T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2015-YL-039

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

Yücel ÖZDAŞ

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Yücel ÖZDAŞ tarafından hazırlanan ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK başlıklı tez, 13.07.2015 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ	MSKÜ Fen Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2015 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

13.07.2015

Yücel ÖZDAŞ

ÖZET

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

Yücel ÖZDAŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER
2015, 39 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin konusu hakkında genel bilgi verilmiş olup ikinci bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanım ve özellikler üzerinde durulmuştur.

Tezin üçüncü bölümü, esnek topoloji ve esnek topolojik uzaylarla ilgili tanımlara ve bu tanımların bazı özelliklerinin incelenmesine ayrılmış ve bu bölümün sonunda esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde esnek fonksiyon ve esnek süreklilik kavramları ve özellikleri incelenmiştir.

Tezin son bölümünde ise esnek yarı-açık kümeler üzerinde durularak özellikleri verilmiş ve bu bölümün sonunda da esnek sürekliliğin bir genişletilmesi olan esnek zayıf süreklilik ve esnek hemen hemen süreklilik kavramları tanımlanarak özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Esnek Küme, Esnek Topolojik Uzaylar, Esnek Kapanış, Esnek İç, Esnek Açık Küme, Esnek Kapalı Küme, Esnek Komşuluk, Esnek Fonksiyon, Esnek Süreklilik

ABSTRACT

CONTINUITY ON SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Yücel ÖZDAŞ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Süleyman GÜLER
2015, 39 pages

This thesis essentially consists of five chapters. In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and in the second chapter, some basic definitions and theorems are given to make the thesis understandable.

In the third chapter of the thesis, the definition of soft topology is given and some basic properties of soft topological spaces are investigated and the definitions of separation axioms are given.

In the fourth chapter, the notions of soft function and soft continuity are given and their main properties are investigated.

In the last part of the thesis, soft semi-open sets are introduced and their properties are given. Moreover, a generalization of soft continuity named soft weak continuity and soft almost continuity are defined and some properties are investigated.

Key Words: Soft Set, Soft Topological Spaces, Soft Closed, Soft Interior, Soft Open Set, Soft Closed Sets, Soft Neighbourhood, Soft Function, Soft Continuous

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER'e; tezin yazımında ve biçimlenmesinde emeği geçen değerli bölüm hocalarıma ve tüm bölüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma, göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Ankara'da 9. Ankara Matematik Günleri sempozyumundaki "Esnek Toplolojik Uzaylarda Süreklilik Üzerine" adlı sözlü bildiri Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından finanse edilmiş ve bu tez Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından, FEF-14031 kod numaralı bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Yücel ÖZDAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

E	Parametrelerin kümesi
(F,E)	Esnek küme
$\tilde{\subset}$	Esnek alt küme
$\urcorner E$	E kümesinin değili
$(F,A)^c = (F^c, \urcorner A)$	(F,A)'nın tümleyeni
Φ	Boş esnek küme
$\tilde{X}$	Evrensel esnek küme
$sint(F,E)$	(F,E)'nin esnek içi
$scl(F,E)$	(F,E)'nin esnek kapanışı
$\tilde{\mathscr{V}}(x)$	x'in tüm esnek komşuluk kümesi
$(F,E)'$	(F,E)'nin yığılma noktası kümesi
$\mathfrak{B}$	Esnek baz
e_F	Esnek nokta
$int^s(F,E)$	Esnek yarı-iç
$cl^s(F,E)$	Esnenk yarı-kapanış

1. GİRİŞ

Esnek kümeler teorisi, Molodtsov [1] tarafından 1999 yılında belirsiz tipteki problemlerin çözümü için matematiksel bir araç olarak, ortaya atılmıştır. Molodtsov ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır. Esnek teori, kısa süre içerisinde mühendislikte, bilgi sistemlerinde, karar verme problemlerinde vb. birçok alanda pratik uygulamaları sayesinde zengin bir potansiyele ulaşmıştır.

Maji, Roy ve Biswas [2] 2001 yılında esnek kümeleri, bulanık kümelere taşıyarak bulanık esnek uzaylarda da birçok çalışmaya imza atmışlardır. 2011 yılında M.Shabir ve M.Naz [3] bir başlangıç evreni ve sabit bir parametre üzerinde esnek topolojik uzay tanımını vererek esnek alt uzay, esnek iç ve esnek ayırma aksiyomları gibi bazı kavramlar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Kharal ve Ahmad aynı yıl esnek sınıflar üzerinde esnek dönüşümler kavramını tanımladılar. 2012 yılında Zorlutuna ve diğ. bazı yeni kavramlar vererek iç nokta ve süreklilik konularının bazı özelliklerini incelemişlerdir. Nazmul ve Samanta 2013 yılında esnek topolojik uzaylarda komşuluk üzerine çalışmalar yapmışlardır. Aynı yıl Aygünoğlu ve Aygün esnek baz kavramını vererek özelliklerini incelemişlerdir.

Esnek yarı-açık küme kavramı Chen [11] ve Husain [12] tarafından ayrı makalelerde tanımlanmış ve özellikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Topolojik uzaylarda süreklilik kavramı çok önemli bir yer tutar. Bu nedenle süreklilik üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış ve sürekliliğin birçok genelleştirilmesi elde edilmiştir. Levine 1961 yılında zayıf sürekli fonksiyon tanımını vermiş ve sonraki çalışmalarında zayıf süreklilik ile ilgili temel teorem ve sonuçlar üzerinde durmuştur. Daha sonra Rose 1984 yılındaki çalışmasında hemen

hemen sürekli fonksiyon tanımını vererek sürekliliğin başka bir genelleştirilmesini elde etmiştir.

Bu tezde esnek küme ve esnek topolojik uzay kavramları ele alınarak özellikleri üzerinde durulmuştur. Esnek süreklilik ve esnek yarı-açık kavramlarından yola çıkılarak esnek topolojik uzaylarda esnek sürekliliğin bir genelleştirilmesi olan esnek zayıf süreklilik ve esnek hemen hemen süreklilik kavramları tanımlanmıştır. Bu yeni tanımladığımız kavramlar üzerinde bazı temel teorem ve sonuçlar incelenmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremlerin yanı sıra, genel olarak konu bütünlüğünü sağlamak amacıyla esnek topolojik uzaylarda sık sık kullanılan bazı kavramlar da ayrıntılarıyla verilecektir.

2.1. Esnek Küme

Tanım 2.1 [1] *X evren, E parametrelerin kümesi ve $P(X)$ X'in kuvvet kümesi olsun. (F,E) çiftine X üzerinde bir esnek küme denir $:\Leftrightarrow F : E \to P(X)$. Diğer bir ifadeyle, esnek küme X'in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen ailesidir.*

Örnek 2.2 (F,E) esnek kümesi, bir A kişisinin satın almayı düşündüğü evlerin özelliklerini tanımlasın. $X = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ evlerin kümesi ve E ={pahalı,güzel,ahşap,ucuz,bahçeli}= $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ karar parametrelerinin kümesi olsun. F dönüşümünü düşünelim.
Örneğin, $F(e_1)$ "pahalı evler" anlamındadır ve fonksiyon değeri
$\{h \in X$:h pahalı ev$\}$ kümesidir. $F(e_1) = \{h_2,h_4\}, F(e_2) = \{h_1,h_3\}, F(e_3) = \emptyset$,
$F(e_4) = \{h_1,h_3,h_5\}, F(e_5) = \{h_1\}$ olsun.
(F,E) ={(pahalı ev,$\{h_2,h_4\}$),(güzel ev,$\{h_1,h_3\}$),
(ahşap ev,$\varnothing$),(ucuz ev,$\{h_1,h_3,h_5\}$),(bahçeli ev,$\{h_1\}$)}.

Tanım 2.3 [2] *(F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun.*
(F,A)'ya (G,B)'nin esnek alt kümesi denir. Eğer
1. $A \subset B$
2. $\forall a \in A$ için $F(a) \subseteq G(a)$ koşullarını sağlıyor ise
$(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 [2] *(F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun. $(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ ve $(G,B) \tilde{\subset} (F,A)$ sağlanıyor ise (F,A) ve (G,B), X üzerinde esnek eşittir denir.*

Tanım 2.5 [2] *$E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. E kümesinin değili $\urcorner E$ ile gösterilir ve $\urcorner E = \{\urcorner e_1, \urcorner e_2, \urcorner e_3, ..., \urcorner e_n\}$'dir. Burada $\urcorner e_i$, her i için e_i'nin değiline eşittir.*

Tanım 2.6 [2] *X üzerindeki (F,A) esnek kümesinin tümleyeni, $(F,A)^c$ ile gösterilir ve $(F,A)^c = (F^c, \urcorner A)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $F^c : \urcorner A \to P(X)$ bir fonksiyon ve $\forall \alpha \in \urcorner A$ için $F^c(\alpha) = X \backslash F(\urcorner \alpha)$, $\forall \alpha \in \urcorner A$'dır. Burada F^c'ye, F'nin esnek tümleyen fonksiyonu denir.*

Tanım 2.7 [2] *(F,A), X üzerinde esnek küme olsun. Eğer, $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ oluyor ise (F,A) esnek kümesine boş esnek küme denir. Boş esnek küme Φ ile gösterilir.*

Tanım 2.8 [2] *X üzerindeki (F,A) esnek kümesine evrensel esnek küme denir $:\Leftrightarrow \forall a \in A$ için $F(a) = X$*
Evrensel esnek küme $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 [2] *X üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesidir $:\Leftrightarrow C = A \cup B$ ve $\forall c \in C$ için*

$$H(c) = \begin{cases} F(c), & c \in A \backslash B \\ G(c), & c \in B \backslash A \\ F(c) \cup G(c), & c \in A \cap B \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$(F,A) \cup (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.10 [8] *X üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. Bu esnek kümelerinin kesişimi (H,C) esnek kümesidir $:\Leftrightarrow C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ için*

$$H(c) = F(c) \cap G(c) \tag{2.1.2}$$

$(F,A) \cap (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.11 [9] *(F,E) ve (G,E) X üzerinde iki esnek küme olsun. O zaman*

1. $((F,E)\cup(G,E))^c = (F,E)^c \cap (G,E)^c$

2. $((F,E)\cap(G,E))^c = (F,E)^c \cup (G,E)^c$.

İspat. 1. $(F,E)\cup(G,E) = (H,E)$ olsun. Burada $H(e) = F(e)\cup G(e)$, $\forall e \in E$. O zaman

$(H(e))^c = (F(e)\cup G(e))^c$

$(H(e))^c = (F(e))^c \cap (G(e))^c$

$(H(e))^c = F^c(e) \cap G^c(e)$, $\forall e \in E$

Böylece, $(H,E)^c = (F,E)^c \cap (G,E)^c$ elde edilir. Buradan

$((F,E)\cup(G,E))^c = (F,E)^c \cap (G,E)^c$

2. $(F,E)\cap(G,E) = (H,E)$ olsun. Burada $H(e) = F(e)\cap G(e)$, $\forall e \in E$. O zaman

$(H(e))^c = (F(e)\cap G(e))^c$

$(H(e))^c = (F(e))^c \cup (G(e))^c$

$(H(e))^c = F^c(e) \cup G^c(e)$, $\forall e \in E$

Böylece, $(H,E)^c = (F,E)^c \cup (G,E)^c$ elde edilir. Buradan

$((F,E)\cap(G,E))^c = (F,E)^c \cup (G,E)^c$ olur. □

Tanım 2.12 [9] *(F,E) ve (G,E), X üzerinde iki esnek küme olsun. Esnek fark kümesi $(H,E) = (F,E)\backslash(G,E)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:*

$H(e) = F(e)\backslash G(e)$, $\forall e \in E$

Tanım 2.13 [9] *(F,E), X üzerinde esnek küme ve $x \in X$ olsun. $x \in (F,E)$ (yani x'in (F,E) esnek kümesine ait olması demek) $x \in F(\alpha)$, $\forall \alpha \in E$ dir.*

Herhangi $x \in X$ için, $x \notin (F,E) \Rightarrow x \notin F(\alpha), \exists \alpha \in E$.

Tanım 2.14 [9] *Herhangi $x \in X$ için (x,E) esnek küme ifade eder. Öyleki $\forall \alpha \in E$ için $x(\alpha) = x$.*

3. ESNEK TOPOLOJİ VE ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde esnek topoloji ve esnek topolojik uzaylarla ilgili tanımlara ve bu tanımların bazı özelliklerinin incelenmesine yer verdik. Daha sonra esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarının tanımlarını verip bu tanımların bazı özelliklerinden bahsettik.

3.1. Esnek Topoloji

Tanım 3.1 [3] *$X \neq \emptyset$ bir küme τ ailesi X üzerindeki esnek kümelerin bir koleksiyonu ve E de boştan farklı parametrelerin kümesi olsun. Eğer τ aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise τ'ya esnek topoloji denir.*

1. $\Phi, \widetilde{X} \in \tau$

2. $(F,E),(G,E) \in \tau \Rightarrow (F,E) \cap (G,E) \in \tau$

3. $\forall i \in I$ *için* $(F_i,E) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I}(F_i,E) \in \tau.$

(X,τ,E) *üçlüsüne de X üzerinde esnek topolojik uzay denir.*

Örnek 3.2 *$X = \{x,y,z,t,k\}$, $E = \{e_1,e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)\}$ olmak üzere*

$F_1(e_1) = \{x\}$ $\quad$ $F_1(e_2) = \{x,z\}$

$F_2(e_1) = \{x,z\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = \{x,y,z\}$

$F_3(e_1) = \{x,y,z,t\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = \{x,y,z,t,k\}$ *şeklinde tanımlı olsunlar. Bu durumda (X,τ,E) bir esnek topolojik uzaydır.*

1. $\Phi, \widetilde{X} \in \tau$

2. $(F_1,E) \cap (F_2,E) = (F_1,E) \in \tau$

$(F_1,E) \cap (F_3,E) = (F_1,E) \in \tau$

$(F_2,E) \cap (F_3,E) = (F_2,E) \in \tau$

3. $(F_1,E) \cup (F_2,E) = (F_2,E) \in \tau$

$(F_1,E) \cup (F_3,E) = (F_3,E) \in \tau$

$(F_2,E)\cup(F_3,E)=(F_3,E)\in\tau$

$(F_1,E)\cup(F_2,E)\cup(F_3,E)=(F_1,E)\in\tau.$

Tanım 3.3 [3] (X,τ,E) *bir esnek topolojik uzay olmak üzere* τ*'nun elemanlarına* X *evreninde esnek açık küme denir.*

Tanım 3.4 [3] (X,τ,E) *esnek topolojik uzay ve* (F,E)*,* X *üzerinde esnek küme olsun. Eğer* $(F,E)^c\in\tau$ *ise* (F,E) *esnek kümesine* X *evreninde esnek kapalı küme denir.*

Tanım 3.5 [3] X *evren ve* E *parametrelerin kümesi ve* $\tau=\{\Phi,\widetilde{X}\}$ *esnek topolojidir.* τ*'ya* X *üzerinde esnek kaba topoloji denir ve* (X,τ,E) *üçlüsüne esnek kaba uzay denir.*

Tanım 3.6 [3] X *evren ve* E *parametrelerin kümesi ve* τ*,* X *üzerinde tanımlanabilen bütün esnek kümelerin koleksiyonu olsun. O zaman* τ*'ya* X *üzerinde esnek ayrık topoloji ve* (X,τ,E) *üçlüsüne* X *üzerinde esnek ayrık uzay denir.*

Teorem 3.7 [3] (X,τ,E)*,* X *üzerinde esnek topolojik uzay olsun.*

$$\tau_\alpha=\{F(\alpha)|(F,E)\in\tau\}$$

kümesi, $\forall\alpha\in E$ *için* X *üzerinde topoloji tanımlar.*

İspat. Tanımdan $\forall\alpha\in E$ için $\tau_\alpha=\{F(\alpha)|(F,E)\in\tau\}$ dır.

1. $\Phi,\widetilde{X}\in\tau$ buradan $\emptyset,X\in\tau_\alpha$

2. $\{F_i(\alpha)|i\in I\}\subset\tau_\alpha$

$\Rightarrow(F_i,E)\in\tau,\quad\forall i\in I$

$\Rightarrow\bigcup_{i\in I}(F_i,E)\in\tau\Rightarrow\bigcup_{i\in I}F_i(\alpha)\in\tau_\alpha$

3. $F(\alpha),G(\alpha)\in\tau_\alpha\Rightarrow(F,E),(G,E)\in\tau\Rightarrow(F,E)\cap(G,E)\in\tau$

$\Rightarrow F(\alpha) \cap G(\alpha) \in \tau$

Böylece τ_α, $\forall \alpha \in E$ için X üzerinde topoloji tanımlar. $\square$

Örnek 3.8 $X = \{h_1, h_2\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ olmak üzere

$F_1(e_1) = X$ $\quad$ $F_1(e_2) = \{h_2\}$

$F_2(e_1) = \{h_1\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = X$

$F_3(e_1) = \{h_1\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = \{h_2\}$ şeklinde tanımlı olsunlar. Bu durumda (X, τ, E) bir esnek topolojik uzaydır. e_1 ve e_2 ye bağlı topolojiler

$$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_1\}\}$$

$$\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_2\}\}$$

şeklinde elde edilir. τ_{e_1} ve τ_{e_2}, X üzerinde birer topolojidirler.

Örnek 3.9 $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve
$\tau = \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ olmak üzere

$F_1(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2) = \{h_1\}$

$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$

$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$

$F_4(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$ şeklinde tanımlı olsunlar. Bu durumda (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay değildir.

Çünkü $(F_2, E) \cup (F_3, E) = (G, E)$ burada $G(e_1) = X$ ve $G(e_2) = \{h_1, h_2\}$'dir. (G, E), τ'nun elemanı değildir. Diğer taraftan

$$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

$$\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

şeklinde elde edilir. Bunlar ise X üzerinde birer topolojidirler.

Teorem 3.10 [3] (X,τ_1,E) *ve* (X,τ_2,E)*, iki esnek topolojik uzay ise* $(X,\tau_1\cap\tau_2,E)$ *de X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır.*

İspat. 1. $\Phi,\widetilde{X}\in\tau_1\cap\tau_2$

2. $\{(F_i,E)|i\in I\}\subset\tau_1\cap\tau_2 \Rightarrow (F_i,E)\in\tau_1,\ (F_i,E)\in\tau_2, \forall i\in I$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(F_i,E)\in\tau_1$ ve $\bigcup_{i\in I}(F_i,E)\in\tau_2$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(F_i,E)\in\tau_1\cap\tau_2$

3. $(F,E),(G,E)\in\tau_1\cap\tau_2$

$\Rightarrow (F,E),(G,E)\in\tau_1$ ve $(F,E),(G,E)\in\tau_2$

$\Rightarrow (F,E)\cap(G,E)\in\tau_1$ ve $(F,E)\cap(G,E)\in\tau_2$

$\Rightarrow (F,E)\cap(G,E)\in\tau_1\cap\tau_2$

Böylece $\tau_1\cap\tau_2, X$ üzerinde bir esnek topoloji ve böylece $(X,\tau_1\cap\tau_2,E), X$ üzerinde bir esnek topolojik uzaydır. □

X üzerindeki herhangi iki esnek topolojinin birleşimi, X üzerinde bir esnek topoloji olmayabilir. Şimdi aşağıdaki örnekte bunu görelim.

Örnek 3.11 $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$, $\tau=\{\Phi,\widetilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$, $\tau_2=\{\Phi,\widetilde{X},(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E)\}$ esnek topolojik uzaylar olsunlar. Burada

$F_1(e_1)=\{h_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2)=\{h_1\}$

$F_2(e_1)=\{h_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2)=\{h_1,h_2\}$

$F_3(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\quad$ $F_3(e_2)=\{h_1\}$

$F_4(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2)=\{h_1,h_3\}$ ve

$G_1(e_1)=\{h_2\}$ $\quad$ $G_1(e_2)=\{h_1\}$

$G_2(e_1)=\{h_2,h_3\}$ $\quad$ $G_2(e_2)=\{h_1,h_2\}$

$G_3(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\quad$ $G_3(e_2)=\{h_1,h_3\}$

$G_4(e_1)=\{h_2\}$ $\quad$ $G_4(e_2)=\emptyset$

şeklinde tanımlansınlar. Şimdi,

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_1 \cup \tau_2 \\ &= \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), (F_4,E), (G_1,E), \\ &\quad (G_2,E), (G_3,E), (G_4,E)\}\end{aligned}$$

Eğer burada (F_2,E) ve (G_3,E) esnek kümelerini alırsak,

$$(F_2,E) \cup (G_3,E) = (H,E)$$

O zaman,

$$\begin{aligned}H(e_1) &= F_2(e_1) \cup G_3(e_1) \\ &= \{h_2\} \cup \{h_1,h_2\} \\ &= \{h_1,h_2\} \\ H(e_2) &= F_2(e_2) \cup G_3(e_2) \\ &= \{h_1,h_2\} \cup \{h_1,h_3\} \\ &= X\end{aligned}$$

ama $(H,E) \notin \tau$. Böylece τ, X üzerinde bir esnek topoloji değildir.

Tanım 3.12 [10] *(X,τ,A) bir esnek topolojik uzay ve τ'nun bir alt koleksiyonu $\mathfrak{B}$ olsun. Eğer τ'nun her bir elemanı $\mathfrak{B}$' nin elemanlarının birleşimi şeklinde ifade edilebiliyor ise $\mathfrak{B}$ τ için bir esnek bazdır denir.*

Örnek 3.13 *$X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e\}$ ve τ, X üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin ailesi olmak üzere (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. O halde $\mathfrak{B} = \{(e,h_1),(e,h_2),(e,h_3)\}$, τ için bir baz teşkil eder.*

Tanım 3.14 [3] *(X,τ,E), bir esnek topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir esnek küme olsun. (F,E) esnek kümesinin içi, $sint(F,E)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki* *gibi tanımlanır:*

$$sint(F,E)=\bigcup\{(G,E)|(G,E)\in\tau \;\; ve \;\; (G,E)\,\widetilde{\subset}\,(F,E)\}.$$

Örnek 3.15 $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\Phi,\widetilde{X},(F,E)\}$ olmak üzere (F,E) ve (G,E) aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\qquad F(e_2)=\{h_1,h_3\}$

$G(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\qquad G(e_2)=X$. O zaman

$$sint(G,E)=(F,E)$$

olur. Şimdi bir esnek kümenin içi ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.16 [3] *(X,τ,E), bir esnek topolojik uzay, (F,E) ve (G,E), X üzerinde esnek kümeler olsun. O zaman*

1. $sint\Phi=\Phi$ ve $sint\widetilde{X}=\widetilde{X}$

2. $sint(F,E)\,\widetilde{\subset}\,(F,E)$

3. (F,E) esnek açık küme $\Leftrightarrow sint(F,E)=(F,E)$

4. $sint(sint(F,E))=sint(F,E)$

5. $(F,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)\Rightarrow sint(F,E)\,\widetilde{\subset}\,sint(G,E)$

6. $sint((F,E)\cap(G,E))=sint(F,E)\cap sint(G,E)$

7. $sint(F,E)\cup sint(G,E)\,\widetilde{\subset}\,sint((F,E)\cup(G,E))$ dir.

İspat. 1. Boş esnek kümenin kapsadığı en büyük açık küme kendisidir. Bundan dolayı $sint\Phi=\Phi$ ve evrensel esnek kümenin kapsadığı en büyük açık küme kendisidir. Bundan dolayı $sint\widetilde{X}=\widetilde{X}$

2. $x\in sint(F,E)$

$\Rightarrow x\in\bigcup\{(G,E)|(G,E)\in\tau \;\; ve \;\; (G,E)\,\widetilde{\subset}\,(F,E)\}$

$\Rightarrow x\in(F,E)$

$\Rightarrow sint(F,E)\,\widetilde{\subset}\,(F,E)$

3. $(:\Rightarrow)$

(F,E) esnek açık küme olsun.

$x \in sint(F,E)$

$\Rightarrow x \in \bigcup\{(G,E)|(G,E) \in \tau \;\; ve \;\; (G,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)\}$

$\Rightarrow (F,E) \in \tau$ ve $(F,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)$ olduğundan

$\Rightarrow \bigcup\{(G,E)|(G,E) \in \tau \;\; ve \;\; (G,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)\} = (F,E)$

$\Rightarrow x \in (F,E)$

$(\Leftarrow:)$

$sint(F,E) = (F,E)$ olsun.

$\Rightarrow sint(F,E) = \bigcup\{(G,E)|(G,E) \in \tau \;\; ve \;\; (G,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)\} = (F,E)$

$\Rightarrow (G,E) \in \tau$ ise $\bigcup(G,E) \in \tau \Rightarrow \bigcup(G,E) = (F,E)$

$\Rightarrow (F,E) \in \tau$

4. $sint(F,E)$ esnek açık kümedir.

O zaman $sint(sint(F,E)) = sint(F,E)$ olur. (Çünkü, (F,E) esnek açık küme $\Leftrightarrow$ $sint(F,E) = (F,E)$)

5. $(F,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E)$ olsun

$\Rightarrow x \in sint(F,E)$ alalım.

$\Rightarrow x \in \bigcup\{(H,E)|(H,E) \in \tau \;\; ve \;\; (H,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)\}$

$\Rightarrow (F,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E)$ olduğundan,

$\Rightarrow x \in \bigcup\{(H,E)|(H,E) \in \tau \;\; ve \;\; (H,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E)\}$

$\Rightarrow x \in sint(G,E)$

6. $[(F,E) \cap (G,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)]$ ve $[(F,E) \cap (G,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E)]$

$\Rightarrow [sint((F,E) \cap (G,E)) \,\tilde{\subset}\, sint(F,E)]$

$\Rightarrow [sint((F,E) \cap (G,E)) \,\tilde{\subset}\, sint(G,E)]$

$\Rightarrow sint((F,E) \cap (G,E)) \,\tilde{\subset}\, sint(F,E) \cap sint(G,E) \qquad (1)$

$[sint(F,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E)]$ ve $[sint(G,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E)]$

$\Rightarrow sint(F,E) \cap sint(G,E) \,\tilde{\subset}\, ((F,E) \cap (G,E))$

$\Rightarrow sint[sint(F,E) \cap sint(G,E)] \,\tilde{\subset}\, sint((F,E) \cap (G,E))$

$\Rightarrow sint(F,E) \cap sint(G,E) \,\tilde{\subset}\, sint((F,E) \cap (G,E))$ (2)

Böylece (1) ve (2)'den

$sint((F,E) \cap (G,E)) = sint(F,E) \cap sint(G,E)$.

7. $\Rightarrow (F,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E) \cup (G,E)$ ve $(G,E) \,\tilde{\subset}\, (F,E) \cup (G,E)$

$\Rightarrow sint(F,E) \,\tilde{\subset}\, sint[(F,E) \cup (G,E)]$ ve $sint(G,E) \,\tilde{\subset}\, sint[(F,E) \cup (G,E)]$

$\Rightarrow sint(F,E) \cup sint(G,E) \,\tilde{\subset}\, sint[(F,E) \cup (G,E)]$. □

Tanım 3.17 [3] *(X,τ,E), bir esnek topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir esnek küme olsun. (F,E) esnek kümesinin kapanışı, $scl(F,E)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$scl(F,E) = \bigcap \{(G,E) | (G,E) \text{ kapalı ve } (F,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E)\}.$$

Örnek 3.18 $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F,E)\}$ olmak üzere (F,E) ve (G,E) aşağıdaki gibi tanımlansın:

$F(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $\quad F(e_2) = \{h_1,h_3\}$

$G(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $\quad G(e_2) = X$.

O zaman $scl(G,E) = X$ olur.

Şimdi esnek topolojik uzayda bir esnek kümenin kapanışı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.19 [3] *(X,τ,E), bir esnek topolojik uzay, (F,E) ve (G,E), X üzerinde iki esnek küme olsun. O zaman*

1. $scl\Phi = \Phi$ ve $scl\tilde{X} = \tilde{X}$

2. $(F,E) \,\tilde{\subset}\, scl(F,E)$

3. (F,E) esnek kapalı küme $\Leftrightarrow scl(F,E) = (F,E)$

4. $scl(scl(F,E)) = scl(F,E)$

5. $(F,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E) \Rightarrow scl(F,E) \,\tilde{\subset}\, scl(G,E)$

6. $scl((F,E) \cup (G,E)) = scl(F,E) \cup scl(G,E)$

7. $scl((F,E) \cap (G,E)) \,\tilde{\subset}\, scl(F,E) \cap scl(G,E)$'dir.

İspat. 1. Esnek boş kümeyi kapsayan en küçük esnek kapalı küme kendisidir. Bundan dolayı $scl\Phi = \Phi$

Evrensel esnek kümeyi kapsayan en küçük esnek kapalı küme kendisidir. Bundan dolayı $scl\widetilde{X} = \widetilde{X}$ dir.

2. Bir esnek kümenin kapanışı o kümeyi kapsayan esnek kapalı kümelerin en küçüğüdür. Bu nedenle

$(F,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl(F,E)$'dir.

3. (F,E) esnek kapalı küme olsun. O zaman (F,E)'yi kapsayan en küçük esnek kapalı küme kendisi olur. Buradan $(F,E) = scl(F,E)$'dir.

Tersine $(F,E) = scl(F,E)$ olsun. Burada $scl(F,E)$ esnek kapalı küme, bundan dolayı (F,E) esnek kapalı kümedir.

4. $scl(F,E)$ esnek kapalı kümedir. (3)'ten $scl(scl(F,E)) = scl(F,E)$.

5. $(F,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} (G,E)$ olsun.

(G,E)'yi kapsayan tüm esnek kapalı kümeler (F,E)'yi de kapsar. Bu nedenle (G,E)'yi kapsayan esnek kapalı kümelerin arakesiti, (F,E)'yi kapsayan esnek kapalı kümelerin arakesitini kapsar. Böylece $scl(F,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl(G,E)$.

6. $[(F,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} (F,E) \cup (G,E)]$ ve $[(G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} (F,E) \cup (G,E)]$

$\Rightarrow scl(F,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl[(F,E) \cup (G,E)]$

$\Rightarrow scl(G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl[(F,E) \cup (G,E)]$

$\Rightarrow scl(F,E) \cup scl(G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl[(F,E) \cup (G,E)] \qquad (1)$

$[(F,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl(F,E)]$ ve $[(G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} scl(G,E)]$

$\Rightarrow (F,E) \cup (G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} (scl(F,E) \cup scl(G,E))$

$\Rightarrow scl[(F,E) \cup (G,E)] \mathrel{\widetilde{\subset}} scl(scl(F,E) \cup scl(G,E))$

$\Rightarrow scl[(F,E) \cup (G,E)] \mathrel{\widetilde{\subset}} (scl(F,E) \cup scl(G,E)) \qquad (2)$

Böylece (1) ve (2)'den

$scl((F,E) \cup (G,E)) = scl(F,E) \cup scl(G,E)$.

7. $(F,E) \cap (G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} (F,E)$ ve $(F,E) \cap (G,E) \mathrel{\widetilde{\subset}} (G,E)$

$scl[(F,E)\cap(G,E)]\ \tilde{\subset}\ scl(F,E)$ ve $scl[(F,E)\cap(G,E)]\ \tilde{\subset}\ scl(G,E)$

$scl[(F,E)\cap(G,E)]\ \tilde{\subset}\ scl(F,E)\cap scl(G,E)$. $\square$

Tanım 3.20 [3] *(X,τ,E), bir esnek topolojik uzay olmak üzere (G,E), X üzerinde bir esnek küme ve $x\in X$ olsun. (G,E), x'in esnek komşuluğudur $:\Leftrightarrow$*
$x\in(F,E)\in\tau$ öyleki $x\in(F,E)\ \tilde{\subset}\ (G,E)$.
x'in bütün esnek komşulukları kümesi $\widetilde{\mathscr{V}}(x)$ şekinde gösterilir, yani

$$\widetilde{\mathscr{V}}(x)=\{(G,E)|x\in(F,E)\in\tau,\ (F,E)\ \tilde{\subset}\ (G,E)\}$$

dir.

Tanım 3.21 [4] *(X,τ,E), bir esnek topolojik uzay olmak üzere (F,E), X üzerinde bir esnek küme ve $x\in X$ olsun. x, (F,E)'nin limit noktasıdır $:\Leftrightarrow$*

$$(G,E)\cap((F,E)\backslash\{x\})\neq\Phi,\ \forall(G,E)\in\widetilde{\mathscr{V}}(x).$$

(F,E)'nin tüm limit noktalarının kümesi $(F,E)'$ şeklinde gösterilir.

3.2. Esnek Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.22 [3] *(X,τ,E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $x\neq y$ için $x,y\in X$ olsun. (F,E) ve (G,E) iki esnek açık küme olmak üzere $[x\in(F,E)$ ve $y\notin(F,E)]$ veya $[y\in(G,E)$ ve $x\notin(G,E)]$ oluyor ise (X,τ,E) esnek topolojik uzayına esnek T_0 uzayıdır denir.*

Tanım 3.23 [3] *(X,τ,E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $x\neq y$ için $x,y\in X$ olsun. (F,E) ve (G,E) iki esnek açık küme olmak üzere $[x\in(F,E)$ ve $y\notin(F,E)]$ ve $[y\in(G,E)$ ve $x\notin(G,E)]$ oluyor ise (X,τ,E) esnek topolojik uzayına esnek T_1 uzayıdır denir.*

Örnek 3.24 *$X = \{x,z\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ve*

$\tau = \{\Phi, \widetilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), (F_4,E), (F_5,E)\}$ olmak üzere

$F_1(e_1) = \{x,z\}$ $\quad F_1(e_2) = F_1(e_3) = F_1(e_4) = \{x\}$

$F_2(e_1) = F_2(e_2) = \{x,z\}$ $\quad F_2(e_3) = F_2(e_4) = \{x\}$

$F_3(e_1) = F_3(e_2) = F_3(e_3) = \{z\}$ $\quad F_3(e_4) = \{x,z\}$

$F_4(e_1) = \{z\}$ $\quad F_4(e_2) = F_4(e_3) = \emptyset$ $\quad F_4(e_4) = \{x\}$

$F_5(e_1) = F_5(e_2) = \{z\}$ $\quad F_5(e_3) = \emptyset$ $\quad F_5(e_4) = \{x\}$

şeklinde tanımlansın. $x,z \in X$ için $x \neq z$ dir. (F_1,E) ve (F_3,E) esnek açık kümelerini alalım. $[x \in (F_1,E)$ ve $z \notin (F_1,E)]$ ve $[z \in (F_3,E)$ ve $x \notin (F_3,E)]$'dir. Böylelikle (X,τ,E) esnek topolojik uzayı esnek T_1 uzayıdır.

Teorem 3.25 [3] *(X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay olsun. Eğer (x,E), τ esnek topolojisi üzerinde esnek kapalı küme ise her $x \in X$ için (X,τ,E), esnek T_1 uzayıdır.*

İspat. $x \in (x,E)$, τ üzerinde esnek kapalı küme olsun. $x \neq y$ için $x,y \in X$ alalım. O zaman $x \in X$ için $(x,E)^c$ esnek açık küme ve $[y \in (x,E)^c$ ve $x \notin (x,E)^c]$. Benzer şekilde $[(y,E)^c \in \tau$ ise $x \in (y,E)^c$ ve $y \notin (y,E)^c]$ olur. Böylece (X,τ,E) esnek T_1 uzayıdır. □

Tanım 3.26 [3] *(X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x,y \in X$ olsun. (F,E) ve (G,E) iki esnek açık küme öyleki;*

$x \in (F,E)$, $y \in (G,E)$ ve $(F,E) \cap (G,E) = \Phi$

o zaman (X,τ,E) esnek topolojik uzayına esnek T_2(esnek Hausdorff) uzayı denir.

Teorem 3.27 [3]

1. Her esnek T_1 uzayı esnek T_0 uzayıdır.

2. Her esnek T_2 uzayı esnek T_1 uzayıdır.

İspat. (X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x,y \in X$ olsun.

1. (X,τ,E) esnek T_1 uzayı olsun. O zaman T_1 uzayı tanımdan $(F,E)\in\tau$ ve $(G,E)\in\tau$ öyleki,

$[x\in(F,E)$ ve $y\notin(F,E)]$ ve $[y\in(G,E)$ ve $x\notin(G,E)]$'dir.

O zaman $[x\in(F,E)$ ve $y\notin(F,E)]$ veya $[y\in(G,E)$ ve $x\notin(G,E)]$ olur. Böylelikle (X,τ,E) esnek T_0 uzayıdır.

2. (X,τ,E) esnek T_2 uzayı olsun. Tanımdan $(F,E)\in\tau$ ve $(G,E)\in\tau$ öyleki

$x\in(F,E)$, $y\in(G,E)$ ve $(F,E)\cap(G,E)=\Phi$

Buradan $(F,E)\cap(G,E)=\Phi$ ise $x\notin(G,E)$ ve $y\notin(F,E)$ dir. Böylelikle

$[x\in(F,E)$ ve $y\notin(F,E)]$ ve $[y\in(G,E)$ ve $x\notin(G,E)]$ olur. Böylece (X,τ,E) esnek T_1 uzayı olur. □

Ancak bir esnek T_0 uzayının esnek T_1 uzay ve esnek T_1 uzayının esnek T_2 uzayı olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örneklerle görelim.

Örnek 3.28 *$X=\{x,y\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\Phi,\widetilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E)\}$ olmak üzere*

$F_1(e_1)=X$ $\quad$ $F_1(e_2)=\{y\}$

$F_2(e_1)=\{x\}$ $\quad$ $F_2(e_2)=X$

$F_3(e_1)=\{x\}$ $\quad$ $F_3(e_2)=\{y\}$ *şeklinde tanımlansın.*

Burada (X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay ve ayrıca (X,τ,E), X üzerinde esnek T_1 uzayıdır. Fakat esnek T_2 uzayı değildir. Çünkü,

$x\in(F,E)$, $y\in(G,E)$ ve $(F,E)\cap(G,E)=\Phi$ olacak şekilde (F,E) ve (G,E) esnek açık kümeleri yoktur.

Örnek 3.29 *$X=\{x,y\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\Phi,\widetilde{X},(F_1,E)\}$ X üzerinde esnek topoloji olmak üzere*

$F_1(e_1)=X$ ve $F_1(e_2)=\{y\}$ olsun.

Burada (X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay ve ayrıca (X,τ,E), X üzerinde esnek T_0 uzayıdır. Fakat esnek T_1 uzayı değildir. Çünkü,

$x,y \in X$ için $[x \in (F,E)$ ve $y \notin (F,E)]$ ve $[y \in (G,E)$ ve $x \notin (G,E)]$ olacak şekilde (F,E) ve (G,E) esnek açık kümeleri bulamayız.

Tanım 3.30 [3] *(X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay olsun. (G,E), X içinde esnek kapalı küme ve $x \in X$ için $x \notin (G,E)$ olsun. Eğer (F_1,E) ve (F_2,E) iki esnek açık kümeleri var ve*

$x \in (F_1,E)$, $(G,E) \tilde{\subset} (F_2,E)$ ve $(F_1,E) \cap (F_2,E) = \Phi$

oluyor ise o zaman (X,τ,E) esnek topolojik uzayına esnek regüler uzay denir.

Tanım 3.31 [3] *(X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay olsun. (X,τ,E) esnek regüler ve esnek T_1 uzayı oluyor ise (X,τ,E) esnek topolojik uzayına esnek T_3 uzayı denir.*

Tanım 3.32 [3] *(X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay, (F,E) ve (G,E) X üzerinde $(F,E) \cap (G,E) = \Phi$ olacak şekilde esnek kapalı kümeler ve (F_1,E) ve (F_2,E) esnek açık kümeler olmak üzere*

$(F,E) \tilde{\subset} (F_1,E)$, $(G,E) \tilde{\subset} (F_2,E)$ ve $(F_1,E) \cap (F_2,E) = \Phi$ ise

o zaman (X,τ,E) esnek topolojik uzayına esnek normal uzay denir.

Tanım 3.33 [3] *(X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay olsun. (X,τ,E) esnek normal uzay ve esnek T_1 uzayı ise (X,τ,E)'ye esnek T_4 uzayı denir.*

4. ESNEK FONKSİYON VE ESNEK SÜREKLİLİK

Bu bölümde esnek topolojik uzaylarda süreklilik kavramını tanımlayacağız. Bunun için öncelikle esnek topolojik uzaylarda esnek nokta ve esnek fonksiyon kavramlarını ifade edeceğiz. Daha sonra bu kavramlar yardımıyla esnek sürekliliğin tanımını vereceğiz.

Tanım 4.1 [13] *X kümesi evren ve E parametrelerin kümesi olmak üzere, E parametresine göre X üzerindeki bütün esnek kümeler ailesine esnek sınıf denir ve (X,E) ile gösterilir.*

Tanım 4.2 [13] *$(F,A) \in (X,E)$ ve $x \in X$ olmak üzere $\forall e \in A$ için $F(e) = \{x\}$ ve $F(e') = \emptyset$ her $e' \in A - \{e\}$ için $(F,A) \in (X,E)$ yukarıdaki koşulları sağlıyor ise (F,A)'ya esnek nokta denir ve e_F ile gösterilir.*

Tanım 4.3 [7] *(X,E) ve (Y,E') esnek sınıflar, $u : X \to Y$ ve $p : E \to E'$ fonksiyonlar olsun. $f : (X,E) \to (Y,E')$ esnek fonksiyondur ve görüntüsü aşağıdaki gibi tanımlanır:*
$(F,A) \in (X,E)$ için $f[(F,A)] = (f(F,A), p(A))$ burada $p(A) = B \subset E'$

$$(f(F,A),B) = f(F,A)(\beta) = \bigcup_{\alpha \in p^{-1}(\beta) \cap A} u(F(\alpha)), \ \ \forall \beta \in B.$$

$(f(F,A),B)$ esnek kümesine, (F,A) nın esnek görüntüsü denir.

Tanım 4.4 [7]

1. Eğer u ve p dönüşümleri bire-bir ise f esnek fonksiyonu bire-birdir.

2. Eğer u ve p dönüşümleri örten ise f esnek fonksiyonu örtendir.

3. Eğer u sabit bir dönüşüm ise f esnek fonksiyonu sabit esnek fonksiyondur.

4. $f : (X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ ve $g : (Y,\tau',E') \to (Z,\tau^*,E^*)$ birer esnek fonksiyon *olsun. Burada* $u : X \to Y$, $p : E \to E'$ *ve* $u^* : Y \to Z$, $p^* : E' \to E^*$ *biçiminde olmak üzere* f *ve* g *nin bileşke fonksiyonu* $g \circ f : (X, \tau, E) \to (Z, \tau^*, E^*)$ *şeklinde tanımlanır. Burada* $u^* \circ u : X \to Z$, $p^* \circ p : E \to E^*$ *şeklindedir.*

Tanım 4.5 [7] (X,E) *ve* (Y,E') *iki esnek sınıf,* $u : X \to Y$ *ve* $p : E \to E'$ *iki fonksiyon olmak üzere* $f : (X,E) \to (Y,E')$ *esnek fonksiyon ve* $(G,B) \in (Y,E')$ *olsun. O zaman* (G,B)*'nin ters görüntüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır.*
$f^{-1}[(G,B)] = (f^{-1}(G,B),D)$ *burada* $p^{-1}(B) = D \subset E$

$$f^{-1}(G,B)(\alpha) = u^{-1}(G(p(\alpha))),\ \forall \alpha \in D.$$

Burada $(f^{-1}(G,B),D)$ *kümesine,* (G,B) *nin esnek ters görüntüsü denir.*

Örnek 4.6 $X = \{a,b,c\}$, $Y = \{x,y,z\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $E' = \{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4\}$ *ve* $(X,E),(Y,E')$ *iki esnek sınıf olmak üzere,* $u : X \to Y$, $p : E \to E'$ *fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\begin{array}{llll} u(a) = y, & u(b) = z, & u(c) = y, & \\ p(e_1) = e'_3, & p(e_2) = e'_3, & p(e_3) = e'_2, & p(e_4) = e'_3 \end{array}$$

Sırasıyla X ve Y üzerinde aşağıdaki gibi iki tane esnek küme seçelim.

$$\begin{aligned} (F,A) &= \{e_2 = \{\}, e_3 = \{a\}, e_4 = \{a,b,c\}\} \\ (G,C) &= \{e'_1 = \{x,z\}, e'_2 = \{y\}\} \end{aligned}$$

$f : (X,E) \to (Y,E')$ *esnek dönüşümü için* (F,A)*'nın görüntüsü* $B = p(A) = \{e'_2, e'_3\}$ *olmak üzere* $(f(F,A),B)$ *dir. Bu küme,* (Y,E') *esnek sınıfı içinde bir esnek kümedir ve aşağıdaki gibi elde edilir:*

$$\begin{aligned} f(F,A)e'_2 &= u(\bigcup F(\{e_3\})) = u(\{a\}) = y \\ f(F,A)e'_3 &= \bigcup_{\alpha \in p^{-1}(e'_3) \cap A} u(F(\alpha)) = u(\{F(e_2) \cup F(e_4)\}) \\ &= u(\{\} \cup \{a,b,c\}) = u(\{a,b,c\}) = \{y,z\}, \end{aligned}$$

Buradan

$$(f(F,A),B) = \{e'_2 = \{y\}, e'_3 = \{y,z\}\}$$

elde edilir. (G,C) *nin esnek ters görüntüsü yani*

$(f^{-1}(G,C),D)$ *de* $D = p^{-1}(C) = \{e_3\}$ *olmak üzere*

$$f^{-1}(G,C)e_3 = u^{-1}(G(p(e_3))) = u^{-1}(G(e_2')) = u^{-1}(\{y\}) = \{a,c\} \text{ dir.}$$

Tanım 4.7 [7] (X,τ,E) *ve* (Y,τ',E') *iki esnek topolojik uzay ve* $u : X \to Y$, $p : E \to E'$ *iki dönüşümler olmak üzere* $f : (X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ *esnek fonksiyonunu ve* $e_F \in (X,\tau,E)$ *esnek noktasını ele alalım.*

1. f *esnek fonksiyonu* e_F *esnek noktasında esnek süreklidir eğer her* $(G,E') \in N_{\tau'}f(e_F)$ *için* $(H,E) \in N_\tau(e_F)$ *olmak üzere* $f(H,E) \tilde{\subset} (G,E')$ *dir.*

2. Eğer f *esnek fonksiyonu* (X,τ,E) *esnek topolojik uzayındaki her esnek nokta için sürekli ise* f*'ye esnek sürekli fonksiyon denir.*

Teorem 4.8 [7] (X,τ,E) *ve* (Y,τ',E') *iki esnek topolojik uzay ve* $f : (X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ *esnek fonksiyon olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

1. f *esnek süreklidir,*

2. Her $(H,E') \in \tau'$ *için* $f^{-1}(H,E') \in \tau$*'dur,*

3. Y *üzerindeki her esnek kapalı* (F,E') *kümesi için* $f^{-1}(F,E')$ *kümesi* X *üzerinde esnek kapalıdır.*

Eğer, $f : (X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ ve $g : (Y,\tau',E') \to (Z,\tau^*,E^*)$ esnek fonksiyonları sürekli iseler, o zaman $g \circ f$ esnek fonksiyonu da süreklidir.

Not 4.9 *Normal topolojik uzaylarda sabit dönüşümler sürekli iken esnek topolojik uzaylarda sabit esnek dönüşümler sürekli olmayabilir. Şimdi buna bir örnek verelim.*

Örnek 4.10 $X = \{x_0,x_1,x_2\}$ *evreni ve* $E = \{e_0,e_1,e_2\}$ *parametre kümesi için* τ_k *esnek kaba topoloji ve* τ_a *esnek ayrık topoloji olmak üzere* $f : (X,\tau_k,E) \to (X,\tau_a,E)$ *esnek dönüşümü her* $x_i \in X$ *için* $u(x_i) = x_0$ *ve her* $e_i \in E$ *için* $p(e_i) = e_i$ *şeklinde* *tanımlansın.* $A = \{e_0, e_1\}$ *olmak üzere* $(F,A) = \{(e_0, \{x_0, x_1\}), (e_1, \{x_0\}), (e_2, \emptyset)\}$ *esnek kümesi verilsin. Bu taktirde,* $f^{-1}(F,A) = \tilde{A} \notin \tau_k$ *olur. Böylece* f *sabit esnek dönüşümünün sürekli olmadığı elde edilir.*

Tanım 4.11 [7] $f : (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E')$ *bir esnek fonksiyon ve* $u : X \to Y$, $p : E \to E'$ *olmak üzere* X *üzerindeki* $\forall (F,A)$ *esnek açık kümesi için* $f((F,A))$ *esnek görüntüsü* Y *üzerinde esnek açık küme oluyor ise* f *fonksiyonuna esnek açık fonksiyon denir.*

Tanım 4.12 [7] $f : (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E')$ *bir esnek fonksiyon ve* $u : X \to Y$, $p : E \to E'$ *olmak üzere* X *üzerindeki* $\forall (F,A)$ *esnek kapalı kümesi için* $f((F,A))$ *esnek görüntüsü,* Y *üzerinde esnek kapalı küme oluyor ise* f *fonksiyonuna esnek kapalı fonksiyon denir.*

5. ESNEK YARI-AÇIK KÜMELER

Tezin bu bölümünde esnek yarı-açık küme ve bundan faydalanarak esnek yarı-kapalı küme tanımı verilerek esnek yarı açık kümelerin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca esnek sürekliliğin bir genişletilmesi olan esnek zayıf süreklilik ve esnek hemen hemen süreklilik kavramları tanımlanarak özellikleri üzerinde durulmuştur.

Tanım 5.1 [11] *(X,τ,E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere (F,E) esnek kümesi için eğer $(G,E)\,\tilde{\subset}\,(F,E)\,\tilde{\subset}\,scl(G,E)$ olacak şekilde bir (G,E) esnek açık kümesi var ise (F,E) kümesine esnek yarı-açık küme denir.*

Esnek yarı-açık tanımı gereği aşağıdaki notu verebiliriz.

Not 5.2 *(X,τ,E) esnek topolojik uzayındaki her esnek açık küme aynı zamanda esnek yarı-açık kümedir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Şimdi tersinin sağlanmadığına dair bir örnek verelim.*

Örnek 5.3 *$X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)\}$ $(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)$ esnek kümeleri X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı olsunlar.*

$F_1(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_2(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2)=\{x_1,x_3\}$

$F_3(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_3(e_2)=\{x_1\}$

$F_4(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2)=\{x_1\}$

$F_5(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_5(e_2)=X$

$F_6(e_1)=X$ $\quad$ $F_6(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_7(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_7(e_2)=\{x_1,x_3\}$

Bu durumda τ, X üzerinde bir esnek topoloji tanımlar ve (X,τ,E) bir esnek *topolojidir.* (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında bir* (G,E) *esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.*

$G(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\qquad$ $G(e_2)=\{x_1,x_2\}$.

O zaman (G,E) *esnek açık kümesi için* $(F_3,E)\tilde{\subset}(G,E)$ *dir. Ayrıca* $scl(F_3,E)=\tilde{X}$ *olduğundan* $(F_3,E)\tilde{\subset}(G,E)\tilde{\subset}scl(F_3,E)$ *olur. Buradan* (G,E) *bir esnek yarı-açık kümedir, fakat* $(G,E)\notin\tau$ *olduğundan esnek açık küme değildir.*

Teorem 5.4 [11] (X,τ,E) *bir esnek topolojik uzay ve* (F,E) *bu topolojik uzayda bir esnek alt küme olsun. O zaman* (F,E)*' nin bir esnek yarı-açık küme olması için gerek ve yeter koşul* $(F,E)\tilde{\subset}scl(sint(F,E))$ *olmasıdır.*

İspat. (Yeter koşul)

$(F,E)\tilde{\subset}scl(sint(F,E))$ olsun.O zaman $(O,E)=sint(F,E)$ için $(O,E)\tilde{\subset}(F,E)\tilde{\subset}scl(O,E)$ dir. Yani (F,E) bir esnek yarı-açık kümedir.

(Gerek koşul)

(F,E) bir esnek yarı-açık küme olsun. O zaman $(G,E)\tilde{\subset}(F,E)\tilde{\subset}scl(G,E)$ olacak şekilde (G,E) esnek açık kümesi vardır. Fakat $(G,E)\tilde{\subset}sint(F,E)$ ve $scl(G,E)\tilde{\subset}scl(sint(F,E))$ olduğundan $(G,E)\tilde{\subset}scl(G,E)\tilde{\subset}scl(sint(F,E))$. □

Teorem 5.5 [11] $\{(F_\alpha,E)\}_{\alpha\in J}$ (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında esnek yarı-açık kümelerin koleksiyonu olsun. O zaman* $\bigcup\limits_{\alpha\in J}(F_\alpha,E)$ *bir esnek yarı-açık kümedir.*

İspat. Her $\alpha\in J$ için $(G_\alpha,E)\tilde{\subset}(F_\alpha,E)\tilde{\subset}scl(G_\alpha,E)$ olacak şekilde bir (G_α,E) esnek açık kümesi alalım. O zaman

$\bigcup\limits_{\alpha\in J}(G_\alpha,E)\ \tilde{\subset}\ \bigcup\limits_{\alpha\in J}(F_\alpha,E)\ \tilde{\subset}\ \bigcup\limits_{\alpha\in J}scl(G_\alpha,E)\ \tilde{\subset}\ scl(\bigcup\limits_{\alpha\in J}(G_\alpha,E))$ olur. Buradan (G_α,E) esnek açık küme olduğundan $\bigcup\limits_{\alpha\in J}(G_\alpha,E)$ de esnek açık küme olur ve böylece $\bigcup\limits_{\alpha\in J}(F_\alpha,E)$' nin bir esnek yarı-açık olduğu elde edilir. □

Teorem 5.6 [11] (F,E)*,* (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında bir esnek yarı-açık küme olsun. Eğer* $(F,E)\tilde{\subset}(H,E)\tilde{\subset}scl(F,E)$ *ise o zaman* (H,E) *de bir esnek yarı-açık kümedir.*

İspat. (F,E) esnek yarı-açık küme olduğundan $(G,E)\,\tilde{\subset}\,(F,E)\,\tilde{\subset}\,scl(G,E)$ olacak şekilde bir (G,E) esnek açık kümesi vardır. O zaman hipotezimizden $(G,E)\,\tilde{\subset}\,(H,E)$ olur. Ayrıca $scl(F,E)\,\tilde{\subset}\,scl(G,E)$ olduğundan $(H,E)\,\tilde{\subset}\,scl(G,E)$. Buradan $(G,E)\,\tilde{\subset}\,(H,E)\,\tilde{\subset}\,scl(G,E)$ olur. Öyleyse (H,E) bir esnek yarı-açık kümedir. □

Tanım 5.7 [11] *(X,τ,E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere (F,E) esnek kümesi için eğer $sint(G,E)\,\tilde{\subset}\,(F,E)\,\tilde{\subset}\,(G,E)$ olacak şekilde bir (G,E) esnek kapalı küme var ise (F,E) kümesine esnek yarı-kapalı küme denir.*
Bu tanımı topolojik uzaylardaki tanıma benzer şekilde tümleyeni esnek yarı-açık olan kümeye esnek yarı-kapalı küme denir şeklinde de verebiliriz. Esnek yarı-kapalı tanımı gereğince aşağıdaki notu verebiliriz.

Not 5.8 *(X,τ,E) esnek topolojik uzayındaki her esnek kapalı küme aynı zamanda esnek yarı-kapalı kümedir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Şimdi tersinin sağlanmadığına dair bir örnek verelim.*

Örnek 5.9 *$X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)\}$ $(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)$ esnek kümeleri X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı olsunlar.*

$F_1(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_2(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2)=\{x_1,x_3\}$

$F_3(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_3(e_2)=\{x_1\}$

$F_4(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2)=\{x_1\}$

$F_5(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_5(e_2)=X$

$F_6(e_1)=X$ $\quad$ $F_6(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_7(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_7(e_2)=\{x_1,x_3\}$

(F,E) esnek kümesini

$F(e_1)=\{x_1\}$ $\quad$ $F(e_2)=\{x_3\}$ *şeklinde alalım. O zaman*

$(F,E)^c = (G,E)$ olsun. Bu durumda,

$G(e_1) = \{x_2, x_3\}$ $\qquad$ $G(e_2) = \{x_1, x_2\}$

olur. Örnek 5.3'te (G,E)' nin esnek yarı-açık olduğunu göstermiştik. Buradan (F,E) esnek yarı-kapalı kümedir. Şimdi (X,τ,E)'nin tüm kapalı kümelerini yazalım.

$\mathscr{K} = \{\Phi, \widetilde{X}, (H_1,E), (H_2,E), ..., (H_7,E)\}$ *olmak üzere*

$H_1(e_1) = \{x_3\}$ $\qquad$ $H_1(e_2) = \{x_3\}$

$H_2(e_1) = \{x_1, x_3\}$ $\qquad$ $H_2(e_2) = \{x_2\}$

$H_3(e_1) = \{x_1\}$ $\qquad$ $H_3(e_2) = \{x_2, x_3\}$

$H_4(e_1) = \{x_1, x_3\}$ $\qquad$ $H_4(e_2) = \{x_2, x_3\}$

$H_5(e_1) = \{x_3\}$ $\qquad$ $H_5(e_2) = \emptyset$

$H_6(e_1) = \emptyset$ $\qquad$ $H_6(e_2) = \{x_3\}$

$H_7(e_1) = \{x_1\}$ $\qquad$ $H_7(e_2) = \{x_2\}$ *elde edilir.*

$(F,E) \notin \mathscr{K}$ dır. Sonuçta (F,E) bir esnek yarı-kapalı küme fakat esnek kapalı küme değildir.

Teorem 5.10 [11] *(X,τ,E) esnek toplojik uzay ve (F,E) bu toplojik uzayda esnek alt küme olsun. O zaman (F,E)'nin esnek yarı-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $sint(scl(F,E)) \tilde{\subset} (F,E)$ olmasıdır.*

İspat. (Yeter koşul):

$sint(scl(F,E)) \tilde{\subset} (F,E)$ olsun. $(G,E) = scl(F,E)$ seçersek $sint(G,E) \tilde{\subset} (F,E) \tilde{\subset} (G,E)$ elde edilir. Buradan (F,E) esnek yarı-kapalı kümedir.

(Gerek koşul):

(F,E) bir esnek yarı-kapalı küme olsun. O zaman tanımdan $sint(G,E) \tilde{\subset} (F,E) \tilde{\subset} (G,E)$ olacak şekilde bir (G,E) esnek kapalı kümesi vardır. (G,E) esnek kapalı olduğundan $scl(F,E) \tilde{\subset} scl(G,E) = (G,E)$ ve $sint(scl(F,E)) \tilde{\subset} sint(G,E)$ olur. Buradan $sint(scl(F,E)) \tilde{\subset} sint(G,E) \tilde{\subset} (F,E)$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.11 [11] $\{(F_\alpha,E)\}_{\alpha\in J}$ (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında esnek yarı-kapalı kümelerin koleksiyonu olsun. O zaman* $\bigcap\limits_{\alpha\in J}(F_\alpha,E)$ *bir esnek yarı-kapalı kümedir.*

İspat. Her $\alpha\in J$ için $sint(G_\alpha,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(F_\alpha,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(G_\alpha,E)$ olacak şekilde bir (G_α,E) esnek kapalı kümesi alalım. O zaman
$sint(\bigcap\limits_{\alpha\in J}(G_\alpha,E))\mathrel{\tilde{\subset}}\bigcap\limits_{\alpha\in J}(sint(G_\alpha,E))\mathrel{\tilde{\subset}}\bigcap\limits_{\alpha\in J}(F_\alpha,E)\mathrel{\tilde{\subset}}\bigcap\limits_{\alpha\in J}(G_\alpha,E)$ olur. Burada $\bigcap\limits_{\alpha\in J}(G_\alpha,E)=(G,E)$ esnek kapalı küme olduğundan $\bigcap\limits_{\alpha\in J}(F_\alpha,E)$ esnek yarı-kapalı küme olur. □

Teorem 5.12 [11] (F,E), (X,τ,E) *esnek toplojik uzayında bir esnek yarı-kapalı küme olsun. Eğer* $sint(F,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(H,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(F,E)$ *ise o zaman* (H,E) *de bir esnek yarı-kapalı kümedir.*

İspat. (F,E) esnek kapalı küme olduğundan $sint(G,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(F,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(G,E)$ olacak şekilde bir (G,E) esnek kapalı kümesi vardır. O zaman hipotezden $(H,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(G,E)$ olur. $sint(sint(G,E))=sint(G,E)\mathrel{\tilde{\subset}}sint(F,E)$ ve $sint(G,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(H,E)$ elde edilir. Buradan $sint(G,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(H,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(G,E)$ olur. Öyleyse (H,E) bir esnek yarı-kapalı kümedir. □

Şimdi esnek yarı-iç ve esnek yarı-kapanış tanımlarını verelim.

Tanım 5.13 [12] (X,τ,E) *bir esnek topolojik uzay ve* (F,E)*,* X *üzerinde bir esnek küme olsun.*

1. (F,E)*'nin esnek yarı-içi* (F,E) *tarafindan kapsanan tüm esnek yarı-açık kümelerin birleşimidir ve* $int^s(F,E)$ *ile gösterilir. Yani;*

$int^s(F,E)=\bigcup\{(G,E):(G,E)$ *esnek yarı-açık ve* $(G,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(F,E)\}$

2. (F,E)*'nin esnek yarı-kapanışı* (F,E)*'yi kapsayan tüm esnek yarı-kapalı kümelerin kesişimidir ve* $cl^s(F,E)$ *ile gösterilir. Yani;*

$cl^s(F,E)=\bigcap\{(G,E):(G,E)$ *esnek yarı-kapalı ve* $(F,E)\mathrel{\tilde{\subset}}(G,E)\}$

Not 5.14 *Teorem 5.5 ve Teorem 5.11'den* (F,E) *kümesinin esnek yarı-içi aynı zamanda esnek yarı-açık ve* (F,E) *kümesinin esnek yarı-kapanışı aynı zamanda esnek yarı-kapalıdır.*

Örnek 5.15 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$*,* $E=\{e_1,e_2\}$ *ve* $\tau=\{(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)\}$ $(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)$ *esnek kümeleri* X *üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı olsunlar.*

$F_1(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_2(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2)=\{x_1,x_3\}$

$F_3(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_3(e_2)=\{x_1\}$

$F_4(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2)=\{x_1\}$

$F_5(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_5(e_2)=X$

$F_6(e_1)=X$ $\quad$ $F_6(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_7(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_7(e_2)=\{x_1,x_3\}$

Bu durumda τ*,* X *üzerinde bir esnek topoloji tanımlar ve* (X,τ,E) *bir esnek topolojidir.* (X,τ,E) *esnek topolojik uzayında bir* (G,E) *esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.*

$G(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $G(e_2)=\{x_1,x_2\}$.

$int^s(G,E)=(G,E)$

Örnek 5.16 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$*,* $E=\{e_1,e_2\}$ *ve* $\tau=\{(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)\}$ $(F_1,E),(F_2,E),...,(F_7,E)$ *esnek kümeleri* X *üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı olsunlar.*

$F_1(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_2(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2)=\{x_1,x_3\}$

$F_3(e_1)=\{x_2,x_3\}$ $\quad$ $F_3(e_2)=\{x_1\}$

$F_4(e_1)=\{x_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2)=\{x_1\}$

$F_5(e_1)=\{x_1,x_2\}$ $\quad$ $F_5(e_2)=X$

$F_6(e_1)=X$ $\quad$ $F_6(e_2)=\{x_1,x_2\}$

$F_7(e_1) = \{x_2, x_3\}$ $\quad\quad$ $F_7(e_2) = \{x_1, x_3\}$

(F,E) *esnek kümesini*

$F(e_1) = \{x_1\}$ $\quad\quad$ $F(e_2) = \{x_3\}$ *şeklinde alalım. O zaman*

$(F,E)^c = (G,E)$ *olsun bu durumda*

$G(e_1) = \{x_2, x_3\}$ $\quad\quad$ $G(e_2) = \{x_1, x_2\}$

olur. Örnek 5.3'te (G,E)*' nin esnek yarı-açık olduğunu göstermiştik. Buradan* (F,E) *esnek yarı-kapalı kümedir. Şimdi* (X,τ,E)*'nin tüm kapalı kümelerini yazalım.*

$\mathscr{K} = \{\Phi, \widetilde{X}, (H_1,E), (H_2,E), ..., (H_7,E)\}$ *olmak üzere*

$H_1(e_1) = \{x_3\}$ $\quad\quad$ $H_1(e_2) = \{x_3\}$

$H_2(e_1) = \{x_1, x_3\}$ $\quad\quad$ $H_2(e_2) = \{x_2\}$

$H_3(e_1) = \{x_1\}$ $\quad\quad$ $H_3(e_2) = \{x_2, x_3\}$

$H_4(e_1) = \{x_1, x_3\}$ $\quad\quad$ $H_4(e_2) = \{x_2, x_3\}$

$H_5(e_1) = \{x_3\}$ $\quad\quad$ $H_5(e_2) = \emptyset$

$H_6(e_1) = \emptyset$ $\quad\quad$ $H_6(e_2) = \{x_3\}$

$H_7(e_1) = \{x_1\}$ $\quad\quad$ $H_7(e_2) = \{x_2\}$ *elde edilir.*

$cl^s(F,E) = (F,E)$ *dir.*

Teorem 5.17 [12] (X,τ,E) *esnek topolojik uzay ve* (F,E)*,* X *üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman*

$sint(F,E) \tilde{\subset} int^s(F,E) \tilde{\subset} (F,E) \tilde{\subset} cl^s(F,E) \tilde{\subset} scl(F,E)$*'dir.*

İspat. Not 5.2, Not 5.8 ve Tanım 5.13'ten açık. □

Şimdi, esnek topolojik uzaylarda sürekliliğin bir genişletilmesi olan esnek zayıf süreklilik ve esnek hemen hemen süreklilik kavramlarının tanımlarını vererek bu yeni tanımladığımız kavramlar üzerinde bazı temel teorem ve sonuçları inceleyelim.

Tanım 5.18 (X,τ,E) *ve* (Y,τ',E') *iki esnek topolojik uzay ve* $f : (X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ *bir esnek fonksiyon olsun.* f *fonksiyonuna* e_F *esnek noktasında esnek* *zayıf sürekli fonksiyon denir* $:\Leftrightarrow e_F \in X$ *esnek nokta olmak üzere* $f(e_F)$*'nin her* (V,E') *esnek açık kümesi için* e_F*'nin öyle bir* (U,E) *esnek açık kümesi vardır ki* $f((U,E)) \tilde{\subset} scl(V,E')$.

Teorem 5.19 *(X,τ,E) ve (Y,τ',E') iki esnek topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ esnek zayıf sürekli fonksiyondur $\Leftrightarrow$ $(V,E') \in \tau'$ için $f^{-1}((V,E')) \tilde{\subset} sint(f^{-1}(scl(V,E')))$'dir.*

İspat. (Gerek koşul):
$(V,E') \tilde{\subset} Y$ esnek açık küme ve $x \in f^{-1}((V,E'))$ olsun. O zaman $f(x) \in (V,E')$'dir. Hipotezden öyle bir (U,E) esnek açık kümesi vardır ki $x \in (U,E)$ ve $f((U,E)) \tilde{\subset} cl(V,E')$ dir. O halde $f^{-1}f((U,E)) \tilde{\subset} f^{-1}(cl(V,E'))$ buradan
$(U,E) \tilde{\subset} f^{-1}(cl(V,E'))$
$int(U,E) \tilde{\subset} int(f^{-1}(cl(V,E')))$ öyleyse $(U,E) \tilde{\subset} int(f^{-1}(cl(V,E')))$ ve buradan
$x \in int(f^{-1}(cl(V,E'))) \Rightarrow f^{-1}((V,E')) \tilde{\subset} int(f^{-1}(cl(V,E')))$ elde edilir.
(Yeter koşul):
$f(x) \in (V,E')$ esnek açık olsun.
$f^{-1}((V,E')) \tilde{\subset} int(f^{-1}(cl(V,E')))$
$int(f^{-1}((V,E'))) \tilde{\subset} int(f^{-1}(cl(V,E'))) \tilde{\subset} f^{-1}(cl(V,E'))$
$(U,E) = int(f^{-1}((V,E')))$ için $(U,E) \tilde{\subset} f^{-1}(cl(V,E'))$ ve burada
$f(U,E) \subset f(f^{-1}(cl(V,E'))) \tilde{\subset} cl(V,E')$ elde edilir. □

Teorem 5.20 *(X,τ,E) ve (Y,τ',E') iki esnek topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ esnek fonksiyon ve Y esnek regüler olsun. O zaman f esnek zayıf sürekli olması için gerek ve yeter şart f esnek sürekli olmasıdır.*

İspat. Teorem 5.19 ve esnek regülerlik tanımından açıktır. □

Tanım 5.21 *(X,τ,E) ve (Y,τ',E') iki esnek topolojik uzay ve $f:(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ bir esnek fonksiyon olsun. f fonksiyonuna e_F esnek noktasında esnek* *hemen hemen sürekli fonksiyon denir* $:\Leftrightarrow e_F \in X$ *esnek noktası için* $f(e_F)$*'nin her* $V \in \widetilde{\mathscr{V}}(f(e_F))$ *esnek komşuluğu için* $\widetilde{\mathscr{U}}(e_F)$, e_F*'nin esnek komşuluklar ailesi olmak üzere* $scl(f^{-1}(V)) \in \widetilde{\mathscr{U}}(e_F)$*'dir.*

Örnek 5.22 $X = \{a,b\}$, $E = \{e_1,e_2\}$, (X,τ,E) *esnek kaba topolojik uzay ve* (X',τ',E') *esnek ayrık topolojik uzay olmak üzere* $f:(X,\tau,E) \to (X',\tau',E')$ *esnek birim fonksiyon olsun. O zaman* f *esnek zayıf sürekli fonsiyon değildir fakat* f *esnek hemen hemen sürekli fonksiyondur.* $(G,E) \in \widetilde{X}$ *için* $cl(f^{-1}((G,E))) = \widetilde{X}$ *ve* $int\widetilde{X} = \widetilde{X}$ *olduğundan* $f^{-1}((G,E)) \tilde{\subset} \widetilde{X}$ *yani* $f^{-1}((G,E)) \tilde{\subset} int(cl(f^{-1}((G,E))))$ *buradan* f *esnek hemen hemen sürekli fonksiyondur.*

Teorem 5.23 (X,τ,E) *ve* (Y,τ',E') *iki esnek topolojik uzay olsun.* $f:(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ *esnek hemen hemen sürekli fonksiyondur* $\Leftrightarrow (V,E') \in \tau'$ *için* $f^{-1}((V,E')) \tilde{\subset} sint(scl(f^{-1}(V,E')))$ *dir.*

İspat. Teorem 5.19 ve Tanım 5.21'den açıktır. □

6. SONUÇ

Esnek topolojik uzaylarda önemli bir yere sahip olan süreklilik kavramı genişletilerek esnek zayıf süreklilik ve esnek hemen hemen süreklilik kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramların özellikleri incelenerek esnek süreklilik ile ilgili çalışmalara katkıda bulunulmuştur.

Esnek yarı açık ve esnek açık fonksiyon kavramları ele alınarak, esnek zayıf yarı-açık ve esnek zayıf açık fonksiyon tanımları da yapılarak esnek süreklilik ile ilgili çalışmalara katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Molodtsov, 1999. D. Soft set theory first results. **Comput. Math. Appl.,** 37: 19-31.

[2] P.K.Maji, R.Biswas, A.R.Roy, 2003. On soft set theory. **Comput. Math. Appl.,** 45: 555-562.

[3] Shabir, Muhammad; Naz, Munazza 2011. On soft topological spaces. **Comput. Math. Appl.,** 61: 1786-1799.

[4] İ. Zorlutuna, İ.; Akdag, M.; Min, W. K.; Atmaca, S., 2012. Remarks on soft topological spaces. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 3: 171-185

[5] Çağman, N., Karataş, S., Enginoglu, S., 2011. Soft topology. **Comput. Math. Appl.,** 62: 351-358.

[6] Pazar V. B., Halis, A., 2013. On soft Hausdorff spaces. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 5: 15-24.

[7] Kharal, Athar; Ahmad, B., 2011. Mappings on soft classes. **New Math. Nat. Comput.,** 7: 471-481.

[8] Feng, F., Jun, Y., B., Zhao, X., 2008. Soft semirings. **Comput. Math. Appl.,** 56: 2621-2628.

[9] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., 2009. On some new operations in soft set theory. **Comput. Math. Appl.,** 57: 1547-1553.

[10] Aygünoğlu, A., Aygün, H. 2011. Some notes on soft topological spaces. Neural Comput. Applic., Kocaeli, DOI 10.1007/s,00521-011-0722-3.

[11] Chen, B., 2013. Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces. **Appl. Math. Inf. Sci.,** 7: 287-294

[12] Sabir H., Bashir A., 2011. Some properties of soft topological spaces. **Comput. Math. Appl.,** 62: 4058-4067.

[13] Das, S., Samanta, S. K., 2013. Soft metric. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 6: 77-94.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Yücel ÖZDAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	AYDIN, 31.10.1989

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.

İŞ DENEYİMİ

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	yucelozdas@gmail.com
Tarih	:	13.07.2015