

**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2015-DR-005**

**PLATONİK RIEMANN YÜZEYLERİ
VE
PETRIE ÇOKGENLERİ**

Serhan ULUSAN

**Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN-2015

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Serhan ULUSAN tarafından hazırlanan " Platonik Riemann Yüzeyleri ve Petrie Çokgenleri " başlıklı tez, 11.06.2015 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Prof. Dr. Yusuf CİVAN	Süleyman Demirel Üni.	
Üye	: Doç. Dr. Bekir TANAY	Muğla Sıtkı Koçman Üni.	
Üye	: Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Adnan Menderes Üni.	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL	Adnan Menderes Üni.	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Süleyman GÜLER	Adnan Menderes Üni.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

11.06.2015

Serhan ULUSAN

ÖZET
PLATONİK RIEMANN YÜZEYLERİ
VE
PETRIE ÇOKGENLERİ

Serhan ULUSAN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU
2015, 83 sayfa

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının ana konusu, Platonik Riemann yüzeylerine karşılık gelen düzgün figürlerin Petrie çokgenlerini ve bunların simetri gruplarını incelemektir.

Birinci bölümde, tez konusu ve elde edilen sonuçlar kısaca tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, tezin ana konusu için gerekli olan temel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Petrie çokgenleri ve bunlara karşılık gelen Petrie otomorfizmaları tanıtılmıştır. Bunlar, Petrie çokgenlerini kümesel olarak sabit tutan, ancak sabit noktası bulunmayan otomorfizmalardır. Ayrıca, Petrie otomorfizmalarının eşlenik sınıfları belirlenmiştir. Bir Petrie çokgeninin simetri grubunun dihedral olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, bir düzgün figürün bütün Petrie çokgenlerinin sayısını veren bir formül ispatlanmıştır ve bu sayı için üst ve alt sınırlar bulunmuştur. Cinsi 1 olan tüm yansımali düzgün figürlerin Petrie otomorfizmalarının mertebeleri belirlenmiştir. Hurwitz figürleri gibi iyi bilinen bazı düzgün figür ailelerinin, Petrie otomorfizmalarının mertebeleri ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları belirlenmiştir. Ayrıca Petrie otomorfizmaları birim olan düzgün figürlerin sadece Wiman ve Accola-Maclachlan yüzeyleri üzerinde bulunduğu gösterilmiştir. Son olarak, cinsi 15'e kadar olan yansımali düzgün figürlerin Petrie otomorfizmalarının mertebeleri, bütün Petrie çokgenlerinin sayıları ve uzunlukları hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde, elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Riemann yüzeyleri, Düzgün figürler, Platonik yüzeyler, Petrie çokgenleri

ABSTRACT

PLATONIC RIEMANN SURFACES AND PETRIE POLYGONS

Serhan ULUSAN

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Adnan MELEKOĞLU
2015, 83 pages

The main topic of this study, which consists of four chapters, is to investigate Petrie polygons and their symmetry groups corresponding to regular maps on Platonic Riemann surfaces.

In the first chapter, the topic and the results of the thesis have been introduced.

In the second chapter, basic concepts that are necessary for the main topic of the thesis have been included.

In the third chapter, Petrie polygons and the corresponding Petrie automorphisms have been introduced. These are automorphisms that fix the Petrie polygons setwise but have no fixed points. Moreover, the conjugacy classes of Petrie automorphisms have been determined. It has been shown that the symmetry group of a Petrie polygon is dihedral. Then, a formula for the number of all Petrie polygons of a regular map has been proved, and upper and lower bounds have been found for this number. The orders of Petrie automorphisms of all reflexible regular maps of genus one have been determined. The orders of Petrie automorphisms and the numbers of all Petrie polygons of some well-known families of regular maps such as Hurwitz maps have been determined. It has also been shown that the regular maps with identity Petrie automorphisms can only exist on Wiman and Accola-Maclachlan surfaces. Finally, the orders of Petrie automorphisms, the numbers of all Petrie polygons and the lengths of Petrie polygons of all reflexible regular maps of genus up to 15 have been calculated.

In the fourth chapter, the results of the thesis summarized briefly.

Key Words: Riemann surfaces, Regular maps, Platonic surfaces, Petrie polygons

ÖNSÖZ

Öncelikle tez konusunu seçen, çalışmalarım boyunca her türlü yardımlarını ve bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) sonsuz teşekkür ederim.

Tez önerisi, raporlar ve tez yazımı aşamasındaki tavsiyelerinden dolayı Prof. Dr. Yusuf CİVAN'a (Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Bölümü), Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL'e (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) şükranlarımı sunarım.

Bu tezin yazımında teknik destek ve bilgi birikimleriyle her zaman yardımcı olan değerli arkadaşlarım Araş. Gör. Okan ARSLAN'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) ve Araş. Gör. M. Soner PEHLİVAN'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından, FEF-14009 kod numaralı bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Serhan ULUSAN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	3
2.1. Çizgeler (Graflar)	3
2.2. Topolojik Gruplar	7
2.3. Grup Etkisi	8
2.4. Bölüm (Yörüngen) Uzayları	9
2.5. Möbius Dönüşümleri	12
2.6. Bir Çember Üzerinde Yansıma (Inversion)	13
2.7. Hiperbolik Düzlem	15
2.7.1. Hiperbolik Metrik	17
2.7.2. Hiperbolik Düzlemin İzometrileri	19
2.7.3. Hiperbolik Üçgenler	22
2.8. Fuchs Grupları	24
2.8.1. Üçgensel Gruplar	26
2.9. Riemann Yüzeyleri	28
2.10. Düzgün Figürler	30
2.11. Düzgün Figürlerin Sınıflandırılması	33
2.11.1. Cinsi 0 Olan Düzgün Figürler	33
2.11.2. Cinsi 1 Olan Düzgün Figürler	34
2.11.3. Cinsi 1'den Büyük Olan Düzgün Figürler	35
2.11.4. Düzgün Figürlerin Otomorfizma Grupları	35
2.12. Platonik Riemann Yüzeyleri	36
3. DÜZGÜN FİGÜRLER VE PETRIE ÇOKGENLERİ	37
3.1. Petrie Çokgenleri	37
3.2. Petrie Otomorfizması	38
3.2.1. Petrie Otomorfizmalarının Eşlenik Sınıfları	40

3.2.2. Petrie Çokgenlerinin Simetri Grupları	41
3.3. Petrie Çokgenlerinin Sayısı	43
3.4. Cinsi 0 Olan Düzgün Figürlerin Petrie Çokgenleri	45
3.5. Cinsi 1 Olan Düzgün Figürlerin Petrie Çokgenleri	46
3.5.1. $\{4,4\}$ Figürü	46
3.5.2. $\{6,3\}$ ve $\{3,6\}$ Figürü	49
3.6. Bazı Özel Yüzeyler ve Petrie Çokgenleri	53
3.6.1. Wiman Yüzeyleri	53
3.6.2. Accola-Maclachlan Yüzeyleri	57
3.6.3. Hurwitz Yüzeyleri	59
3.7. Petrie Sayısı Bir Olan Düzgün Figürler	66
3.8. Cinsi 15'e Kadar Olan Düzgün Figürlerin Petrie Çokgenleri	68
4. SONUÇ	79
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	83

SİMGELER DİZİNİ

$\overset{\circ}{K}$: K kümesinin içi
\mathbb{H}	: Hiperbolik düzlem için üst yarı düzlem modeli
\mathbb{D}	: Hiperbolik düzlem için birim daire modeli
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Karmaşık sayılar kümesi
\mathbb{C}_∞	: Genişletilmiş karmaşık düzlem
$PSL(2, \mathbb{R})$: Hiperbolik düzlemin konform izometrilerinin grubu
$PGL(2, \mathbb{R})$: Hiperbolik düzlemin tüm izometrilerinin grubu
$Aut^\pm X$: X yüzeyinin tüm otomorfizmalarının grubu
$Aut^+ X$: X yüzeyinin konform otomorfizmalarının grubu
$Aut^\pm \mathcal{M}$: \mathcal{M} düzgün figürünün tüm otomorfizmalarının grubu
$Aut^+ \mathcal{M}$: \mathcal{M} düzgün figürünün konform otomorfizmalarının grubu
$\ \mathcal{M}_p\ $: \mathcal{M} düzgün figürünün bütün Petrie çokgenlerinin sayısı
G_a	: a noktasının yörüngelerinin kümesi
S_a	: a noktasının sabitleyen kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Nokta çizgeler	4
Şekil 2.2.	Yol çizgeler	5
Şekil 2.3.	Döngü çizgeler	5
Şekil 2.4.	Tam çizgeler	5
Şekil 2.5.	Yıldız çizgeler	6
Şekil 2.6.	İki parçalı çizgeler	6
Şekil 2.7.	İki tam parçalı çizgeler	6
Şekil 2.8.	$\langle z \rightarrow z + 1 \rangle$ grubu için bir temel bölge	10
Şekil 2.9.	İki öteleme tarafından üretilen grubun bölüm uzayı	11
Şekil 2.10.	Bir çember üzerindeki yansıma	14
Şekil 2.11.	Aykırı küre	15
Şekil 2.12.	Hiperbolik doğrular	16
Şekil 2.13.	Paralel, ayrı paralel ve kesişen hiperbolik doğrular	16
Şekil 2.14.	Birim daire modeline göre doğrular	17
Şekil 2.15.	Hiperbolik doğru parçası	18
Şekil 2.16.	Hiperbolik düzlemde öteleme	20
Şekil 2.17.	Hiperbolik düzlemde rotasyon	20
Şekil 2.18.	Hiperbolik düzlemde limit rotasyon	21
Şekil 2.19.	Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma	21
Şekil 2.20.	Herhangi bir $(2, 3, 7)$ -üçgeni	24
Şekil 2.21.	$\langle z \rightarrow 3z \rangle$ grubu için temel bölgeler	25
Şekil 2.22.	Düzgün sekizgenden elde edilen yüzey	26
Şekil 2.23.	Bir hiperbolik üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar	27
Şekil 2.24.	v köşesine ait bir dart	31
Şekil 2.25.	Yansımali olmayan bir düzgün figür	32
Şekil 2.26.	Küre üzerinde $\{2, n\}$ ve $\{n, 2\}$ tipindeki düzgün figürler	33
Şekil 2.27.	Platonik cisimlere karşılık gelen düzgün figürler	34
Şekil 2.28.	Bir $(2, m, n)$ -üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar	35
Şekil 3.1.	$\{6, 3\}$ figürünün iki tane Petrie çokgeni	38
Şekil 3.2.	Petrie otomorfizması	39
Şekil 3.3.	Petrie çokgeni	41
Şekil 3.4.	Dual figürün Petrie çokgeni	44
Şekil 3.5.	$\{3, 4\}$ figürünün bir Petrie çokgeni	45
Şekil 3.6.	$\{4, 4\}_{4,0}$ ve $\{4, 4\}_{2,2}$ figürlerinin birer Petrie çokgeni	49
Şekil 3.7.	$\{6, 3\}_{4,0}$ ve $\{6, 3\}_{2,2}$ figürlerinin birer Petrie çokgeni	52
Şekil 3.8.	Cinsi 2 olan birinci tip Wiman figürü	54
Şekil 3.9.	Cinsi 2 olan ikinci tip Wiman figürü	55
Şekil 3.10.	Cinsi 2 olan Accola-Maclachlan figürü	58
Şekil 3.11.	$g = 3$ olan Hurwitz figürünün 3 Petrie çokgeni	61

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Cinsi 0 olan düzgün figürlerin Petrie çokgenleri	46
Çizelge 3.2. Cinsi 1 olan yansımali düzgün figürlerin Petrie çokgenleri	53
Çizelge 3.3. İlk on Hurwitz yüzeyi üzerindeki Petrie çokgenleri	65
Çizelge 3.4. Wiman ve Accola-Maclachlan figürlerinin Petrie çokgenleri	68
Çizelge 3.5. Cinsi 2 olan figürlerin Petrie çokgenleri	69
Çizelge 3.6. Cinsi 3 olan figürlerin Petrie çokgenleri	69
Çizelge 3.7. Cinsi 4 olan figürlerin Petrie çokgenleri	70
Çizelge 3.8. Cinsi 5 olan figürlerin Petrie çokgenleri	70
Çizelge 3.9. Cinsi 6 olan figürlerin Petrie çokgenleri	71
Çizelge 3.10. Cinsi 7 olan figürlerin Petrie çokgenleri	71
Çizelge 3.11. Cinsi 8 olan figürlerin Petrie çokgenleri	72
Çizelge 3.12. Cinsi 9 olan figürlerin Petrie çokgenleri	73
Çizelge 3.13. Cinsi 10 olan figürlerin Petrie çokgenleri	74
Çizelge 3.14. Cinsi 11 olan figürlerin Petrie çokgenleri	75
Çizelge 3.15. Cinsi 12 olan figürlerin Petrie çokgenleri	75
Çizelge 3.16. Cinsi 13 olan figürlerin Petrie çokgenleri	76
Çizelge 3.17. Cinsi 14 olan figürlerin Petrie çokgenleri	77
Çizelge 3.18. Cinsi 15 olan figürlerin Petrie çokgenleri	78

1. GİRİŞ

X bir kompakt Riemann yüzeyi olmak üzere, sonlu ve bağlantılı bir \mathcal{G} çizgesinin (grafının) X yüzeyine gömülmesine (embedding) X üzerinde bir figür (map) denir. $X \setminus \mathcal{G}$, her biri bir açık diske homeomorf olan çokgenlerden oluşur ve bunlar figürün yüzleri olarak adlandırılır. Eğer bu yüzler eşleşik (congruent) ve \mathcal{G} çizgesinin köşelerinin derecesi eşit ise bu figüre bir düzgün figür denir. Bu durumda X yüzeyi bir Platonik Riemann yüzeyi olarak adlandırılır. Her düzgün figür üzerinde, Petrie çokgeni adı verilen ve yüzey üzerindeki ilgili çizgenin bazı ardışık kenarlarından oluşan kapalı zikzaklar bulunur öyle ki ardışık üç kenar aynı yüze komşu olamaz. \mathcal{M} bir düzgün figür ve C bu figürün $2k$ kenarlı bir Petrie çokgeni olsun. \mathcal{M} figürünün, mertebesi k olan ve C çokgenini kendisine götüren iki otomorfizmasının olduğu bilinmektedir [9]. Bu otomorfizmalar, C çokgeninin Petrie otomorfizmaları olarak adlandırılır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, tezin ana konusu için gerekli olan bazı temel bilgiler yer almaktadır. Üçüncü bölümde ilk olarak Petrie otomorfizmalarının eşlenik sınıfları belirlenecek ve Petrie çokgenlerinin simetri gruplarının dihedral olduğu gösterilecektir. Ayrıca, Petrie çokgenlerinin simetri gruplarındaki elemanlar sabit noktaları ve yönü koruyup korumamalarına göre sınıflandırılacaktır. Daha sonra, verilen bir düzgün figürün bütün Petrie çokgenlerinin sayısını veren bir formül ispatlanacak ve bu sayı için alt ve üst sınırlar araştırılacaktır. Bu formül yardımıyla Petrie otomorfizmalarının mertebeleri için üst sınırlar belirlenecektir.

Cinsi 0 olan düzgün figürlerin Petrie çokgenleri Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003) tarafından incelenmiştir [9] ve bu çalışmadan elde edilen sonuçlar üçüncü bölümde verilecektir. Daha sonra cinsi 1 olan tüm yansımali düzgün figürlerin Petrie otomorfizmalarının mertebeleri ve bütün Petrie çokgenlerinin

sayıları hesaplanacaktır. Ek olarak Wiman ve Accola-Maclachlan figürleri gibi iyi bilinen bazı düzgün figür ailelerinin Petrie otomorfizmalarının mertebeleri ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları belirlenecektir. Ayrıca, Petrie otomorfizmaları birim olan düzgün figürlerin sadece Wiman ve Accola-Maclachlan yüzeyleri üzerinde bulunduğu gösterilecektir. Böylece, Wiman ve Accola-Maclachlan yüzeylerinin yeni bir karakterizasyonu elde edilecektir. Son olarak, cinsi 15'e kadar olan yansımalı düzgün figürlerin Petrie otomorfizmalarının mertebeleri, bütün Petrie çokgenlerinin sayıları ve uzunlukları hesaplanacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, bu çalışma için gerekli bazı temel bilgiler ve tanımlar verilecektir.

2.1. Çizgeler (Graflar)

Tanım 2.1.1. $V \neq \emptyset$ ve sonlu bir küme olsun. $E \subseteq V \times V$ olmak üzere, $\mathcal{G} = (V, E)$ ikilisine bir çizge (graf) denir. Burada V kümesine \mathcal{G} çizgesinin köşelerinin kümesi ve E kümesine de \mathcal{G} çizgesinin kenarlarının kümesi denir.

Tanım 2.1.2. Aynı iki köşeyi birleştiren birden fazla kenara bu iki köşe arasındaki çoğul kenar, bir köşeyi kendine birleştiren bir kenara ise döngü (loop) denir. Eğer bir \mathcal{G} çizgesinde hiçbir döngü ve çoğul kenar yoksa bu çizgeye basit çizge denir.

Tanım 2.1.3. Bir \mathcal{G} çizgesinde x ve y köşelerini birleştiren bir $e = (x, y) = xy$ kenarı varsa x ve y köşelerine komşu köşeler, e kenarına da x ve y köşeleri ile bitişiktir denir.

Tanım 2.1.4. Bir \mathcal{G} çizgesinde k tane kenarın uv, vy, yx, \dots, wz şeklindeki sıralanışına k uzunluklu bir yol denir. Böyle bir yol $uvyx \dots wz$ ile gösterilir ayrıca u ve z veya z ve u köşeleri arasındaki bir yol olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.5. Bir \mathcal{G} çizgesinde u ve v köşeleri arasındaki bir yol $uyvwywvtzzv$ şeklinde ise bu yol 10 uzunluğunda bir yoldur ve wv kenarını iki kez bulundurur.

Tanım 2.1.6. Bir \mathcal{G} çizgesinde bir yolun tüm kenarları farklı ise bu yola bir iz denir. Bir iz üzerindeki tüm köşeler de farklı ise bu ize bir patika denir.

Örnek 2.1.7. Bir \mathcal{G} çizgesinde $uvvytwt$ yolu bir iz, $uvwyzt$ yolu ise bir patikadır.

Tanım 2.1.8. Bir \mathcal{G} çizgesinde $uvyx \dots wzu$ şeklindeki yola bir kapalı yol denir. Burada kenarların hepsi farklı ise bu yola bir kapalı iz, bu izin de her köşesi farklı ise bu ize bir devir denir.

Örnek 2.1.9. Bir \mathcal{G} çizgesinde $uvyvtwu$ yolu bir kapalı iz, tt ve $uvwyztu$ yollarının her biri birer devirdir.

Tanım 2.1.10. Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesi için $N_{\mathcal{G}}(u) = \{v \in V \mid uv \in E\}$ kümesine u köşesinin komşuluklarının kümesi denir ve kısaca $N(u)$ ile gösterilir. Ayrıca $N(u)$ kümesinin eleman sayısına da u köşesinin derecesi denir ve $d_{\mathcal{G}}(u)$ (veya kısaca $d(u)$) ile gösterilir.

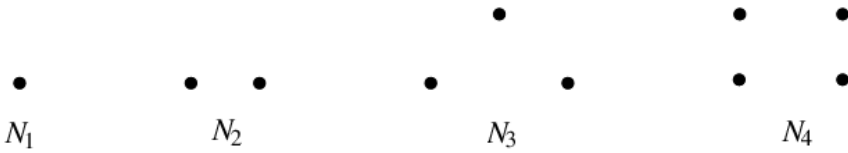
Tanım 2.1.11. Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesinde

$$\delta_{\mathcal{G}} = \min\{d(v) : v \in V\} \quad \text{ve} \quad \Delta_{\mathcal{G}} = \max\{d(v) : v \in V\}$$

şeklinde tanımlanan δ ve Δ değerlerine, sırasıyla \mathcal{G} çizgesinin minimum ve maksimum derecesi denir. Ayrıca bir \mathcal{G} çizgesinde $\delta = \Delta = r$ ise bu çizgeye r -regüler çizge denir.

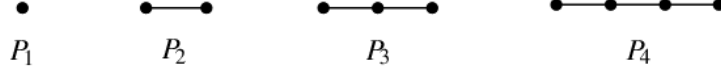
Bu çalışmada kullanılacak tüm çizgeler regüler çizge olacaktır.

Tanım 2.1.12. (i) Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesinin köşe sayısı n olsun. Eğer bu çizgenin kenar kümesi boş küme ise \mathcal{G} çizgesine nokta çizge denir ve N_n ile gösterilir (Şekil 2.1). N_n çizgesi 0-regüler çizgedir.



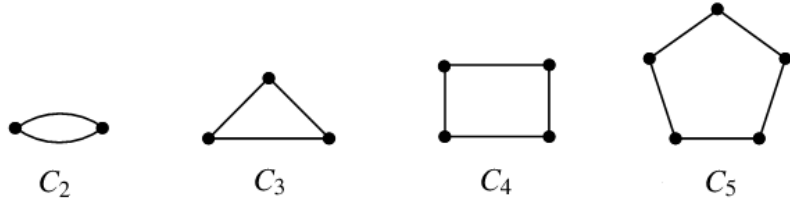
Şekil 2.1. Nokta çizgeleri

(ii) Köşe ve kenarlarının kümesi sırasıyla $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ olan bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesine v_1, v_n -yol çizgesi denir ve P_n ile gösterilir (Şekil 2.2). P_n çizgesinin kenar sayısı $n - 1$ olur.



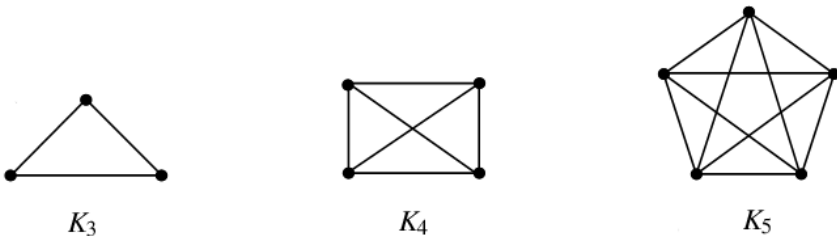
Şekil 2.2. Yol çizgeler

(iii) Bütün köşelerinin derecesi 2 olan çizgeye n -döngü çizge denir ve C_n ile gösterilir (Şekil 2.3). C_n çizgesi 2-regüler çizgedir ve bu çizgenin kenar sayısı n olur.



Şekil 2.3. Döngü çizgeler

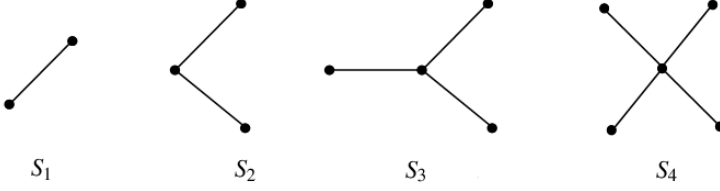
(iv) Bir çizgede tüm köşe çiftleri arasında sadece bir kenar varsa bu çizgeye n -tam çizge denir ve K_n ile gösterilir (Şekil 2.4). K_n çizgesi $(n-1)$ -regüler çizgedir ve bu çizgenin kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ olur.



Şekil 2.4. Tam çizgeler

(v) Bir çizgede sadece bir köşenin diğer bütün köşelerle arasında yalnız bir kenar varsa bu çizgeye yıldız çizge denir ve S_n ile gösterilir (Şekil 2.5). Daha net olarak

$S_n = (\{1, 2, 3, \dots, n+1\}, \{1i \mid 1 < i \leq n+1\})$ dir ve bu çizgenin kenar ve köşe sayıları sırasıyla n ve $n+1$ olur.



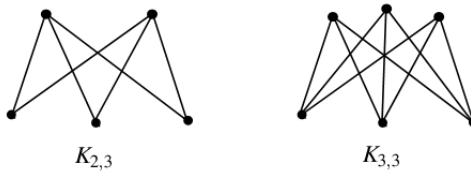
Şekil 2.5. Yıldız çizgeler

(vi) Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesi için, $V = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer \mathcal{G} çizgesinin kenarları; A kümesindeki her bir köşeyi, B kümesindeki bir köşe ile birleştiriyorsa yani $E \subset A \times B$ ise bu çizgeye iki parçalı çizge denir (Şekil 2.6). A ve B kümelerine ise \mathcal{G} çizgesinin parça kümeleri denir.



Şekil 2.6. İki parçalı çizgeler

(vii) Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesi için, $V = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ ayrıca A kümesinin eleman sayısı r , B kümesinin eleman sayısı s olsun. Eğer \mathcal{G} çizgesinin kenarları; A kümesindeki her bir köşeyi, B kümesindeki tüm köşeler ile birleştiriyorsa yani $E = A \times B$ ise bu çizgeye iki parçalı tam çizge denir ve $K_{r,s}$ ile gösterilir (Şekil 2.7). $K_{r,s}$ çizgesinin rs tane kenarı vardır.



Şekil 2.7. İki tam parçalı çizgeler

2.2. Topolojik Gruplar

Tanım 2.2.1. $(G, *)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Eğer her $g, h \in G$ için,

$$\alpha : G \times G \rightarrow G, \quad \alpha(g, h) = g * h$$

$$\beta : G \rightarrow G, \quad \beta(g) = g^{-1}$$

şeklinde tanımlanan α ve β dönüşümleri sürekli ise G grubuna bir topolojik grup denir. Ayrıca aksi söylenmedikçe $g * h = gh$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.2.2. $(\mathbb{R}, +)$ grubunun Öklid topolojisi ile birlikte düşünüldüğünde bir topolojik grup olduğunu görelim. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, α ve β fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(x, y) = x + y,$$

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(y) = -y.$$

Bu fonksiyonların sürekli olduğunu göstermek için, Öklid topolojisinin verilen bir tabanında bulunan tüm kümelerin bu fonksiyonlar altında ters görüntülerinin sırasıyla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve \mathbb{R} topolojik uzaylarında açık olduklarını göstermek gerekir. Bu durumda $c, d \in \mathbb{R}$ ve $c < d$ olmak üzere, (c, d) açık aralıklarından oluşan ailenin Öklid topolojisi için bir taban olduğu bilindiğinden,

$$\beta^{-1}[(c, d)] = (-d, -c) \quad \text{ve} \quad \alpha^{-1}[(c, d)] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid c < x + y < d\}$$
 alt

kümelerinin sırasıyla \mathbb{R} Öklid topolojik uzayı ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ çarpım uzayında açık oldukları kolayca gösterilebilir. Böylece, α ve β dönüşümleri süreklidir ve $(\mathbb{R}, +)$ toplamsal grubu bir topolojik gruptur.

Örnek 2.2.3. Benzer şekilde $(\mathbb{C}, +)$ ve $(\mathbb{Z}, +)$ gruplarının Öklid topolojisi ile birlikte ele alındığında birer topolojik grup olduğu görülür.

Tanım 2.2.4. G bir topolojik grup olsun. G grubunun bütün tek noktalı alt kümeleri açık ise G topolojik grubuna bir ayrık grup denir. Bu durumda, ayrık topoloji ile birlikte düşünüldüğünde her grup bir ayrık grup olur.

Tanım 2.2.5. X bir topolojik uzay ve A , X uzayının bir alt uzayı olsun. Her $a \in A$ noktasının $U \cap A = \{a\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, A uzayına X topolojik uzayının bir ayrık alt uzayı denir.

Tanım 2.2.6. G bir topolojik grup ve H , G grubunun bir alt grubu olsun. Eğer H , G topolojik uzayının bir ayrık alt uzayı ise H grubuna G grubunun bir ayrık alt grubu denir.

Örnek 2.2.7. $(\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{R}, +)$ grubunun bir ayrık alt grubudur.

2.3. Grup Etkisi

Tanım 2.3.1. G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $x \in X$ ve her $g_1, g_2 \in G$ için, aşağıdaki şartları sağlayan

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi denir:

(i) $\phi(e, x) = x$,

(ii) $\phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$.

Burada e , G grubunun birim elemanıdır.

Örnek 2.3.2. G bir grup ve $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $a \in A$ ve her $g \in G$ için,

$$\phi : G \times A \rightarrow A, \quad \phi(g, a) = a$$

şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü G grubunun A kümesi üzerine bir etkisidir. Buna aşıkâr etki denir.

Örnek 2.3.3. G bir grup olsun. Her $g, h \in G$ için,

$$\phi : G \times G \rightarrow G, \quad \phi(g, h) = gh$$

şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü G grubunun kendi üzerine bir etkisidir. Çünkü her $g \in G$ için, $\phi(e, g) = g$ ve her $g_1, g_2, h \in G$ için,

$$\phi(g_1 g_2, h) = g_1 g_2 h = g_1 \phi(g_2, h) = \phi(g_1, \phi(g_2, h))$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla ϕ dönüşümü G grubunun kendi üzerine bir etkisi olur.

Örnek 2.3.4. X bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda her $x \in X$ ve her $g \in G$ için, $\phi : G \times X \rightarrow X$ ve $\phi(g, x) = g(x)$ şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisidir.

Tanım 2.3.5. G bir grup, $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\phi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\phi(g, x) = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesi üzerine etkisi geçişlidir (transitive) denir.

Tanım 2.3.6. G bir grup, $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\phi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Eğer $x \neq y$ ve $u \neq v$ özelliğindeki her $x, y, u, v \in X$ elemanları için $\phi(g, x) = u$ ve $\phi(g, y) = v$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesi üzerine etkisi çift geçişlidir denir.

2.4. Bölüm (Yörünge) Uzayları

Tanım 2.4.1. X bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesinin fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir grup olduğu ve her $x \in X$ ve her $g \in G$ için,

$$\phi : G \times X \rightarrow X, \quad \phi(g, x) = g(x)$$

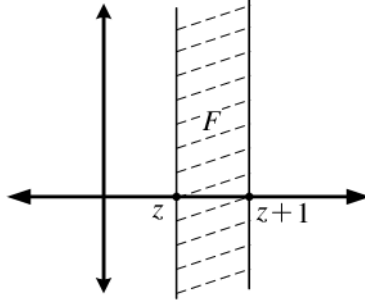
şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümünün de G grubunun X kümesine bir etkisi olduğu biliniyor. Bu şartlar altında, X uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı bir K alt kümesine G grubu için bir temel bölge denir:

$$(i) \bigcup_{g \in G} g(K) = X,$$

$$(ii) \text{ Her } g \in G \setminus \{e\} \text{ için, } \overset{\circ}{K} \cap g(\overset{\circ}{K}) = \emptyset.$$

Burada $\overset{\circ}{K}$ ile K kümesinin içi, e ile de G grubunun birim elemanı gösterilmektedir.

Örnek 2.4.2. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $f(z) = z + 1$ olarak tanımlanan f fonksiyonu sonsuz devirli bir G grubu üretir. Şekil 2.8 deki taralı olan F kümesi bu G grubu için bir temel bölge olur.



Şekil 2.8. $\langle z \rightarrow z + 1 \rangle$ grubu için bir temel bölge

Tanım 2.4.3. G bir grup, $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\phi: G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. $a \in X$ için, $G_a = \{\phi(g, a) \mid g \in G\}$ kümesine a noktasının yörüngesi ve $S_a = \{g \in G \mid \phi(g, a) = a\}$ kümesine de a noktasının sabitleyeni denir.

Tanım 2.4.4. X bir topolojik uzay ve G, X uzayına etki eden bir grup olmak üzere G_x kümesi, $x \in X$ noktasının yörüngesi olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$"x\beta y \Leftrightarrow y \in G_x"$$

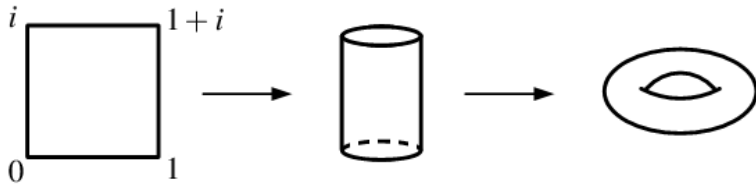
olarak tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik bağıntısına göre bir x elemanın denklik sınıfı, x elemanın yörüngesidir ve denklik sınıflarının oluşturduğu $X/\beta = \{G_x \mid x \in X\}$ ailesi de bölüm kümesidir. $\pi(x) = G_x$ olarak tanımlanan $\pi: X \rightarrow X/\beta$ fonksiyonu da bölüm fonksiyonudur. Bu durumda,

$$\tau = \{A \subset X/\beta \mid \pi^{-1}(A), X \text{ uzayında açıktır}\}$$

olarak tanımlanan τ ailesi X/β kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye bölüm topolojisi denir. X/β kümesi bu topolojiyle birlikte düşünüldüğünde bir topolojik uzaydır ve X/β topolojik uzayına bölüm uzayı veya yörünge uzayı denir.

Burada X/β bölüm uzayının elemanları G grubuna göre yörüngeler olduğundan, X/β yerine X/G notasyonu kullanılacaktır. Ayrıca, X/G geometrik olarak şu şekilde elde edilir. K, G grubu için bir temel bölge olsun. Temel bölge tanımından dolayı K kümesinin iki farklı iç noktası aynı yörüngede bulunamaz ama sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı yörüngede bulunabilir. Burada K kümesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse X/G yüzeyi elde edilir.

Örnek 2.4.5. $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + 1$ ve $g(z) = z + i$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar olsun. Bu f ve g fonksiyonları \mathbb{C} üzerine etki eden ve $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olan bir G grubu üretirler. Köşeleri $0, 1, i$ ve $1 + i$ olan kare, G grubu için bir temel bölgedir. Bu karenin kenarları üzerinde aynı yörüngeye sahip noktalar uygun şekilde birleştirilirse bölüm uzayı olarak Şekil 2.9 daki gibi bir tor yüzeyi elde edilir.



Şekil 2.9. İki öteleme tarafından üretilen grubun bölüm uzayı

Ayrıca karmaşık düzlemde; kenar uzunlukları 1 birim ve kenarları eksellere paralel olan herhangi bir karenin yukarıdaki örnekte verilen G grubu için bir temel bölge olduğu kolayca görülebilir.

2.5. Möbius Dönüşümleri

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ ve $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklindeki dönüşümlere Möbius dönüşümleri denir. Bu dönüşümlerin kümesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup projektif genel lineer grup olarak adlandırılır ve $PGL(2, \mathbb{C})$ notasyonuyl gösterilir.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1)$$

şeklindeki dönüşümlerin oluşturduğu grup ise bir projektif özel lineer gruptur ve $PSL(2, \mathbb{R})$ notasyonuyl gösterilir. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubundaki dönüşümlerle birlikte

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1)$$

biçimindeki dönüşümleri de içeren küme bir gruptur. Bu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ notasyonuyl gösterilir ve $PSL(2, \mathbb{R})$ bu grubun indeksi iki olan bir alt grubudur.

Bir T dönüşümü,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \Delta = ad - bc > 0) \quad (2.5.1)$$

biçiminde olsun. T dönüşümünde pay ve paydayı $\sqrt{\Delta}$ ya bölersek

$$T(z) = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)z + \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\left(\frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right)z + \left(\frac{d}{\sqrt{\Delta}}\right)}$$

dönüşümünü elde ederiz. Buradan $\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{d}{\sqrt{\Delta}}\right) - \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{\Delta}}\right) = 1$ olduğu ve (2.5.1) dönüşümünün $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun elemanı olduğu görülür.

$PSL(2, \mathbb{R})$ grubu,

$$z \rightarrow az + b \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a > 0)$$

şeklindeki dönüşümleri de içerir. Çünkü $az + b = \frac{\sqrt{a}z + \frac{b}{\sqrt{a}}}{0z + \frac{1}{\sqrt{a}}}$ ve

$\Delta = (\sqrt{a})\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 1$ dir. (2.5.1) dönüşümü

$$T(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{(acz\bar{z} + bd) + (adz + bc\bar{z})}{|cz + d|^2}$$

biçiminde yazılabilir. $z = x + iy$ olmak üzere $T(z) = u + iv$ karmaşık sayısının sanal kısmı

$$v = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} \quad (2.5.2)$$

olarak bulunur.

$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ kümesi üst yarı düzlem olmak üzere, $ad - bc > 0$ olduğundan T dönüşümünün \mathbb{H} kümesini kendisine resmettiği açıktır.

Teorem 2.5.1. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu \mathbb{H} üzerinde geçişlidir, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde çift geçişlidir.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Teorem 2.5.2. Möbius dönüşümleri çemberler ve doğruları, çemberler ve doğrulara resmederler.

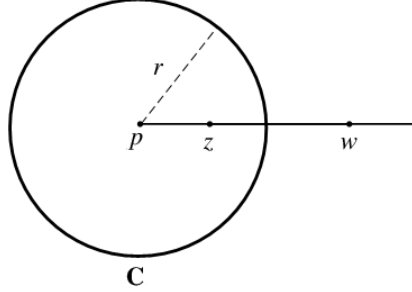
İspat: (Churchill ve Brown, 1990). □

2.6. Bir Çember Üzerinde Yansıma (Inversion)

\mathbb{C} , Şekil 2.10 da görüldüğü gibi karmaşık düzlemde merkezi p , yarıçapı r olan bir çember ve $z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$ olsun. p noktasından başlayıp z noktasından geçen yarı doğru üzerinde,

$$|z - p||w - p| = r^2 \quad (2.6.3)$$

eşitliğini sağlayan bir tek w noktası vardır. Böylece, z noktası \mathbf{C} çemberi üzerinde yansıtıldığında görüntüsü (2.6.3) denklemindeki kuralı sağlayan w noktası olur.



Şekil 2.10. Bir çember üzerindeki yansıma

\mathbf{C} çemberi üzerinde bu şekilde elde edilen yansımaya inversiyon denir ve $I_{\mathbf{C}}$ notasyonu ile gösterilir. $I_{\mathbf{C}} : \mathbb{C} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ bir fonksiyondur ve bu fonksiyon çemberin merkezi hariç, çemberin, içindeki noktaları dışındaki noktalara, dışındaki noktaları içindeki noktalara resmeder. $I_{\mathbf{C}}$ dönüşümü çember üzerindeki noktaların her birini sabit tutar. $z \neq p$ olması durumunda,

$$|(\bar{z} - \bar{p})(w - p)| = |\bar{z} - \bar{p}||w - p| = |z - p||w - p| = r^2$$

bulunur. Bu eşitlikte $\arg(z - p) = \arg(w - p)$ olduğundan

$$\arg(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = 0$$

olur. Böylece,

$$(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = r^2$$

bulunur ve sonuç olarak $I_{\mathbf{C}}$ dönüşümünün denklemini;

$$w = I_{\mathbf{C}}(z) = p + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{p}} \quad (2.6.4)$$

şeklinde elde edilir [27]. Eğer $p = 0$ ve $r = 1$ olarak alınırsa birim çember üzerindeki yansıma elde edilir ve bu yansımanın denklemini;

$$I_{\mathbf{C}}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

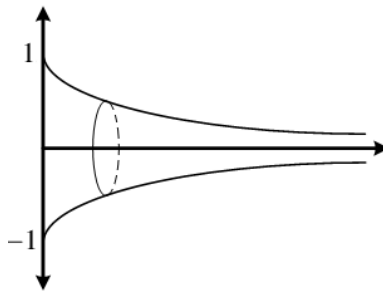
olarak bulunur.

2.7. Hiperbolik Düzlem

Üzerinde, bir L doğrusu ve bu doğruya ait olmayan bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen birden fazla doğruyu bulunduran bir düzlem arayışı sonucunda hiperbolik düzlem ortaya çıkmıştır.

$$x = \theta - \tan \theta, y = \operatorname{sech} \theta, \theta \in [0, +\infty)$$

parametrik denklemleri ile verilen ve çekme eğrisi (tractrix) olarak bilinen eğrinin, x eksenini etrafında 360 derece döndürülmesi ile elde edilen yüzey aykırı küre olarak adlandırılır (Şekil 2.11). Bu yüzeyin her noktası bir eyer noktasıdır ve her noktasındaki Gauss eğriliği -1 dir. Aykırı küre yerel olarak hiperbolik düzleme izometriktir [4].



Şekil 2.11. Aykırı küre

Üzerindeki geometrinin daha kolay anlaşılabilmesi için hiperbolik düzlemin değişik modelleri ortaya konulmuştur. En çok kullanılan modeller, üst yarı düzlem modeli ve birim daire modeli olarak adlandırılan modellerdir.

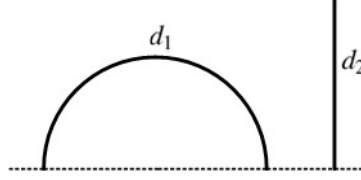
Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik düzlem; üzerinde tanımlı

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

uzaklık fonksiyonu ile

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

kümesidir. \mathbb{H} modeline göre hiperbolik düzlemdeki doğrular, reel eksene dik olan Öklid doğruları ve merkezi reel eksen üzerinde olan çemberlerin, \mathbb{H} kümesi içinde kalan kısımlarıdır (Şekil 2.12).

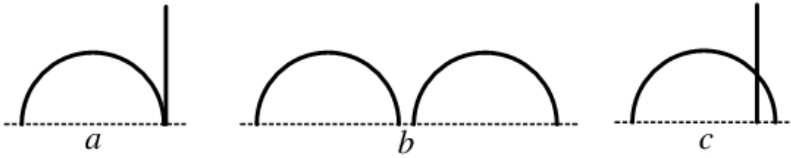


Şekil 2.12. Hiperbolik doğrular

Şekil 2.12 de gösterilen d_2 doğrusunun bir ucu reel eksen üzerindedir, diğer ucunun ise sonsuzda olduğu kabul edilir.

Tanım 2.7.1. \mathbb{H} modelinde iki farklı hiperbolik doğru d_1 ve d_2 olsun. Bu durumda;

- (i) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bu d_1 ve d_2 doğrularının bir tek ortak noktaları varsa doğrular paraleldirler (Şekil 2.13 a).
- (ii) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ve \mathbb{H} üzerinde d_1 ve d_2 doğrularının hiçbir ortak noktaları yoksa bu doğrular ayırık paraleldirler (Şekil 2.13 b).
- (iii) \mathbb{H} modelinde d_1 ve d_2 doğrularının bir tek ortak noktaları varsa doğrular kesişirler (Şekil 2.13 c).



Şekil 2.13. Paralel, ayırık paralel ve kesişen hiperbolik doğrular

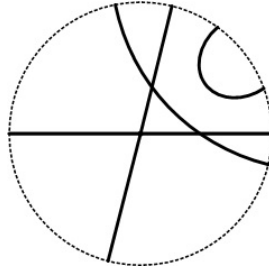
Birim daire modeline göre hiperbolik düzlem; üzerinde tanımlı

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

uzaklık fonksiyonu ile

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

kümesidir. Bu modele göre hiperbolik düzlemin doğruları, karmaşık düzlemde \mathbb{D} kümesinin sınırını dik kesen, Öklid doğru ve çemberlerinin \mathbb{D} kümesinde kalan kısımlarıdır (Şekil 2.14).



Şekil 2.14. Birim daire modeline göre doğrular

Yukarıdaki tanım, birim daire modelindeki doğrular için de geçerlidir.

Bu çalışmada genellikle üst yarı düzlem modeli kullanılacaktır.

2.7.1. Hiperbolik Metrik

$I = [0, 1]$ ve $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlar ve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şeklinde verilsin. γ eğrisinin Öklid uzunluğu, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ formülü yardımıyla

$$|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

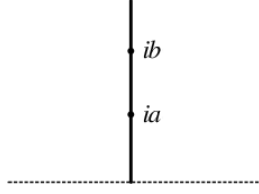
olarak verilir.

$\beta : I \rightarrow \mathbb{H}$ ve $\beta(t) = (x(t), y(t))$ olmak üzere β eğrisinin hiperbolik uzunluğu, $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ formülü yardımıyla

$$|\beta|_{\mathbb{H}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|dz|}{y(t)} dt$$

olarak verilir.

Örnek 2.7.2. $b > a > 0$ olmak üzere, sanal eksen üzerindeki ia ve ib noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasının Öklid uzunluğunun $b - a$ birim olduğu biliniyor.



Şekil 2.15. Hiperbolik doğru parçası

$I = [0, 1]$ için $\beta : I \rightarrow \mathbb{H}$ eğrisi Şekil 2.15 teki ia ve ib noktaları birleştiren doğru parçası olmak üzere, bu eğri $\beta(t) = (0, (b-a)t + a)$ parametrik denklemine sahiptir. Bu eğrinin hiperbolik uzunluğu;

$$\begin{aligned} |\beta|_{\mathbb{H}} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{0 + (b-a)^2}}{(b-a)t + a} dt \\ &= \int_0^1 \frac{b-a}{(b-a)t + a} dt = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.7.3. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ bir eğri ve $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ ise $|T \circ \gamma|_{\mathbb{H}} = |\gamma|_{\mathbb{H}}$ dir.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987) □

Teorem 2.7.4. Hiperbolik düzlemde iki farklı noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçası vardır.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987) □

Tanım 2.7.5. z ve w hiperbolik düzlemde iki nokta olmak üzere, bu iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu noktaları birleştiren hiperbolik doğru parçasının uzunluğu olarak tanımlanır ve $\rho(z, w)$ ile gösterilir. Bu şekilde elde edilen $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu \mathbb{H} modelinde bir metriktir ve hiperbolik metrik olarak adlandırılır.

Teorem 2.7.6. Hiperbolik metrik ile Öklid metriği aynı topolojiyi üretirler.

İspat: (Katok, 1992). □

2.7.2. Hiperbolik Düzlemin İzometrileri

Tanım 2.7.7. \mathbb{H} hiperbolik düzlem ve ρ hiperbolik metrik olmak üzere bir $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$$

eşitliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir hiperbolik izometri denir.

\mathbb{H} modelinin konform izometrileri

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1)$$

biçimindeki Möbius dönüşümlerinden oluşur. Bunlar; ötelemeler, rotasyonlar (dönmeler) ve limit rotasyonlar olmak üzere üç türe ayrılırlar.

\mathbb{H} modelinin konform olmayan izometrileri ise

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1)$$

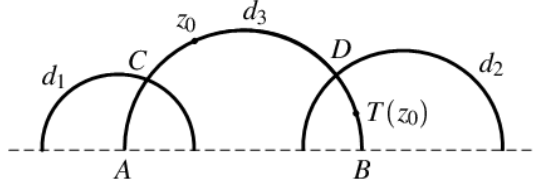
biçimindeki Möbius dönüşümleridir. Bunlar; yansımalar ve ötelemeli yansımalar olmak üzere iki türe ayrılırlar.

Şimdi her bir izometri türünü sabit noktalarına göre inceleyelim.

Yansıma: Hiperbolik düzlem üzerinde bir d doğrusu verilsin. Bu d doğrusu reel eksenini dik kesen bir yarı doğru veya bir yarım çember olduğu biliniyor. Eğer d bir yarı doğru ise bu doğru üzerinde tanımlanan yansıma Öklid anlamındaki yansıma ile aynıdır ve bu yansıma; a, d yarı doğrusunun reel eksenini kestiği nokta olmak üzere, $T(z) = -\bar{z} + 2a$ biçimindedir. Eğer d bir yarım çember ise, bunun üzerindeki yansıma d üzerindeki inversiyondur. Her iki durumda da yansıma d doğrusu üzerindeki tüm noktaları sabit tutar.

Öteleme: Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 ayrık paralel iki doğru olsun. Bu durumda d_1 ile d_2 doğrularının bir tek ortak dikmesi vardır. Bu dikme d_3 ile gösterilsin.

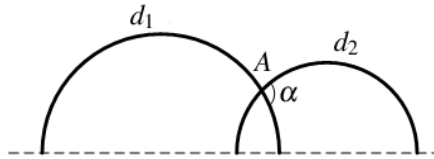
d_3 doğrusunun sonsuzdaki noktaları A ve B olmak üzere; d_3 doğrusu, d_1 ve d_2 doğrularını C ve D noktalarında kessin (Şekil 2.16).



Şekil 2.16. Hiperbolik düzlemde öteleme

C ve D noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık m olmak üzere, T_1 ve T_2 dönüşümleri sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olsunlar. $T = T_2 \circ T_1$ dönüşümü d_3 ortak dikmesi boyunca bir ötelemedir. T dönüşümü hiperbolik düzlemde hiçbir noktayı sabit tutmaz. Ancak, d_3 doğrusunu kümesel olarak sabit tutar. Ayrıca sonsuzdaki A ve B noktalarını sabit tutar. z_0 , d_3 üzerinde bir nokta olmak üzere T , z_0 noktasını d_3 doğrusu üzerinde $2m$ kadar öteleyerek $T(z_0)$ noktasına götürür. T dönüşümünün tersi olan $T^{-1} = T_1 \circ T_2$ dönüşümü de d_3 ortak dikmesi boyunca bir ötelemedir ve T ile benzer özelliklere sahiptir. Ancak T ötelemesi d_3 doğrusu üzerindeki noktaları A noktasından B noktasına doğru ötelerken T^{-1} ötelemesi tam tersi yönde öteler. Her iki ötelemede de öteleme mesafesi $2m$ dir. Ayrıca T dönüşümü hiperbolik düzlemde başka hiçbir doğruyu kümesel olarak sabit tutmaz.

Rotasyon: Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 doğruları, aralarındaki açı α olacak şekilde bir A noktasında kesişsinler (Şekil 2.17).

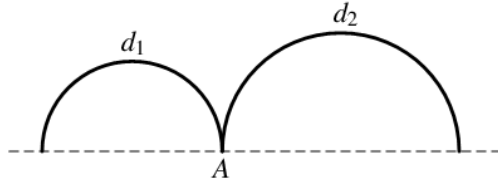


Şekil 2.17. Hiperbolik düzlemde rotasyon

T_1 ve T_2 sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutan bir rotasyondur. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü, T

dönüşümünün tersidir ve T rotasyonu ile benzer özelliklere sahiptir. T ve T^{-1} dönüşümleri hiperbolik düzlemde A noktası dışındaki noktaları A noktası etrafında 2α kadar döndürürler. Fakat döndürmeler birbirinin tersi yönünde olur.

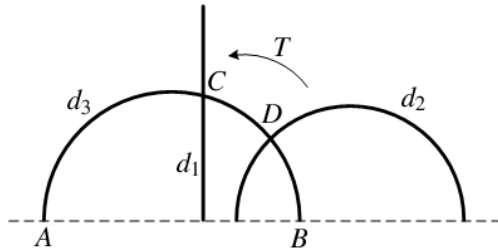
Limit Rotasyon: Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 paralel iki doğru ve bu doğrularının reel eksende kesiştikleri nokta A noktası olsun (Şekil 2.18).



Şekil 2.18. Hiperbolik düzlemde limit rotasyon

d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla T_1 ve T_2 olmak üzere, $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutar ve T dönüşümü, A noktasını sabit tutan bir limit rotasyon olarak adlandırılır. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü, T dönüşümünün tersidir ve yine A noktasını sabit tutan bir limit rotasyondur. T ve T^{-1} dönüşümleri A noktasından geçen hiperbolik doğruları yine A noktasından geçen hiperbolik doğrulara resmederler ve hiçbir hiperbolik doğruyu sabit tutmazlar. Ayrıca A noktasında kesişen sonsuz hiperbolik doğru çifti bulunabileceği için A noktasını sabit tutan sonsuz limit rotasyon olduğu kolayca görülebilir.

Ötelemeli Yansıma: Hiperbolik düzlemde d_1 ve d_2 ayrıık paralel iki doğru ve d_3 ; uç noktaları sonsuzdaki A ve B olan ve d_1 ve d_2 doğrularını sırasıyla C ve D noktalarında dik kesen hiperbolik doğru olsun (Şekil 2.19).



Şekil 2.19. Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma

T_1 , T_2 ve T_3 dönüşümleri sırasıyla d_1 , d_2 ve d_3 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ dönüşümü d_3 doğrusu boyunca bir ötelemeli yansımadır. Bu dönüşüm, d_3 doğrusunu kendisine resmeder ve bu doğrunun sonsuzdaki A ve B noktalarını sabit tutar. z_0 , d_3 doğrusu üzerinde bir nokta ise $T(z_0)$ noktası da d_3 doğrusu üzerindedir ve bu iki nokta arasındaki uzaklık C ve D noktaları arasındaki uzaklığın iki katı kadardır. T dönüşümü hiperbolik düzlemde d_3 doğrusu haricinde hiçbir doğruyu sabit tutmaz. T^{-1} dönüşümü T dönüşümü ile benzer özelliklere sahiptir fakat öteleme yönleri birbirlerinin tersidir.

Teorem 2.7.8. *Hiperbolik düzlemin yönü koruyan izometrilere çift sayıda yansımanın, yönü korumayan izometrilere tek sayıda yansımanın bileşkesi olarak ifade edilebilirler.*

İspat: (Stillwell, 1992). □

2.7.3. Hiperbolik Üçgenler

l , m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, hiperbolik düzlemde kenarları hiperbolik doğru parçaları ve iç açıları $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ radyan olan bir üçgene bir (l, m, n) -üçgeni denir.

Teorem 2.7.9. $l, m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ olmak üzere bir (l, m, n) -üçgeni daima mevcuttur.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Bu çalışmada daha çok $(2, m, n)$ -üçgenleri incelenecektir. Öklid geometrisinde trigonometrik fonksiyonların tanımı için benzer üçgenler kullanılır. Ancak hiperbolik geometride iç açılarının ölçüleri aynı olan iki üçgen eşleşiktir. Dolayısıyla, hiperbolik üçgenlerin kenar uzunlukları, aşağıda verilen hiperbolik Kosinüs ve Sinüs kuralları yardımıyla bulunabilir.

Teorem 2.7.10. *Kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarların karşısındaki açılar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olan bir hiperbolik üçgende aşağıdaki kurallar geçerlidir:*

$$(i) \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma,$$

$$(ii) \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

İspat: (Beardon, 1983). □

Yukarıdaki teoremde verilen formüller hiperbolik Kosinüs kuralları olarak adlandırılır.

Teorem 2.7.11. *Kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarların karşısındaki açılar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olan bir hiperbolik üçgende aşağıdaki kural geçerlidir:*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

İspat: (Beardon, 1983). □

Yukarıdaki teoremde verilen formüle hiperbolik Sinüs kuralı denir.

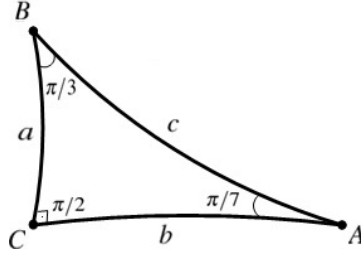
Teorem 2.7.12. *T , iç açılarının ölçüleri α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. Bu durumda, T üçgeninin hiperbolik alanı;*

$$\mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

formülü ile bulunur.

İspat: (Beardon, 1983). □

Örnek 2.7.13. *T , herhangi bir $(2, 3, 7)$ -üçgeni ve bu üçgenin $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3}$ ve $\frac{\pi}{2}$ radyan olan iç açılarının karşısındaki kenarların uzunlukları sırasıyla a , b ve c olsun (Şekil 2.20).*

Şekil 2.20. Herhangi bir $(2, 3, 7)$ -üçgeni

Bu hiperbolik üçgen için Kosinüs kuralından,

$$\cosh a = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3}}$$

olur ve $a \cong 0,2831282$ olarak bulunur. Bir kenarın uzunluğu belli olduğu için hiperbolik Sinüs kuralından,

$$\frac{\sinh a}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sinh b}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sinh c}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

olur. Buradaki eşitliklerden yararlanarak $c \cong 0,6206717$ ve $b \cong 0,5452744$ olarak bulunur.

Ayrıca $(2, 3, 7)$ -üçgeninin hiperbolik alanı ise $\mathcal{A}(T) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7} \right) = \frac{\pi}{42}$ olur.

2.8. Fuchs Grupları

Tanım 2.8.1. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubuna bir Fuchs grubu denir.

Örnek 2.8.2. Modüler grup olarak bilinen

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

grubu $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun ayrık bir alt grubudur dolayısıyla bir Fuchs grubudur.

Örnek 2.8.3. $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(z) = z + 1$ olmak üzere, f bir G grubu üretir. G grubunun elemanları,

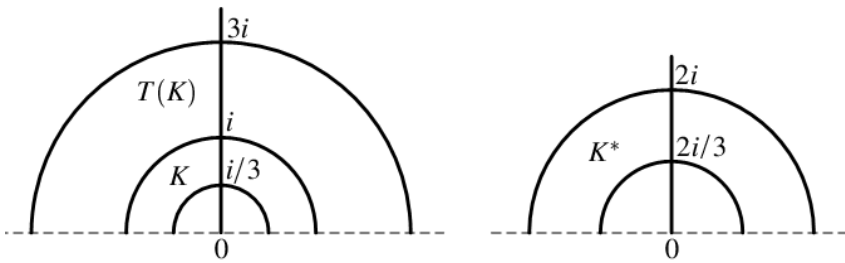
$$z \rightarrow z + 1, z \rightarrow z + 2, z \rightarrow z + 3, \dots, z \rightarrow z, z \rightarrow z - 1, z \rightarrow z - 2, \dots$$

şeklindeki dönüşümlerdir ve birim eleman ($z \rightarrow z$) dışındaki dönüşümlerin her biri sonsuzlu sabit tutan bir limit rotasyondur. Burada, G grubu $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olup $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun ayırık bir alt grubu olduğu açıktır. O halde, G bir Fuchs grubudur.

Örnek 2.8.4. $\lambda > 1$ olmak üzere $T(z) = \lambda z$ dönüşümü hiperbolik düzlemde bir ötelemedir ve $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olan bir G grubu üretir. Bu G grubu bir devirli Fuchs grubudur.

Bir Fuchs grubunun bölüm uzayı bir yüzeydir. Bu yüzeyin topolojik özellikleri gruptaki dönüşümlerin türüne bağlıdır. Örneğin, limit rotasyon içeren bir Fuchs grubunun bölüm uzayı kompakt olamaz. Sadece ötelemeler veya rotasyonlar tarafından üretilen Fuchs gruplarının bölüm uzayları, grubun üreteç sayısına göre kompakt olabilir veya olmayabilir. Özel olarak, devirli Fuchs gruplarının bölüm uzayları kompakt değildir. Kompakt ve pürüzsüz bir yüzey elde edebilmek için ise ilgili Fuchs grubunun sadece ötelemeler tarafından üretilmiş olması gerekir.

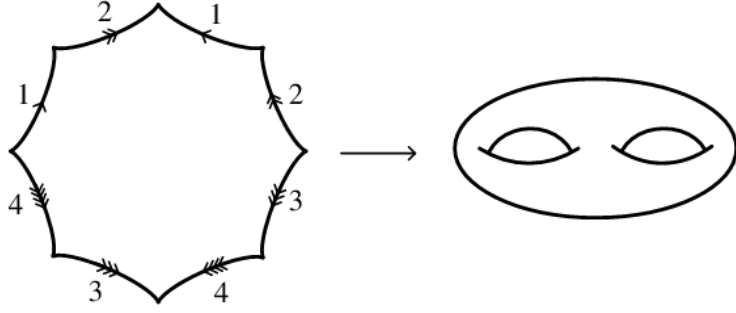
Örnek 2.8.5. $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $T(z) = 3z$ ötelemesi devirli bir Γ Fuchs grubu üretir. Aşağıda sol şekildeki K bölgesi Γ grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 2.21. $\langle z \rightarrow 3z \rangle$ grubu için temel bölgeler

Ayrıca, $T(K)$, $T^2(K) = (T \circ T)(K)$, \dots , $T^{-1}(K)$, $T^{-2}(K)$, \dots bölgelerinin her biri ve sağ şekildeki K^* bölgesi de Γ grubu için bir temel bölgedir. Γ grubunun bir temel bölgesinin aynı yörüngeye sahip noktaları uygun şekilde birleştirilirse \mathbb{H}/Γ bölüm uzayı olarak sonsuz bir silindir elde edilir.

Örnek 2.8.6. F , hiperbolik düzlemde iç açıları $\frac{\pi}{4}$ radyan olan bir düzgün sekizgen olsun. Bu sekizgenin aynı numaralandırılmış kenarlarını birbirine resmeden ötelemeler olduğu biliniyor. Bu ötelemeler bir Γ Fuchs grubunu üretirler ve F , Γ için bir temel bölge olur. \mathbb{H}/Γ yörünge uzayı ise aşağıdaki şekildeki gibi iki delikli bir yüzeydir. F çokgeninin tüm köşeleri \mathbb{H}/Γ yüzeyi üzerinde aynı noktaya karşılık gelir.



Şekil 2.22. Düzgün sekizgenden elde edilen yüzey

Benzer şekilde g , 1'den büyük bir tamsayı ve K , hiperbolik düzlemde iç açıları $\frac{\pi}{2g}$ radyan olan $4g$ kenarlı bir düzgün çokgen olsun. $g = 2$ durumunda olduğu gibi, $2g$ tane hiperbolik öteleme tarafından üretilen bir Γ Fuchs grubu mevcuttur ve K , Γ için bir temel bölgedir. Bu Γ grubu

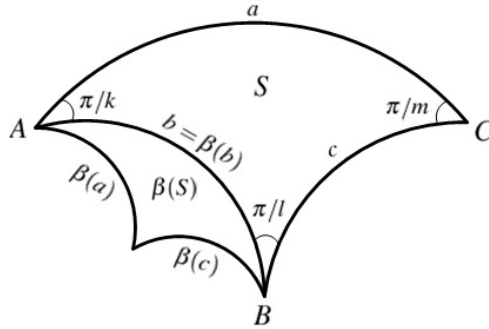
$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

biçimindedir. Bu durumda \mathbb{H}/Γ , g delikli bir yüzeydir ve K çokgeninin tüm köşeleri bu yüzey üzerinde aynı noktaya karşılık gelir [14].

2.8.1. Üçgensel Gruplar

S , Şekil 2.23 te gösterilen köşeleri A, B, C , kenarları a, b, c ve k, l, m birden büyük ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$ özelliğini sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere, iç açıları $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ ve $\frac{\pi}{m}$ radyan olan hiperbolik bir üçgen ve bu üçgenin kenarları üzerindeki

yansımalar sırasıyla α , β ve γ olsun. S hiperbolik üçgeninin b kenarı üzerindeki β yansıması altında görüntüsü $\beta(S)$ hiperbolik üçgenidir. Aynı şekilde S üçgeninin diğer kenarları üzerindeki yansımalar altında da görüntüleri hiperbolik üçgenlerdir.



Şekil 2.23. Bir hiperbolik üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar

Bu üçgenler kenarları üzerinde tekrar yansıtılır ve bu şekilde devam edilirse hiperbolik düzlem iç açıları $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ ve $\frac{\pi}{m}$ radyan olan üçgenlerle kaplanır. $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ve $\gamma\alpha$ dönüşümleri sırasıyla A , B ve C köşelerini sabit tutar ve mertebeleri sırasıyla k , l ve m dir. S üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar sonlu olmayan bir Γ^* grubu üretir. Bu şekilde elde edilen bir Γ^* grubuna bir genişletilmiş üçgensel grup denir. Bu grubun üreticileri olan dönüşümler yönü korumayan dönüşümler oldukları için bu grup bir Fuchs grubu değildir. Γ^* grubunun konform dönüşümlerden oluşan Γ alt grubu ise bir üçgensel Fuchs grubu olur.

Yukarıdaki şekildeki S üçgeni Γ^* grubu için bir temel bölgedir ve \mathbb{H}/Γ^* bölüm uzayı topolojik olarak bir disktr. $S \cup \beta(S)$ çokgeni de Γ grubu için bir temel bölgedir ve \mathbb{H}/Γ topolojik olarak bir küredir. Ayrıca hiperbolik düzlemde p herhangi bir nokta olmak üzere,

$$\Gamma_p^* = \{f(p) \mid f \in \Gamma^*\}$$

kümesi p noktasının yörüngesidir. Bu kümenin elemanı olan noktalardan her biri yukarıdaki üçgenlerden biri üzerinde yer alır. Bu nedenle Γ_p^* kümesi hiperbolik düzlemin ayrık bir alt kümesidir.

Bu çalışmada yukarıda tanımlanan Γ^* ve Γ grupları sırasıyla (k, l, m) ve $[k, l, m]$ simgeleriyle gösterilecektir.

2.9. Riemann Yüzeyleri

Tanım 2.9.1. S bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. S uzayının her s noktası karmaşık düzlemin bir açık alt kümesine homeomorf olan, açık bir U komşuluğuna sahipse S uzayına bir yüzey denir.

Tanım 2.9.2. S bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. Bir $A = \{(U_i, \Phi_i)\}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa A ailesine, S uzayı için bir atlas ve (U_i, Φ_i) ikilisine de bir pafta denir:

(i) Her bir $U_i \subset S$ açık kümedir ve $\bigcup_{i \in I} U_i = S$ dir,

(ii) Her bir W_i , karmaşık düzlemin bir açık alt kümesi olmak üzere,

$$\Phi_i : U_i \rightarrow W_i$$

dönüşümü bir homeomorfizmadır.

Tanım 2.9.3. S bir yüzey olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{(\phi_j, U_j) \mid j \in J\}$ ailesi varsa S yüzeyine bir Riemann yüzeyi denir:

(i) $\{U_j \mid j \in J\}$ ailesi S yüzeyinin bir açık örtüsüdür, yani $\bigcup_{j \in J} U_j = S$ dir,

(ii) Her bir ϕ_j, U_j 'den karmaşık düzlemin açık bir alt örtüsüne homeomorfizmadır,

(iii) Eğer $U = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ için,

$$\phi_i(\phi_j)^{-1} : \phi_j(U) \rightarrow \phi_i(U)$$

dönüşümü $\phi_j(U)$ ve $\phi_i(U)$ kümeleri arasında analitik bir dönüşümdür.

Teorem 2.9.4. *Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform denktir:*

(i) *Riemann küresi* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

(ii) *Karmaşık düzlem* \mathbb{C} ,

(iii) *Üst yarı düzlem* \mathbb{H} .

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Bir Riemann yüzeyinin cinsi, bu yüzeyin delik sayısıdır. Örneğin küre yüzeyi deliksiz olduğundan cinsi 0 iken, bir tor yüzeyinin cinsi 1 dir. Tor yüzeylerinin bağlantılı toplamlarıyla daha yüksek cinse sahip yüzeyler elde edilebilir.

Teorem 2.9.5. *X , cinsi $g > 1$ olan bir kompakt Riemann yüzeyi olsun. X ve \mathbb{H}/Γ konform denk olacak şekilde bir Γ Fuchs grubu vardır.*

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Teorem 2.9.6. Γ_1 ve Γ_2 iki Fuchs grubu olsun. Bu durumda \mathbb{H}/Γ_1 ve \mathbb{H}/Γ_2 yüzeylerinin konform denk olmaları için gerek ve yeter şart $g\Gamma_1g^{-1} = \Gamma_2$ olacak şekilde bir $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ elemanının mevcut olmasıdır.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Tanım 2.9.7. X bir kompakt Riemann yüzeyi olsun. Eğer $f : X \rightarrow X$ bir izometri ise bu f dönüşümüne X yüzeyinin bir otomorfizması denir.

X yüzeyinin tüm otomorfizmaları bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $Aut^\pm X$ ile ve bu grubun sadece konform otomorfizmalardan oluşan alt grubu ise $Aut^+ X$ ile gösterilir. Ayrıca, X yüzeyinin cinsi $g > 1$ ise $|Aut^+ X| \leq 84(g - 1)$ olduğu bilinmektedir. Bu sonuç Hurwitz teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.9.8. $X = \mathbb{H}/\Gamma$ cinsi $g > 1$ olan bir kompakt Riemann yüzeyi olsun. $N^\pm(\Gamma)$ ve $N^+(\Gamma)$, Γ grubunun sırasıyla $PGL(2, \mathbb{R})$ ve $PSL(2, \mathbb{R})$ gruplarındaki normalleyenleri olmak üzere,

$$Aut^\pm X \cong N^\pm(\Gamma)/\Gamma \text{ ve } Aut^+ X \cong N^+(\Gamma)/\Gamma$$

olur.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Teorem 2.9.9. Γ_1 ve Γ_2 iki Fuchs grubu ve Γ_1, Γ_2 grubunun N indeksli bir alt grubu olsun. $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ ve $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 gruplarının birer temel bölgelerinin alanı olmak üzere,

$$\mathcal{A}(\Gamma_1) = N\mathcal{A}(\Gamma_2)$$

olur.

İspat: (Jones ve Singerman, 1987). □

Yukarıdaki teoremden yer alan eşitlik, Riemann-Hurwitz formülü olarak bilinir.

2.10. Düzgün Figürler

Tanım 2.10.1. S bir kompakt Riemann yüzeyi ve \mathcal{G} sonlu, bağlantılı bir çizge olmak üzere \mathcal{G} çizgesinin S yüzeyine bir gömülmesine S üzerinde bir figür denir. Burada, $S \setminus \mathcal{G}$ açık disklerden oluşur ve bu disklerin her birine figürün bir yüzü (face) denir. \mathcal{G} çizgesinin köşe ve kenarlarına sırasıyla figürün köşe ve kenarları denir.

Tanım 2.10.2. Bir S Riemann yüzeyi üzerinde bulunan bir figürün cinsi, S yüzeyinin cinsi olarak tanımlanır.

Tanım 2.10.3. \mathcal{M} , bir S Riemann yüzeyi üzerinde bulunan bir figür olsun. S yüzeyinin, $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ şartını sağlayan bir f otomorfizmasına \mathcal{M} figürünün bir otomorfizması denir.

O halde bir figürün bir otomorfizması köşeleri köşelere, kenarları kenarlara ve yüzleri yüzlere götürür. Bir \mathcal{M} figürünün tüm otomorfizmaları bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve $Aut^\pm \mathcal{M}$ notasyonu ile gösterilir. \mathcal{M} figürünün tüm konform otomorfizmaları, $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun indeksi iki olan bir alt grubunu oluşturur ve $Aut^+ \mathcal{M}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.10.4. Bir figürün bir v köşesi ve bu köşeye doğru yönelmiş bir kenardan oluşan ikiliye bir yönlü kenar veya dart denir. Aşağıdaki şekilde v köşesine ait bir dart gösterilmiştir.



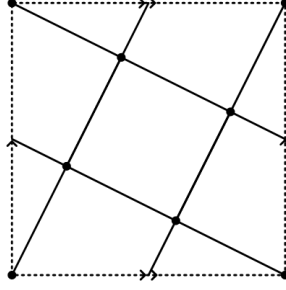
Şekil 2.24. v köşesine ait bir dart

Tanım 2.10.5. \mathcal{M} , bir S Riemann yüzeyi üzerinde bulunan bir figür olsun. Eğer $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu dartlar üzerinde geçişli ise \mathcal{M} figürüne bir düzgün figür denir. Dolayısıyla bir düzgün figürün yüzleri düzgün ve özdeş çokgenlerden oluşur.

Tanım 2.10.6. \mathcal{M} bir düzgün figür olsun. \mathcal{M} figürünün her bir köşesinin derecesi m ve her bir yüzünün kenar sayısı n ise \mathcal{M} figürünün tipi $\{m, n\}$ dir denir.

Tanım 2.10.7. \mathcal{M} bir düzgün figür ve $f \in Aut^\pm \mathcal{M}$ olsun. Eğer f otomorfizması \mathcal{M} figürünün bir kenarına ait olan iki dartı birbirine götürür ve bu kenara komşu olan iki yüzü sabit tutarsa f otomorfizmasına \mathcal{M} figürünün bir yansıması denir. Ayrıca en az bir yansıması olan bir düzgün figüre yansımalıdır denir.

Örneğin, K_5 çizgesinin bir tor yüzeyine gömülmesiyle elde edilen aşağıdaki figürün yansımalı olmadığı kolayca görülebilir.



Şekil 2.25. Yansımali olmayan bir düzgün figür

Bu çalışmada yansımali düzgün figürler ele alınacaktır.

Tanım 2.10.8. \mathcal{M} bir S yüzeyi üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Aynı yüzey üzerinde bulunan ancak mevcut düzgün figürün yüz merkezlerini köşe, köşelerini ise yüz merkezi kabul eden düzgün figüre \mathcal{M} figürünün dual figürü denir ve \mathcal{M}^* ile gösterilir. Böylece \mathcal{M}^* figürün her bir kenarı \mathcal{M} figürünün bir kenarını dik keser. Ayrıca, \mathcal{M}^* figürünün tipinin $\{n, m\}$ olduğu kolayca görülebilir.

\mathcal{M} , cinsi g ve tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Ayrıca, bu figürün yüz, köşe ve kenar sayıları sırasıyla $\|F\|$, $\|V\|$ ve $\|E\|$ olsun. Bu durumda, Euler-Poincaré formülü olarak bilinen

$$\|F\| + \|V\| - \|E\| = 2 - 2g$$

eşitliği geçerlidir. $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu dardlar üzerinde geçişli olduğundan, $\|F\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{n}$, $\|V\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{m}$ ve $\|E\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2}$ olduğu kolayca görülür.

Bu değerler Euler-Poincaré formülünde kullanırsa

$$g = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) + 1$$

elde edilir.

Bir düzgün figürün köşeleri, kenar orta noktaları ve yüz merkezleri sırasıyla **0**, **1** ve **2** notasyonu ile gösterilir. Bu notasyon ilk olarak Coxeter tarafından kullanılmıştır [9].

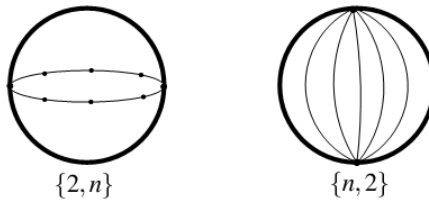
2.11. Düzgün Figürlerin Sınıflandırılması

\mathcal{M} bir S yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür ve F , \mathcal{M} figürünün bir yüzü olsun. F yüzünün merkezi, kendisine komşu olan kenarların orta noktalarına ve köşelere geodezik doğru parçalarıyla birleştirilsin. Böylece F , $2n$ tane, S yüzeyi ise $|Aut^\pm \mathcal{M}|$ tane üçgene bölünmüş olur. Bu üçgenlerin her birinin iç açıları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ radyandır. Dolayısıyla bunlar $(2, m, n)$ -üçgenleridir. Eğer \mathcal{M} figürünün cinsi 0 ise, bu üçgenler küre üzerindedir ve bu durumda $(2, m, n)$ -üçgeninin iç açıları toplamı $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} > \pi$ olur.

Düzenleme yapılırsa, cinsi 0 olan $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürler, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği çözülerek bulunur. Benzer şekilde, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ ifadelerinden sırasıyla cinsi 1 ve 1'den büyük olan düzgün figürler elde edilir.

2.11.1. Cinsi 0 Olan Düzgün Figürler

Yukarıda belirtildiği gibi, $\{m, n\}$ tipindeki bir düzgün figürün küre üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ olmasıdır. Burada $m, n \geq 2$ olmalıdır. $m = 2$ için $\frac{1}{n} > 0$ yani $n > 0$ olup her n değeri için küre üzerinde $\{2, n\}$ tipinde düzgün figürler bulunabilir. Aynı şekilde duali olan $\{n, 2\}$ tipinde düzgün figürler elde edilebilir (Şekil 2.26).

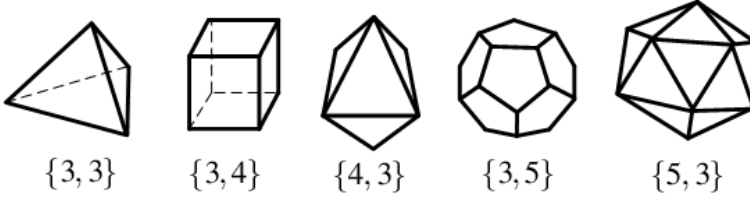


Şekil 2.26. Küre üzerinde $\{2, n\}$ ve $\{n, 2\}$ tipindeki düzgün figürler

$m = 3$ için $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliğinden $n < 6$ elde edilir. Buradan $n = 2, 3, 4, 5$ değerleri bulunur. $n = 2$ durumu daha önce incelenmişti. O halde, $m = 3$ durumu için $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$ ve $\{3, 5\}$ tipinde düzgün figürler elde edilir. Bunlar sırasıyla

düzgün dört yüzlü (Tetrahedron), küp (Hexahedron) ve düzgün on iki yüzlüye (Dodecahedron) karşılık gelen figürlerdir. $m = 4$ için $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliğinden $n < 4$ bulunur ve bu durumda, $\{3, 4\}$ figürünün duali olan $\{4, 3\}$ figürü bulunur. Bu figür de düzgün sekiz yüzlüye (Octahedron) karşılık gelir. $m = 5$ için ise yeni figür olarak $\{3, 5\}$ figürünün duali olan $\{5, 3\}$ figürü elde edilir. Bu figür ise düzgün yirmi yüzlüye (Icosahedron) karşılık gelir. $m \geq 6$ için yukarıda bulunanların dışında yeni düzgün figürler elde edilemez.

Sonuç olarak, cinsi 0 olan düzgün figürler ($n \geq 2$ için); $\{2, n\}$, $\{n, 2\}$ ve $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 3\}$, $\{5, 3\}$ tipindeki figürlerdir (Şekil 2.27).



Şekil 2.27. Platonik cisimlere karşılık gelen düzgün figürler

2.11.2. Cinsi 1 Olan Düzgün Figürler

Herhangi bir $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürün cinsinin 1 olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ olmasıdır. Bu denklem çözülerek, cinsi 1 olan bir düzgün figürün tipinin $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ veya $\{6, 3\}$ olduğu görülür. Burada, tipi $\{3, 6\}$ ve $\{6, 3\}$ olan figürler birbirinin dualidir ve böyle bir figürü üzerinde bulunduran yüzey, geniş açıları 120 derece olan bir eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarlarının uygun şekilde birleştirilmesiyle elde edilir. Tipi $\{4, 4\}$ olan figürün duali ise kendisi ile aynı tiptedir ve $\{4, 4\}$ figürünü üzerinde bulunduran tor yüzeyi, bir karenin karşılıklı kenarlarının uygun şekilde birleştirilmesiyle elde edilir.

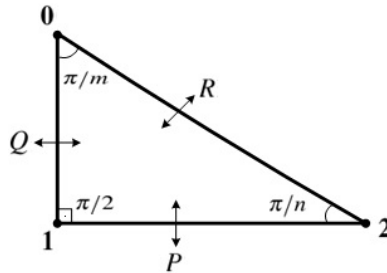
Cinsi 1 olan yansımali düzgün figürler üçüncü bölümde ele alınacaktır.

2.11.3. Cinsi 1'den Büyük Olan Düzgün Figürler

Herhangi bir $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürün cinsinin 1'den büyük olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ olmasıdır. Bu eşitsizliği sağlayan pozitif tam sayıların sonlu olmadığı açıktır. $m, n \geq 5$ olmak üzere $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürlerin cinsi 1'den büyüktür. $m = 3$ için $n \geq 7$ ve $m = 4$ için $n \geq 5$ olmalıdır. Benzer irdelemeler $n = 3$ ve $n = 4$ durumları için de geçerlidir. Cinsi 1'den büyük olan düzgün figürler sonsuz çoklukta olmasına rağmen yukarıdaki şartları sağlayan m ve n tam sayılarına karşılık $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür her yüzey üzerinde bulunmayabilir. Örneğin, cinsi 2 olan bir yüzey üzerinde $\{3, 7\}$ tipinde bir düzgün figür bulunmaz.

2.11.4. Düzgün Figürlerin Otomorfizma Grupları

S bir Riemann yüzeyi ve \mathcal{M} , bu yüzey üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Daha önce açıklandığı gibi, S yüzeyi $(2, m, n)$ -üçgenlerine bölünebilir. Bu şekilde elde edilen bir $(2, m, n)$ -üçgeninin **12**, **01** ve **02** kenarları üzerindeki yansımalar sırasıyla P , Q ve R olsun (Şekil 2.28).



Şekil 2.28. Bir $(2, m, n)$ -üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar

Bu durumda bu üç yansıma $Aut^{\pm} \mathcal{M}$ grubunu üretir ve bu grup

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^m = (PR)^n = \dots = 1 \rangle \quad (2.11.5)$$

biçimindedir. $X = PQ$ ve $Y = QR$ elemanları $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun indeksi iki olan bir alt grubunu üretir. Bu grup $Aut^+ \mathcal{M}$ grubudur ve

$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^m = (XY)^n = \dots = 1 \rangle$$

biçimindedir. Burada (2.11.5) teki bağıntılar sonsuz bir grup üretir fakat cinsi $g > 1$ olan bütün Riemann yüzeyleri üzerindeki bir \mathcal{M} düzgün figürü için

$$|Aut^\pm \mathcal{M}| \leq 168(g-1)$$

olduğu bilinmektedir [12]. Dolayısıyla $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunu belirlemek için (2.11.5) teki bağıntılara ek olarak en az bir bağıntı daha gereklidir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe, bir $(2, m, n)$ -üçgeninin **12**, **01** ve **02** kenarları üzerindeki yansımalar sırasıyla P , Q ve R notasyonu ile gösterilecektir.

2.12. Platonik Riemann Yüzeyleri

Tanım 2.12.1. S bir Riemann yüzeyi olsun. Eğer S yüzeyi üzerinde bir düzgün figür bulunuyorsa bu S yüzeyine bir Platonik Riemann yüzeyi denir.

Teorem 2.12.2. $S = \mathbb{H}/K$ bir Riemann yüzeyi ve \mathcal{M} , S üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Bu durumda K , $[2, m, n]$ grubunun bir normal alt grubudur.

İspat: (Jones ve Singerman, 1978). □

Teorem 2.12.3. \mathcal{M} bir $S = \mathbb{H}/K$ yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür olsun. Eğer K grubunun $PSL(2, \mathbb{R})$ grubundaki normalleyeni $[2, m, n]$ grubu ise $Aut^+ \mathcal{M}$ ve $Aut^+ S$ grupları izomorf olur. Aksi halde, $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu $Aut^+ S$ grubunun bir öz alt grubudur.

İspat: (Singerman, 1974). □

3. DÜZGÜN FİGÜRLER VE PETRIE ÇOKGENLERİ

Bu bölümde öncelikle Petrie çokgeninin tanımı verilir, Platonik Riemann yüzeyleri üzerinde Petrie çokgenlerinin nasıl elde edildiği anlatılacaktır. Daha sonra Petrie çokgenlerinin bazı topolojik ve geometrik özellikleri ile birlikte bunların simetri grupları incelenecektir.

3.1. Petrie Çokgenleri

Düzgün çok yüzlüler üzerinde bulunan ve bu çok yüzlülerin kenarlarından oluşan zikzak şeklindeki çokgenlerin varlığını ilk olarak John Flinders Petrie (1907-1972) fark etmiştir. Bundan dolayı arkadaşı Coxeter bu çokgenleri Petrie çokgenleri olarak adlandırmış ve figürler üzerinde bu çokgenlerin bazı özelliklerini incelemiştir [9].

Tanım 3.1.1. Bir çizgenin herhangi bir köşesinden başlayıp zikzak şeklinde önce sağa (sola) sonra sola (sağa) gidilerek elde edilen bir yola bir Petrie yolu denir.

Benzer şekilde, figürler için aşağıdaki tanım verilebilir.

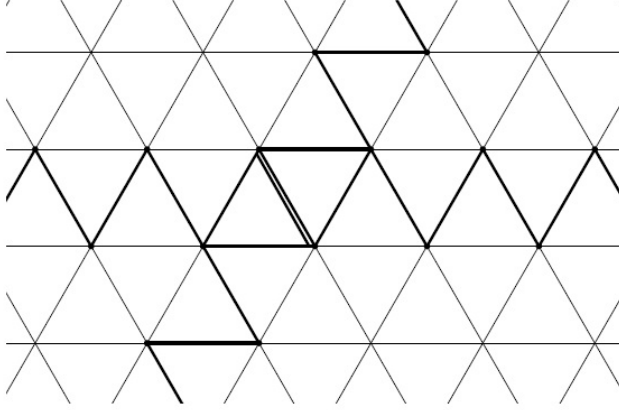
Tanım 3.1.2. Herhangi bir figür üzerinde bulunan ve bu figürün herhangi ardışık iki kenarı aynı yüze komşu olacak fakat ardışık üçüncü kenarı bu yüze komşu olmayacak şekilde oluşturulan bir çokgene bu figürün bir Petrie çokgeni adı verilir.

Bir düzgün figürün herhangi bir Petrie çokgeni, ilgili çizge üzerinde her zaman bir kapalı yoldur. Bu yol, bazı çizgelerde kapalı iz bazılarında da devirdir. O halde bir düzgün figürün bir Petrie çokgeni bir döngü olur.

Petrie çokgeninin tanımından da anlaşılacağı gibi, bir düzgün figürün bir kenarından sadece iki farklı Petrie çokgeni geçer. Dolayısıyla, bir düzgün figürün birden fazla Petrie çokgeni vardır.

Bu çalışma boyunca bir \mathcal{M} düzgün figürünün bütün Petrie çokgenlerinin sayısı $\|\mathcal{M}_P\|$ notasyonu ile gösterilecektir.

Aşağıdaki şekilde, tipi $\{6,3\}$ olan bir düzgün figürün iki farklı Petrie çokgeni koyu çizgilerle gösterilmiştir.

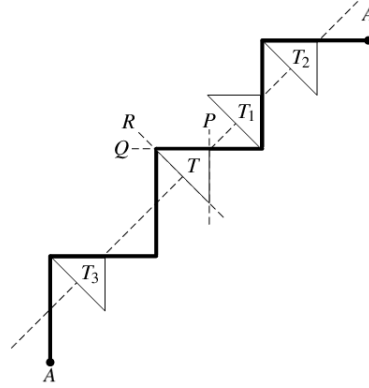


Şekil 3.1. $\{6,3\}$ figürünün iki tane Petrie çokgeni

3.2. Petrie Otomorfizması

S bir Platonik Riemann yüzeyi ve \mathcal{M} , bu yüzey üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Ayrıca C , \mathcal{M} figürünün bir Petrie çokgeni olsun. İkinci bölümde açıklandığı gibi, S yüzeyi $(2, m, n)$ -üçgenlerine bölünebilir. T , $\mathbf{01}$ kenarı C üzerinde olan bir $(2, m, n)$ -üçgeni ve bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar P , Q ve R olsun. Bu üç yansımanın $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunu ürettiği biliniyor. Ayrıca $X = PQ$ ve $Y = QR$ otomorfizmaları $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunu üretirler.

Burada PQR otomorfizması, C çokgeninin herhangi bir kenarını bu kenara komşu olan bir kenara ve dolayısıyla T üçgenini bir T_1 üçgenine götürür (Şekil 3.2). $PQRPQR = (PQR)^2$ otomorfizması ise, C çokgeninin herhangi bir kenarını, bu kenara komşu olan kenarı atlayarak, bir sonraki kenara ve dolayısıyla T üçgenini, C çokgeninin kenar orta noktalarından geçen doğru boyunca öteleyerek bir T_2 üçgenine götürür.



Şekil 3.2. Petrie otomorfizması

$(RQP)^2$ otomorfizması ise $(PQR)^2$ otomorfizmasının tersidir ve T üçgenini aynı doğru boyunca ters yönde öteleyerek bir T_3 üçgenine götürür. Bu otomorfizmalara C çokgeninin Petrie otomorfizmaları denir. Bunlar C çokgenini kümesel olarak sabit tutar. Bu otomorfizmaların cebirsel özellikleri aynı olduğu için, bu çalışmada Petrie otomorfizması olarak genellikle $(PQR)^2$ kullanılacak ve \mathcal{P} notasyonu ile gösterilecektir. \mathcal{P} otomorfizması $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunun yukarıda verilen üreteçleri cinsinden $XY^{-1}X^{-1}Y$ komütatördür.

$Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun mertebesi sonlu olduğundan, PQR otomorfizmasının mertebesi de sonludur. Dolayısıyla, C bir kapalı çokgendir ve kenar sayısı sonlu olur. Bu sayının, \mathcal{P} otomorfizmasının mertebesinin iki katına eşit olduğu açıktır.

Teorem 3.2.1. *Bir düzgün figürün bir kenarlı Petrie çokgeni olamaz.*

İspat: \mathcal{M} , $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür ve bu figürden elde edilen bir $(2, m, n)$ -üçgeninin kenarlarındaki yansımalar daha önce anlatıldığı gibi P , Q ve R olsun. Bu figürün bir Petrie çokgeni bir kenarlı ise PQR dönüşümü birim dönüşüm olur. PQR yönü korumayan bir dönüşüm olduğundan bu bir çelişkidir. O halde bir düzgün figürün bir kenarlı Petrie çokgeni olamaz. \square

Sonuç 3.7.2 de de görüleceği gibi bazı düzgün figürlerin iki kenarlı Petrie çokgenleri olabildiğinden aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.2. *Bir düzgün figürün bir Petrie çokgeni en az iki kenarlıdır.*

Bu çalışma boyunca \mathcal{P} otomorfizmasının mertebesi, \mathcal{M} düzgün figürünün Petrie sayısı olarak adlandırılacak ve k ile gösterilecektir. Bu sayı, $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubu açık olarak verildiğinde MAGMA yazılımı kullanılarak hesaplanabilir.

3.2.1. Petrie Otomorfizmalarının Eşlenik Sınıfları

S bir Platonik Riemann yüzeyi ve \mathcal{M} , bu yüzey üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. P , Q ve R yansımaları $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun standart üreteçleri olmak üzere,

$$PQR = (PQ)(RQP)(PQ)^{-1}$$

olduğundan, PQR ve $(PQR)^{-1} = RQP$ dönüşümleri $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunda eşleniktir. O halde $(PQR)^2$ ve $(RQP)^2$ dönüşümleri de $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunda eşleniktir.

Şimdi C_1 ve C_2 , \mathcal{M} figürünün iki farklı Petrie çokgeni ve bunların Petrie otomorfizmaları sırasıyla \mathcal{P}_1 ve \mathcal{P}_2 olsun. $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu \mathcal{M} figürünün kenarları üzerinde geçişli olduğundan, $f(C_1) = C_2$ olacak şekilde bir $f \in Aut^+ \mathcal{M}$ otomorfizması vardır. Burada $f\mathcal{P}_1 f^{-1} = \mathcal{P}_2$ olur ve dolayısıyla \mathcal{P}_1 ve \mathcal{P}_2 otomorfizmaları $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunda eşleniktirler.

Bu durumda, \mathcal{M} figürünün bütün Petrie çokgenlerine, $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunda bir eşlenik sınıfı karşılık gelir. Bu eşlenik sınıfı \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfı olarak adlandırılacaktır. Aşağıdaki sonuçta da belirtildiği gibi, Petrie sınıfındaki elemanların sayısı \mathcal{M} figürünün Petrie sayısına bağlıdır.

Sonuç 3.2.3. *\mathcal{M} bir düzgün figür ve bu figürün Petrie sayısı k olsun. Bu durumda;*

- (i) $k = 1$ ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfında sadece birim eleman vardır.
- (ii) $k = 2$ ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfında $\|\mathcal{M}_P\|$ tane eleman vardır.
- (iii) $k > 2$ ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfında $2\|\mathcal{M}_P\|$ tane eleman vardır.

İspat: \mathcal{M} düzgün figürünün Petrie otomorfizması \mathcal{P} olsun. Bu durumda;

(i) $k = 1$ olduğunda, $\mathcal{P} = 1$ dir. Dolayısıyla, \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfında sadece birim eleman vardır.

(ii) $k = 2$ olduğunda, $\mathcal{P}^2 = 1$ ve buradan $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$ dir. Bu durumda her bir Petrie çokgenine karşılık bir tane Petrie otomorfizması vardır. Dolayısıyla, \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfında $\|\mathcal{M}_P\|$ tane eleman vardır.

(iii) $k > 2$ olduğunda, \mathcal{P} ile \mathcal{P}^{-1} eşleniktir. Bu durumda her bir Petrie çokgenine karşılık iki Petrie otomorfizması vardır. Dolayısıyla, \mathcal{M} figürünün Petrie sınıfında $2\|\mathcal{M}_P\|$ tane eleman vardır. \square

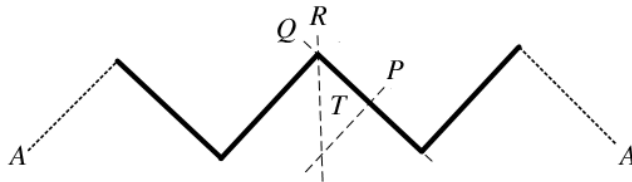
3.2.2. Petrie Çokgenlerinin Simetri Grupları

\mathcal{M} , tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür ve C , \mathcal{M} figürünün bir Petrie çokgeni olsun.

$$G_P^C = \{f \in \text{Aut}^\pm \mathcal{M} \mid f(C) = C\} \subset \text{Aut}^\pm \mathcal{M}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin $\text{Aut}^\pm \mathcal{M}$ grubunun bir alt grubu olduğu grup teorisinden biliniyor. Bu grup, C çokgeninin Petrie grubu olarak adlandırılacaktır. Şimdi G_P^C grubunu belirleyelim.

T , $\mathbf{01}$ kenarı C üzerinde olan bir $(2, m, n)$ -üçgeni ve bu üçgenin kenarları üzerindeki P , Q ve R yansımaları, $\text{Aut}^\pm \mathcal{M}$ grubunun standart üreteçleri olsun (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Petrie çokgeni

R otomorfizması T üçgeninin $\mathbf{0}$ köşesini sabit tutan bir yansımadır ve C Petrie çokgenini kendisine götürdüğü Şekil 3.3 ten kolayca görülmektedir. Dolayısıyla,

$R \in G_p^C$ olur. Ayrıca R yansıması C çokgeni üzerinde bir başka köşeyi daha sabit tutar ve bu iki köşe C çokgenini iki eşit parçaya ayırır. $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun diğer üreteçlerinin C çokgenini kendisine götürmediği yine Şekil 3.3 ten görülebilir. PQ otomorfizması T üçgeninin 1 köşesini sabit tutar ve C çokgenini bu köşe etrafında 180 derece döndürerek yine kendisine götürür. Dolayısıyla, $PQ \in G_p^C$ olur. PQ dönüşümü C çokgeninin bir başka kenar orta noktasını daha sabit tutar ve bu noktalar C çokgenini iki eşit parçaya ayırır. $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunun diğer üreteçlerinin G_p^C grubunda olmadıkları Şekil 3.3 ten görülebilir.

\mathcal{M} figürünün Petrie sayısı k olmak üzere, PQ ve R otomorfizmalarının mertebelerinin iki ve PQR otomorfizmasının mertebesinin $2k$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, G_p^C grubu $4k$ elemanlı dihedral gruba yani D_{2k} grubuna izomorftur. Bu grup; $PQ = A$ ve $R = B$ olmak üzere,

$$\langle A, B \mid A^2 = B^2 = (AB)^{2k} = 1 \rangle$$

biçimindedir.

G_p^C grubunun yönü koruyan dönüşümlerinden oluşan alt grubu G_p^{C+} notasyonu ile gösterilsin. Bu grup A ve $(AB)^2$ elemanları tarafından üretilir ve $2k$ elemanlı dihedral gruba yani D_k grubuna izomorftur.

Grup teorisinden, G_p^C grubunun merkezinin $\{1, (AB)^k\}$ alt grubu olduğu görülür. Benzer şekilde, G_p^{C+} grubunun merkezi; k tek sayı ise $\{1\}$, k çift sayı ise $\{1, (AB)^{k/2}\}$ alt grubudur.

G_p^C grubunun elemanları, yönü koruyup korumamaları ve sabit noktaları olup olmamalarına göre dört sınıfa şu şekilde ayrılır;

- a) $\{1, (AB)^2, (AB)^4, \dots, (AB)^{2k-2}\}$: Bu sınıftaki elemanlar yönü korurlar ve C çokgeninin hiçbir noktasını sabit tutmazlar.
- b) $\{A, (AB)A(AB)^{-1}, (AB)^2A(AB)^{-2}, \dots, (AB)^{k-1}A(AB)^{-k+1}\}$: Bu sınıftaki elemanların her biri yönü korur ve C çokgeninin iki kenar orta noktasını sabit tutar.

c) $\{AB, (AB)^3, (AB)^5, \dots, (AB)^{2k-1}\}$: Bu sınıftaki elemanlar yönü korumazlar ve C çokgeninin hiçbir noktasını sabit tutmazlar.

d) $\{B, (AB)B(AB)^{-1}, (AB)^2B(AB)^{-2}, \dots, (AB)^{k-1}B(AB)^{-k+1}\}$: Bu sınıftaki elemanların hiçbiri yönü korumaz ve C çokgeninin iki köşesini sabit tutar.

Eğer C' başka bir Petrie çokgeni ise, G_P^C ve $G_P^{C'}$ gruplarının izomorf oldukları açıktır. Dolayısıyla, her \mathcal{M} düzgün figürüne bir dihedral grup karşılık gelir. Bu dihedral grup, \mathcal{M} düzgün figürünün Petrie grubu olarak adlandırılacak ve G_P notasyonu ile gösterilecektir.

3.3. Petrie Çokgenlerinin Sayısı

Bu kısımda, verilen bir düzgün figürün bütün Petrie çokgenlerinin sayısını hesaplamaya yarayan bir formül verilecek ve bu sayı için alt ve üst sınırlar belirlenecektir. Ayrıca verilen bu formül yardımıyla, bu figürün Petrie sayısı için de üst sınırlar belirlenecektir.

Teorem 3.3.1. \mathcal{M} cinsi $g \geq 1$ olan bir düzgün figür ve bu figürün Petrie sayısı k olsun. Bu durumda

$$\|\mathcal{M}_P\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2k}$$

olur.

İspat: \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı k olduğundan, bu figürün her bir Petrie çokgeni, figürün $2k$ tane kenarından oluşur. Ayrıca bir düzgün figürün her bir kenarı yalnız iki tane Petrie çokgenine ait olduğundan, bu figürün bütün kenarlarının sayısı $\|E\| = \frac{\|\mathcal{M}_P\| 2k}{2}$ olur. \mathcal{M} figürünün tüm kenarlarının sayısı $\|E\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2}$ olduğundan, bu iki eşitlik birleştirilerek $\|\mathcal{M}_P\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2k}$ elde edilir. \square

Sonuç 3.3.2. \mathcal{M} cinsi $g \geq 1$ olan bir düzgün figür olsun. Bu durumda \mathcal{M} figürünün bütün Petrie çokgenlerinin sayısı 1 olamaz.

İspat: $\|\mathcal{M}_P\| = 1$ ve \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı k olsun. Bu durumda \mathcal{M} figürünün sadece bir tane Petrie çokgeni vardır ve bunun kenar sayısı $2k$ olur. Teorem 3.3.1 gereğince $2k = |\text{Aut}^+ \mathcal{M}|$ olmalıdır. Ayrıca $\|E\| = \frac{|\text{Aut}^+ \mathcal{M}|}{2}$ olduğu bilindiğinden bu iki eşitlikten $k = \|E\|$ elde edilir. Bu da Petrie çokgeninin $2k$ kenarlı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla \mathcal{M} düzgün figürünün bütün Petrie çokgenlerinin sayısı bir olamaz. \square

Sonuç 3.6.2 ve Sonuç 3.6.4 te de görüleceği gibi sadece iki tane Petrie çokgeni olan düzgün figürler mevcuttur. O halde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.3. Her düzgün figürün en az iki tane Petrie çokgeni vardır.

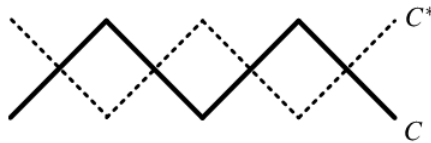
Sonuç 3.3.4. \mathcal{M} bir düzgün figür ve bu figürün Petrie sayısı k olsun. Bu durumda,

$$1 \leq k \leq \frac{|\text{Aut}^+ \mathcal{M}|}{4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\|\mathcal{M}_P\| = \frac{|\text{Aut}^+ \mathcal{M}|}{2k}$ olduğu Teorem 3.3.1 den biliniyor. Bu eşitlikten $k = \frac{|\text{Aut}^+ \mathcal{M}|}{2\|\mathcal{M}_P\|}$ bulunur. $\|\mathcal{M}_P\| = 2$ için, k en büyük değerini alır ve $k = \frac{|\text{Aut}^+ \mathcal{M}|}{4}$ olur. Petrie sayısının 1 olduğu düzgün figürlerin mevcut olduğu Teorem 3.7.1 de gösterilecektir. O halde, $1 \leq k \leq \frac{|\text{Aut}^+ \mathcal{M}|}{4}$ elde edilir. \square

\mathcal{M} , bir S yüzeyi üzerinde bir düzgün figür ve bu figürün bir Petrie çokgeni C olsun. Ayrıca aynı yüzey üzerinde bulunan mevcut düzgün figürün dual figürü \mathcal{M}^* olsun. Bu durumda \mathcal{M}^* figürünün, C çokgeninin her bir kenarını Şekil 3.4 teki gibi dik kesen bir C^* Petrie çokgeni vardır.



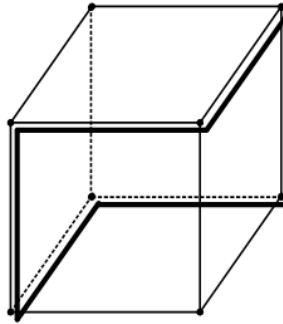
Şekil 3.4. Dual figürün Petrie çokgeni

Böylece $|Aut^+ \mathcal{M}| = |Aut^+ \mathcal{M}^*|$ olduğundan, \mathcal{M} ve \mathcal{M}^* figürlerinin Petrie sayıları eşittir. Dolayısıyla, bu figürlerin bütün Petrie çokgenlerinin sayılarının da eşit olacağı açıktır. O halde bu kısımda, bir düzgün figürün Petrie sayısı ve bütün Petrie çokgenlerinin sayısı için verilen bütün formül ve sınırlar bu figürün dual figürü içinde geçerlidir.

3.4. Cinsi 0 Olan Düzgün Figürlerin Petrie Çokgenleri

Cinsi 0 olan düzgün figürler ikinci bölümde açıklanmıştı. Bu figürlerin Petrie çokgenleri Coxeter tarafından incelenmiştir [9]. Bu kısımda [9] numaralı kaynaktan yararlanarak bu figürlerin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları verilecektir.

\mathcal{M} , küre üzerinde tipi $\{3,4\}$ olan düzgün figür olsun. Bu düzgün figür için $|Aut^+ \mathcal{M}| = 24$ olduğu biliniyor ve bu figürün bir Petrie çokgeni Şekil 3.5 te gösterilmiştir.



Şekil 3.5. $\{3,4\}$ figürünün bir Petrie çokgeni

Bu düzgün figürün 4 adet Petrie çokgeninin olduğu ve her bir Petrie çokgeninin 6 kenarlı olduğu kolayca görülür. Bu sonuçlar aşağıdaki teoremden de elde edilebilir.

Teorem 3.4.1. *Küre üzerindeki bir düzgün figürün tipi $\{m, n\}$ olsun ve bu figürün bir Petrie çokgeninin kenar sayısı h olmak üzere;*

$$\cos^2(\pi/h) = \cos^2(\pi/m) + \cos^2(\pi/n)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (Coxeter, 1973). □

Cinsi 0 olan bütün düzgün figürlerin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 3.1 de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Cinsi 0 olan düzgün figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $
$\{3, 3\}$	12	2	3
$\{3, 4\}$	24	3	4
$\{4, 3\}$	24	3	4
$\{3, 5\}$	60	5	6
$\{5, 3\}$	60	5	6

3.5. Cinsi 1 Olan Düzgün Figürlerin Petrie Çokgenleri

Cinsi 1 olan düzgün figürler ve bunların tipleri ikinci bölümde incelenmişti. Bu kısımda bu figürlerden yansımali olanların Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları verilecektir.

3.5.1. $\{4, 4\}$ Figürü

Karmaşık düzlemde köşeleri 0 , $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ olan T üçgenini göz önüne alalım. Bu üçgen bir $(2,4,4)$ -üçgenidir ve $P(z) = -\bar{z} + 1$, $Q(z) = \bar{z}$ ve $R(z) = i\bar{z}$ dönüşümleri bu üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalarıdır. Ayrıca bu yansımalar

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^4 = 1$$

bağıntılarını sağlar ve dolayısıyla $(2, 4, 4)$ genişletilmiş üçgensel grubuna izomorf olan bir grup üretirler. Bu grubu Γ ile gösterelim. Γ grubunun, $z \rightarrow z + 1$ ve $z \rightarrow z + i$ ötelemeleri tarafından üretilen bir normal alt grubu vardır. Bu alt grubu Λ ile gösterelim. Köşeleri $0, 1, i$ ve $1 + i$ olan kare Λ grubu için bir temel bölgedir ve alanı 1 birim karedir. Böylece \mathbb{C}/Λ bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Ayrıca $\Lambda, \mathbb{Z}[i]$ halkası olarak düşünülebilir [26].

$b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $T_1(z) = z + b + ci$ ve $T_2(z) = z - c + bi$ ötelemeleri de Λ grubunun bir Ω alt grubunu üretir. Burada $i(b + ci) = -c + bi$ olduğundan $\Omega, \mathbb{Z}[i]$ halkasının bir ideali olarak düşünülebilir [26]. Bu ideal $\langle b + ci \rangle$ esas idealidir. Ayrıca Ω ile Λ gruplarının izomorf oldukları açıktır. Köşeleri $0, b + ci, -c + bi$ ve $b - c + (b + c)i$ olan kare Ω grubu için bir temel bölgedir ve bunun alanı $b^2 + c^2$ birim karedir. O halde Riemann-Hurwitz formülüne göre Ω grubunun Λ grubundaki indeksi $b^2 + c^2$ olarak bulunur. Burada \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir ve bu tor yüzeyi üzerinde $n = b^2 + c^2$ tane köşesi, $2n$ tane kenarı ve n tane yüzü olan bir düzgün figür vardır. Bu figür $\{4, 4\}_{b,c}$ notasyonu ile gösterilir. Bu düzgün figürün yansımaları için gerek ve yeter şart $bc(b - c) = 0$ olmasıdır [10]. Bu çalışmada yansımaları düzgün figürler ele alınacağından, sadece $\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ yansımaları düzgün figürleri incelenecektir.

\mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 sırasıyla $\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ figürleri olsun. $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ grupları sırasıyla

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^4 = (PRQR)^b = 1 \rangle$$

ve

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^4 = (QRP)^{2b} = 1 \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca $|Aut^\pm \mathcal{M}_1| = 8b^2$ ve $|Aut^\pm \mathcal{M}_2| = 16b^2$ dir [10].

Teorem 3.5.1. $\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ figürlerinin Petrie sayıları b dir.

İspat: \mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 sırasıyla $\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ figürleri olsun. Köşeleri $0, \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ olan T üçgenini göz önüne alalım. T üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar $P(z) = -\bar{z} + 1$, $Q(z) = \bar{z}$ ve $R(z) = i\bar{z}$ olur. Bu yansımalar $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ gruplarını üretirler. Ayrıca $\mathcal{P}(z) = (PQRPQR)(z) = z + 1 - i$ dönüşümü bu düzgün figürlerin her birinin Petrie otomorfizması olur.

$\mathcal{P}(z) = z + 1 - i$ dönüşümünün mertebesi $\mathbb{Z}[i]/\langle b \rangle$ grubunda $((1 - i) + \langle b \rangle)$ elemanının mertebesine eşit olur ve bu mertebe b olarak bulunur. Çünkü $b(1 - i) \in \langle b \rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} b((1 - i) + \langle b \rangle) &= b(1 - i) + \langle b \rangle \\ &= \mathbf{0}_{\mathbb{Z}[i] + \langle b \rangle} \\ &= \mathbf{0}_{\mathbb{Z}[i]/\langle b \rangle} \end{aligned}$$

sağlanır. Diğer taraftan k bir tam sayı ve $0 < k < b$ için $k((1 - i) + \langle b \rangle) = \mathbf{0}_{\mathbb{Z}[i]/\langle b \rangle}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} k((1 - i) + \langle b \rangle) &= \mathbf{0}_{\mathbb{Z}[i]/\langle b \rangle} \\ k(1 - i) + \langle b \rangle &= \mathbf{0}_{\mathbb{Z}[i]/\langle b \rangle} \end{aligned}$$

ise $k(1 - i) \in \langle b \rangle$ olarak bulunur. Dolayısıyla $k(1 - i) = b(x + yi)$ olacak şekilde bir $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada $bx = k$ ve $by = -k$ olur böylece $b \mid k$ olmalıdır bu da kabulümüzle çelişir. O halde $\{4, 4\}_{b,0}$ figürünün Petrie sayısı b olarak bulunur.

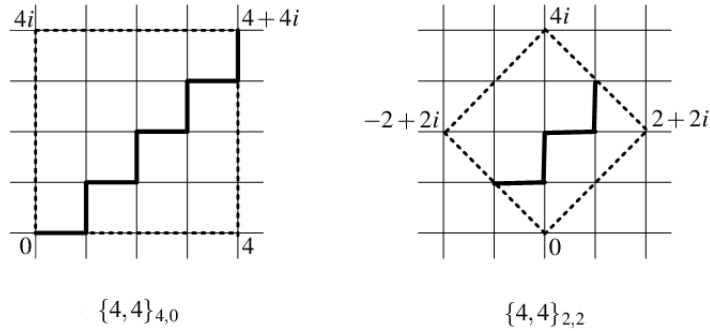
Benzer şekilde $\{4, 4\}_{b,b}$ figürünün Petrie sayısı da b olarak bulunur. \square

$\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ figürlerinin Petrie sayıları hesaplandığı için Teorem 3.3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.5.2. $\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ figürlerinin Petrie çokgenleri $2b$ kenarlıdır.

Sonuç 3.5.3. $\{4, 4\}_{b,0}$ ve $\{4, 4\}_{b,b}$ figürlerinin bütün Petrie çokgenlerinin sayıları sırasıyla $2b$ ve $4b$ olur.

Aşağıdaki şekilde $\{4, 4\}_{4,0}$ ve $\{4, 4\}_{2,2}$ figürlerinin birer Petrie çokgenleri kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 3.6. $\{4, 4\}_{4,0}$ ve $\{4, 4\}_{2,2}$ figürlerinin birer Petrie çokgeni

3.5.2. $\{6, 3\}$ ve $\{3, 6\}$ Figürü

Karmaşık düzlemde köşeleri 0 , $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ olan T üçgenini göz önüne alalım. Bu üçgen bir $(2,6,3)$ -üçgenidir ve $P(z) = -\bar{z} + 1$, $Q(z) = \bar{z}$ ve $R(z) = e^{\frac{\pi}{3}i}\bar{z}$ dönüşümleri T üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalarıdır. Ayrıca bu yansımalar

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^6 = (PR)^3 = 1$$

bağıntılarını sağlar ve $(2, 6, 3)$ genişletilmiş üçgensel grubuna izomorf olan bir grup üretirler. Bu grubu Γ ile gösterelim. Γ grubunun, $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ olmak üzere aralarındaki geniş açı 120 derece olan; $z \rightarrow z + 1$ ve $z \rightarrow z + w$ ötelemeleri tarafından üretilen bir normal alt grubu vardır. Bu alt grubu ise Λ ile gösterelim. Köşeleri 0 , 1 , w ve $1 + w$ olan paralelkenar Λ grubu için bir temel bölgedir ve alanı $\frac{\sqrt{3}}{2}$ birim karedir. Böylece \mathbb{C}/Λ bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Ayrıca Λ , $\mathbb{Z}[w]$ halkası olarak düşünülebilir [26].

$b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, aralarındaki geniş açı 120 derece olan $T_1(z) = z + b + c + cw$ ve $T_2(z) = z - c + bw$ ötelemeleri de Λ grubunun bir Ω alt grubunu üretir. Burada $w(b + c + cw) = -c + bw$ olduğundan $\Omega, \mathbb{Z}[w]$ halkasının bir ideali olarak düşünülebilir [26]. Bu ideal $\langle -c + bw \rangle$ esas idealidir. Ayrıca Ω ile Λ gruplarının izomorf oldukları açıktır. Köşeleri $0, b + c + cw, -c + bw$ ve $b + (b + c)w$ olan paralelkenar Ω grubu için bir temel bölgedir ve bunun alanı $(b^2 + bc + c^2) \frac{\sqrt{3}}{2}$ birim karedir. O halde Riemann-Hurwitz formülüne göre Ω grubunun Λ grubundaki indeksi $b^2 + bc + c^2$ olarak bulunur. Burada \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir ve bu tor yüzeyi üzerinde $t = b^2 + bc + c^2$ tane köşesi, $3t$ tane kenarı ve $2t$ tane üçgensel yüzü olan bir düzgün figür vardır. Bu figür $\{6, 3\}_{b,c}$ notasyonu ile gösterilir. Bu düzgün figürün yansımali olması için gerek ve yeter şart $bc(b - c) = 0$ olmasıdır [10]. O halde $\{6, 3\}_{b,0}$ ve $\{6, 3\}_{b,b}$ yansımali düzgün figürleri ile ilgilenilecektir.

Ayrıca $\{3, 6\}_{b,c}$ figürü, $\{6, 3\}_{b,c}$ figürünün duali olduğundan benzer özelliklere sahiptir ve yansımali düzgün figürler $\{3, 6\}_{b,0}$ ve $\{3, 6\}_{b,b}$ figürleridir. Bu figürlerin $t = b^2 + bc + c^2$ tane üçgensel yüzü, $3t$ tane kenarı ve $2t$ tane köşesi vardır.

\mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 sırasıyla $\{6, 3\}_{b,0}$ ve $\{6, 3\}_{b,b}$ figürleri olsun. $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ grupları sırasıyla

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^6 = (PR)^3 = (PQRQR)^b = 1 \rangle$$

ve

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^6 = (PR)^3 = (PQRQR)^{2b} = 1 \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca $|Aut^\pm \mathcal{M}_1| = 12b^2$ ve $|Aut^\pm \mathcal{M}_2| = 36b^2$ dir [10].

Teorem 3.5.4. $\{6, 3\}_{b,0}$ ve $\{6, 3\}_{b,b}$ figürlerinin Petrie sayıları sırasıyla b ve $3b$ dir.

İspat: \mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 sırasıyla $\{6, 3\}_{b,0}$ ve $\{6, 3\}_{b,b}$ figürleri olsun. Köşeleri $0, \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ olan T üçgenini göz önüne alalım. T üçgeninin kenarları üzerindeki

yansımalar $P(z) = -\bar{z} + 1$, $Q(z) = \bar{z}$ ve $R(z) = e^{\frac{\pi}{3}i}z$ olur. Bu yansımalar $Aut^{\pm}\mathcal{M}_1$ ve $Aut^{\pm}\mathcal{M}_2$ gruplarını üretirler. Ayrıca $\mathcal{P}(z) = (PQRPQR)(z) = z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dönüşümü bu düzgün figürlerin her birinin Petrie otomorfizması olur.

$\mathcal{P}(z) = z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dönüşümünün mertebesi $\mathbb{Z}[w]/\langle b \rangle$ grubunda $\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \langle b \rangle\right)$ elemanının mertebesine eşit olur ve bu mertebe b olarak bulunur. Çünkü $b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = b(0 + (-1)w) \in \langle b \rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} b\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \langle b \rangle\right) &= b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \langle b \rangle \\ &= 0_{\mathbb{Z}[w]} + \langle b \rangle \\ &= 0_{\mathbb{Z}[w]/\langle b \rangle} \end{aligned}$$

sağlanır. Diğer taraftan k bir tam sayı ve $0 < k < b$ için $k\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \langle b \rangle\right) = 0_{\mathbb{Z}[w]/\langle b \rangle}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} k\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \langle b \rangle\right) &= 0_{\mathbb{Z}[w]/\langle b \rangle} \\ k\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \langle b \rangle &= 0_{\mathbb{Z}[w]/\langle b \rangle} \end{aligned}$$

ise $k\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \in \langle b \rangle$ olarak bulunur. Dolayısıyla $k\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = b(x + yw)$ olacak şekilde bir $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada $x = 0$ ve $by = -k$ olur böylece $b \mid k$ olmalıdır bu da kabulümüzle çelişir. O halde $\{6, 3\}_{b,0}$ figürünün Petrie sayısı b olarak bulunur.

Ayrıca, $\{6, 3\}_{b,b}$ figürünün Petrie sayısı $3b$ olarak bulunur. Çünkü $b = (x + yw)(-b + bw)$ olacak şekilde bir $x, y \in \mathbb{Z}$ bulunamadığından $b \notin \langle -b + bw \rangle$ olur. Benzer şekilde $-b, 2b, -2b \notin \langle -b + bw \rangle$ dir. Burada $3b = (-2 - w)(-b + bw)$ biçiminde yazılabildiği için $3b \in \langle -b + bw \rangle$ olur.

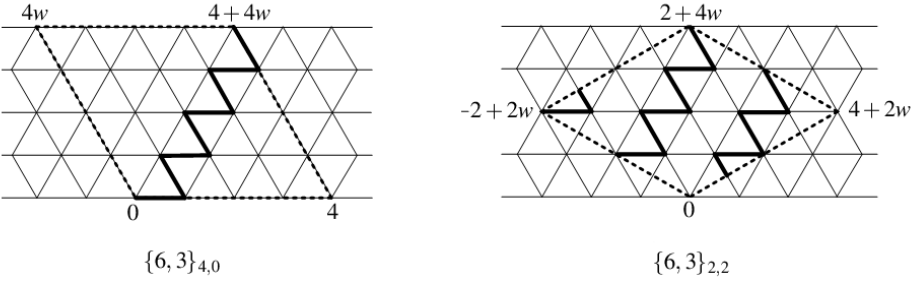
Böylece $3b \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (-1+w)(-b+bw) \in \langle -b+bw \rangle$ olduğundan mertebe $3b$ olur. \square

$\{6,3\}_{b,0}$ ve $\{6,3\}_{b,b}$ figürlerinin Petrie sayıları hesaplandığı için Teorem 3.3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.5.5. $\{6,3\}_{b,0}$ ve $\{6,3\}_{b,b}$ figürlerinin Petrie çokgenleri sırasıyla $2b$ ve $6b$ kenarlıdır.

Sonuç 3.5.6. $\{6,3\}_{b,0}$ ve $\{6,3\}_{b,b}$ figürlerinin bütün Petrie çokgenlerinin sayıları $3b$ olur.

Aşağıdaki şekilde $\{6,3\}_{4,0}$ ve $\{6,3\}_{2,2}$ figürlerinin birer Petrie çokgenleri kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Benzer işlemler $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ figürleri için yapıldığında, bu figürlerin Petrie sayılarının sırasıyla b ve $3b$ olduğu bulunur. Dolayısıyla bu figürlerin bütün Petrie çokgenlerinin sayıları kolayca hesaplanır.

Cinsi 1 olan tüm yansımali düzgün figürlerin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları hesaplanıp Çizelge 3.2 de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Cinsi 1 olan yansımali düzgün figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $
$\{4, 4\}_{b,0}$	$4b^2$	b	$2b$
$\{4, 4\}_{b,b}$	$8b^2$	b	$4b$
$\{6, 3\}_{b,0}$	$6b^2$	b	$3b$
$\{6, 3\}_{b,b}$	$18b^2$	$3b$	$3b$
$\{3, 6\}_{b,0}$	$6b^2$	b	$3b$
$\{3, 6\}_{b,b}$	$18b^2$	$3b$	$3b$

3.6. Bazı Özel Yüzeyler ve Petrie Çokgenleri

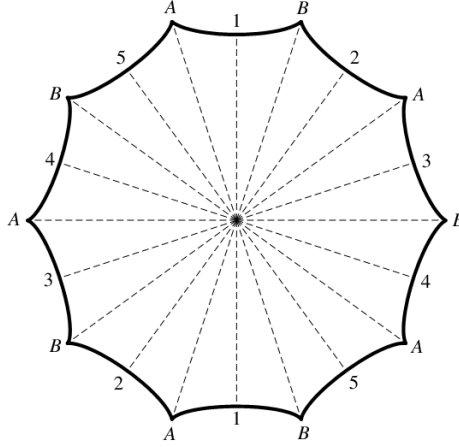
Bu kısımda Wiman, Accola-Maclachlan ve Hurwitz figürlerinin Petrie sayıları, bütün Petrie çokgenlerinin sayıları ve uzunlukları incelenecektir.

3.6.1. Wiman Yüzeyleri

Cinsi $g > 1$ olan bir kompakt Riemann yüzeyinin bir konform otomorfizmasının mertebesi $4g + 2$ ile üstten sınırlıdır. İkinci en büyük mertebe ise $4g$ dir [31]. Bu mertebelere sahip yüzeyler sırasıyla birinci ve ikinci tip Wiman yüzeyleri olarak adlandırılırlar.

$S_1 = \mathbb{H}/K_1$ birinci tip Wiman yüzeyi olsun. Bu durumda K_1 grubunun, simgesi $[2, 2g + 1, 4g + 2]$ olan Γ_1 üçgensel Fuchs grubu tarafından normal alt grup olarak içerildiği, $Aut^+ S_1$ grubunun Γ_1/K_1 grubuna izomorf olduğu [16, 17] ve S_1 yüzeyi üzerinde tipi $\{2g + 1, 4g + 2\}$ olan bir \mathcal{M}_1 düzgün figürünün bulunduğu açıktır. \mathcal{M}_1 düzgün figürü birinci tip Wiman figürü olarak adlandırılır. Bu düzgün figür için $\|F\| = 1$, $\|V\| = 2$ ve $\|E\| = 2g + 1$ olduğu bilinmektedir. Burada $Aut^+ \mathcal{M}_1$ grubu $Aut^+ S_1$ grubuna, $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ grubu $Aut^\pm S_1$ grubuna izomorftur. Ayrıca $Aut^+ \mathcal{M}_1$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ gruplarının da sırasıyla \mathbb{Z}_{4g+2} ve D_{4g+2} gruplarına izomorf oldukları bilinmektedir.

Şekil 3.8 de cinsi 2 olan \mathcal{M}_1 düzgün figürünün yegâne yüzü gösterilmiştir ve bu yüz aynı zamanda K_1 grubu için bir temel bölgedir. K_1 grubunun bu biçimdeki bir temel bölgesinin karşılıklı kenarları aynı yörüngededir ve dolayısıyla bu kenarlar birleştirilerek S_1 yüzeyi elde edilir. \mathcal{M}_1 düzgün figürünün yüzünün merkezi, kendisini çevreleyen kenarların orta noktalarına ve köşelere geodezik doğru parçalarıyla birleştirildiğinde 20 adet $(2, 5, 10)$ -üçgenine bölünmüş olur.



Şekil 3.8. Cinsi 2 olan birinci tip Wiman figürü

$S_2 = \mathbb{H}/K_2$ ikinci tip Wiman yüzeyi olsun. Bu durumda K_2 grubunun, simgesi $[2, 4, 4g]$ olan Γ_2 üçgensel Fuchs grubu tarafından normal alt grup olarak içerildiği, $Aut^+ S_2$ grubunun Γ_2/K_2 grubuna izomorf olduğu [16, 17] ve S_2 yüzeyi üzerinde tipi $\{4, 4g\}$ olan bir \mathcal{M}_2 düzgün figürü bulunduğu açıktır. \mathcal{M}_2 düzgün figürü ikinci tip Wiman figürü olarak adlandırılır. Bu düzgün figür için $\|F\| = 2$, $\|V\| = 2g$ ve $\|E\| = 4g$ olduğu bilinmektedir. Burada $Aut^+ \mathcal{M}_2$ grubu $Aut^+ S_2$ grubuna, $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ grubu $Aut^\pm S_2$ grubuna izomorftur. Ayrıca her $g > 2$ için $Aut^+ \mathcal{M}_2$ grubunun mertebesi $8g$ dir ve bu grup

$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^4 = (XY)^{4g} = (XY)^{2g}Y^2 = 1 \rangle$$

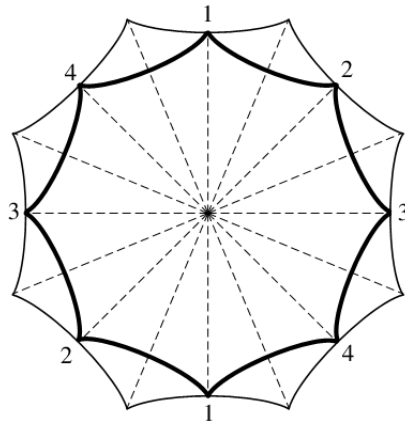
biçimindedir [16]. Bu gruptan yararlanarak $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ grubunun

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^{4g} = (PR)^{2g}(QR)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde olduğu görülür.

Eğer $g = 2$ ise K_2 grubu ayrıca simgesi $[2, 3, 8]$ olan üçgensel Fuchs grubunun 3 indeksli bir normal alt grubudur ve $|Aut^+ \mathcal{M}_2| = 48$ dir.

Şekil 3.9 da verilen büyük sekizgen K_2 grubu için bir temel bölgedir. \mathcal{M}_2 düzgün figürünün kenarları kalın çizgilerle gösterilmiştir. K_2 grubunun bu biçimdeki bir temel bölgesinin karşılıklı kenarları aynı yörüngededir ve dolayısıyla bu kenarlar birleştirilerek S_2 yüzeyi elde edilir. \mathcal{M}_2 düzgün figürünün her bir yüzünün merkezi, kendisini çevreleyen kenarların orta noktalarına ve köşelere geodezik doğru parçalarıyla birleştirildiğinde S_2 yüzeyi 32 adet $(2, 4, 8)$ -üçgenine bölünmüş olur.



Şekil 3.9. Cinsi 2 olan ikinci tip Wiman figürü

Simgesi $[2, 4, 4g]$ olan üçgensel Fuchs grubunun, simgesi $[2, 4g, 4g]$ olan iki indeksli bir alt grubu vardır. Yukarıda bahsedilen K_2 grubu bu grubun $4g$ indeksli bir normal alt grubudur. Dolayısıyla S_2 yüzeyi üzerinde tipi $\{4g, 4g\}$ olan bir \mathcal{M}'_2 düzgün figürü bulunmaktadır. Ayrıca $Aut^+ \mathcal{M}'_2$ grubu \mathbb{Z}_{4g} grubuna izomorftur [25].

Teorem 3.6.1. \mathcal{M} cinsi $g > 1$ olan ikinci tip Wiman figürü olsun. Bu durumda,

(i) g çift sayı ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı $2g$ dir.

(ii) g tek sayı ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı g dir.

İspat: \mathcal{M} figürünün tipi $\{4, 4g\}$ dir. Ayrıca $Aut^+ \mathcal{M}$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}$ gruplarının sırasıyla

$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^4 = (XY)^{4g} = (XY)^{2g}Y^2 = 1 \rangle$$

ve

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^{4g} = (PR)^{2g}(QR)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde olduğu biliniyor. Burada $Y^2 = (XY)^{2g}$ elmanı $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunun merkezinde olduğundan \mathcal{M} figürünün Petrie otomorfizması

$$\mathcal{P} = (PQR)^2 = XY^{-1}X^{-1}Y = XYXY^2 = (XY)^2Y^2$$

olur. Bu durumda, $t \geq 1$ olmak üzere; t çift sayı ise $\mathcal{P}^t = (XY)^{2t}$ ve t tek sayı ise $\mathcal{P}^t = (XY)^{2t}Y^2$ olduğu kolayca görülür. $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunda XY elemanın mertebesinin $4g$ olduğu dikkate alınır ise ispat tamamlanır. \square

Burada ikinci tip Wiman figürünün Petrie sayısı hesaplandığı için Teorem 3.3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.2. \mathcal{M} , cinsi $g > 1$ olan ikinci tip Wiman figürü olsun. Bu durumda,

(i) g çift sayı ise, $\|\mathcal{M}_P\| = 2$ olur.

(ii) g tek sayı ise, $\|\mathcal{M}_P\| = 4$ olur.

3.6.2. Accola-Maclachlan Yüzeyleri

$g > 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere, cinsi g olan bütün Riemann yüzeylerinin konform otomorfizmalarının maksimum sayısı $\mu(g)$ olsun. Bu durumda $\mu(g) \geq 8(g+1)$ dir ve her $g > 1$ için cinsi g ve konform otomorfizma sayısı $8(g+1)$ olan bir Riemann yüzeyinin mevcut olduğu Accola [1] ve Maclachlan [21] tarafından gösterilmiştir. Bu yüzeyler Accola-Maclachlan yüzeyleri olarak bilinir.

$S = \mathbb{H}/K$ cinsi $g > 1$ olan Accola-Maclachlan yüzeyi olsun. Bu durumda Teorem 2.12.2 gereğince, K grubu, simgesi $[2, 4, 2g+2]$ olan bir Γ üçgensel Fuchs grubu tarafından normal alt grup olarak içerilir. Dolayısıyla, Teorem 2.9.8 e göre Aut^+S grubunun Γ/K grubuna izomorf olduğu ve S yüzeyi üzerinde tipi $\{4, 2g+2\}$ olan bir \mathcal{M} düzgün figürünün bulunduğu açıktır. \mathcal{M} düzgün figürü Accola-Maclachlan figürü olarak adlandırılır. Bu düzgün figür için $\|F\| = 4$, $\|V\| = 2g+2$ ve $\|E\| = 4g+4$ olduğu bilinmektedir. Burada $Aut^+\mathcal{M}$ grubu Aut^+S grubuna, $Aut^\pm\mathcal{M}$ grubu $Aut^\pm S$ grubuna izomorftur. Ayrıca $Aut^+\mathcal{M}$ grubunun mertebesi $8(g+1)$ dir ve bu grup

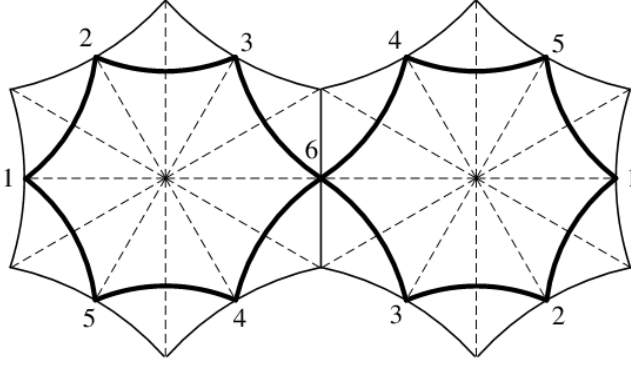
$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^4 = (XY)^{2g+2} = (YXY)^2 = 1 \rangle$$

biçimindedir [21]. Bu gruptan yararlanarak $Aut^\pm\mathcal{M}$ grubu

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^{2g+2} = (QRPR)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde elde edilir.

Şekil 3.10 da verilen hiperbolik çokgen K grubu için bir temel bölgedir ve aynı numaralı kenarlar K grubuna göre aynı yörüngededirler. Şekildeki kalın çizgiler \mathcal{M} düzgün figürünün kenarlarını göstermektedir. Bu düzgün figürün yüz merkezleri, komşu köşelere ve kenar orta noktalara geodezik doğru parçalarıyla birleştirildiğinde S yüzeyi 48 tane $(2, 4, 6)$ -üçgenine bölünmüş olur.



Şekil 3.10. Cinsi 2 olan Accola-Maclachlan figürü

Simgesi $[2, 4, 2g + 2]$ olan üçgensel Fuchs grubunun, simgesi $[2, 2g + 2, 2g + 2]$ olan iki indeksli bir alt grubu vardır. Yukarıda bahsedilen K grubu bu grubun $4(g + 1)$ indeksli bir normal alt grubudur. Dolayısıyla S yüzeyi üzerinde tipi $\{2g + 2, 2g + 2\}$ olan bir \mathcal{M}' düzgün figürü bulunmaktadır. Ayrıca $\text{Aut}^+ \mathcal{M}'$ grubu $\mathbb{Z}_{2g+2} \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorftur [25].

Teorem 3.6.3. \mathcal{M} , cinsi $g > 1$ olan Accola-Maclachlan figürü olsun. Bu durumda,

- (i) g çift sayı ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı $2g + 2$ dir.
- (ii) g tek sayı ise, \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı $g + 1$ dir.

İspat: \mathcal{M} figürünün tipi $\{4, 2g + 2\}$ dir. Ayrıca $\text{Aut}^+ \mathcal{M}$ ve $\text{Aut}^\pm \mathcal{M}$ gruplarının sırasıyla

$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^4 = (XY)^{2g+2} = (YXY)^2 = 1 \rangle$$

ve

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^{2g+2} = (QRPR)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde olduğu biliniyor. Burada Y^2 elamanı $\text{Aut}^+ \mathcal{M}$ grubunun merkezinde olduğundan \mathcal{M} figürünün Petrie otomorfizması

$$\mathcal{P} = (PQR)^2 = XY^{-1}X^{-1}Y = XYXY^2 = (XY)^2Y^2$$

olur. Bu durumda, $t \geq 1$ olmak üzere; t çift sayı ise $\mathcal{P}^t = (XY)^{2t}$ ve t tek sayı ise $\mathcal{P}^t = (XY)^{2t}Y^2$ olduğu kolayca görülür. $Aut^+\mathcal{M}$ grubunda XY elemanın mertebesinin $2g+2$ olduğu dikkate alınır ise ispat tamamlanır. \square

Burada Accola-Maclachlan figürünün Petrie sayısı hesaplandığı için Teorem 3.3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.4. \mathcal{M} , cinsi $g > 1$ olan Accola-Maclachlan figürü olsun. Bu durumda,

(i) g çift sayı ise, $\|\mathcal{M}_P\| = 2$ olur.

(ii) g tek sayı ise, $\|\mathcal{M}_P\| = 4$ olur.

3.6.3. Hurwitz Yüzeyleri

$g > 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere, cinsi g olan bütün kompakt Riemann yüzeylerinin konform otomorfizmalarının maksimum sayısı $\mu(g)$ olsun. Bu durumda Hurwitz teoremi olarak bilinen $\mu(g) \leq 84(g-1)$ eşitsizliğinin sağlandığı [12] ve sonsuz çoklukta $g > 1$ pozitif tam sayı için $84(g-1)$ adet konform otomorfizması bulunan yüzeylerin mevcut olduğu bilinmektedir [20]. S cinsi $g > 1$ olan bir kompakt Riemann yüzeyi ve $|Aut^+S| = 84(g-1)$ ise bu S yüzeyine bir Hurwitz yüzeyi ve Aut^+S grubuna da bir Hurwitz grubu denir.

$S = \mathbb{H}/K$ cinsi $g > 1$ olan bir Hurwitz yüzeyi olsun. Bu durumda K grubunun, simgesi $[2, 3, 7]$ olan bir Γ üçgensel Fuchs grubu tarafından normal alt grup olarak içerildiği, Aut^+S grubunun Γ/K grubuna izomorf olduğu ve S yüzeyi üzerinde tipi $\{3, 7\}$ olan bir \mathcal{M} düzgün figürünün bulunduğu açıktır. Bu \mathcal{M} düzgün figürüne bir Hurwitz figürü denir. Burada $Aut^+\mathcal{M}$ grubu Aut^+S grubuna, $Aut^\pm\mathcal{M}$ grubu $Aut^\pm S$ grubuna izomorftur. Ayrıca $Aut^+\mathcal{M}$ grubu

$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^7 = \dots = 1 \rangle$$

biçimindedir. Bu gruptan yararlanarak $Aut^{\pm}\mathcal{M}$ grubu

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = \dots = 1 \rangle$$

biçiminde elde edilir. Her $g > 1$ tam sayısına karşılık cinsi g olan bir Hurwitz yüzeyi mevcut olamayabilir. Cinsi en küçük olan Hurwitz yüzeyi Christian Felix Klein (1849-1925) tarafından keşfedilmiştir [18]. Bu yüzeyin cinsi 3 tür ve Klein'in Riemann yüzeyi olarak bilinir.

Klein'in Riemann yüzeyi $S_1 = \mathbb{H}/K_1$ olarak verilsin. Bu durumda Şekil 3.11 de verilen on dört kenarlı düzgün hiperbolik çokgen K_1 grubu için bir temel bölgedir. Bu temel bölgenin aynı numaralı kenarları K_1 grubuna göre aynı yörengededir. Böylece bu kenarlar birleştirilerek S_1 yüzeyi elde edilir. Bu yüzey üzerindeki Hurwitz figürü için $\|F\| = 24$, $\|V\| = 56$ ve $\|E\| = 84$ olarak bulunur. Bu düzgün figürün yüz merkezleri, komşu köşelere ve kenar orta noktalara geodezik doğru parçalarıyla birleştirildiğinde S_1 yüzeyi 336 tane $(2, 3, 7)$ -üçgenine bölünmüş olur.

S_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{M} Hurwitz figürünün $\{3, 7\}$ tipinde olduğu ve $Aut^{\pm}\mathcal{M}$ grubunun

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (QR(RP)^{-2})^4 = 1 \rangle$$

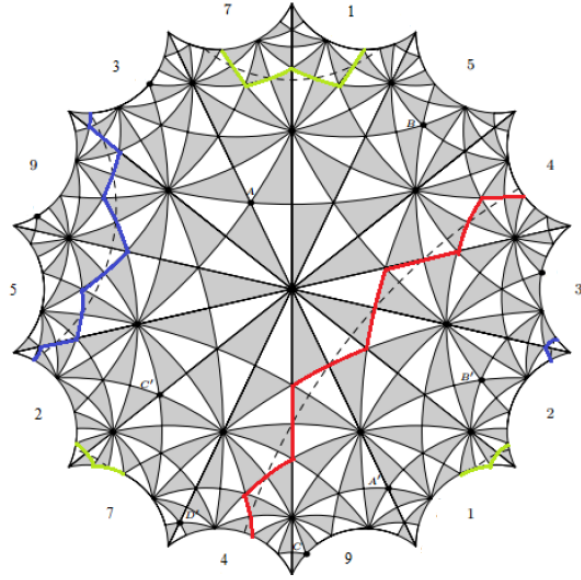
biçiminde olduğu biliniyor [8]. MAGMA yazılımının, bu Hurwitz figürünün Petrie sayısını hesaplamada kullanılan kodu aşağıda verilmiştir.

```
G<P, Q, R> := Group<P, Q, R | P^2=Q^2=R^2=(P*Q)^2=(Q*R)^3=
(P*R)^7=(Q*R*(R*P)^(-2))^4=1>;
K := sub<G | (P*Q*R)^2 >;
Order (K) ;
```

Bu kod kullanılarak MAGMA yardımıyla K grubunun mertebesi 4 olarak bulunur. Dolayısıyla $(PQR)^8 = 1$ olur. Yani bu figürün her bir Petrie çokgeni

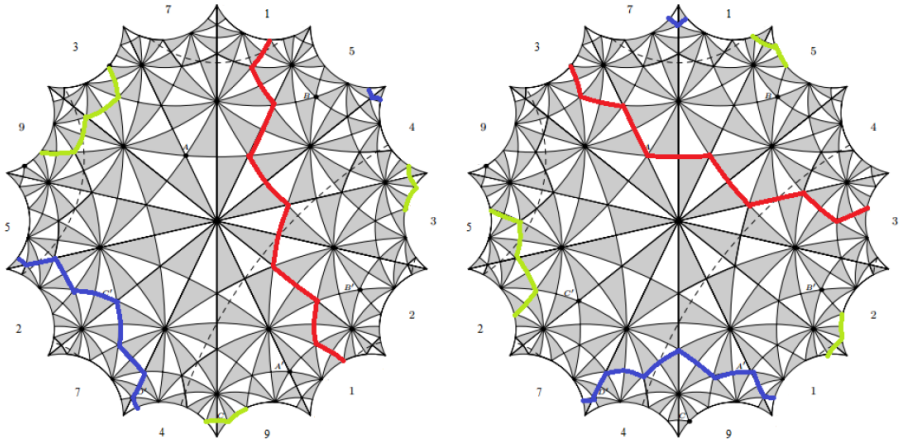
8 kenarlıdır. Ayrıca $|Aut^+ \mathcal{M}| = 168$ olduğundan Teorem 3.3.1 kullanılarak $\|\mathcal{M}_P\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2k} = \frac{168}{8} = 21$ elde edilir.

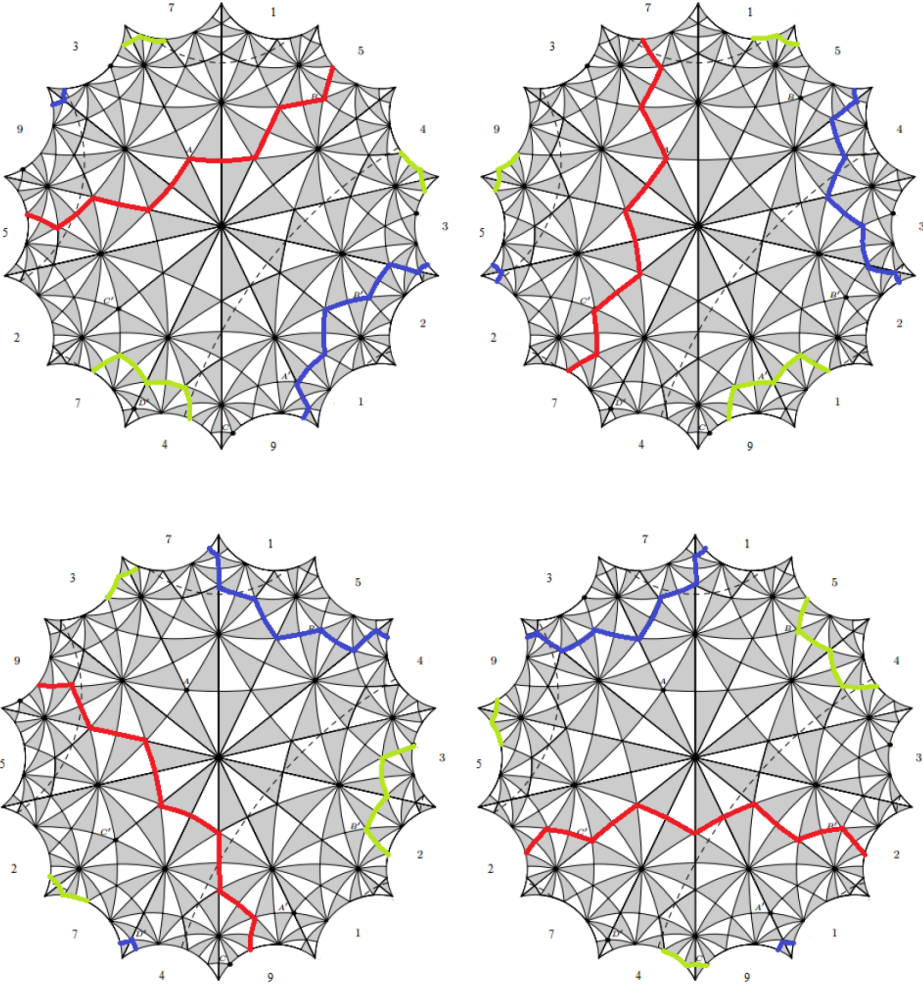
Aşağıdaki şekilde, bu Hurwitz figürüne ait üç Petrie çokgeni farklı renklerle gösterilmiştir.



Şekil 3.11. $g = 3$ olan Hurwitz figürünün 3 Petrie çokgeni

K_1 grubuna ait bu temel bölgenin, merkezi etrafında $\frac{2\pi}{7}$ radyan döndürülmesiyle diğer Petrie çokgenleri elde edilir ve bunlar aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.





Cinsi 1'den büyük ve $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figürün bir Petrie çokgeni, bu figürün kenarlarından oluşur. Bu figürün her bir kenar ise, bu figürden elde edilen $(2, m, n)$ -üçgenlerinin 2 tane **01** kenarından meydana gelir. O halde, bir Petrie çokgeni sonlu sayıda $(2, m, n)$ -üçgenlerinin **01** kenarlarından oluşur. Hiperbolik Sinüs ve Kosinüs kuralları yardımı ile $(2, m, n)$ -üçgenlerinin kenar uzunlukları hesaplanabildiği için, bu figürün bir Petrie çokgeninin uzunluğu da hesaplanabilir.

Bu durumda bu Hurwitz figürünün her bir Petrie çokgeni $(2, 3, 7)$ -üçgenlerinin 16 adet **01** kenarından oluşur. Bir $(2, 3, 7)$ -üçgeninin kenarlarının uzunlukları

Örnek 2.7.13 te hesaplanmıştır. Dolayısıyla, **01** kenarının uzunluğu 0,2831282 dir. O halde her bir Petrie çokgeninin uzunluğu 4,5300512 olarak bulunur.

Cinsi g olan bir \mathcal{M} Hurwitz figürünün tipinin $\{3,7\}$ ve $|Aut^+ \mathcal{M}| = 84(g-1)$ olduğu biliniyor. Bu durumda, k bu figürün Petrie sayısı olmak üzere, $\|\mathcal{M}_P\| = \frac{42(g-1)}{k}$ elde edilir. Fakat Hurwitz figürlerinde Petrie sayısının bazı değerleri alamayacağını aşağıdaki teorem göstermektedir.

Teorem 3.6.5. \mathcal{M} bir Hurwitz figürü ve bu figürün Petrie sayısı k olsun. Bu durumda $k = 1, 2, 3$ ve 5 olamaz.

İspat: \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı 1 olsun. Bu durumda $(PQR)^2 = 1$ olur ve bu figürün her bir Petrie çokgeni 2 kenarlıdır. Ayrıca $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun üreteçleri aşağıdaki bağıntıları sağlamalıdır:

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (PQR)^2 = 1.$$

Burada $(PQR)^2 = 1$ ifadesi düzenlenirse $PQ(PR)^6QR = 1$ olur ve buradan $(PR)^4 = QP$ bulunur. Ayrıca $(PQR)^2 = 1$ ve $(PR)^4 = QP$ eşitliklerinden $(PR)^3 = RQ$ elde edilir. Bağıntılardaki $(PR)^7 = 1$ ifadesi $(PR)^4(PR)^3 = 1$ şeklinde yazılırsa $P = R$ elde edilir. Buna göre $(QR)^3 = 1$ olduğundan $P = Q$ bulunur. Bu durumda

$$Aut^\pm \mathcal{M} = \langle P \mid P^2 = 1 \rangle = \{1, P\}$$

olur. Hurwitz teoremi gereğince bir Hurwitz figürünün otomorfizma grubunun mertebesi 2 olamaz. Dolayısıyla, \mathcal{M} figürünün Petrie sayısı 1 olamaz. Bu sonuç MAGMA yazılımı kullanılarak da elde edilebilir.

Benzer şekilde, MAGMA yazılımı yardımıyla k sayısının 2, 3 ve 5 değerlerini alamayacağı görülür. □

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş olur.

Sonuç 3.6.6. Bir Hurwitz figürünün bir Petrie çokgeni 2, 4, 6 ve 10 kenarlı olamaz.

Sonuç 3.6.7. *Bir Hurwitz figürünün bütün Petrie çokgenlerinin sayısı için*

$$\|\mathcal{M}_P\| \leq \frac{21}{2}(g-1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Eğer bir \mathcal{M} Hurwitz figürünün Petrie sayısı $k = 4$ ise, $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun üreteçleri

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (PQR)^8 = 1$$

bağıntılarını sağlar. MAGMA yazılımı yardımıyla

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (PQR)^8 = 1 \rangle$$

ifadesinin $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunu verdiği ve $|Aut^\pm \mathcal{M}| = 336$ olduğu görülür. Böylece aşağıdaki önerme ispatlanmış olur.

Önerme 3.6.8. *Bir Hurwitz figürün Petrie sayısının 4 olması için gerek ve yeter şart bu figürün Klein'in Riemann yüzeyi üzerinde bulunmasıdır.*

Benzer şekilde eğer $k = 6$ ve $k = 7$ ise, $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubu sırasıyla

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (PQR)^{12} = 1 \rangle$$

ve

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (PQR)^{14} = 1 \rangle$$

biçimindedir. MAGMA yardımıyla her iki durumda da $|Aut^\pm \mathcal{M}| = 2184$ olduğu görülür. Bu da aşağıdaki önermenin ispatını verir.

Önerme 3.6.9. *Petrie sayısı 6 ve 7 olan Hurwitz figürü yalnızca cinsi 14 olan Hurwitz yüzeyleri üzerinde bulunur.*

Cinsi 14 olan üç farklı Hurwitz yüzeyinin olduğu bilinmektedir. Yukarıdaki önerme bunlardan ikisinin otomorfizma gruplarının Petrie sayıları yardımıyla belirlenebildiğini göstermektedir.

Benzer şekilde eğer $k = 8$ ise, MAGMA yardımıyla $Aut^{\pm}\mathcal{M}$ grubu

$$\langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (PR)^7 = (PQR)^{16} = 1 \rangle$$

biçiminde elde edilir ve $|Aut^{\pm}\mathcal{M}| = 21504$ olduğu görülür. Böylece aşağıdaki önerme ispatlanmış olur.

Önerme 3.6.10. *Bir Hurwitz figürünün Petrie sayısının 8 olması için gerek ve yeter şart bu figürün cinsinin 129 olmasıdır.*

Aynı şekilde devam edilirse $k \geq 9$ değerleri için $Aut^{\pm}\mathcal{M}$ gruplarının mertebeleri MAGMA ile hesaplanamamaktadır. Bunun nedeni; bu değerleri sağlayan ya bir den fazla Hurwitz yüzeyinin var olmasıdır ya da MAGMA yazılımının şu an bu hesaplama için yetersiz olmasıdır.

Aşağıdaki tabloda ilk on Hurwitz yüzeyi üzerinde bulunan düzgün figürlerin Petrie sayıları, bütün Petrie çokgenlerinin sayıları ve uzunlukları verilmiştir.

Çizelge 3.3. İlk on Hurwitz yüzeyi üzerindeki Petrie çokgenleri

g	$ Aut^+\mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_P\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
3	168	4	21	4,5300512
7	504	9	28	10,1926135
14a	1092	6	91	6,7950757
14b	1092	13	42	14,7226640
14c	1092	7	78	7,9275883
118	9828	13	378	14,7226640
129	10752	8	672	9,0601009
146a	12180	14	435	15,8551766
146b	12180	15	406	16,9876892
146c	12180	15	406	16,9876892

Aşağıdaki sonuç Çizelge 3.3 ten kolayca elde edilir.

Sonuç 3.6.11. *Farklı Hurwitz figürlerinin Petrie sayıları aynı olabilir.*

3.7. Petrie Sayısı Bir Olan Düzgün Figürler

Teorem 3.7.1. S , cinsi $g > 1$ olan bir Platonik Riemann yüzeyi ve \mathcal{M} , S yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür olsun. Eğer bu düzgün figürün Petrie sayısı 1 ise aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir:

- (i) \mathcal{M} figürünün tipi $\{2g + 1, 4g + 2\}$ dir ve S , birinci tip Wiman yüzeyidir.
- (ii) \mathcal{M} figürünün tipi $\{2g + 2, 2g + 2\}$ dir ve S , Accola-Maclachlan yüzeyidir.
- (iii) \mathcal{M} figürünün tipi $\{4g, 4g\}$ dir ve S , ikinci tip Wiman yüzeyidir.

İspat: $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunun

$$\langle X, Y \mid X^2 = Y^m = (XY)^n = \dots = 1 \rangle$$

biçiminde olduğu biliniyor. Petrie otomorfizması birim eleman olduğundan $XY^{-1}X^{-1}Y = 1$ olduğu görülür. Bu ise $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunun değişmeli olduğunu gösterir. Şimdi m sayısının çift ya da tek olma durumuna göre $Aut^+ \mathcal{M}$ grubunu belirleyelim.

a) m bir tek sayı olsun. Bu durumda, $ebob(2, m) = 1$ olduğundan, XY elemanının mertebesi $2m$ olur. O halde $n = 2m$ ve $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu \mathbb{Z}_{2m} grubuna izomorftur dolayısıyla $|Aut^+ \mathcal{M}| = 2m$ olur. Ayrıca \mathcal{M} figürünün yüz, köşe ve kenar sayıları sırasıyla $\|F\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{n}$, $\|V\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{m}$ ve $\|E\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2}$ olduğundan Euler-Poincaré formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \|F\| + \|V\| - \|E\| &= 2 - 2g \\ \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{n} + \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{m} - \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2} &= 2 - 2g \\ |Aut^+ \mathcal{M}| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) &= 2 - 2g \end{aligned}$$

elde edilir. $|Aut^+ \mathcal{M}| = 2m$ değeri yukarıdaki formülde tekrar kullanılırsa

$$2m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) = 2 - 2g$$

bulunur ve buradan $m = 2g + 1$ elde edilir. Dolayısıyla, $n = 4g + 2$ olur ve \mathcal{M} figürünün tipi $\{2g + 1, 4g + 2\}$ dir. Bu ise S yüzeyinin cinsi g olan birinci tip Wiman yüzeyi olduğunu gösterir.

b) m bir çift sayı olsun. Bu durumda, Y ve XY elemanlarının mertebeleri eşittir ve dolayısıyla $m = n$ olur. X ve Y elemanlarının ürettikleri gruplar sırasıyla \mathbb{Z}_2 ve \mathbb{Z}_m gruplarına izomorfturlar. Burada $X \in \langle Y \rangle$ ve $X \notin \langle Y \rangle$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

$X \in \langle Y \rangle$ ise, $Aut^+ \mathcal{M} \cong \mathbb{Z}_m$ olur ve dolayısıyla $|Aut^+ \mathcal{M}| = m$ bulunur. Euler-Poincaré formülünden

$$\begin{aligned} |Aut^+ \mathcal{M}| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) &= 2 - 2g \\ m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) &= 2 - 2g \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $m = n = 4g$ elde edilir. O halde \mathcal{M} figürünün tipi $\{4g, 4g\}$ olur. Bu ise S yüzeyinin cinsi g olan ikinci tip Wiman yüzeyi olduğunu gösterir.

$X \notin \langle Y \rangle$ ise $Aut^+ \mathcal{M} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$ olur ve $|Aut^+ \mathcal{M}| = 2m$ olduğu açıktır. Euler-Poincaré formülünden

$$\begin{aligned} |Aut^+ \mathcal{M}| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) &= 2 - 2g \\ 2m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) &= 2 - 2g \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $n = m = 2g + 2$ elde edilir. O halde \mathcal{M} figürünün tipi $\{2g + 2, 2g + 2\}$ olur. Bu ise S yüzeyinin cinsi g olan Accola-Maclachlan yüzeyi olduğunu gösterir. \square

Böylece her $g > 1$ için, cinsi g ve Petrie sayısı 1 olan üç farklı düzgün figür mevcuttur. Bunların tipleri $\{2g + 1, 4g + 2\}$, $\{2g + 2, 2g + 2\}$ ve $\{4g, 4g\}$ dir. Burada Teorem 3.3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.7.2. İki kenarlı Petrie çokgenleri yalnızca birinci ve ikinci tip Wiman yüzeyleri ile Accola-Maclachlan yüzeyleri üzerinde bulunur.

Sonuç 3.7.3. Her $g > 1$ için, cinsi g , tipi $\{2g+1, 4g+2\}$, $\{2g+2, 2g+2\}$, $\{4g, 4g\}$ ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları sırasıyla $2g+1$, $2g+2$, $2g$ olan bir düzgün figür mevcuttur.

Wiman ve Accola-Maclachlan yüzeyleri üzerinde bulunan düzgün figürlerin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.4. Wiman ve Accola-Maclachlan figürlerinin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	g çift sayı		g tek sayı	
	k	$\ \mathcal{M}_P\ $	k	$\ \mathcal{M}_P\ $
$\{2g+1, 4g+2\}$	1	$2g+1$	1	$2g+1$
$\{4, 4g\}$	$2g$	2	g	4
$\{4g, 4g\}$	1	$2g$	1	$2g$
$\{4, 2g+2\}$	$2g+2$	2	$g+1$	4
$\{2g+2, 2g+2\}$	1	$2g+2$	1	$2g+2$

3.8. Cinsi 15'e Kadar Olan Düzgün Figürlerin Petrie Çokgenleri

Cinsi 0 ve 1 olan düzgün figürlerin Petrie çokgenleri bu bölümde incelendi. Cinsi 2'den 15'e kadar olan düzgün figürlerin otomorfizma grupları için bağıntılar Conder ve Dobcsányi'nin [8] makalesinde verilmiştir. Bu kısımda [8] numaralı kaynaktaki veriler kullanılarak cinsi 2'den 15'e kadar olan yansımali düzgün figürlerin Petrie sayıları, bütün Petrie çokgenlerinin sayıları ve uzunlukları hesaplanmış ve aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir.

Çizelge 3.5. Cinsi 2 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_P\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{3, 8\}$	48	6	4	8,7244781
$\{4, 6\}$	24	6	2	15,8034948
$\{4, 8\}$	16	4	2	12,2285674
$\{5, 10\}$	10	1	5	4,2451002
$\{6, 6\}$	12	1	6	4,5848633
$\{8, 8\}$	8	1	4	6,1142837

Çizelge 3.6. Cinsi 3 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_P\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{3, 7\}$	168	4	21	4,5300512
$\{3, 8\}$	96	3	16	4,3622390
$\{3, 12\}$	48	4	6	7,6131445
$\{4, 6\}$	48	3	8	7,9017474
$\{4, 8\}$	32	4	4	12,2285674
$\{4, 8\}$	32	4	4	12,2285674
$\{4, 12\}$	24	3	4	9,9773153
$\{6, 6\}$	24	2	6	9,1697267
$\{7, 14\}$	14	1	7	5,7962989
$\{8, 8\}$	16	2	4	12,2285674
$\{8, 8\}$	16	1	8	6,1142837
$\{12, 12\}$	12	1	6	7,9666096

Çizelge 3.7. Cinsi 4 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
{3,12}	72	3	12	5,7098584
{4,5}	120	3	20	6,3676504
{4,6}	72	2	18	5,2678316
{4,10}	40	10	2	32,3384334
{4,16}	32	8	2	27,3171298
{5,5}	60	3	10	10,1097850
{6,6}	36	3	6	13,7545900
{6,6}	36	3	6	13,7545900
{6,12}	24	2	6	10,2134949
{9,18}	18	1	9	6,8764285
{10,10}	20	1	10	7,1592816
{16,16}	16	1	8	9,1919860

Çizelge 3.8. Cinsi 5 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
{3,8}	192	6	16	8,7244781
{3,10}	120	5	12	8,7917928
{4,5}	160	5	16	10,6127506
{4,6}	96	6	8	15,8034948
{4,8}	64	2	16	6,1142837
{4,8}	64	4	8	12,2285674
{4,12}	48	6	4	19,9546307
{4,20}	40	5	4	17,2748679
{5,5}	80	2	20	6,7398567
{6,6}	48	2	12	9,1697267
{6,15}	30	5	3	25,8269813
{8,8}	32	2	8	12,2285674
{8,8}	32	2	8	12,2285674
{11,22}	22	1	11	7,7152617
{12,12}	24	1	12	7,9666096
{20,20}	20	1	10	10,1181839

Çizelge 3.9. Cinsi 6 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{3, 10\}$	150	3	25	5,2750757
$\{4, 6\}$	120	5	12	13,1695790
$\{4, 9\}$	72	9	4	28,4525665
$\{4, 14\}$	56	14	2	47,3193327
$\{4, 24\}$	48	12	2	41,7201496
$\{5, 10\}$	50	5	5	21,2255012
$\{6, 8\}$	48	12	2	58,7628587
$\{6, 8\}$	48	6	4	29,3814294
$\{9, 9\}$	36	2	9	13,3514704
$\{10, 15\}$	30	3	5	21,8336487
$\{13, 26\}$	26	1	13	8,4037792
$\{14, 14\}$	28	1	14	8,6288148
$\{24, 24\}$	24	1	12	10,8655003

Çizelge 3.10. Cinsi 7 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{3, 7\}$	504	9	28	10,1926135
$\{3, 12\}$	144	12	6	22,8394335
$\{4, 16\}$	64	8	4	27,3171298
$\{4, 16\}$	64	8	4	27,3171298
$\{4, 28\}$	56	7	4	24,4278945
$\{6, 9\}$	54	9	3	44,7961953
$\{6, 12\}$	48	4	6	20,4269899
$\{6, 21\}$	42	7	3	36,5109843
$\{15, 30\}$	30	1	15	8,9887445
$\{16, 16\}$	32	1	16	9,1919860
$\{16, 16\}$	32	2	8	18,3839719
$\{28, 28\}$	28	1	14	11,4928966

Çizelge 3.11. Cinsi 8 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{3, 8\}$	336	4	42	5,8163187
$\{3, 8\}$	336	7	24	10,1785578
$\{4, 18\}$	72	18	2	61,8878563
$\{4, 32\}$	64	16	2	55,9699651
$\{6, 10\}$	60	15	2	75,5101654
$\{6, 24\}$	48	4	6	20,9123591
$\{8, 12\}$	48	12	2	75,7080654
$\{10, 20\}$	40	2	10	14,6375667
$\{17, 34\}$	34	1	17	9,4977189
$\{18, 18\}$	36	1	18	9,6827893
$\{32, 32\}$	32	1	16	12,0339967

Çizelge 3.12. Cinsi 9 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
{3, 12}	192	4	24	7,6131445
{4, 5}	320	10	16	21,2255012
{4, 6}	192	12	8	31,6069895
{4, 6}	192	3	32	7,9017474
{4, 8}	128	4	16	12,2285674
{4, 8}	128	2	32	6,1142837
{4, 8}	128	4	16	12,2285674
{4, 8}	128	4	16	12,2285674
{4, 12}	96	3	16	9,9773153
{4, 12}	96	6	8	19,9546307
{4, 12}	96	6	8	19,9546307
{4, 20}	80	10	4	34,5497357
{4, 36}	72	9	4	31,5349729
{5, 5}	160	4	20	13,4797133
{5, 6}	120	5	12	18,7642924
{5, 6}	120	2	30	7,5057170
{6, 6}	96	4	12	18,3394534
{6, 6}	96	2	24	9,1697267
{8, 8}	64	4	8	24,4571347
{8, 8}	64	4	8	24,4571347
{8, 8}	64	4	8	24,4571347
{8, 8}	64	2	16	12,2285674
{8, 8}	64	4	8	24,4571347
{8, 24}	48	6	4	38,5340198
{8, 24}	48	3	8	19,2670099
{12, 12}	48	2	12	15,9332191
{12, 12}	48	2	12	15,9332191
{12, 12}	48	2	12	15,9332191
{14, 21}	42	3	7	26,0609007
{19, 38}	38	1	19	9,9484220
{20, 20}	40	1	20	10,1181839
{36, 36}	36	1	18	12,5098966

Çizelge 3.13. Cinsi 10 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
{3,9}	324	6	27	9,8302920
{3,12}	216	3	36	5,7098584
{3,15}	180	5	18	10,0704134
{3,18}	162	3	27	6,2153168
{3,24}	144	6	12	12,7654450
{4,5}	360	4	45	8,4902005
{4,6}	216	6	18	15,8034948
{4,6}	216	6	18	15,8034948
{4,7}	168	4	21	11,5925978
{4,12}	108	3	18	9,9773153
{4,22}	88	22	2	76,2810290
{4,40}	80	20	2	70,1600424
{6,6}	108	3	18	13,7545900
{6,6}	108	3	18	13,7545900
{6,6}	108	3	18	13,7545900
{6,12}	72	6	6	30,6404848
{6,12}	72	6	6	30,6404848
{6,12}	72	6	6	30,6404848
{6,30}	60	5	6	26,2121820
{9,18}	54	3	9	20,6292854
{12,24}	48	4	6	32,2990660
{21,42}	42	1	21	10,3529618
{22,22}	44	1	22	10,5096856
{40,40}	40	1	20	12,9347421

Çizelge 3.14. Cinsi 11 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{4, 6\}$	240	5	24	13,1695790
$\{4, 24\}$	96	12	4	41,7201496
$\{4, 24\}$	96	12	4	41,7201496
$\{4, 44\}$	88	11	4	38,6214890
$\{6, 6\}$	120	3	20	13,7545900
$\{6, 8\}$	96	6	8	29,3814294
$\{6, 8\}$	96	3	16	14,6907147
$\{6, 33\}$	66	11	3	57,7153926
$\{8, 16\}$	64	8	4	51,0033637
$\{8, 16\}$	64	8	4	51,0033637
$\{23, 46\}$	46	1	23	10,7199964
$\{24, 24\}$	48	1	24	10,8655003
$\{24, 24\}$	48	2	12	21,7310006
$\{44, 44\}$	88	1	22	13,3184972

Çizelge 3.15. Cinsi 12 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{4, 15\}$	120	15	4	50,9861109
$\{4, 26\}$	104	26	2	90,5825721
$\{4, 48\}$	96	24	2	84,3205575
$\{6, 14\}$	84	21	2	108,1509007
$\{8, 10\}$	80	20	2	124,8264393
$\{10, 30\}$	60	3	10	22,0434300
$\{14, 28\}$	56	2	14	17,4143606
$\{15, 15\}$	60	2	15	17,8416235
$\{25, 50\}$	50	1	25	11,0559400
$\{26, 26\}$	52	1	26	11,1916966
$\{48, 48\}$	48	1	24	13,6684530

Çizelge 3.16. Cinsi 13 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
{3,10}	360	15	12	26,3753784
{3,12}	288	6	24	11,4197168
{4,12}	144	2	36	6,6515436
{4,16}	128	8	8	27,3171298
{4,16}	128	8	8	27,3171298
{4,28}	112	14	4	48,8557889
{4,52}	104	13	4	45,6970129
{5,10}	120	3	20	12,7353007
{6,6}	144	6	12	27,5091800
{6,12}	96	2	24	10,2134949
{6,12}	96	4	12	20,4269899
{6,15}	90	15	3	77,4809439
{6,39}	78	13	3	68,2866828
{9,18}	72	2	18	13,7528570
{12,12}	72	3	12	23,8998287
{12,12}	72	3	12	23,8998287
{16,16}	64	4	8	36,7679438
{16,16}	64	2	16	18,3839719
{16,16}	64	2	16	18,3839719
{27,54}	54	1	27	11,3656809
{28,28}	56	1	28	11,4928966
{52,52}	52	1	26	13,9901093

Çizelge 3.17. Cinsi 14 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
$\{3, 7\}$	1092	6	91	6,7950757
$\{3, 7\}$	1092	13	42	14,7226640
$\{3, 7\}$	1092	7	78	7,9275883
$\{4, 30\}$	120	30	2	104,8300254
$\{4, 56\}$	112	28	2	98,4642689
$\{6, 16\}$	96	24	2	124,2701609
$\{6, 42\}$	84	7	6	36,7842464
$\{8, 20\}$	80	20	2	128,1174208
$\{10, 35\}$	70	7	5	51,4776558
$\{29, 58\}$	58	1	29	11,6530326
$\{30, 30\}$	60	1	30	11,7727066
$\{56, 56\}$	56	1	28	14,2877191

Çizelge 3.18. Cinsi 15 olan figürlerin Petrie çokgenleri

\mathcal{M}	$ Aut^+ \mathcal{M} $	Petrie Sayısı	$\ \mathcal{M}_p\ $	Petrie Çokgenlerinin Uzunlukları
{3,9}	504	7	36	11,4686740
{3,14}	294	3	49	5,9566250
{3,20}	240	10	12	20,9618991
{4,6}	336	4	42	10,5356632
{4,18}	144	9	8	30,9439282
{4,32}	128	16	4	55,9699651
{4,32}	128	16	4	55,9699651
{4,60}	120	15	4	52,7659677
{6,10}	120	5	12	25,1700551
{7,14}	98	7	7	40,5740922
{8,12}	96	6	8	37,8540327
{8,12}	96	3	16	18,9270163
{8,12}	96	12	4	75,7080654
{8,12}	96	12	4	75,7080654
{8,40}	80	10	4	64,4619289
{8,40}	80	5	8	32,2309644
{14,35}	70	5	7	43,5825598
{18,18}	72	2	18	19,3655786
{22,33}	66	3	11	31,5980780
{31,62}	62	1	31	11,9210288
{32,32}	64	1	32	12,0339967
{32,32}	64	2	16	24,0679935
{60,60}	60	1	30	14,5646403

4. SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak, Petrie otomorfizmalarının eşlenik sınıfları belirlenmiş ve Petrie çokgenlerinin simetri gruplarının dihedral olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Petrie çokgenlerinin simetri gruplarının elemanları, sabit noktalarına ve yönü koruyup korumamalarına göre sınıflandırılmıştır. Daha sonra, verilen bir düzgün figürün bütün Petrie çokgenlerinin sayısını veren bir formül ispatlanmış ve bu sayı için alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Bu formül kullanılarak Petrie sayıları için de üst sınırlar belirlenmiştir.

Cinsi 0 olan düzgün figürlerin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları çizelge halinde verilmiştir. Cinsi 1 olan tüm yansımali düzgün figürlerin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları hesaplanmıştır.

Wiman, Accola-Maclachlan ve Hurwitz figür ailelerinin Petrie sayıları ve bütün Petrie çokgenlerinin sayıları incelenmiştir. Hurwitz figürlerinin Petrie sayılarının 1,2,3 ve 5 olamayacağı ispatlanmış ve cinsi g olan bir Hurwitz figürünün bütün Petrie çokgenlerinin sayısının en fazla $\frac{21}{2}(g-1)$ olduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak, Petrie otomorfizmaları birim olan düzgün figürlerin tiplerinin $\{2g+1, 4g+2\}$, $\{2g+2, 2g+2\}$ ve $\{4g, 4g\}$ olduğu gösterilmiştir. Bu düzgün figürler sadece Wiman ve Accola-Maclachlan yüzeyleri üzerinde bulunurlar. Dolayısıyla, bu yüzeylerin yeni bir karakterizasyonu elde edilmiştir.

Son olarak, cinsi 15'e kadar olan yansımali düzgün figürlerin Petrie sayıları, bütün Petrie çokgenlerinin sayıları ve uzunlukları hesaplanarak sonuçlar çizelgeler halinde verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Accola, R.D.M. 1968. On the number of automorphisms of a closed Riemann surface. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 131: 398-408.
- [2] Beardon, A.F. 1983. The geometry of discrete groups. Springer-Verlag, xii+337 pp., New York, Heidelberg, Berlin.
- [3] Beardon, A.F. 2005. Algebra and geometry. Cambridge University Press, xii+326 pp., New York.
- [4] Beltrami, E. 1868. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. **Ann. Mat. Pura Appl. Ser.**, 2 (2): 232-255.
- [5] Bondy, J.A., Murty, U.S.R. 1976. Graph theory with applications. MacMillan, 270 p., New York.
- [6] Bosma, W., Cannon, J., Playoust, C. 1997. The Magma algebra system I : The user language. **J. Symbolic Comput.**, 24: 235-265.
- [7] Churchill, R.V., Brown, J.W. 1990. Complex variables and applications. McGraw-Hill, xvi+362 pp., New York.
- [8] Conder, M., Dobcsányi, P. 2001. Determination of all regular maps of small genus. **J. Combin. Theory Ser.**, 81: 224-242.
- [9] Coxeter, H.S.M. 1973. Regular polytopes. Dover Publications, New York.
- [10] Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. 1980. Generators and relations for discrete groups. ix+161 pp., Springer-Verlag, New York, Berlin.
- [11] Harvey, W.J. 1966. Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surfaces. **Q. J. Math.**, 17: 86-97.
- [12] Hurwitz, A. 1893. Über algebraische gebilde mit eindeutigen transformationen in sich. **Math. Ann.**, 41(3): 403-442.
- [13] Jones, G.A., Singerman, D. 1978. Theory of maps on orientable surfaces. **Proc. Lond. Math. Soc.**, 37(3): 273-307.
- [14] Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex functions. Cambridge University Press, xiv+342 pp., Cambridge.
- [15] Katok, S. 1992. Fuchsian groups. The University of Chicago Press, 186 p., London.

- [16] Kulkarni, R.S. 1991. A note on Wiman and Accola-Maclachlan surfaces. **Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.**, 16: 83-94.
- [17] Kulkarni, R.S. 1997. Riemann surfaces admitting large automorphism groups. **Contemp. Math.**, 201: 63-79.
- [18] Klein, C.F. 1878. Ueber die transformationen siebter ordnung der elliptischen funktionen. **Math. Ann.**, 14: 428-471.
- [19] Macbeath, A.M. 1961. On a theorem of Hurwitz. **Proc. Glasgow. Math. Assoc.**, 5: 90-96.
- [20] Macbeath, A.M. 1967. The classification of non-Euclidean plane crystallographic groups. **Canad. J. Math.**, 19: 1192-1205.
- [21] Maclachlan, C. 1969. A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface. **J. Lond. Math. Soc.**, 44: 265-272.
- [22] Melekoğlu, A. 1998. Symmetries of Riemann Surfaces and Regular Maps. University of Southampton, Ph.D. Thesis, 126 p., Southampton.
- [23] Melekoğlu, A. 2008. A geometric approach to the reflections of regular maps. **Ars Combin.**, 89(3): 355-367.
- [24] Melekoğlu, A. 2009. A new characterization of Wiman surfaces. **Bull. Aust. Math. Soc.**, 80(3): 360-368.
- [25] Melekoğlu, A., Singerman, D. 2008. Reflections of regular maps and Riemann Surfaces. **Rev. Mat. Iberoam.**, 24 (3): 921-939.
- [26] Melekoğlu, A., Singerman, D. 2015. The structure of mirrors on Platonic surfaces. **Arxiv.**, 1501.04774v1 [math.CO].
- [27] Silverman, R.A. 1972. Introductory complex analysis. Dover Publications, New York.
- [28] Singerman, D. 1974. Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group. **Math. Ann.**, 210: 17-32.
- [29] Stillwell, J. 1992. Geometry of surfaces. Springer-Verlag, 216 p., New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo.
- [30] West, D.B. 2001. Introduction to graph theory. Prentice Hall, 588 p., India.
- [31] Wiman, A. 1895. Über die hyperelliptischen curven und diejenigen vom geschlechte $p = 3$ welche eindeutigen transformationen in sich zulassen. **Bihang Till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar**, 21: 1-23.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serhan ULUSAN
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul, 07.07.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniv. Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniv. Matematik Böl.
Doktora Öğrenimi : Adnan Menderes Üniv. Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
 - SCI
 - Diğer
- b) Bildiriler
 - Uluslararası
 - Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-posta Adresi : serhan_ulusan@hotmail.com
Tarih : 10.05.2015