyon işlemi şöyle gerçekleşir: Alice ve Bob bir arada buldukları dönemde bir EPR çifti oluşturmuşlar ve ayrılırlarken her biri bu EPR çiftinin bir parçasını almıştır. Daha sonra Alice teleportasyon yapmak istediğinde, $|\psi\rangle$ kubitini EPR çiftinin kendinde olan parçasıyla etkileştirir. Ardından bu iki kubitte ölçme yapıp 00, 01, 10 ve 11 gibi olası dört sonuçtan birini elde eder. Elde ettiği bu bilgiyi Bob'a klasik yoldan gönderir. Alice'in gönderdiği bu klasik mesaja göre Bob EPR çiftinin kendinde bulunan parçasına bu dört işlemten birini uygular ve tekrar orjinal $|\psi\rangle$ kuantum durumunu elde eder. Teleportasyon işleminin daha kesin açıklanması ise Şekil 3.1'de verilen kuantum devresi üzerinden gösterilebilir. Şimdi adım adım devre üzerinde bu işlemi inceleyelim: Teleport edilecek durum $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ kubitini ile verilmiştir. Burada α ve β bilinmeyen genliklerdir.



Şekil 3.1. Teleportasyon için kullanılan devre

Devredeki girdi durumu;

$$\begin{aligned}
 |\psi_0\rangle &= |\psi\rangle |\beta_{00}\rangle \\
 &= |\psi\rangle \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)], \quad (3.2.8)
 \end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada devredeki işlem boyunca dikkat etmemiz gereken nokta ilk iki kubitin Alice'e üçüncü kubitin ise Bob'a ait olduğudur. Ayrıca daha önce de açıkladığımız gibi Alice'in ikinci kubitini ile Bob'un kubitini bir EPR çiftidir. Alice kendi iki kubitini bir KDEĞİL kuantum mantık kapısına gönderir ve $|\psi_1\rangle$ elde edilir

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|0,0\rangle + |1,1\rangle) + \beta|1\rangle(|1,0\rangle + |0,1\rangle)]. \quad (3.2.9)$$

Elde ettiği bu kuantum durumunun ilk kubitine Hadamard kapısını uygularsa $|\psi_2\rangle$ elde edilir

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|0,0\rangle + |1,1\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|1,0\rangle + |0,1\rangle)] \\
 &= \frac{1}{2}[|0,0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |0,1\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\
 &\quad + |1,0\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |1,1\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)], \quad (3.2.10)
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılıp dört terime ayrılmış olur. İlk terim $|00\rangle$ kuantum durumundaki Alice'in kubitini ve $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ kuantum durumundaki Bob'un kubitinden oluşur. Buradan da görüldüğü gibi Bob'un kubitini $|\psi\rangle$ orjinal kuantum durumudur. Eğer Alice kendi kubitini ölçer ve sonucu $|00\rangle$ bulursa Bob'un kubitini $|\psi\rangle$ kuantum durumunda olacaktır. Benzer şekilde Alice'in ölçüm sonuçlarından Bob'un kuantum durumunu okumak mümkündür

$$00 \rightarrow |\psi_3(0,0)\rangle \equiv [\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle],$$

$$01 \rightarrow |\psi_3(0,1)\rangle \equiv [\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle],$$

$$10 \rightarrow |\psi_3(1,0)\rangle \equiv [\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle],$$

$$11 \rightarrow |\psi_3(1,1)\rangle \equiv [\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle].$$

Sonuçta Alice'in ölçüm sonucuna bağlı olarak Bob'un kubitini bu olası dört sonuçtan birinde bulunacaktır, ancak hangisinin olduğunu bilmesi için Alice'in ölçüm sonucunu Bob'a göndermesi gerekmektedir. Bob bir kere ölçme sonucunu öğrenirse uygun kuantum kapılarını kullanarak $|\psi\rangle$ 'yi tekrar elde edip kendi durumunu belirginleştirir. Örneğin Alice'in ölçmesinin 00 verdiği sonuçta Bob'un bir şey yapmaya ihtiyacı yoktur çünkü elde edilen orijinal durumun aynısıdır. Eğer ölçme sonucu 10 ise Bob kuantum Z kapısını, eğer ölçme sonucu 01 ise kuantum X kapısını kullanarak kendi durumunu belirginleştirir. Ölçme sonucu 11 olduğunda ise önce X sonra da Z kapısını uygulayarak kendi durumunu belirginleştirir. Sonuç olarak Bob'un $|\psi\rangle$ kuantum durumunu tekrar elde edebilmesi için kendi kubitine $Z^{M_1} X^{M_2}$ dönüşümünü uygulaması gerekmektedir. Kuantum teleportasyonun [31, 32] iki ilginç sonucu vardır: Birincisi ışıktan hızlı iletişime izin vermez çünkü teleportasyonun tamamlanması için Alice'in kendi ölçme sonucunu Bob'a telefon, e-mail veya radyo dalgası gibi klasik bir iletişim kanalı üzerinden göndermesi şarttır. Klasik iletişim kanalı ise ışık hızıyla sınırlı olduğu için ışık hızından daha hızlı bir iletişim gerçekleşmez ve görelilik ilkesi ihlal edilmemiş olur. İkincisi ise teleportasyon için kuantum durumunun bir kopyasının yapılmasıdır; fakat bu işlem kopyalanamama teoremi ile çelişir, ancak buradaki bir ihlal değildir çünkü teleportasyondan sonra sadece hedef kubit $|\psi\rangle$ kuantum durumundadır. İlk kubitte yapılan ölçme sonucuna bağlı olarak orijinal data kubitini ise $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ kompütasyonel baz durumlarından birinde olur. Buradan görüldüğü gibi, teleportasyonda yerel işlemler ve klasik iletişimin iki temel unsur olduğu sonucuna varılabilir. Her bir birey kendi kubitine yerel kuantum mekaniksel işlemler yapmıştır. Ölçme sonuçlarının iletilmesi için de klasik iletişim kullanılmıştır.

3.2.2. Dolaşıklık Değiş Tokuşu

Genellikle kuantum dolaşıklık, birbirlerine yakın olan iki parçacık arasında gerçekleşen doğrudan bir etkileşmeden kaynaklanır. Bunun yanında daha önce birbirleriyle hiç etkileşmemiş ve aralarında çok büyük uzaklıklar bulunan iki parçacık arasında da kuantum dolaşıklık olması mümkündür. Bu olaya dolaşıklık değiş-tokuşu (entanglement swapping) denir ve önceden dolaşık olan sistemlerden dolaşık olmayan sistemlere dolaşıklığın aktarılması olarak tanımlanır [26–28]. Dolaşıklık değiş-tokuşunda iki EPR çifti kullanılır. Bu EPR çiftlerindeki her bir kubit 1, 2, 3 ve 4 sayıları ile belirtilir. 1 ve 4 numaralı kubitler Alice'e, 2 ve 3 numaralı kubitler ise Bob'a aittir. 1 ve 2 numaralı kubitler dolaşıktırlar ve

$$|\beta_{00}\rangle_{12} = \frac{|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12}}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.11)$$

şeklinde bir Bell durumunda bulunurlar. Benzer olarak 3 ve 4 numaralı kubitler de dolaşıktır ve

$$|\beta_{00}\rangle_{34} = \frac{|00\rangle_{34} + |11\rangle_{34}}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.12)$$

şeklinde bir Bell durumunda bulunurlar. Bu iki kuantum durumunun çarpımı

$$\begin{aligned} |\beta_{00}\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{34} &= \left(\frac{|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|00\rangle_{34} + |11\rangle_{34}}{\sqrt{2}} \right), \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle_{12} |00\rangle_{34} + |00\rangle_{12} |11\rangle_{34} \\ &\quad + |11\rangle_{12} |00\rangle_{34} + |11\rangle_{12} |11\rangle_{34}), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

şeklinde dir. Denklem 3.2.13'in 1 ve 4 numaralı kubitleri ile 2 ve 3 numaralı kubitleri bir arada olacak şekilde yeniden düzenlenirse

$$|\beta_{00}\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{34} = \frac{1}{2} (|00\rangle_{14} |00\rangle_{23} + |01\rangle_{14} |01\rangle_{23} + |10\rangle_{14} |10\rangle_{23} + |11\rangle_{14} |11\rangle_{23}) \quad (3.2.14)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
|\beta_{00}\rangle_{14}|\beta_{00}\rangle_{23} &= \left(\frac{|00\rangle_{14} + |11\rangle_{14}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right), \\
&= \frac{1}{2} (|00\rangle_{14}|00\rangle_{23} + |00\rangle_{14}|11\rangle_{23} \\
&\quad + |11\rangle_{14}|00\rangle_{23} + |11\rangle_{14}|11\rangle_{23}), \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Denklem 3.2.14 ve Denklem 3.2.15 ifadelerini karşılaştırdığımızda Denklem 3.2.14 'de bazı terimlerin eksik olduğunu görürüz. Gerekli cebirsel düzenlemelerin yapılmasıyla

$$|\beta_{00}\rangle_{12}|\beta_{00}\rangle_{34} = \frac{1}{2} (|\beta_{00}\rangle_{14}|\beta_{00}\rangle_{23} + |\beta_{10}\rangle_{14}|\beta_{10}\rangle_{23} + |\beta_{01}\rangle_{14}|\beta_{01}\rangle_{23} + |\beta_{11}\rangle_{14}|\beta_{11}\rangle_{23}), \tag{3.2.16}$$

elde edilir. 1 ve 4 numaralı parçacıklar Alice'e ait parçacıklardır ve Alice bu parçacıkları ölçtüğünde $\frac{1}{4}$ olasılıkla $|\beta_{00}\rangle_{14}, |\beta_{10}\rangle_{14}, |\beta_{01}\rangle_{14}$ ve $|\beta_{11}\rangle_{14}$ şeklindeki dört olası sonuçtan birini bulacaktır. Ölçme yapıldığı anda Bob'un sistemi ise $|\beta_{00}\rangle_{23}, |\beta_{10}\rangle_{23}, |\beta_{01}\rangle_{23}$ ve $|\beta_{11}\rangle_{23}$ gibi dört olası kuantum durumundan birine çökecektir. Böylece bundan sonra 2 ve 3 numaralı parçacıklar dolaşık olacaktır. Görüldüğü gibi Alice ve Bob birbirlerinden çok uzakta bile olsalar Alice 1 ve 4 numaralı kendi parçacıklarına bir ölçme yaptığında, kuantum durumları çökecek ve Bob'un 2 ve 3 numaralı parçacıkları dolaşık olacaklardır. Bu olay 2 ve 3 numaralı parçacıklar daha önce birbirleriyle hiç etkileşmeseler bile gerçekleşir. Olayın önemini daha iyi kavramak için Alice ölçme yapmadan önce Chuck'ın 3 numaralı parçacığı alıp uzak bir yere gittiğini düşünelim. Böylece Alice kendi parçacıklarına ölçme yaptığında Bob ve Chuck bir çift dolaşık parçacığı aralarında paylaşmış olacaklardır. Böylece de teleportasyonu kullanarak birbirlerine bir

kuantum durumu aktarabilmek için bir kaynak yaratmış olurlar. Bu düşünce birden fazla gruba dolaşıklık dağıtmak için benimsenmiştir.

3.2.3. Kuantum Yoğun kodlama

Kuantum yoğunkodlama (super-dense coding) kuantumsal iletişimde dolaşıklığın nasıl kullanıldığının basit fakat önemli bir örneğidir. Kuantum yoğunkodlama iki bitlik klasik bilginin, dolaşık bir kubit kullanılarak iletilmesine olanak sağlar [29, 30]. Bunu gerçekleştirmek için tek bir kubit ve bir EPR çifti kullanır. EPR çifti mesajı gönderen ve alan arasında paylaşılır. İki bitlik klasik bilgi aktarmak için sadece bir kubite ihtiyaç vardır. Bunun gerçekleşmesini sağlayan ise dolaşıklıktır. Dolaşıklık iki kubitlik bir kuantum durumunu dört ortogonal kuantum durumundan birine sadece bir kubit ile etkileştirerek dönüştürür. İşlemin gerçekleşmesi şöyledir. Alice ve Bob başlangıçta

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}},$$

şeklinde bir EPR çiftini paylaşırlar. Bu ifadeden de anlaşılacağı gibi ilk kubit Alice'e ikinci kubit Bob'a aittir. Ayrıca aralarında şöyle bir kod üzerinde de anlaşmışlardır: xy gibi klasik bir bit dizisi $|\beta_{xy}\rangle$ şeklinde Bell durumlarıyla ifade edilecektir. Burada xy ; 00, 01, 10 veya 11 şeklinde olabilir. Alice, Bob'a gerçekten kendi kubitini göndererek bilgiyi aktaracaktır. Alice hangi klasik bit dizisini göndermek istediğine bağlı olarak seçimine uygun olan tek kubitlik bir kuantum mantık kapısını kendi kubitine uygular. Örneğin 00 şeklinde bir klasik bit dizisi göndermek istiyorsa I yardımıyla $|\psi\rangle$ kuantum durumunu dört Bell durumundan birine dönüştürür:

$$I|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{00}\rangle,$$

eğer 01 şeklinde bir klasik bit dizisi göndermek istiyorsa $|\psi\rangle$ kuantum durumundaki kendi kubitine X kuantum mantık kapısını uygular:

$$X|\psi\rangle = \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{01}\rangle,$$

Benzer şekilde 10 ve 11 şeklindeki klasik bit dizileri için ise sırasıyla Z ve Y kuantum mantık kapıları uygulanır:

$$Z|\psi\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{10}\rangle,$$

$$iY|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{11}\rangle.$$

Bu işlemler gerçekleştirildikten sonra Alice kendi kubitini Bob'a gönderir. Bob elinde bulunan kuantum durumuna ilk olarak, Alice'in kubiti kontrol kubiti olmak üzere bir KONTROLLÜ-DEĞİL kuantum mantık kapısı uygular ve

$$\begin{aligned} 00 & ; \quad |\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \\ 01 & ; \quad |\beta_{01}\rangle = \frac{|11\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}, \\ 10 & ; \quad |\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \\ 11 & ; \quad |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

sonuçlarından biri olur. Daha sonra sadece ilk kubitte Hadamard kuantum mantık kapısını uygular ve

$$\begin{aligned} 00 & ; \quad |\beta_{00}\rangle = |00\rangle, \\ 01 & ; \quad |\beta_{01}\rangle = |01\rangle, \\ 10 & ; \quad |\beta_{10}\rangle = |10\rangle, \\ 11 & ; \quad |\beta_{11}\rangle = |11\rangle, \end{aligned}$$

sonuçlarından biri olur. Böylece Bob Alice'in göndermiş olduğu klasik bit dizisini elde eder.

4. SPİN MODELLERİ VE LİTERATÜRDEN BAZI ÇALIŞMALAR

4.1. Spin Modelleri

En genel şekilde Hamiltoniyen şu şekilde yazılabilir:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N [J_x \sigma_i^x \sigma_j^x + J_y \sigma_i^y \sigma_j^y + J_z \sigma_i^z \sigma_j^z] \quad (4.1.1)$$

Burada $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ Pauli spin matrisleridir. J_x, J_y, J_z ise spinler arası çiftlenim sabitleridir. Bu Hamiltoniyen Heisenberg XYZ Model olarak da tanımlanır. Özel durumlara bakacak olursak;

(i) $J_z = 0$ olduğunda XY model;

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N [J_x \sigma_i^x \sigma_j^x + J_y \sigma_i^y \sigma_j^y], \quad (4.1.2)$$

(ii) $J_x = J_y = J_z$ olduğunda XXX model;

$$H = \frac{J}{2} \sum_{i,j}^N [\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y + \sigma_i^z \sigma_j^z], \quad (4.1.3)$$

(iii) $J_x = J_y = J$ olduğunda XXZ model,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N [J \sigma_i^x \sigma_j^x + J \sigma_i^y \sigma_j^y + J_z \sigma_i^z \sigma_j^z], \quad (4.1.4)$$

(iv) $J_x = J_y = 0, J_z \neq 0$ olduğunda Ising model

$$H = \frac{J_z}{2} \sum_{i,j}^N \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (4.1.5)$$

olarak adlandırılır. Biz bu tezde Heisenberg XXZ model'i inceledik. Şimdi bununla ilgili literatürdeki bazı çalışmalara bakalım.

4.2. Literatürden Bazı Çalışmalar

Homojen manyetik alan altında iki kubitlik XXZ Heisenberg zincirinin ısısal dolaşıklığının DM (Dzialoshinski-Moriya) etkileşmesiyle nasıl değiştiği Qian ve Fang tarafından 2009 yılında incelenmiştir [33]. Bu çalışmaya göre dolaşıklığın kontrolünü geliştirmek için manyetik alanın yanında DM etkileşmesinin de kullanılması gerektiği sonucuna varılmıştır.

2009 yılında Abliz vd. tarafından yapılan bir çalışmada [34] taban durum ve ısısal dolaşıklık hesapları yapılmıştır. Bu çalışma sonucunda manyetik alanın dolaşıklık üzerindeki etkileri görülmüş ve güçlü DM etkileşmesinin dolaşıklığa neden olduğu gözlenmiştir.

2004 yılında Gu vd. tarafından yapılan bir çalışmada [35] en yakın komşu etkileşmelerin yanında ikinci en yakın komşu etkileşmelerin dolaşıklığı nasıl etkilediği incelenmiştir. Bu çalışmada $J > 0$ 'dan kaynaklanan tedirginlik (frustrated) etkisinin, ikinci en yakın komşu kubitler arasındaki dolaşıklığı arttırırken en yakın komşu kubitler arası dolaşıklığı büyük ölçüde engellediği görülmüştür.

R. Jafari ve A. Langari tarafından [36] yayınlanan makalede 3 kubit XXZ Heisenberg ve Ising modelleri için manyetik alan ve DM etkileşmesinin varlığında taban durum ve ısısal durum dolaşıklıkları incelenmiştir. Sonuçlar DM etkileşmesi ve Δ anizotropi parametresinin dolaşıklığın kontrol edilmesinde etkili olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmalara bakılarak genel olarak şunları söyleyebiliriz: Sıcaklığın artması dolaşıklığı azaltır ve sıcaklık T_c kritik sıcaklığına ulaştıktan sonra dolaşıklık kaybolur. Anizotropi parametresinin artması dolaşıklığın sıcaklığa olan dayanıklılığını arttırır ve T_c kritik değerini arttırır. DM etkileşmesi NN en yakın komşu kubitler arasındaki dolaşıklığı azaltırken NNN ikinci en yakın komşu kubitler arasındaki dolaşıklığı arttırıcı etkisi vardır.

5. BİR BOYUTTA J_1 - J_2 HEİSENBERG XXZ MODELİ

5.1. Model ve Hesaplamalar

Bu çalışmada incelediğimiz modelimizin Hamiltoniyeni şu şekildedir :

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{J}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta_1 \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + \frac{J\alpha}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+2}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+2}^y + \Delta_2 \sigma_i^z \sigma_{i+2}^z) \\
 & + \frac{D}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x). \tag{5.1.1}
 \end{aligned}$$

Burada σ^x , σ^y ve σ^z Pauli spin matrisleri, α tedirginlik parametresi, Δ_1 ve Δ_2 anizotropi parametreleri, J komşu çiftler arasındaki çiftlenim sabiti, D ise spin-yörünge etkileşmesinden kaynaklanan anizotropik ve antisimetrik DM etkileşmesidir. Bu sistemde periyodik sınır koşulları kullanılmıştır. Hamiltoniyemizin özdeğerleri şu şekildedir:

$$E_1 = 2(D - J\alpha),$$

$$E_2 = 2(D - J\alpha),$$

$$E_3 = -2(D + J\alpha),$$

$$E_4 = -2(D + J\alpha),$$

$$E_5 = 2J(-1 + \alpha),$$

$$E_6 = 2J(-1 + \alpha),$$

$$E_7 = 2J(1 + \alpha),$$

$$E_8 = 2J(1 + \alpha),$$

$$E_9 = -2J\alpha\Delta_2,$$

$$E_{10} = -2J\alpha\Delta_2,$$

$$E_{11} = 2J(\Delta_1 + \alpha\Delta_2),$$

$$\begin{aligned}
E_{12} &= 2J(\Delta_1 + \alpha\Delta_2), \\
E_{13} &= 2J\alpha - J\Delta_1 - \gamma, \\
E_{14} &= 2J\alpha - J\Delta_1 + \gamma, \\
E_{15} &= -J(2\alpha + \Delta_1) - \phi, \\
E_{16} &= -J(2\alpha + \Delta_1) + \phi.
\end{aligned}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{J^2(8 + (\Delta_1 - 2\alpha(-1 + \Delta_2))^2)} \\
\phi &= \sqrt{8D^2 + J^2(\Delta_1 - 2\alpha(1 + \Delta_2))^2}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise $|0000\rangle, |0001\rangle, |0010\rangle, |0011\rangle, |0100\rangle, |0101\rangle, |0110\rangle, |0111\rangle, |1000\rangle, |1001\rangle, |1010\rangle, |1011\rangle, |1100\rangle, |1101\rangle, |1110\rangle, |1111\rangle$ bazında şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{2} [|1110\rangle + i|1101\rangle - |1011\rangle - i|0111\rangle], \\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} [|1000\rangle + i|0100\rangle - |0010\rangle - i|0001\rangle], \\
|\psi_3\rangle &= \frac{1}{2} [|1110\rangle - i|1101\rangle - |1011\rangle + i|0111\rangle], \\
|\psi_4\rangle &= \frac{1}{2} [|1000\rangle - i|0100\rangle - |0010\rangle + i|0001\rangle], \\
|\psi_5\rangle &= \frac{1}{2} [|1110\rangle - |1101\rangle + |1011\rangle - |0111\rangle], \\
|\psi_6\rangle &= \frac{1}{2} [|1000\rangle - |0100\rangle + |0010\rangle - |0001\rangle], \\
|\psi_7\rangle &= \frac{1}{2} [|1110\rangle + |1101\rangle + |1011\rangle + |0111\rangle], \\
|\psi_8\rangle &= \frac{1}{2} [|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_9\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1100\rangle - |0011\rangle], \\
|\psi_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1001\rangle - |0110\rangle], \\
|\psi_{11}\rangle &= |1111\rangle, \\
|\psi_{12}\rangle &= |0000\rangle, \\
|\psi_{13}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4+2\xi_{13}^2}}[|0011\rangle - \xi_{13}|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle - \xi_{13}|1010\rangle + |1100\rangle], \\
|\psi_{14}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4+2\xi_{14}^2}}[|0011\rangle + \xi_{14}|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + \xi_{14}|1010\rangle + |1100\rangle], \\
|\psi_{15}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4+2\xi_{15}^2}}[|0011\rangle + i\xi_{15}|0101\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle - i\xi_{15}|1010\rangle + |1100\rangle], \\
|\psi_{16}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4+2\xi_{16}^2}}[|0011\rangle - i\xi_{16}|0101\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle + i\xi_{16}|1010\rangle + |1100\rangle].
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\xi_{13} &= \frac{J(\Delta_1 - 2\alpha(-1 + \Delta_2)) + \gamma}{2J}, \\
\xi_{14} &= \frac{-J(\Delta_1 - 2\alpha(-1 + \Delta_2)) + \gamma}{2J}, \\
\xi_{15} &= \frac{J(\Delta_1 - 2\alpha(1 + \Delta_2)) + \phi}{2D}, \\
\xi_{16} &= \frac{J(-\Delta_1 + 2\alpha(1 + \Delta_2)) + \phi}{2D},
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. İncelediğimiz bu Hamiltoniyen DM etkileşmesi altında dört kubitlik $J_1 - J_2$ anizotropik Heisenberg XXZ modelidir. $J_2 = 0$ olması durumunda DM etkileşmesine sahip Heisenberg XXZ modeline, $J_2 = 0$ ve $\Delta_1 = 0$ olması durumunda DM etkileşmesine sahip XX modeline dönüşür. Yapmış olduğumuz bu tezde $N = 4$ kubitlik sistemimiz için önce taban durum dolaşıklığı daha sonra da sonlu sıcaklıklarda ısısal dolaşıklık incelenmiştir.

Bir kuantum sistemine ait bilgiyi, sistemi tanımlayan yoğunluk matrisi ile belirleriz. Bir boyutta DM etkileşmesine sahip izotropik ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1$) $J_1 - J_2$

Heisenberg XXZ modelinin Hamiltoniyeni;

$$H = \frac{J}{2} \sum_{i=1}^4 \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \frac{J\alpha}{2} \sum_{i=1}^4 \sigma_i^x \sigma_{i+2}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+2}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+2}^z + \frac{D}{2} \sum_{i=1}^4 (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \quad (5.1.2)$$

şeklindedir. $\alpha = 0$ olması durumunda sistem DM etkileşmesine sahip Heisenberg XXX modeline dönüşür. Dolaşıklık ölçüsü olarak eş-uyum (C) kullanılır. Öncelikle $J = 1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ olduğunda farklı DM değerleri için dolaşıklık nasıl hesapladığımıza bakalım: Her DM değeri için en küçük enerji özdeğerine karşılık gelen özvektör bulunur. Yapılan nümerik analiz sonucunda $[-4.0 - 4.0]$ aralığında α 'nın aldığı değerlere bağlı olarak taban durumların $|\psi_{13}\rangle$, $|\psi_{15}\rangle$ yada $|\psi_{13}\rangle$ ve $|\psi_{15}\rangle$ 'in çakışık olduğu kuantum durumları olduğu görülür. Çok parçacıklı sistemlerde iki parçacığın taban durum dolaşıklığı, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ şeklindeki yoğunluk matrislerinin hesaplanıp buradan indirgenmiş yoğunluk matrislerinin elde edilmesiyle bulunur. $N = 4$ kubitten oluşmuş bir sistemde de en yakın iki komşu ve ikinci en yakın iki komşu kubitler arası dolaşıklıklar incelenmiştir. Bu nedenle ρ_{12} ve ρ_{13} yoğunluk matrislerine ihtiyaç vardır.

Taban durumunun $|\psi_{13}\rangle$ kuantum durumu olması halinde yoğunluk matrisi $\rho = |\psi_{13}\rangle\langle\psi_{13}|$ durumunda indirgenmiş yoğunluk matrisleri;

$$\rho_{12} = Tr_{34}(|\psi_{13}\rangle\langle\psi_{13}|) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & w & 0 \\ 0 & w & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$\rho_{13} = Tr_{24}(|\psi_{13}\rangle\langle\psi_{13}|) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \delta & 0 \\ 0 & \delta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

formunda olup burada;

$$u = \frac{1}{2(2 + \xi_{13}^2)}, \quad (5.1.3)$$

$$v = \frac{1 + \xi_{13}^2}{2(2 + \xi_{13}^2)}, \quad (5.1.4)$$

$$w = \frac{\xi_{13}}{2 + \xi_{13}^2}, \quad (5.1.5)$$

$$\mu = \frac{\xi_{13}^2}{2(2 + \xi_{13}^2)}, \quad (5.1.6)$$

$$\delta = \frac{1}{2 + \xi_{13}^2}, \quad (5.1.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Taban durumunun $|\psi_{13}\rangle$ ve $|\psi_{15}\rangle$ kuantum durumlarının çakışık olması durumunda ise yoğunluk matrisleri bu iki durumun eşit olasılıklı yoğunluk matrislerinden oluşur

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}|\psi_{13}\rangle\langle\psi_{13}| + \frac{1}{2}|\psi_{15}\rangle\langle\psi_{15}|. \quad (5.1.8)$$

Bu durumda indirgenmiş yoğunluk matrisleri

$$\bar{\rho}_{12} = Tr_{34}\left(\frac{1}{2}|\psi_{13}\rangle\langle\psi_{13}| + \frac{1}{2}|\psi_{15}\rangle\langle\psi_{15}|\right) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & w_1^* & 0 \\ 0 & w_1 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\rho}_{13} = Tr_{24}(\frac{1}{2}|\psi_{13}\rangle\langle\psi_{13}| + \frac{1}{2}|\psi_{15}\rangle\langle\psi_{15}|) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

şeklinde olup burada

$$u_1 = \frac{1}{4}[\frac{1}{2+\xi_{13}^2} + \frac{1}{2+\xi_{15}^2}], \quad (5.1.9)$$

$$v_1 = \frac{1}{4}[\frac{1+\xi_{13}^2}{2+\xi_{13}^2} + \frac{1+\xi_{15}^2}{2+\xi_{15}^2}], \quad (5.1.10)$$

$$w_1 = \frac{1}{4}[\frac{\xi_{13}}{2+\xi_{13}^2} + \frac{i\xi_{15}}{2+\xi_{15}^2}], \quad (5.1.11)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{4}[\frac{\xi_{13}^2}{2+\xi_{13}^2} + \frac{\xi_{15}^2}{2+\xi_{15}^2}], \quad (5.1.12)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}[\frac{1}{2+\xi_{13}^2} + \frac{1}{2+\xi_{15}^2}], \quad (5.1.13)$$

$$\varphi = \frac{1}{2}[\frac{1}{2+\xi_{13}^2} - \frac{1}{2+\xi_{15}^2}], \quad (5.1.14)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Taban durumunun $|\psi_{15}\rangle$ kuantum durumu olması durumunda ise yoğunluk matrisi $\tilde{\rho} = |\psi_{15}\rangle\langle\psi_{15}|$ şeklinde olup indirgenmiş yoğunluk matrisleri

$$\tilde{\rho}_{12} = Tr_{34}(|\psi_{15}\rangle\langle\psi_{15}|) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & w_2^* & 0 \\ 0 & w_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\rho}_{13} = Tr_{24}(|\psi_{15}\rangle\langle\psi_{15}|) = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

şeklinde olup burada

$$u_2 = \frac{1}{2(2 + \xi_{15}^2)}, \quad (5.1.15)$$

$$v_2 = \frac{1 + \xi_{15}^2}{2(2 + \xi_{15}^2)}, \quad (5.1.16)$$

$$w_2 = \frac{i\xi_{15}}{2 + \xi_{15}^2}, \quad (5.1.17)$$

$$\mu_2 = \frac{\xi_{15}^2}{2(2 + \xi_{15}^2)}, \quad (5.1.18)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2 + \xi_{15}^2}, \quad (5.1.19)$$

olarak tanımlanmıştır.

Sonlu sıcaklıkta ısısal dengedeki sistemlerin dolaşıklığı ısısal dolaşıklık olarak isimlendirilir. Bu kısımda, dört kubitlik anizotropik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sistemindeki kubitlerin ısısal dolaşıklığının Δ_1 , Δ_2 anizotropi parametrelerine ve DM etkileşmesine göre nasıl değiştiği incelenecektir. Şimdiye kadar kullandığımız Hamiltoniyende bulunan parametrelere ilave olarak sıcaklık da bir kontrol parametresi olarak bu kısımda karşımıza çıkmaktadır. Sonlu sıcaklıklarda dolaşıklık, sıcaklığa bağlı yoğunluk fonksiyonundan hesaplanabilir. H hamiltoniyenine sahip bir sistemin ısısal denge durumundaki yoğunluk matrisi

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H) = \sum_{j=1}^N \frac{\exp(-\beta E_j)}{Z} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (5.1.20)$$

ile verilir. Burada $\beta = \frac{1}{k_B T}$ olup, k_B Boltzmann sabitidir ve $k_B = 1$ olarak alınmıştır. Z bölüşüm (partition func.) fonksiyonudur ve

$$Z = Tr[\exp(-\beta H)] = \sum_{j=1}^{16} \exp(-\beta E_j) \quad (5.1.21)$$

olarak tanımlanır. T ise sıcaklıktır. DM etkileşmesine sahip dört kubitlik anizotropik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sistemi için bölüşüm fonksiyonu

$$Z = 2e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} + 2e^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} + 2e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + 2e^{\frac{-2J(1+\alpha)}{T}} + 2e^{\frac{2J\alpha\Delta_2}{T}} + 2e^{-\frac{2J(\Delta_1+\alpha\Delta_2)}{T}} \\ + e^{-\frac{(2J\alpha-J\Delta_1-\gamma)}{T}} + e^{-\frac{(2J\alpha-J\Delta_1+\gamma)}{T}} + e^{\frac{J(2\alpha+\Delta_1)+\phi}{T}} + e^{\frac{J(2\alpha+\Delta_1)-\phi}{T}}, \quad (5.1.22)$$

şekindedir. Sisteme ait yoğunluk matrisi ise

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} [e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + e^{-\frac{2(D+J\alpha)}{T}} |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + e^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} |\psi_3\rangle \langle \psi_3| \\ + e^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} |\psi_4\rangle \langle \psi_4| + e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} |\psi_5\rangle \langle \psi_5| + e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} |\psi_6\rangle \langle \psi_6| \\ + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} |\psi_7\rangle \langle \psi_7| + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} |\psi_8\rangle \langle \psi_8| + e^{\frac{2J\alpha\Delta_2}{T}} |\psi_9\rangle \langle \psi_9| \\ + e^{\frac{2J\alpha\Delta_2}{T}} |\psi_{10}\rangle \langle \psi_{10}| + e^{-\frac{2J(\Delta_1+\alpha\Delta_2)}{T}} |\psi_{11}\rangle \langle \psi_{11}| + e^{-\frac{2J(\Delta_1+\alpha\Delta_2)}{T}} |\psi_{12}\rangle \langle \psi_{12}| \\ + e^{-\frac{(2J\alpha-J\Delta_1-\gamma)}{T}} |\psi_{13}\rangle \langle \psi_{13}| + e^{-\frac{(2J\alpha-J\Delta_1+\gamma)}{T}} |\psi_{14}\rangle \langle \psi_{14}| \\ + e^{\frac{J(2\alpha+\Delta_1)+\phi}{T}} |\psi_{15}\rangle \langle \psi_{15}| + e^{\frac{J(2\alpha+\Delta_1)-\phi}{T}} |\psi_{16}\rangle \langle \psi_{16}|], \quad (5.1.23)$$

ile verilir. İndirgenmiş yoğunluk matrisi

$$\rho_{12} = Tr_{34}(\rho) = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & y_1^* & 0 \\ 0 & y_1 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 \end{bmatrix}, \quad (5.1.24)$$

şeklinde olup burada

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2(D+J\alpha)}{T}} + e^{\frac{2J\alpha\Delta_2}{T}} \right. \\
& + 2e^{-\frac{2J(\Delta_1+\alpha\Delta_2)}{T}} + \frac{e^{\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{13}^2)} + \frac{e^{\frac{-\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{14}^2)} \\
& \left. + \frac{e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1+\phi}{T}}}{(2+\xi_{15}^2)} + \frac{e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1-\phi}{T}}}{(2+\xi_{16}^2)} \right], \tag{5.1.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 = & \frac{(1+\xi_{13}^2)e^{\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{2(2+\xi_{13}^2)} + \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2(D+J\alpha)}{T}} \right. \\
& + e^{\frac{2J\alpha\Delta_2}{T}} + \frac{(1+\xi_{14}^2)e^{\frac{-\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{14}^2)} + \frac{(1+\xi_{15}^2)e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1+\phi}{T}}}{(2+\xi_{15}^2)} \\
& \left. + \frac{(1+\xi_{16}^2)e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1-\phi}{T}}}{(2+\xi_{16}^2)} \right], \tag{5.1.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 = & -\frac{2\xi_{13}e^{\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{2(2+\xi_{13}^2)} + \frac{1}{2} \left[-e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} - ie^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} \right. \\
& + ie^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} + \frac{2\xi_{14}e^{\frac{-\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{14}^2)} + i\frac{2\xi_{15}e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1+\phi}{T}}}{(2+\xi_{15}^2)} \\
& \left. - i\frac{2\xi_{16}e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1-\phi}{T}}}{(2+\xi_{16}^2)} \right], \tag{5.1.27}
\end{aligned}$$

şeklindedir ve

$$\rho_{13} = Tr_{24}(\rho) = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & y_2 & 0 \\ 0 & y_2 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 \end{bmatrix}, \tag{5.1.28}$$

olup burada

$$\begin{aligned}
u_2 = & \frac{\xi_{13}^2 e^{\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{2(2+\xi_{13}^2)} + \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} \right. \\
& + e^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} + 2e^{-\frac{2J(\Delta_1+\alpha\Delta_2)}{T}} + \frac{\xi_{14}^2 e^{-\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{14}^2)} + \\
& \left. + \frac{\xi_{15}^2 e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1+\phi}{T}}}{(2+\xi_{15}^2)} + \frac{\xi_{16}^2 e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1-\phi}{T}}}{(2+\xi_{16}^2)} \right], \tag{5.1.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 = & \frac{e^{\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{13}^2)} + \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} \right. \\
& + e^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} + 2e^{\frac{2J\alpha\Delta_2}{T}} + \frac{2e^{-\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{14}^2)} + \frac{2e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1+\phi}{T}}}{(2+\xi_{15}^2)} \\
& \left. + \frac{2e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1-\phi}{T}}}{(2+\xi_{16}^2)} \right], \tag{5.1.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = & \frac{e^{\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{13}^2)} + \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{2J(-1+\alpha)}{T}} + e^{-\frac{2J(1+\alpha)}{T}} - e^{-\frac{2(D-J\alpha)}{T}} \right. \\
& - e^{\frac{2(D+J\alpha)}{T}} + \frac{2e^{-\frac{\gamma+J(-2\alpha+\Delta_1)}{T}}}{(2+\xi_{14}^2)} - \frac{2e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1+\phi}{T}}}{(2+\xi_{15}^2)} \\
& \left. - \frac{2e^{\frac{2J\alpha+J\Delta_1-\phi}{T}}}{(2+\xi_{16}^2)} \right], \tag{5.1.31}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $J_1 - J_2$ anizotropik Heisenberg XXZ spin zincirinde en yakın komşu kubitlerin (NN) ikili dolaşıklıklarına bakıldığında Hamiltoniyenin öteleme değişmezliği nedeniyle (translational invariance) $C_{12} = C_{23} = C_{34} = C_{41}$ olduğu; ikinci en yakın komşu kubitlerin (NNN) ikili dolaşıklıklarına bakıldığında $C_{13} = C_{24} = C_{31} = C_{42}$ olduğu anlaşılır.

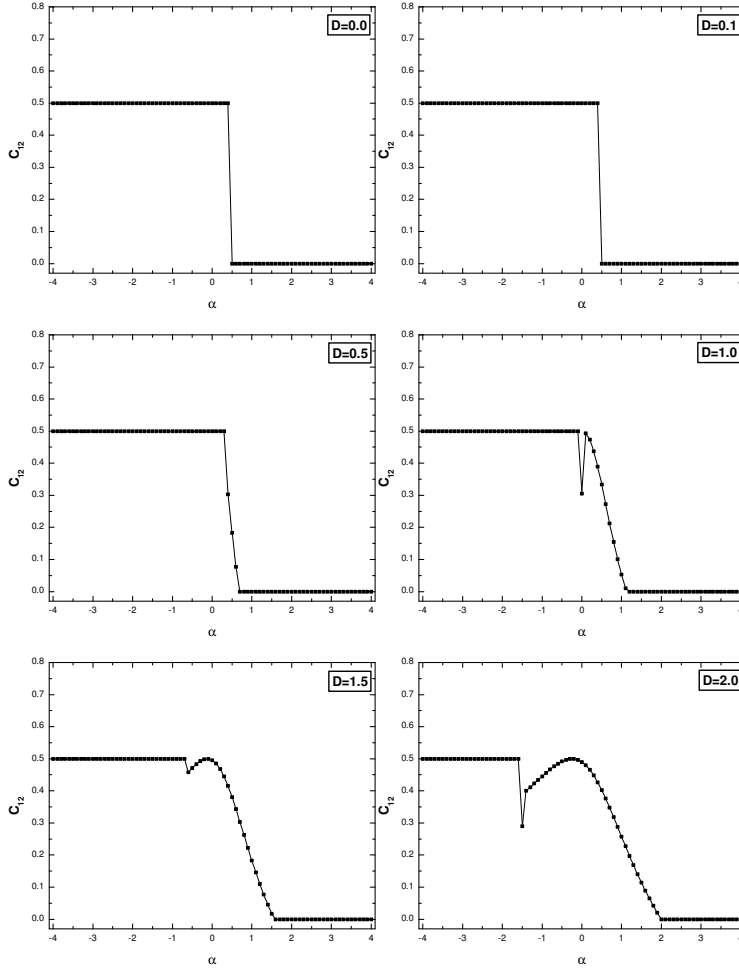
Bu hesaplamalardan spin-1/2 $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ lineer zincirinde en yakın komşu (NN) ve ikinci en yakın komşu (NNN) kubitler arasındaki dolaşıklığın α tedirginlik parametresine ve DM etkileşmesine göre değişimleri incelenmiştir.

Aynı şekilde anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$, $\Delta_1 = 1.0$ $\Delta_2 = 0.5$ ve $\Delta_1 = 0.5$, $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde de aynı hesaplamalar yapılmış ve incelemeler gerçekleştirilmiştir.

5.2. Sonuçlar

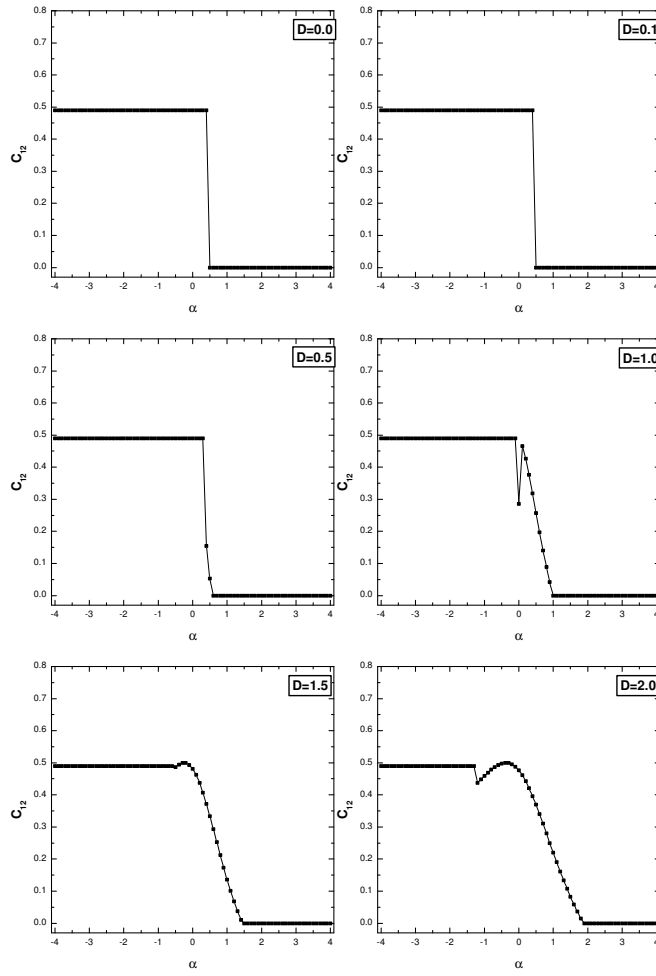
5.2.1. Taban Durum Dolaşıklığı

İlk olarak en yakın komşu (NN) kubit çiftlerinin taban durum dolaşıklıklarına bakılmıştır. Sistemin enerji spektrumundan görülebileceği gibi $4J\alpha < \gamma - \phi$ değerlerinde taban durum $|\psi_{13}\rangle$ kuantum durumuna karşılık gelmektedir. Sistem bu taban durumunda bulunurken, anizotropi parametrelerin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ değerlerinde, NN kubitlere ait indirgenmiş yoğunluk matrisi ρ_{12} , α ve DM parametrelerine bağlı değildir. Bunun sonucunda NN kubitlerin dolaşıklığı Şekil 5.1'den de görüldüğü gibi hep aynı dolaşıklık ($C_{12} = 0.5$) değerinde olmaktadır. Benzer bir durum, Şekil 5.2'den de görüldüğü gibi anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde görülmektedir. Burada da indirgenmiş yoğunluk matrisi ρ_{12} , α ve DM parametrelerine bağlı değildir ancak $\Delta_1 < \Delta_2$ olduğundan ikinci en yakın komşu (NNN) kubitler arası etkileşmeler (NN) kubitler arası etkileşmeleri bir miktar daha fazla baskılar ve sonuçta hep aynı dolaşıklık ($C_{12} = 0.49$) değerinde olur. Anizotropi parametreleri $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ değerlerinde olduğunda ise Şekil 5.3'den de görüldüğü gibi indirgenmiş yoğunluk matrisi ρ_{12} sadece α 'ya bağlıdır (Şekil 5.3). α 'nın işaretinden dolayı NNN kubitler arası etkileşmelerin FM veya AFM olmasına bağlı olmaksızın, $|\alpha|$ arttıkça NNN kubitler arası etkileşmeler artar. Bu artış, NN kubitler arası etkileşmeyi baskılar ve C_{12} azalır. Buna benzer bir durum $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde gözlenir (Şekil 5.4). Burada da dolaşıklık α 'ya bağlı olarak değişir ancak $\Delta_1 > \Delta_2$ olduğundan NNN kubitler arası etkileşmeler NN kubitler arası etkileşmeleri daha az baskılar ve bunun sonucunda C_{12} biraz daha büyük değerler alarak azalır.



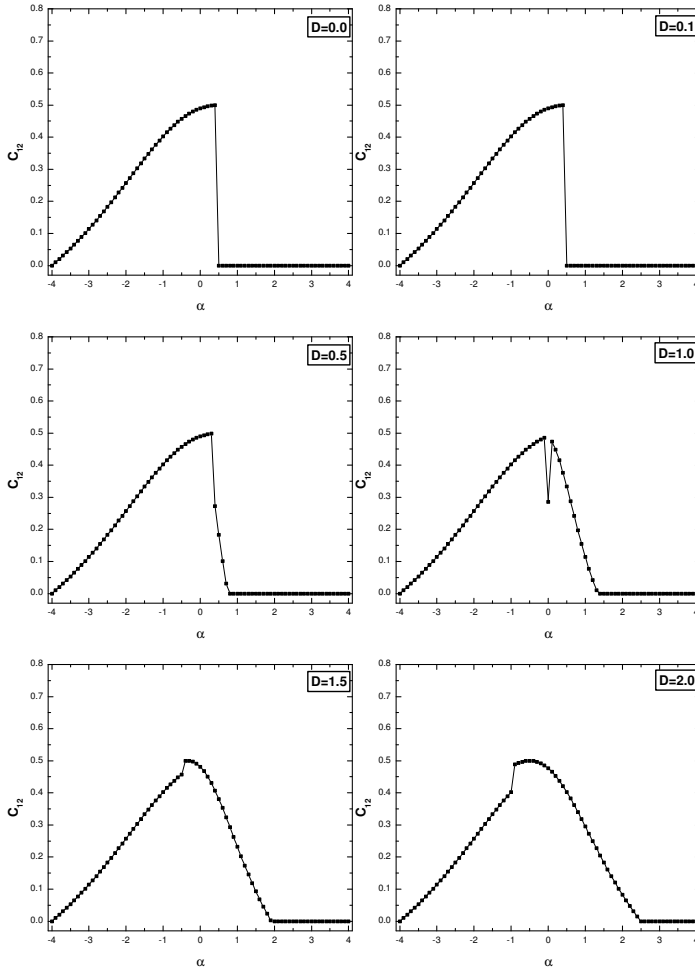
Şekil 5.1. En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

$4J\alpha > \gamma - \phi$ değerleri için sistemimizin taban durumu $|\psi_{15}\rangle$ kuantum durumu olur. Sistemimiz bu taban durumunda bulunurken, NN kubitlere ait indirgenmiş yoğunluk matrisi $\tilde{\rho}_{12}$, α ve DM parametrelerine bağlı olur. Bu nedenle dolaşıklık da α ve DM parametrelerine bağlı olarak değişir. NN kubitlerin dolaşıklıklarına ait tüm şekillerden (Şekil 5.1.-Şekil 5.4.) $D = 0.0$ ve $D = 0.1$ gibi, DM etkileşmesinin



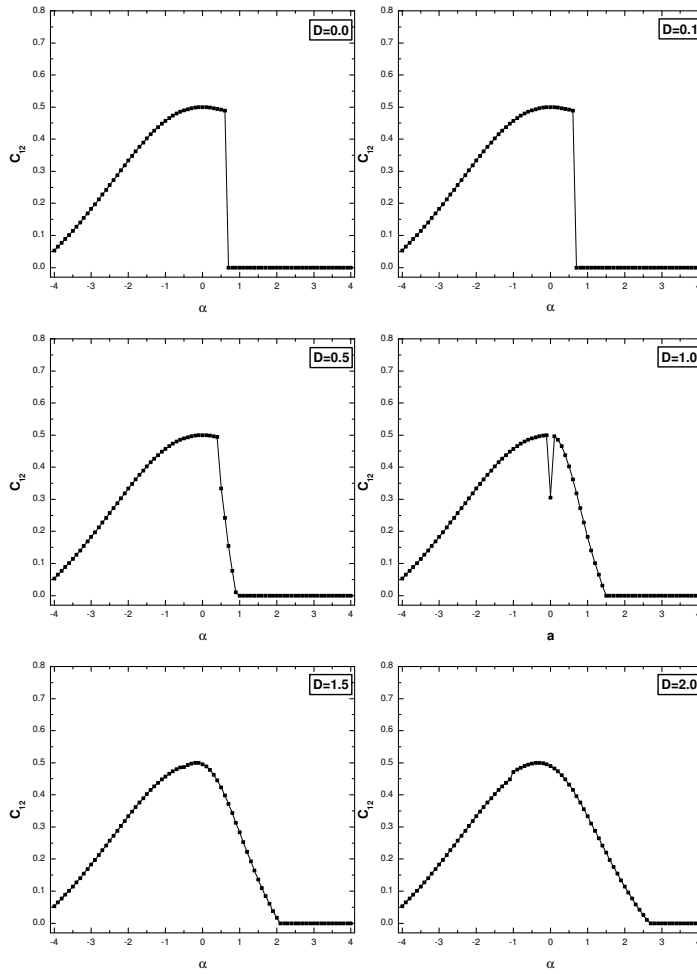
Şekil 5.2. En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

küçük değerlerinde dolaşıklık oluşmadığı görülür ancak $D \geq 0.5$ için bazı α değerlerinde dolaşıklık oluşur. Burada da NNN kubitler arası etkileşmelerin FM veya AFM olmasına bağlı olmaksızın, $|\alpha|$ arttıkça NNN kubitler arası etkileşmeler artar. Bu artış NN kubitler arası etkileşmeleri baskılar ve sonuçta C_{12} azalır. Fakat sisteme DM etkileşmesinin eklenmesiyle dolaşıklık bir miktar artar yani aynı α değerleri için DM etkileşmesi arttıkça dolaşıklık artar çünkü



Şekil 5.3. En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

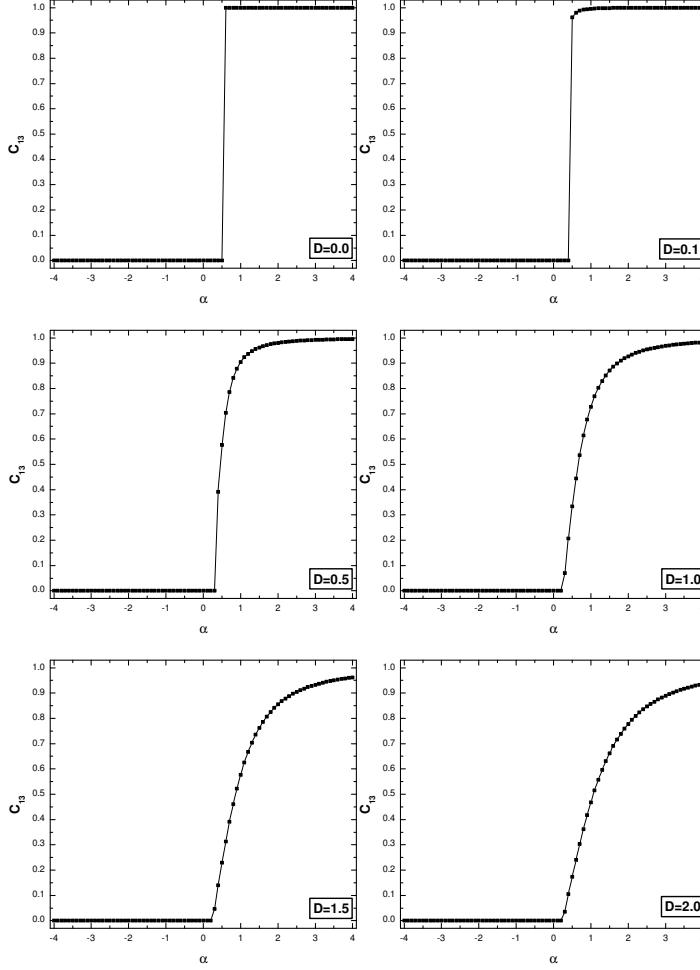
DM etkileşmesinin eklenmesi NNN kubitler arası etkileşmelerin NN kubitler arası etkileşmeler üzerindeki baskılayıcı etkisini bir miktar azaltır. Bu davranışlar anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.1) ve $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.3) değerlerinde gözlenir. Bunun yanında anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.2) değerleri ve $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.4) değerlerinde de benzer davranışlar vardır. $\Delta_1 < \Delta_2$ olduğunda daha önceden bahsettiğimiz



Şekil 5.4. En yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

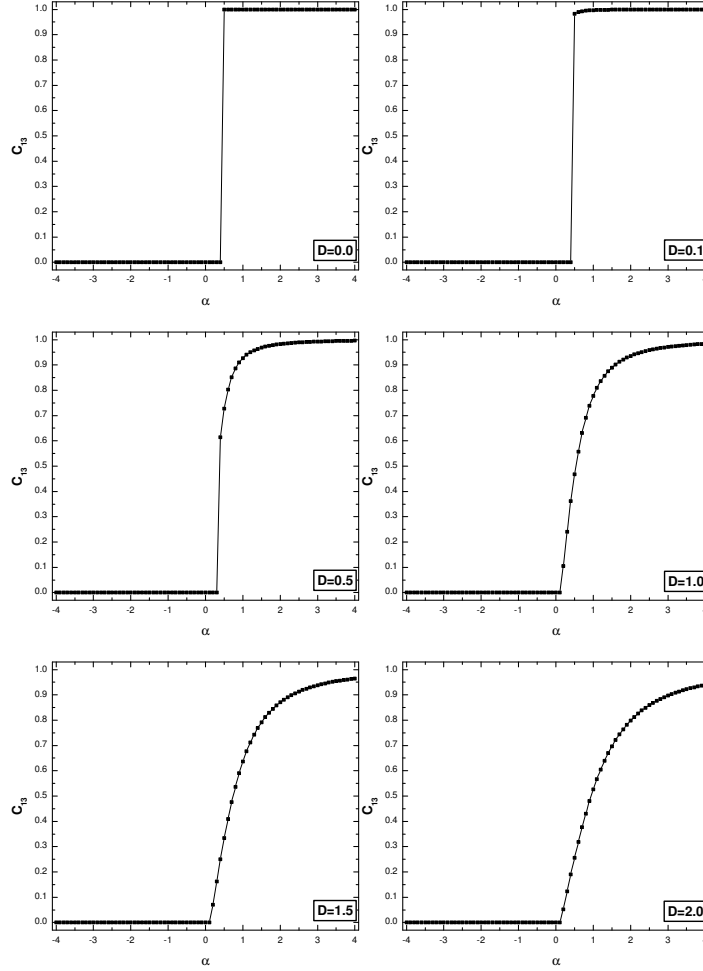
gibi NNN kubitler arası etkileşmeler, NN kubitler arası etkileşmeleri bir miktar daha fazla baskılar ve C_{12} , belli α ve DM değerlerinde biraz daha düşük değerler alır. Bununla beraber $\Delta_1 > \Delta_2$ olduğunda ise NNN kubitler arası etkileşmeler NN kubitler arası etkileşmeleri daha az baskılar ve bunun sonucunda C_{12} , belli α ve DM değerlerinde daha büyük değerler alır. $4J\alpha = \gamma - \phi$ değerinde ise sistemin taban durumu $|\psi_{13}\rangle$ ve $|\psi_{15}\rangle$ kuantum durumlarının çakışık olduğu dejenere durum olur.

Bu dejenere taban durumu için NN kubitlere ait indirgenmiş yoğunluk matrisi $\bar{\rho}_{12}$, Δ_1 , Δ_2 , α ve DM parametrelerine bağlı olarak değişir. Bunun sonucunda da C_{12} bu parametrelerin aldıkları değerlere bağlı olarak sıfır veya diğer taban durumlardaki hesaplamalardan daha küçük değerler almıştır.



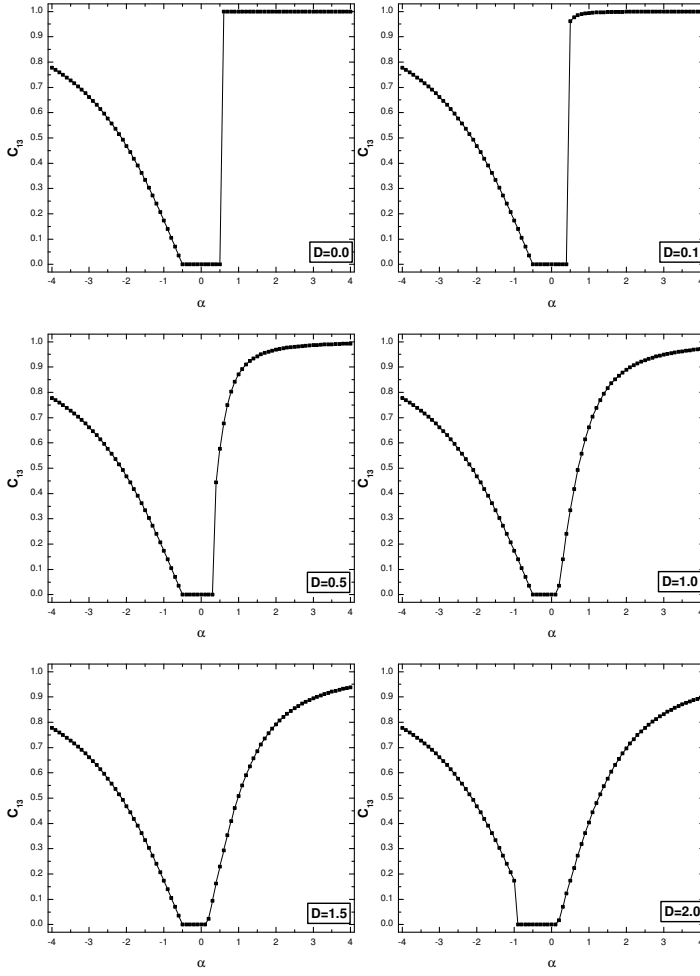
Şekil 5.5. İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

Şimdi ikinci en yakın komşu (NNN) çiftlerinin dolaşıklıklarına bakalım. Daha öncede belirttiğimiz gibi $4J\alpha < \gamma - \phi$ değerleri için sistemimiz $|\psi_{13}\rangle$ taban durumunda bulunur. Sistemimiz bu taban durumundayken $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ anizotropi değerlerinde (Şekil 5.5)



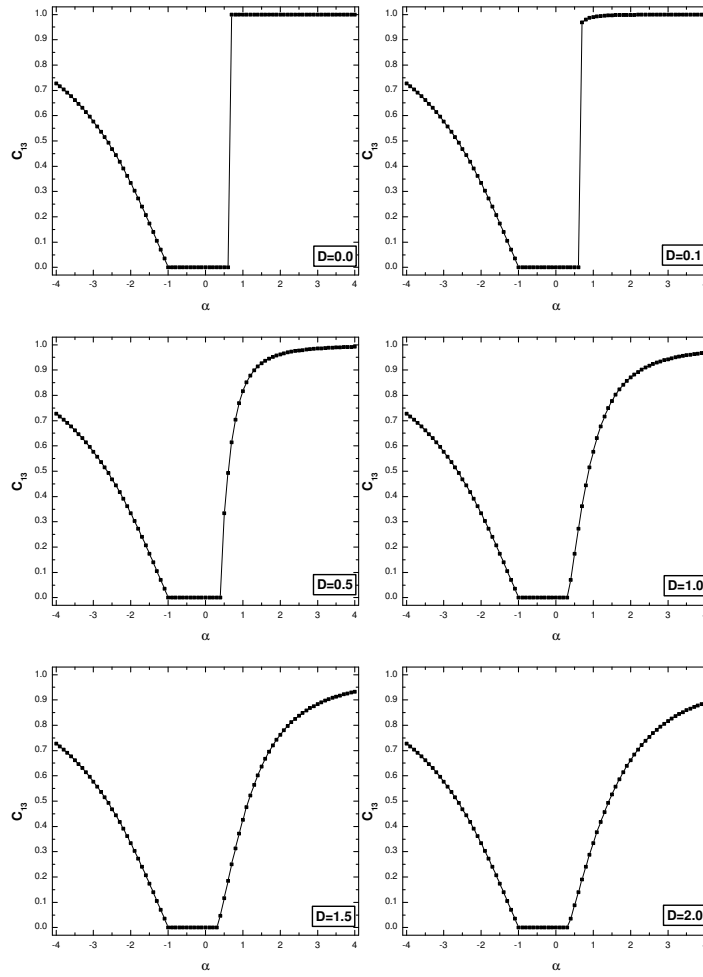
Şekil 5.6. İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

NNN kubitlere ait indirgenmiş yoğunluk matrisi ρ_{13} , α ve DM parametrelerinden bağımsız oldukları için NNN kubitlerin dolaşıklığı hep aynı değerde ($C_{13} = 0.0$)



Şekil 5.7. İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

olur. Anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerleri için de benzer bir durum görülür (Şekil 5.6). Burada $\Delta_1 < \Delta_2$ olması NNN kubitler arası etkileşmeler üzerinde bir etki yapmaz böylece C_{13} değerlerinde bir değişiklik gözlenmez. $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ değerlerinde ise indirgenmiş yoğunluk matrisi ρ_{13} sadece α 'ya bağlıdır. α 'nın işaretinden dolayı NNN kubitler arası etkileşmelerin AFM veya FM olmasına bağlı olmaksızın, $|\alpha|$ arttıkça NNN kubitler arası etkileşmeler artar



Şekil 5.8. İkinci en yakın komşu kubitler için taban durum dolaşıklığının $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D , DM etkileşmesi, değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

ve bunun sonucunda C_{13} artar (Şekil 5.7). Aynı durum anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde de görülür (Şekil 5.8). Ancak burada $\Delta_1 > \Delta_2$ olduğu için NN kubitler arası etkileşmeler NNN kubitler arası etkileşmeleri bir miktar baskılar bunun sonucunda α arttıkça C_{13} daha küçük değerler olarak artar. $4J\alpha > \gamma - \phi$ değerleri için sistemimiz $|\psi_{15}\rangle$ taban durumunda bulunur. Sistemimiz bu taban durumunda bulunurken NNN kubitlere ait indirgenmiş

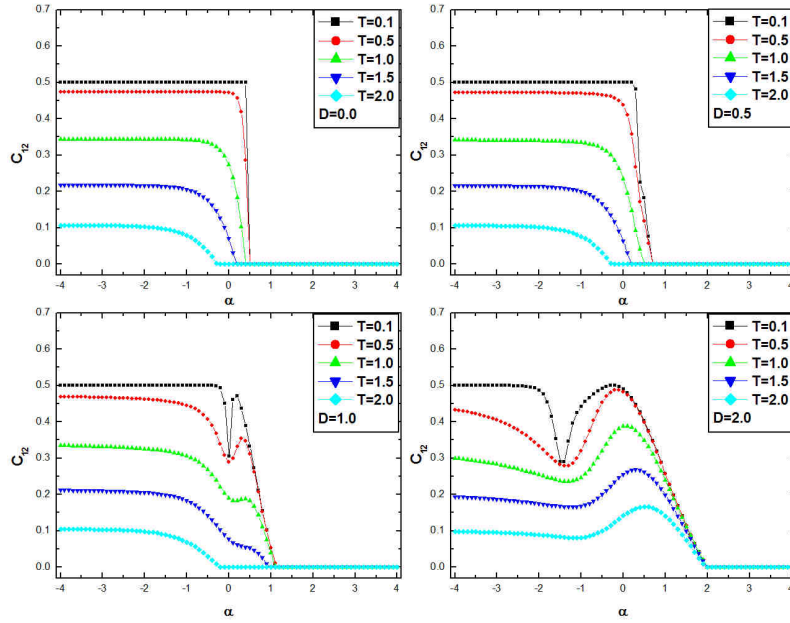
yoğunluk matrisi $\tilde{\rho}_{13}$, α ve DM parametrelerine bağlıdır bunun sonucunda C_{13} , α ve DM parametrelerine bağlı olarak değişir. NNN kubitlerin dolaşıklıklarına ait tüm şekillerden (Şekil 5.5-Şekil 5.8) DM etkileşmesinin $D = 0.0$ ve $D = 0.1$ değerleri için bir α_c kritik değerinden sonra maksimum dolaşıklık oluştuğu görülür. $D \geq 0.5$ değerleri için ise α arttıkça NNN kubitler arası etkileşmeler artar ve bundan dolayı C_{13} artar. Bunun yanında DM etkileşmesinin artması C_{13} değerlerinde bir miktar azalmaya neden olur. Ancak DM etkileşmesi ile α arasındaki bu rekabet nedeniyle DM 'nin azaltıcı etkileri α 'nın artırıcı etkileri ile telafi (compansate) olur ve bunun sonucu C_{13} değerinde çok fazla azalma gözlenmez. Bu davranışlar anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.5) ve $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.7) değerleri içinde gözlenir. Bunun yanında $\Delta_1 = 1.0$, $\Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.8) değerlerinde ve $\Delta_1 = 0.5$, $\Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.6) değerlerinde de benzer sonuçlara rastlanır. Burada $\Delta_1 > \Delta_2$ olduğunda NNN kubitler arası etkileşmeler NN kubitler arası etkileşmeler tarafından bir miktar baskılanacağından C_{13} , bazı α ve DM değerleri için daha küçük değerler alır. $\Delta_1 < \Delta_2$ olduğunda ise böyle bir baskılama olmaz ve C_{13} daha büyük değerler alır. $4J\alpha = \gamma - \phi$ değerlerinde ise sistem taban durumu $|\psi_{13}\rangle$ ve $|\psi_{15}\rangle$ kuantum durumlarının çakışık olduğu dejenere durumdadır. Bu dejenere taban durum için NNN kubitlere ait indirgenmiş yoğunluk matrisi $\bar{\rho}_{13}$, Δ_1 , Δ_2 , α ve DM parametrelerine bağlı olarak değişir ancak bu değerler için dolaşıklık oluşmaz ve $C_{13} = 0$ olur.

5.2.2. Isısal Dolaşıklık

Sistem $T = 0$ sıcaklıkta taban durumunda bulunur ve buna ait dolaşıklık taban durum dolaşıklığı olarak isimlendirilir. Ancak sıcaklık arttıkça, sıcaklığa bağlı olarak sistemin diğer uyarılmış durumlarda da bulunma olasılıkları olur. Sonlu sıcaklıklarda sistemin yoğunluk operatörü, taban ve tüm uyarılmış kuantum durumlarının dış çarpımlarının Boltzmann ağırlıkları ile ağırlıklandırılıp toplanması ile elde edilir. Bir başka deyişle sistemin taban ve uyarılmış kuantum

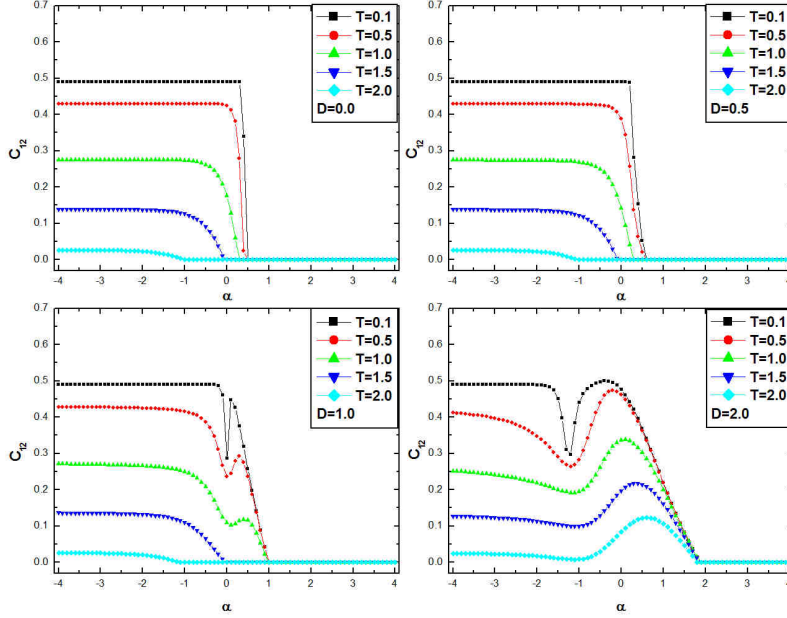
durumları ısısal olarak ağırlıklandırılıp, bu ağırlık faktörleri ile orantılı olarak karıştırılarak bir karışım oluşturulmuştur. Bu karışımın içinde ısısal ağırlıklarına göre dolaşıklığı sıfır ve sıfırdan farklı olan kuantum durumları bulunur.

İlk olarak en yakın komşu (NN) kubit çiftlerinin ısısal dolaşıklıklarına bakalım. Anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.9) değerlerinde, $T = 0.1$ gibi düşük sıcaklıklarda indirgenmiş yoğunluk operatörüne olan en büyük katkı taban durumdan gelir. Bu nedenle çok düşük sıcaklıklarda NN kubitler arası ısısal dolaşıklık taban durum dolaşıklığına benzer bir davranış gösterir. $T > 0.1$ durumunda ise taban durumun yanında diğer uyarılmış durumlardan da dikkate değer katkılar gelir.



Şekil 5.9. En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

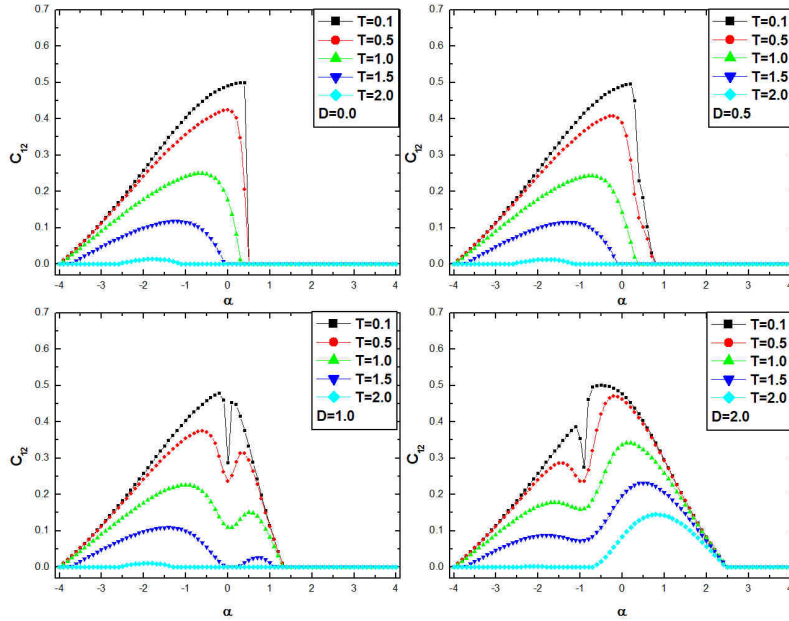
Bu katkılar sıcaklığın yanında tedirginlik parametresi α ve DM parametrelerine de bağlıdır. Yani yüksek sıcaklıklarda taban durum dolaşıklığı ile uyarılmış durumların dolaşıklıkları sıcaklık T , tedirginlik parametresi α ve DM parametrelerine bağlı biçimde istatistiksel olarak karışır.



Şekil 5.10. En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

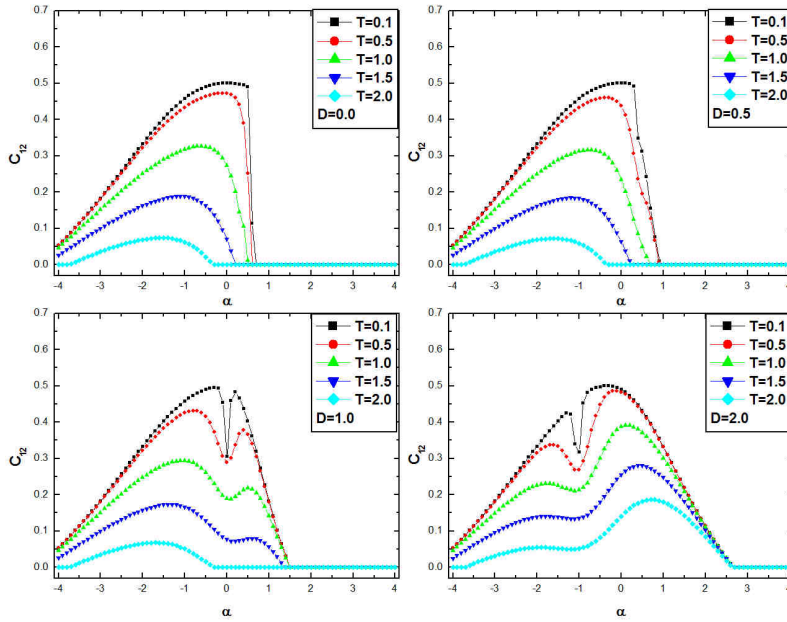
Öncelikle sabit α ve DM değerleri için baktığımızda sıcaklık arttıkça ısısal ağırlıklarına bağlı olarak farklı dolaşıklıklara sahip kuantum durumlarının karışması sonucu NN kubitler arası ısısal dolaşıklığın azaldığı görülür. İkinci olarak sabit sıcaklık ve DM değerleri için baktığımızda ise durum şöyle açıklanabilir: $|\alpha|$ 'nın büyük değerleri için taban durum dolaşıklığı ile daha küçük dolaşıklığa sahip uyarılmış durumlar karıştığı için bu α değerlerinde taban durum dolaşıklığına benzer bir davranış gözlenir. α 'nın daha küçük değerlerinde ise daha

büyük dolaşıklıkla sahip uyarılmış durumlar ile taban durum dolaşıklığı karıştığı için bu α değerlerinde NN kubitler arası ısıl dolaşıklık daha küçük değerler alır. Sabit T ve α değerlerinde grafiklere baktığımızda, DM etkileşme parametresinin artışının $\alpha > 0$ için NN kubitler arası ısıl dolaşıklığı artırırken, $\alpha < 0$ için azalttığını görürüz. Benzer bir davranışı anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.10) değerlerinde de görürüz ancak burada $\Delta_1 < \Delta_2$ olmasından dolayı NNN kubitler arası etkileşmeler NN kubitler arası etkileşmeleri bir miktar baskılayacağından, ısıl dolaşıklık anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ olduğu durumdaki ısıl dolaşıklık değerlerinden biraz daha küçük değerler alır. Anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.11) olması durumunda NN kubitler arası dolaşıklık α , T ve DM parametrelerine bağlı olarak değişir. Bu



Şekil 5.11. En yakın komşu kubitler için ısıl dolaşıklık için $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

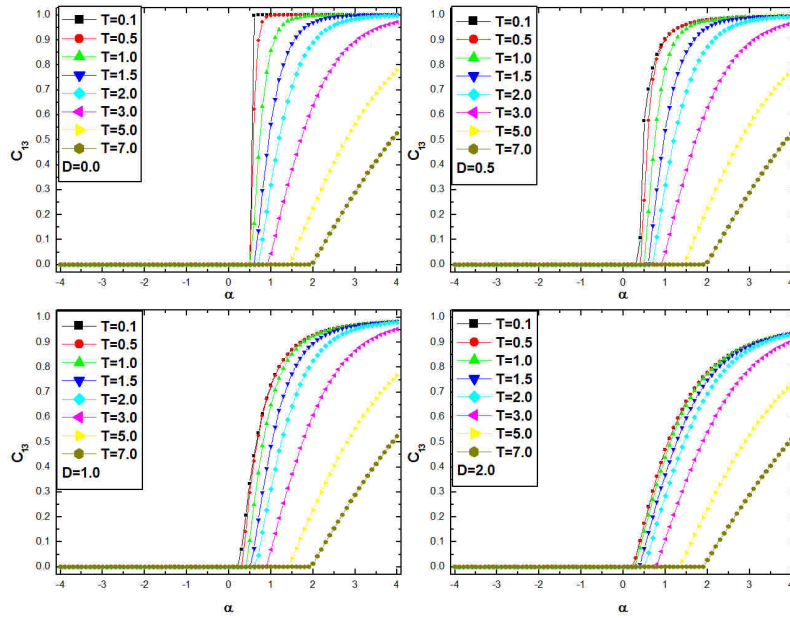
anizotropi değerlerine ait taban durum dolaşıklığı incelemeleri de dikkate alınarak, ısısal durum dolaşıklığının T sıcaklığının yanında α ve DM parametrelerine daha hassas bağlı olduğu söylenebilir. Burada da $T = 0.1$ gibi düşük sıcaklıklarda indirgenmiş yoğunluk operatörüne olan en büyük katkı taban durumdan geldiği için NN kubitler arası dolaşıklık anizotropi parametrelerinin bu değerlerindeki taban durum dolaşıklığına benzer bir davranış gösterir. Ayrıca $T > 0.1$ gibi yüksek sıcaklıklarda ısısal ağırlıklarına bağlı olarak farklı dolaşıklıklara sahip kuantum durumları karıştığı için de NN kubitler arası ısısal dolaşıklık sıcaklık arttıkça azalmıştır.



Şekil 5.12. En yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

Sabit sıcaklık ve DM değerleri için grafiklere baktığımızda ise şöyle bir durum görülür: $|\alpha|$ parametresinin büyük değerlerinde, taban durum ile dolaşıklığı küçük

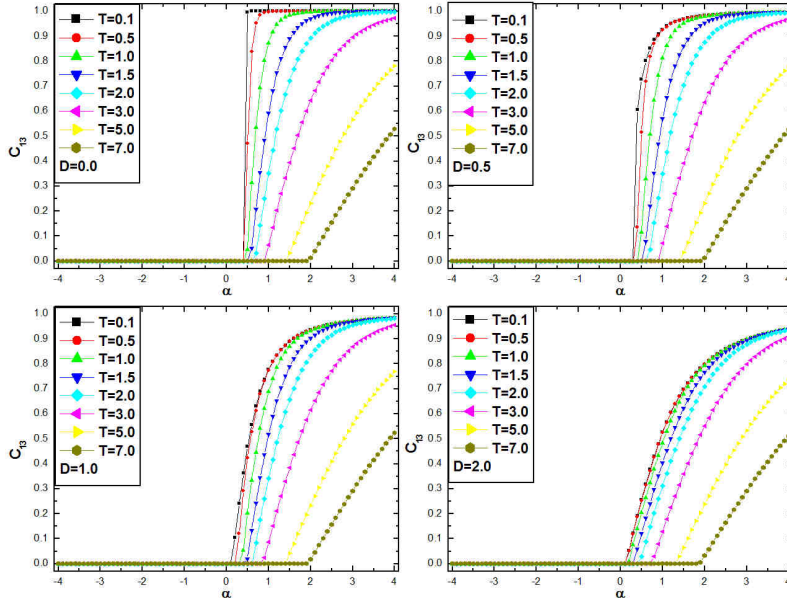
uyarılmış durumlar karıştığı için en büyük katkı taban durumdan gelir ancak taban durum da α 'ya bağlı olduğundan $|\alpha|$ arttıkça NN kubitler arası dolaşıklık azalır. Bunun sonucu yüksek sıcaklıklarda ve büyük tedirginlik parametresi değerlerinde NN kubitler arası ısısal dolaşıklık aynı değerleri alır. Bunun yanında $|\alpha|$ parametresinin küçük değerlerinde daha büyük dolaşıklığa sahip uyarılmış durumlar ile taban durum dolaşıklığı karışır ve bunun sonucu olarak NN kubitler arası ısısal dolaşıklık daha düşük değerler alır. Ayrıca daha önce yapmış olduğumuz incelemelerden de görüldüğü gibi burada da DM etkileşme parametresinin artışı, $\alpha > 0$ değerleri için NN kubitler arası ısısal dolaşıklığı artırırken $\alpha < 0$ değerleri için azaltmıştır.



Şekil 5.13. İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

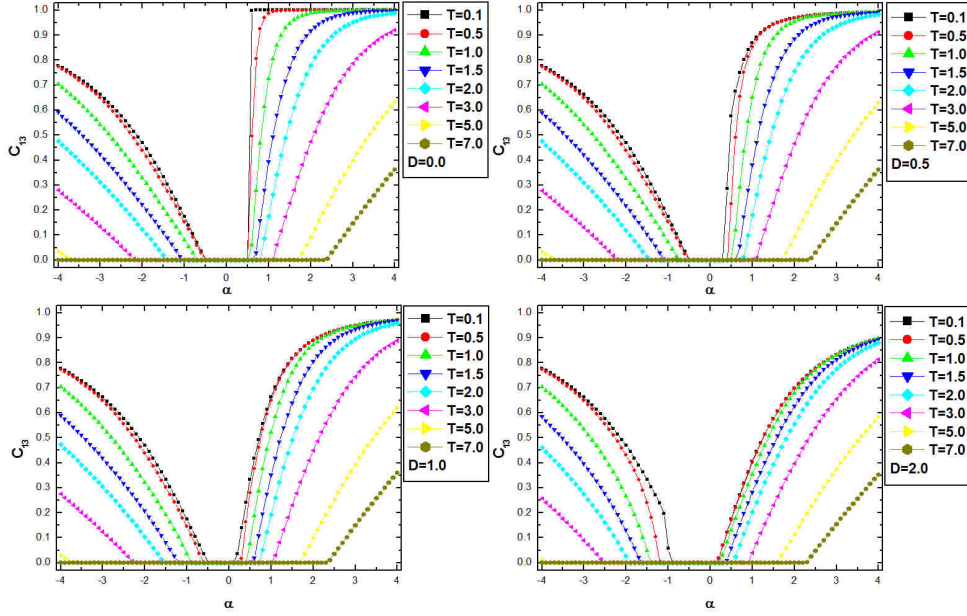
Benzer bir davranışı anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.12) değerlerinde de görürüz ancak burada $\Delta_1 > \Delta_2$ olmasından dolayı NNN kubitler arası etkileşimler NN kubitler arası etkileşimleri bir miktar daha az baskılar ve bunun sonucu olarak NN kubitler arası ısısal dolaşıklık anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ olduğu durumdaki değerlerden biraz daha büyük değerler alır.

İkinci olarak ikinci en yakın komşu (NNN) kubit çiftlerinin ısısal dolaşıklıklarına bakalım. Anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.13) olması durumunda, $T = 0.1$ düşük sıcaklık değerlerinde NNN kubitler arası ısısal dolaşıklık, daha önce NN kubitler arası dolaşıklık için de belirttiğimiz gibi indirgenmiş yoğunluk operatörüne olan en büyük katkının taban durumdan gelmesinden dolayı taban durum dolaşıklığına benzer bir davranış gösterir.



Şekil 5.14. İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α terdirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

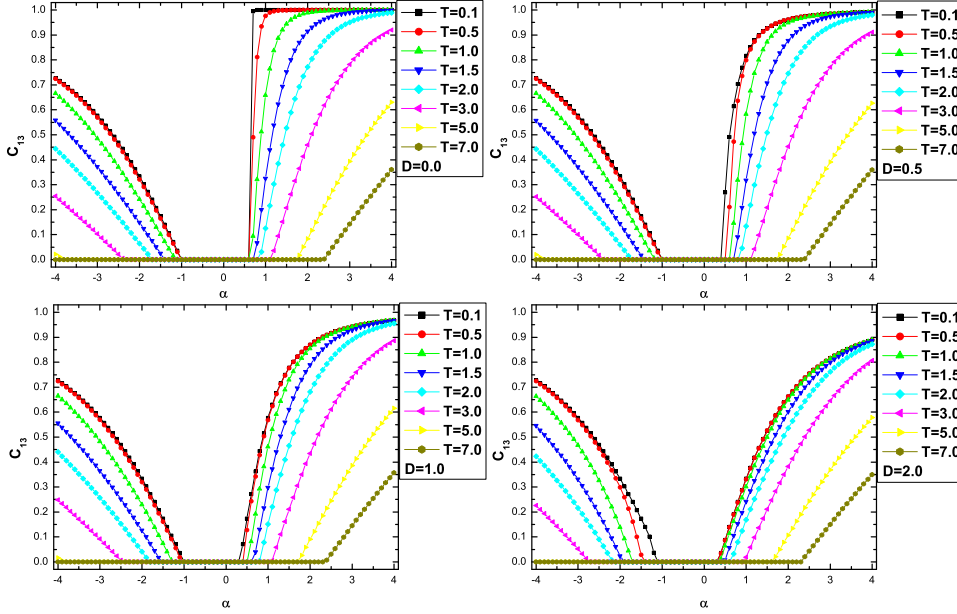
Sabit sıcaklık ve DM değerlerinde $\alpha > 0$ olduğu durumda, α arttıkça NNN kubitler arası etkileşmeler artacağından belli bir α_c kritik tedirginlik değerinden sonra NNN kubitler arası ısıl dolaşıklık monotonik olarak artar.



Şekil 5.15. İkinci en yakın komşu kubitler için ısıl dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

Ayrıca daha öncede belirttiğimiz gibi α ve DM parametrelerinin sabit değerlerinde, sıcaklık arttıkça ısıl ağırlıklarına bağlı olarak farklı dolaşıklıklara sahip kuantum durumları karışacağı için NNN kubitler arası ısıl dolaşıklığın azalması beklenen bir davranıştır ancak sıcaklık parametresinin $0.1 \leq T \leq 2.0$ olduğu durumlarda ve özellikle tedirginlik parametresinin büyük değerlerinde, NNN kubitler arası ısıl dolaşıklığın aynı olduğu görülür. Bunun nedeni sıcaklığın yıkıcı etkilerinin, α 'nın NNN kubitler arasındaki dolaşıklığa olan yapıcı etkileri tarafından dengelenmesidir. Ancak $T > 2.0$ için beklendiği gibi NNN kubitler

arası ısısal dolaşıklık sıcaklık arttıkça azaltmıştır. Bunun yanında DM etkileşme parametresinin sisteme eklenmesi NNN kubitler arası ısısal dolaşıklığı azaltmıştır.



Şekil 5.16. İkinci en yakın komşu kubitler için ısısal dolaşıklığın $J = 1$, $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde farklı D ve farklı sıcaklık değerleri için α tedirginlik parametrelerine göre değişim grafikleri

Buna benzer davranışlar anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ (Şekil 5.14) değerleri için de görülür. Ancak burada $\Delta_1 < \Delta_2$ olduğundan NNN kubitler arası ısısal dolaşıklık anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ olduğu durumdaki ısısal dolaşıklık değerlerine göre biraz daha büyük değerler almıştır. Anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.15) değerlerinde, $T = 0.1$ gibi düşük sıcaklıklarda NNN kubitler arası ısısal dolaşıklığın yine taban durum dolaşıklığına benzer bir davranış gösterdiği gözlenir. Sabit sıcaklık ve DM parametresi değerlerinde grafiklere baktığımızda, daha önce de belirttiğimiz gibi $|\alpha|$ arttıkça NNN kubitler arası ısısal dolaşıklık belli bir kritik α_c tedirginlik değerinden sonra

monotonik olarak artar. Bunun yanında sıcaklık arttıkça ısısal dolaşıklık azalması beklenen bir davranıştır fakat burada da $\alpha > 0$ için sıcaklığın $0.1 < T < 2.0$ olduğu durumda ve özellikle α 'nın büyük değerleri için NNN kubitler arası ısısal dolaşıklık aynı olduğu görülür. Ancak $T > 2.0$ gibi daha yüksek sıcaklıklarda ise ısısal dolaşıklık beklendiği gibi sıcaklıkla azaldığı görülmüştür. $\alpha < 0$ için ise benzer bir davranış $0.1 < T < 0.5$ sıcaklık değerleri için görülür. $T > 0.5$ olduğu durumlarda ise böyle bir davranış gözlenmez ve yine beklendiği gibi sıcaklık arttıkça NNN kubitler arası dolaşıklık azalır. Bunlara ilave olarak DM etkileşmesinin sisteme ilave edilmesi de NNN kubitler arası ısısal dolaşıklığı bir miktar azaltmıştır. Bunlara benzer davranışlar anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ (Şekil 5.16) değerlerinde de görülür. Ancak $\Delta_1 < \Delta_2$ olduğu için NNN kubitler arası ısısal dolaşıklık anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ olduğu durumdakinden biraz daha küçük değerler alır.

6. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu tezde DM etkileşmesine sahip en yakın ve ikinci en yakın komşu etkileşmelerinin bulunduğu dört kubitlik anizotropik Heisenberg XXZ spin sisteminin dolaşıklığı incelenmiştir. Hesaplamalarda sistemin Hamiltoniyeninde bulunan α tedirginlik parametresi, DM etkileşmesi, Δ_1 ve Δ_2 anizotropi parametreleri ve sıcaklık kontrol parametreleri olarak belirlenmiştir. Bu kontrol parametrelerinin birbirlerine göre olan değişimleri dikkate alınarak, en yakın komşu (NN) ve ikinci en yakın komşu (NNN) kubitler arasındaki taban durum ve ısıl dolaşıklıklar üzerinde etkin bir kontrol oluşturulması amaçlanmıştır.

Hesaplamalarda spinler arası etkileşme sabiti $J = 1$ olarak ele alınmış ve bunun sonucu olarak NN kubitler arası etkileşmelerin hep antiferromanyetik olduğu düşünülmüştür. Bunun yanında tedirginlik parametresi α 'nın $-4 \leq \alpha \leq 4$ aralığında değerler aldığı düşünülmüş ve buna göre de NNN kubitler arası etkileşmelerin $\alpha < 0$ için ferromanyetik, $\alpha > 0$ için antiferromanyetik olduğu dikkate alınmıştır. Ayrıca NN kubitler için anizotropi parametresi Δ_1 ve NNN kubitler için anizotropi parametresi Δ_2 olmak üzere, bu parametrelerin 0.5 ve 1.0 değerleri aldığı düşünülerek hesaplamalar yapılmıştır.

İlk olarak $T = 0$ sıcaklıkta taban durum dolaşıklığı incelenmiştir. Yapılan hesaplamalar sonucunda hem NN kubitler arası dolaşıklığın hem de NNN kubitler arası dolaşıklığın anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ ve $\Delta_1 = 0.5$, $\Delta_2 = 1.0$ değerlerinde benzer davranışlar sergilediği görülmüştür. Bu değerler için indirgenmiş yoğunluk operatörünün belli bir α değerine kadar kontrol parametrelerine bağıllık göstermediğinden dolaşıklığın sabit olduğu, bu α değerinden sonra ise kontrol parametrelerine bağlı olarak değiştiği gözlenmiştir. Anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ ve $\Delta_1 = 1.0$, $\Delta_2 = 0.5$ değerlerinde ise hem NN komşu hem de NNN komşu kubitler arası dolaşıklık için benzer

davranışlar gözlenmiştir. Ancak bu sefer tüm α değerleri için dolaşıklık kontrol parametrelerine bağlı olarak değişmiştir. Yapılan bu analizler sonucunda anizotropi parametrelerinin, α ve DM parametrelerine göre dolaşıklık üzerinde daha az etkin olduğu görülmüştür. Ancak sabit α ve DM değerleri için $\Delta_1 > \Delta_2$ olması NN kubitler arası dolaşıklığa katkı yaparken $\Delta_1 < \Delta_2$ olmasının NNN kubitler arası dolaşıklığa katkı yaptığı gözlenmiştir.

α ve DM etkileşmesinin taban durum dolaşıklığı üzerindeki etkilerine baktığımızda ise şu sonuçlar görülmüştür: $|\alpha|$ 'nın artması NNN kubitler arası etkileşmeleri arttırmıştır. Bu artış NN kubitler arası etkileşmeleri baskılamış ve bunun sonucunda NN kubitler arası dolaşıklık azalmıştır. Benzer bir düşünce ile $|\alpha|$ 'nın artışı NNN kubitler arası taban durum dolaşıklığını arttırmıştır. Bunun yanında DM etkileşmesinin artışı NN kubitler arası dolaşıklığı arttırırken NNN kubitler arası dolaşıklığı azaltır. Taban durum dolaşıklığına ait tüm bu sonuçlardan görüldüğü üzere α tedirginlik parametresi ve DM etkileşme parametresi rekabet halinde dolaşıklık üzerinde etkilidirler ancak sonuçlardan da görülebileceği gibi α 'nın taban durum dolaşıklığı üzerinde daha baskın karakterde olduğu sonucu çıkarılabilir.

İkinci olarak sonlu sıcaklıklar için ısısal dolaşıklık hesaplanmıştır. Bu hesaplamalarda sıcaklık da bir kontrol parametresi olarak diğer kontrol parametrelerine eklenir. $T = 0.1$ gibi düşük sıcaklıklarda sonuçlara baktığımızda hem NN hem de NNN kubitler arası dolaşıklık taban durum dolaşıklığına benzer davranışlar gösterir. Bunun nedeni düşük sıcaklıklarda yoğunluk operatörüne gelen en büyük katkının taban durumdan geliyor olmasıdır. Sabit α ve DM değerlerinde sıcaklık arttıkça ısısal ağırlıklarına bağlı olarak farklı dolaşıklıklara sahip kuantum durumları karıştığı için NN kubitler arası dolaşıklık azalır. Sabit sıcaklık ve DM değerleri için bir değerlendirmede bulunacak olursak, taban durum dolaşıklığında olduğu gibi $|\alpha|$ arttıkça dolaşıklık azalır. Sıcaklığın ve α tedirginlik parametresinin

sabit değerleri için sonuçlara bakacak olursak, $\alpha > 0$ için DM arttıkça NN kubitler arası dolaşıklık artarken $\alpha < 0$ için DM arttıkça NN kubitler arası dolaşıklığın azaldığı söylenebilir.

NNN kubitler arasındaki ısısal dolaşıklık için ise sonuçlar şöyle belirtilebilir: $0.1 \leq T \leq 2.0$ sıcaklık değerlerinde ve özellikle α tedirginlik parametresinin büyük değerleri için NNN kubitler arası dolaşıklığın aynı büyük değerleri aldığı görülür. Böylece, bu sıcaklık aralığında NNN kubitler arası dolaşıklık üzerinde α 'nın oldukça etkin olduğu sonucuna varılır. $T > 2.0$ değerleri için ise α 'nın baskın karakteri azalır ve bunun sonucu olarak da sıcaklığın artmasıyla birlikte NNN kubitler arası dolaşıklık azalır. Ancak yüksek sıcaklıklarda bile büyük tedirginlik parametresi değerleri için hala dikkate değer NNN kubitler arası dolaşıklık değerleri gözlenmiştir. Buradan da α 'nın sıcaklıkla rekabet halinde olduğu ve NNN kubitler arası dolaşıklık üzerinde baskın bir karaktere sahip olduğu sonucu çıkarılabilir. Bunlara ilave olarak sabit sıcaklık ve α değerlerinde, DM arttıkça NNN kubitler arası dolaşıklığın azaldığı görülsede sonuçlardan DM parametresinin dolaşıklık üzerinde çok etkin olmadığı söylenebilir. Sıcaklık ve DM parametrelerinin sabit değerleri için ise α arttıkça NNN kubitler arası etkileşmeler artacağı için yine dolaşıklığın arttığı görülür.

Kuantum hesaplama ve enformasyon işlemleri açısından baktığımızda kararlı ve güçlü dolaşık kuantum durumları oluşturmak ve bunları kontrol etmek oldukça önemlidir. Bu nedenle kullandığımız modele ait yapılan tüm analizler sonucunda, ikinci en yakın komşular arası etkileşmelerin varlığı, hem taban durum dolaşıklığı hem de ısısal durum dolaşıklığı açısından önemli olduğu anlaşılmış olup, tedirginlik parametresinin Hamiltoniyende bulunan diğer parametrelere göre daha etkin bir değere sahip olması nedeniyle kullanmış olduğumuz bu modelin dolaşıklık çalışmaları açısından önemli olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] DiVincenzo, D.P. 1995. Quantum Computation. **Science**, vol.270:255-261.
- [2] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M. and Horodecki, K. 2007. Quantum Entanglement. **arXiv:quant-ph702225v2**.
- [3] Akyüz, C. 2008. Düşük Boyutlu Spin Sistemlerinde Kuantum Dolaşıklık. Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İzmir.
- [4] Alberberio, S. and Fei, S.M. 2000. Teleportation of general finite-dimensional quantum systems. **Physics Letters A**, vol.276:8-11.
- [5] D'Ariano, G.M., Lo Presti, P. and Sacchi, M.F. 2000. Bell measurements and observables. **Physics Letters A**, vol.272, 1-2:32-38.
- [6] Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. 1999. General teleportation channel, singlet fraction and quasidistillation. **Physics Review A**, vol.60, 3:1888-1898.
- [7] Alberberio, S., Fei, S.-M. and Yang, W.-L. 2002. Optimal teleportation based on bell measurements. **Physics Review A**, vol.66, 1, Article ID012301:4 pages.
- [8] Bose, S., Vedral, V. and Knight, P.L. 1998. Multiparticle generalization of entanglement swapping. **Physics Review A**, vol.57, 2:822-829.
- [9] Bose, S., Vedral, V. and Knight, P.L. 1999. Purification via entanglement swapping and conserved entanglement. **Physics Review A**, vol.60, 1:94-197.
- [10] Shi, B.-S., Jiang, Y.-K. and Guo, G.-C. 2000. Optimal entanglement purification via entanglement swapping. **Physics Review A**, vol.62, 5, Article ID054301.
- [11] Hardy, L. and Song, D.D. 2000. Entanglement-swapping chains for general pure states. **Physics Review A**, vol.62, 5, Article ID052315.
- [12] Wang, X. 2001. Entanglement in the Quantum Heisenberg XY Model. **arXiv:quant-ph101013v2**.
- [13] Zhou, L., Song, H.S., Guo, Y.Q. and Li, C. 2003. Enhanced the Thermal Entanglement in Anisotropic Heisenberg XYZ chain. **arXiv:quant-ph302094v3**.

- [14] Gürkan, Z.N. and Pashaev, O.K. 2008. Two Qubit Entanglement Magnetic Chains With DM Antisymmetric Anisotropic Exchange Interaction. **arXiv:0804.0710v2**.
- [15] Zhang, G.-F. 2007. Thermal Entanglement and Teleportation in a Two Qubit Heisenberg chain with Dzyaloshinski-Moriya Anisotropic Antisymmetric Interaction. **arXiv:quant-ph703019v1**.
- [16] Moriya, T. 1960. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. **Phys. Rev.**, 120(1):91-98.
- [17] Moriya, T. 1960. New mechanism of anisotropic superexchange interaction. **Phys. Rev. Lett.**, 4(5):228-230.
- [18] Dzialoshinskii, I. 1958. A thermodynamic heavy of weak ferromagnetism of antiferromagnetics. **J. Chem. Solid**, 4:241.
- [19] Benenti, G. and Casati, G. 2004. Principles of Quantum Computation and Information Voll. Italy.
- [20] Bennett, C.H. and DiVincenzo, D.P. 2000. Quantum Information and Computation. **Nature**, 404: 247-55.
- [21] Benenti, G. and Casati, G. 2007. Principles of Quantum Computation and Information Voll. Italy.
- [22] Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. 2000. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press., United Kingdom.
- [23] Bell, J.S. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. **Physic Vol 1**, 3:195-200.
- [24] Hill, S. and Wootters, W. K. 1997. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. **Phys. Rev. Lett.**, 78:26, 5022-5025.
- [25] Wootters, W. K. 1998. Entanglement of Formation of an Arbitrary of Two Qubits. **Phys. Rev. Lett.**, 80:10, 2245-2248.
- [26] Yurke, B. and Stoler, D. 1992. Bell's inequality experiments using independent particle sources. **Phys. Rev. Lett. A**, 46(5):2229-2234.
- [27] Zukowski, M., Zeilinger, A., Horne, M.A. and Ekert, A. 1993. Event-ready-detectors Bell experiment via entanglement swapping. **Phys. Rev. Lett.**, 71 (26):4287-4290.

- [28] Bennet, C.H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W.K. 1993. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. **Phys. Rev. Lett.**, vol.70. 13:1895-1899.
- [29] Bennett, C.H. and Wiesner, S.J. 1992. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. **Physics Review Letters**, vol69, 20:2881-2884.
- [30] Mattle, K., Weinfurter, H., Kwigt, P.G. and Zeilinger, A. 1996. Dense coding in experimental quantum communications. **Phys. Rev. Lett.**, 76 (25):4656-4659.
- [31] Ma, X.-S., Herbst, T., Scheidl, T., Wang, D., Kropatschek, S., Naylor, W., Mech, A., Witmann, B., Kefler, J., Anisimova, E., Makarov, V., Jennewein, T., Ursin, R. and Zeilinger, A. 2012. Quantum teleportation using active feed-forward between two Canary Islands. **arXiv:1205.3909v1**
- [32] Boschi, D., Branca, S., De Martini, F., Hardy, L., Popescu, S. 1997. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **arXiv:9710013v1**
- [33] Qian, L. and Fang, J.-X. 2009. Thermal Entanglement of a two-qubit XXZ Heisenberg Chain with Dzialoshinski-Moriya Interaction. **Commun. Theor. Phys.**, 52:817-819.
- [34] Abliz, A. , Cai, J.-T., Zhang, G.-F. and Jin ,G.-S. 2009. Entanglement in a three qubit anisotropic Heisenberg XXZ spin ring Dzyaloshinskii-Moriya Interaction. **J. Physc.B: At. Mol. Opt. Physc.**, 42.
- [35] Gu, S.-J., Li, H. and Lin, H.-Q. 2004. The Entanglement of Heisenberg chain with next-nearest-neighbor interaction. **arXiv:quant-ph/0403026v1**.
- [36] Jafari, R. and Langari, A. 2009. Three Qubit Ground State and Thermal Entanglement of XXZ Model with Dzialoshinkii-Moriya Interaction. **arXiv:0903.2556v1**.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Alev ŞAHINTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi : İzmir 25.10.1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Bildiriler

-Uluslararası

: **Şahintaş, A.** ve Akyüz, C.
Thermal Entanglement of $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ system with
Dzialoshinski-Moriya interaction
TFD 29 Uluslararası Fizik kongresi
5-8 Eylül 2012

-Ulusal

: **Şahintaş, A.** ve Akyüz, C.
DM etkileşmesine sahip $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sisteminin
taban durum dolanıklığının incelenmesi
İYTE , 6 Nisan 2012 ,Poster sunumu
: **Şahintaş, A.** ve Akyüz, C.
DM etkileşmesine sahip dört kubitlik XXZ Heisenberg sisteminin
taban durum dolanıklığının incelenmesi
ADIM Fizik günleri-2 , 25-27 Nisan, Poster sunumu

E-posta Adresi

: sahintasalev@gmail.com

Tarih

: 27.06.2014