T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2015-YL-036

BAZI ÖZEL ALTMODÜLLERİ İLE KARAKTERİZE EDİLEN MODÜLLER

Nila ÖZTEKİN

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN-2015

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nila ÖZTEKİN tarafından hazırlanan Bazı Özel Altmodülleri ile Karakterize Edilen Modüller başlıklı tez, 26.06.2015 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen Edeb. Fak.	
Üye :	Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen Edeb. Fak.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. A. Tuğba GÜROĞLU	CBÜ Fen Edeb. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2015 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

26.06.2015

Nila ÖZTEKİN

ÖZET

BAZI ÖZEL ALTMODÜLLERİ İLE KARAKTERİZE EDİLEN MODÜLLER

Nila ÖZTEKİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2015, 57 sayfa

Birimli ve birleşmeli bir R halkası için M bir sağ R-modül olsun. M nin her tümleyen (complement) altmodülü M nin bir direk toplananı ise M ye bir *CS-modül* denir. Extending modül, CS-modül ve C_1 şartını sağlayan modül denk modüllerdir. Ancak teorinin gelişiminde bu çeşit modüllerin denk olmayan farklı pek çok tanımlamaları vardır. Kapalı (closed) altmodülleri ile karakterize edilen modüller bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır ve hatta bir survey olarak yayınlanmıştır (bakınız [12]). Biz bu çalışmada tümleyen altmodülleri ile karakterize edilen CS-modüller bağlamında farklı tanımları çalışarak aralarındaki ilişkileri inceledik.

Anahtar Sözcükler : Complement altmodül, closed altmodül, extending altmodül, CS-modül, singular altmodül, modül sınıfları.

ABSTRACT

MODULES CHARACTERIZED WITH SOME SPECIAL SUBMODULES

Nila ÖZTEKİN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2015, 57 pages

For an associative ring R with identity, let M be a right R-module. If every complement submodule of M is a direct summand of M, then M is called *CS-module*. Extending module, CS-module and a module which satisfy C_1 property are all equivalent. But in the development of the theory, there are several different definitions of this kind of modules which are not equal. The modules characterized by their closed submodules had been work by some researchers and also published as a survey (See [12]). In this work we study all different definitions that we access them in the sense of CS-modules characterized by complement submodules and give relations among them.

Key Words : Complement submodule, closed submodule, extending submodule, CS-module, singular submodule, classes of modules.

ÖNSÖZ

Çalışmamın her aşamasında bilgilerini esirgemeyen, her zaman her konuda bana yol gösteren ve sabırla yardımcı olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e; ayrıca bu süreç içerisinde katkı ve önerileri ile bana destek veren Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na ve bölüm öğretim elemanlarına teşekkür ederim.
Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme, arkadaşlarıma ve bana bu imkanı sağlayan ülkeme minnettarım.

Nila ÖZTEKİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$B \leq A$	:	B, A modülünün alt modülü
$B \lneqq A$	:	B, A modülünün öz alt modülü
$B \leq_e A$	:	B, A modülünün essential alt modülü
$B \leq_c A$	:	B, A modülünün complement alt modülü
$B \leq_{cl} A$	:	B, A modülünün kapalı (closed) alt modülü
$B \leq_d A$	:	B, A modülünün direk toplananı
$A \oplus B$	:	A ile B modüllerinin direk toplamı
$Im(f)$	:	f nin görüntü kümesi
$Ker(f)$	:	f nin çekirdeği
$Hom_R(B,A)$	:	B den A ya R-homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	:	Sağ R-modül M nin endomorfizma halkası
$\mathscr{T}(M)$	:	M nin Torsion alt modülü
$\mathbf{r}(X)$	:	X in sağ sıfırlayanı
$\mathbf{l}(X)$	:	X in sol sıfırlayanı
$\mathscr{M}$	:	Bütün sağ R-modüllerin sınıfı
$\mathscr{I}$	:	İnjektif R-modüllerin sınıfı
$\mathscr{X}$	:	R-modüllerin herhangi bir sınıfı
$N \trianglelefteq M$	:	N, M nin fully invariant alt modülü

1. GİRİŞ

Extending modül teorisi süreklilik geometrisine (continuous geometry) dayanır. Extending modüllere denk olan CS-modüllerin temeli 1930 lu yıllarda Von Neumann'ın çalışmasına uzanır. Von Neumann'ın süreklilik geometrisi (continuous geometry) kavramı "lattice" manasında kullanılmıştır. Ayrıca buradaki süreklilik terimi topoloji ve analizde kulanıldığı anlamda değildir. Continuous (sürekli) geometriler Noether olmayan regüler halkalar ile koordinelidir ancak biz bu çalışmada konunun bu yönü ile ilgilenmeyeceğiz. Utumi, self-injektif regüler halkaların genelleştirilmesi olarak sürekli regüler halkaları elde etmiştir [34]. Utumi bu durumu herhangi halkalara genişleterek, sonra Jeremy [20], Mohamed ve Bouhy [25], Goel ve Jain [14] bu fikri modüllere taşımışlardır. Utumi "Regüler bir R halkasının sol sürekli (continuous) olması için gerek ve yeter şart $_RR$ nin extending olmasıdır." önermesini ispat etmiştir [34].

1958-1960 yıllarında Goldie [15], gelişmeden bağımsız olarak bölüm halkaları ile ilgili çalışmalarında tümleyenleri (complement) düşündü. Bu durum öğrencisi Hajarnavis için sol CS-halkaları incelemeye ilham kaynağı olmuş ve Chatters ile bir çalışma yayınlamıştır [6].

1982 de Harada [18] ve onun okulu tabir edilen araştırmacılar "lifting modül" kavramına dual olarak "extending modül" terimini kullanmışlardır.

Açık Problem: Bir CS-modülün her direk toplananı CS-modül olurken CS-modüllerin direk toplamı CS olmak zorunda değildir.. Örneğin p bir asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2)$ $\mathbb{Z}$-modül olarak extending dolayısıyla CS-modüldür. Fakat $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ $\mathbb{Z}$-modül olarak extending (CS) modül değildir. (Bakınız: [13], sayfa 56.)

Bu farklı yaklaşımlar içinde Mohamed Müller'in continuous ve quasi-continuous tanımlarındaki C_1 şartının extending modüle denkliği de gelişim içinde önemli yer tutmaktadır. Şöyle ki: "Bir M modülünün C_1 şartını sağlaması için gerek ve yeter şart M nin extending olmasıdır." Bu durumda

M sürekli (continuous) $\Rightarrow$ M yarı-sürekli (quasi-continuous) $\Rightarrow$ M extending [26]

olduğu açıktır.

Şimdi aşağıdaki sınıflandırmayı göz önüne alalım:

(1) M bir CS-modüldür.

(2) M nin her N altmodülü için N nin M deki her tümleyeni M nin bir direk toplananıdır.

(3) M nin her kapalı (closed) altmodülü M nin bir direk toplananıdır.

Benzer şekilde aşağıdaki sınıflandırma da verilebilir:

(1) M bir extending modüldür.

(2) M nin her N altmodülü için N nin M deki her kapanışı M nin bir direk toplananıdır.

(3) M nin her altmodülü M nin bir direk toplananında essentialdır.

Açıkça "Bir modülün extending modül olabilmesi için gerek ve yeter şart o modülün CS-modül olmasıdır." durumu bilinen bir özelliktir. Extending modüller ile ilgili ikinci sınıflandırma [35] da kapsamlı olarak incelenmiştir.

Biz burada denklik sınıflandırmalarından ilkini dikkate alacağız.

Bu çalışmada başlangıç olan ikinci bölümde modül teorideki bazı temel kavramlar ve özellikler verilerek CS-modüllere ait CS-modüller teorisindeki sonraki bölümlerde ihtiyaç olacak bazı özel kavramlar tanımlanmış ve çalışmanın yönünü belirten karakterizasyon teoremi ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, modül sınıflarına göre CS-modüllerin özellikleri istenen sınıflandırma doğrultusunda incelenmiştir. Bunun için [10] çalışmasındaki Tip 1 extending modül ve temel özellikleri çalışılmıştır. Bu bağlamda Tip 1 extending modül ve zayıf Tip 1 extending modül tanımlanmış ve temel özellikler incelenmiştir. Sonrasında literatürde bazı özel modül sınıflarına göre elde edilen Tip 1 extending modüllerin karakterizasyonu incelenmiştir. Dördüncü bölümde CS-modülüne benzer modüller incelenmiştir. Sırasıyla Birkenmeier, G. F., Tercan,

A. nın [3], Celep Yücel, C. nın [4], Celep Yücel, C., Tercan, A. nın [5], Çelik, C. nin [8], Smith, P. F. nın [27], Smith, P. F., Tercan, A. nın [30] ve Takil, F., Tercan, A. nın [32] çalışmaları incelenmiştir. Bu bağlamda özel olarak C_{11}-modül, ECS ve $CESS$ modüller ve benzeri modüller tanımlanmış, genel özellikleri verilmiş ve ayrıca CS-modüller ile olan ilişkileri çalışılmıştır.

Beşinci bölümde, çalışılan CS-modül ve benzeri modüller arasında incelenen farklı tanımlar ile karşılaştırmalar verilmiştir.

2. BAZI TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

2.1. Genel Özellikler

Aksi belirtilmedikçe çalışma boyunca halkalar birimli ve bütün modüller birimsel sağ R-modül olarak alınacaktır. (Bu bölümde verilen tanım ve özelliklerin ayrıntıları için bakınız [1], [13], [17], [22], [23], [26].)

Tanım 2.1.1 R bir halka olsun.
(1) M bir toplamsal değişmeli grup ve
(2) $M \times R \to M$, $(m,r) \mapsto mr$ ile tanımlı bir dönüşüm ve $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ olmak üzere
(a) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$,
(b) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$,
(c) $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$,
özelliklerini sağlıyorsa M ye bir *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir. Eğer R birimli bir halka ve M_R, $m1 = m$ özelliğini sağlıyorsa M ye *birimsel sağ R-modül* denir. Benzer tanım sol R-modüller için de yapılır. Birleşmeli R ve S halkaları için bir M değişmeli grubu sol S-modül ve sağ R-modül oluyorsa M ye *S-R-bimodül* denir ve ${}_SM_R$ ile gösterilir. Eğer R halkası değişmeli ise M hem sağ hem de sol R-modül olur.

Tanım 2.1.2 M ve N, bir R halkası üzerinde iki sağ R-modül olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu her $a, b \in M$ ve $r \in R$ için
(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$
(2) $f(ar) = f(a)r$
koşulları sağlanırsa f ye bir *sağ R-modül homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.3 R bir halka, M bir sağ R-modül ve N, M nin boş olmayan bir altkümesi olsun. N, M nin toplamsal bir altgrubu ve her $r \in R$, $n \in N$ için $nr \in N$

oluyorsa N ye M nin bir *altmodülü* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. 0_M ve M nin kendisi M nin *aşikar* altmodülleridir. M nin kendisinden ve sıfır modülünden farklı olan altmodüllerine M nin *öz altmodülleri* denir.

Tanım 2.1.4 M bir R-modül, M_1 ve M_2, M nin altmodülleri olsun.
$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$
olmak üzere $M_1 + M_2 = M$ ise M bu iki altmodül tarafından *geriliyor* denir. Diğer yandan $M_1 \cap M_2 = 0$ ise M_1 ve M_2 altmodülleri *bağımsızdır* denir. $M_1 \times M_2$ kartezyen çarpım modülünden M ye,
$(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$
şeklinde tanımlanan i kanonik R-homomorfizması için $Im(i) = M_1 \times M_2$ ve $Ker(i) = \{(x, -x) : x \in M_1 \cap M_2\}$ şeklindedir. i nin örten olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2 altmodüllerinin M yi geriyor olması, i nin birebir olması için gerek ve yeter şart ise M_1 ve M_2 altmodüllerinin bağımsız olmasıdır. Eğer i kanonik homomorfizması bir izomorfizma (yani M_1 ve M_2 bağımsız ve M yi geriyor) ise M modülü M_1 ve M_2 altmodüllerinin bir *(iç) direk toplamıdır* denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ şeklinde yazılır. Böylece $M = M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in M$ için $x = x_1 + x_2$ olacak şekilde $x_1 \in M_1$ ve $x_2 \in M_2$ elemanlarının tek türlü var olmasıdır. $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M nin bir M_2 altmodülü var ise M_1 altmodülüne M nin bir *direk toplananı* denir. Aynı zamanda M_2 altmodülü de M nin bir direk toplananıdır.

Tanım 2.1.5 Herhangi A, B ve C modülleri için $B \leq A$ ise
$A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$ (Modülarite Kuralı)
dir.

Tanım 2.1.6 M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Eğer M nin aşikar olmayan hiçbir altmodülü yoksa M ye *basit (simple) modül* denir.

Tanım 2.1.7 M bir R-modül olsun. M nin bütün basit (simple) altmodüllerinin toplamına M nin *sokulu* denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8 M bir R-modül ve Λ indis kümesi olmak üzere $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, M nin basit altmodüllerinin indislenmiş bir kümesi olsun. Eğer M, bu kümenin direk toplamı ise bu durumda $M = \bigoplus_{\Lambda} T_\alpha$, M nin bir *yarıbasit (semisimple)* ayrışımıdır. Eğer M modülü bir yarıbasit ayrışıma sahipse M ye bir *yarıbasit (semisimple) modül* denir. Diğer bir ifade ile yarıbasit modül, basit modüllerin herhangi bir direk toplamıdır. Her basit modülün yarıbasit modül olduğu açıktır. Ayrıca bir M modülü yarıbasittir ancak ve ancak M nin her altmodülü M nin bir direk toplananıdır.

Tanım 2.1.9 Sıfırdan farklı bir M modülünün 0 ve M den başka direk toplananı yoksa M ye *ayrıştırılamaz (indecomposable) modül* denir.

Tanım 2.1.10 M bir sağ R-modül ve K, M nin bir altmodülü olsun. M nin K altmodülüne göre yan kümelerinin (coset) $M/K = \{x+K : x \in M\}$ kümesi, her $r \in R$ ve $x, y \in M$ için
(i) $(x+K)+(y+K) = (x+y)+K$,
(ii) $(x+K)r = xr+K$
biçiminde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir sağ R-modüldür. Toplamsal birim eleman ve ters eleman sırasıyla $K = 0+K$ ve $-(x+K) = -x+K$ biçimindedir. Burada M/K modülüne M nin bir *sağ R-bölüm modülü* denir.

Tanım 2.1.11 M, M', M'' R-modüller olmak üzere $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ homomorfizma dizisine $Imf = Kerg$ olması durumunda M de *tam*dır denir. Son olarak (sonlu ya da sonsuz) bir

$$\dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} \dots$$

homomorfizmalar dizisi her bir M_n de tam ise *tam*dır; yani her bir ardışık f_n, f_{n+1} çifti için $Imf_n = Kerf_{n+1}$ olmalıdır. Ayrıca

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

şeklindeki tam dizilere *kısa tam dizi* denir. Burada f nin monomorfizma ve g nin epimorfizma olduğu açıktır.

Tanım 2.1.12 R bir halka ve U bir sağ R-modül olmak üzere, her bir $\alpha : K \to M$ monomorfizması ve her bir $\beta : K \to U$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} & & U \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, dotted, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan (yani $\phi\alpha = \beta$ olacak şekilde) bir $\phi : M \to U$ homomorfizması var ise U ya *M ye göre injektif (injective) modül (veya U, M-injektif'tir)* denir. Eğer U, bütün sağ R-modüllere göre injektif ise U ya bir *injektif modül* denir. $\{M_i : i \in I\}$, sağ R-modüllerin bir sınıfı olmak üzere her farklı $i, j \in I$ eleman çifti için M_i, M_j-injektif oluyorsa M_i modüllerine *aralarında injektif (relatively injective) modüller* denir.

Teorem 2.1.13 *Bir Q_R modülü için aşağıdaki şartlar denktir:*

(1). *Her $\xi : Q \to B$ monomorfizması parçalanabilirdir (split) (yani $Im(\xi)$, B de bir direk toplanandır).*

(2). *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir:*

$$\begin{tikzcd} & & Q \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, dotted, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

(3). *Her* $\alpha : A \to B$ *monomorfizması için* $Hom(\alpha, 1_Q) : Hom_R(B,Q) \to Hom_R(A,Q)$ *bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.14 Teorem 2.1.13 nin denk koşullarından birini sağlayan bir Q_R modülüne bir *injektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.15 M bir R-modül olsun. M nin bir N altmodülü için N, M nin bir öz altmodülü ve M nin N yi kapsayan başka hiçbir öz altmodülü yoksa N ye M nin bir *maksimal altmodülü* denir.

Tanım 2.1.16 R bir halka ve U bir sağ R-modül olmak üzere her bir $\alpha : M \to N$ epimorfizması ve her bir $\beta : U \to N$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dotted, "\phi"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan (yani, $\alpha\phi = \beta$ olacak şekilde) bir $\phi : U \to M$ homomorfizması var ise U ya M ye göre *projektif (projective) modül* (veya U, *M-projektif* tir) denir. Eğer U, her sağ R-modüle göre projektif ise U ya *projektif modül* denir.

Tanım 2.1.17 M bir R-modül olsun. M nin altmodüllerinin her artan (azalan) $K_1 \leq K_2 \leq ...(K_1 \geq K_2 \geq ...)$ zinciri sonlu adımda sona eriyorsa M ye *artan zincir şartını (ACC) (azalan zincir şartını (DCC)) sağlar* denir. Bir modül altmodülleri için artan zincir şartını sağlıyorsa *Noether modül* adını alır. Bir modül altmodülleri için azalan zincir şartını sağlıyorsa *Artin modül* adını olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.18 M bir sağ R-modül olsun. O zaman her bir $X \subseteq M$ için

$$\mathbf{r}(X) = \{s \in R : \ xs = 0, \text{her } x \in X \text{ için } \}$$

kümesine X in *sağ sıfırlayanı* denir. $X = \{m\}$ ise $\mathbf{r}(m)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\mathbf{r}(X)$, R de bir sağ idealdir. Sol sıfırlayan benzer şekilde tanımlanır.
Diğer yandan, bir $A \subseteq R$ için

$$\mathbf{l}(A) = \{x \in M : \ xa = 0, \text{her } a \in A \text{ için } \}$$

kümesine de A nın *sol sıfırlayanı* denir. $A = \{a\}$ ise $\mathbf{l}(a)$ ile gösterilir. Burada $\mathbf{l}(A)$, M nin bir altmodülür.

Tanım 2.1.19 R bir tamlık bölgesi (R, birimli ve sıfır bölensiz bir halka) ve M bir sağ R-modül olsun.

$$T(M) = \{m \in M : \ \mathbf{r}(m) \neq 0\} = \{m \in M : \ \exists 0 \neq r \in R \text{ için } mr = 0 \ \}$$

kümesi M nin bir alt modülüdür. Bu altmodüle M nin *burulmalı (torsion) altmodülü* denir. Eğer $T(M) = M$ ise M ye *burulmalı (torsion) modül*; eğer $T(M) = 0$ ise M ye *burulmasız (torsion free) modül* denir.

Tanım 2.1.20 R bir halka olsun. Eğer her $r \in R$ için $rar = r$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa R ye *von Neumann regular halka* denir.

2.2. Bazı Özel Altmodüller ve CS-Modül Sınıflandırmaları

Bu bölümde *CS*-modül teorisi için gerekli olan bazı özel altmodüller tanımlanarak çalışmaya yön veren sınıflandırmalar verilecektir.

Tanım 2.2.1 R bir halka, M bir R-modül ve N, M nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. M nin sıfırdan farklı her altmodülü ile N nin arakesiti sıfırdan farklı ise N

ye M nin *esaslı (essential) altmodülü* denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir. Yani N, M nin bir essential altmodülü ise M nin bir K altmodülü için $N \cap K = 0$ olması $K = 0$ olmasını gerektirir. Sıfırdan farklı her modülün kendi içinde bir essential altmodül olduğu açıktır.

Tanım 2.2.2 M bir R-modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. N yi M de essential olarak içeren altmodüllerin ailesi içinde maksimal olan bir K altmodülüne N nin M de bir *kapanışı (closure)* denir. Zorn Lemma ile bir M modülünün her N altmodülü M de bir kapanışa sahiptir.

Tanım 2.2.3 M bir R-modül ve K, M nin bir altmodülü olsun. K nın M de bir öz essential genişlemesi yoksa yani, $K \leq_e L \leq M$ için $K = L$ ise K ya M de *kapalı (closed) altmodül* denir ve $K \leq_{cl} M$ ile gösterilir. Bir M modülünün her kapalı altmodülü M nin bir altmodülünün kapanışı olur.

Tanım 2.2.4 M bir R-modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. $N \cap H = 0$ özelliğine göre M nin H altmodülleri ailesi içinde maksimal olan L altmodülüne N nin M deki *tümleyeni (complementi)* denir. K, M nin bir altmodülü olsun. K, N nin M de bir tümleyeni olacak biçimde M nin bir N altmodülü varsa K ya M de *tümleyen altmodül* denir ve $K \leq_c M$ biçiminde gösterilir.
Açıkça bir M modülünün her altmodülü M de bir tümleyene sahiptir.

Önerme 2.2.5 *M bir modül olsun. M nin N ve L altmodülleri için $N \cap L = 0$ olsun. Bu durumda L nin M de bir K tümleyeni vardır ve $N \subseteq K$ dir.*

İspat. $S = \{X \leq M : N \leq X \text{ ve } X \cap L = 0\}$ kümesini tanımlayalım. $N \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dır. $\{X_i : i \in I\}$, S de bir zincir olsun. S tam sıralıdır.
$U = \bigcup_{i \in I} X_i$ alalım. Herhangi iki $X_i, X_j \in S$ için $X_i \subseteq X_j$ ya da $X_j \subseteq X_i$ olduğundan U bir altmodüldür. Her $i \in I$ için $N \leq X_i$ olduğundan $N \leq \bigcup_{i \in I} X_i$ dir. Her $i \in I$ için $X_i \cap L = 0$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} X_i \cap L = 0$ olup $U \in S$ olur. Yani U, $\{X_i : i \in I\}$ zincirinin

bir üst sınırıdır. Böylece Zorn Lemma ile S nin bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman K ile gösterilirse, $K \cap L = 0$ olduğundan K, L nin M deki bir tümleyenidir. Ayrıca S nin tanımından $N \subseteq K$ dır. $\square$

Önerme 2.2.6 *M bir R-modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. K, M de N nin bir tümleyeni ise $N \oplus K$, M nin bir essential altmodülüdür.*

İspat. M nin sıfırdan farklı bir L altmodülü için $(N \oplus K) \cap L = 0$ olsun. K, N nin M de tümleyeni olduğundan $N \cap K = 0$ olacak şekilde K, M de maksimaldir. Bu durumda $N \cap (K+L) \neq 0$ olur. O zaman $0 \neq n \in N \cap (K+L)$ alalım. $n = k+l$ olacak şekilde $k \in K$, $l \in L$ vardır. Böylece $n-k = l \in (N \oplus K) \cap L = 0$ olduğundan $l = 0$ dır. Diğer yandan $n = k \in N \cap K = 0$ yani $n = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $(N \oplus K) \cap L \neq 0$ dır. Yani, $N \oplus K \leq_e M$ dir. $\square$

Lemma 2.2.7 *R bir halka ve M, sağ R-modül olsun. $L \subseteq K$ olmak üzere M nin L ve K altmodülleri verilsin. Eğer L, K nın bir tümleyen altmodülü ve K, M nin bir tümleyen altmodülü ise o zaman L, M nin bir tümleyen altmodülü olur.*

İspat. K, M de K' nün tümleyeni ve L, K da L' nün tümleyeni olacak şekilde K' ve L' altmodülleri vardır. Buradan $L \cap (K'+L') = 0$ dır (Elemanter).

İddia: L, $K'+L'$ nün M de tümleyenidir. Yani $L \cap (K'+L') = 0$ olacak şekilde L, M de maksimaldir.

$L \subseteq N \subseteq M$ için $N \cap (K'+L') = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $(N+K') \cap L' = 0$ dır. Diğer yandan, $L \subseteq (N+K') \cap K$ dır. Buradan $[(N+K') \cap K] \cap L' = (N+K') \cap (K \cap L') = (N+K') \cap L' = 0$ olur. O zaman $L = (N+K') \cap K$ olmalıdır. Böylece dağılma kuralından $(N+K) \cap K' = 0$ dır. Buradan $K = N+K$ olur ki $N \subseteq K$ bulunur. O zaman $N \subseteq K$ ve $N \cap L' = 0$ ise $L = N$ dir. O halde L, $K'+L'$ nün M de bir tümleyenidir. Böylece L, M de bir tümleyendir. $\square$

Tanım 2.2.8 M sıfırdan farklı bir R-modül olmak üzere M nin sıfırdan farklı her altmodülü M de essential ise M ye *düzenli (uniform) modül* denir. Buna denk olarak, M nin sıfırdan farklı her iki altmodülünün arakesiti sıfırdan farklıdır.

Örnek 2.2.9 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası kendi üzerinde sağ $\mathbb{Z}$-modül olarak düzenli (uniform) modüldür.

Örnek 2.2.10 Her cisim kendi üzerinde sağ modül olarak düzenli (uniform) modüldür.

Tanım 2.2.11 R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Eğer M sıfırdan farklı altmodüllerinin bir sonsuz direk toplamını içermez ise M ye *sonlu düzgün boyuta (ya da Goldie sonlu boyuta) sahiptir* denir. Bu durumda M bir düzgün U altmodülünü içerir. Bundan başka n bir pozitif tam sayı ve U_i $(1 \leq i \leq n)$ ler M nin (lineer) bağımsız düzgün altmodülleri olmak üzere $U_1 \oplus U_2 \oplus ...U_n$, M nin bir essential altmodülüdür. Buradaki n tam sayısına M nin *düzgün boyutu (ya da Goldie boyutu)* denir.

Tanım 2.2.12 M bir R-modül olsun. M nin her kapalı altmodülü M nin bir direk toplananı ise M ye *extending modül* denir.

Tanım 2.2.13 M bir R-modül olsun. M nin her tümleyen altmodülü M nin bir direk toplananı ise M ye *CS-modül* denir. Burada CS, "complement summand" anlamındadır.

Tanım 2.2.14 M bir modül olsun. M nin her altmodülü bir direk toplananında essential ise M ye (C_1) *şartını sağlar* denir.

Şimdi bir modülün "kapalı" ve "tümleyen" altmodüllerine göre aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir. Açık problem ile birlikte bu sınıflandırmalar teorinin gelişiminde çalışmaları farklı yönlere götürmüştür.

Teorem 2.2.15 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki özellikler birbirine denktir:*

(1). *M, extending modüldür.*

(2). *M, CS-modüldür.*

(3). *M nin her altmodülü bir direk toplananda essentialdır (M,* C_1 *şartını sağlar).*

Teorem 2.2.16 *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *M bir extending modüldür.*

(2). *M nin her N altmodülü için N nin M deki kapanışı M nin bir direk toplananıdır.*

(3). *M nin her altmodülü M nin bir direk toplananında essentialdır (M,* C_1 *şartını sağlar).*

Teorem 2.2.17 *Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *M bir CS-modüldür.*

(2). *M nin her N altmodülü için N nin M deki tümleyeni M nin bir direk toplananıdır.*

(3). *M nin her kapalı altmodülü M nin bir direk toplananıdır (M extending modüldür).*

Her düzenli (uniform), basit (simple) modül extending dolayısıyla *CS*-modüllere açık örneklerdir.

Biz bu tezde önceki çalışmalardan farklı olarak daha çok Teorem 2.2.17 sınıflandırması üzerinde çalışacağız.

3. MODÜL SINIFLARINA GÖRE CS-MODÜLLER

Bu bölümde [10] çalışmasını Teorem 2.2.17 sınıflamasını göz önüne alarak inceleyeceğiz.

3.1. Tip 1 Extending Modüller ve Bazı Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1 R-modüllerin $\mathscr{X}$ sınıfı, 0 modülünü içeren ve izomorfizmalar altında kapalı olan R-modüllerin bir ailesini göstersin. Burada izomorfizmalar altında kapalı olmaktan kasıt bir R-modül M, $\mathscr{X}$ sınıfına ait ise M ye izomorf olan her modül de $\mathscr{X}$ sınıfına aittir anlamındadır. $\mathscr{X}$ sınıfına ait olan bir modüle bir *$\mathscr{X}$-modül* denir. M bir R-modül olmak üzere M nin $\mathscr{X}$ e ait bir N-altmodülüne, M nin bir *$\mathscr{X}$-altmodülü* denir.

Tanım 3.1.2 M bir R-modül ve $\mathscr{X}$, R-modüllerin bir sınıfı olsun. N, M nin bir $\mathscr{X}$-altmodülü olmak üzere N nin M deki her tümleyeni M nin bir direk toplananı ise M ye *tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül* denir.

Önerme 3.1.3 *Her CS-modül bir Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.*

İspat. M bir CS-modül ve N, M nin bir $\mathscr{X}$-altmodülü olsun. Zorn Lemma ile N nin M de bir K tümleyeni vardır. O zaman K, M de bir tümleyen altmodül olur. Hipotezden K, M nin bir direk toplananıdır. Böylece M, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül olur. □

Önermenin karşıtı her zaman doğru değildir.

Lemma 3.1.4 *$\mathscr{M}$, bütün R-modüllerin sınıfı olsun. M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1). *M, CS-modüldür.*

(2). *M, Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modüldür.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ M bir CS-modül olsun. Önerme 3.1.3 den, M nin Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modül olduğu açıktır.
$(ii) \Rightarrow (i)$ M bir Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modül ve K, M nin bir tümleyen altmodülü olsun. Bu durumda K, M nin bir N altmodülünün tümleyeni olur. Bu N altmodülü $\mathscr{M}$ sınıfına ait olduğundan ve böylece K, M nin bir $\mathscr{M}$-altmodülünün tümleyeni olacağından hipotez gereği K, M nin bir direk toplananı olur. O halde M bir CS-modüldür. □

Lemma 3.1.5 *$\mathscr{X}$ ve $\mathscr{Y}$, R-modüllerin sınıfları ve $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ olsun. O zaman Tip 1 $\mathscr{Y}$-extending modül, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül olur.*

İspat. M bir Tip 1 $\mathscr{Y}$-extending modül ve N, M nin $\mathscr{X}$-extending altmodülü olsun. N nin M de tümleyeni K olsun. $N \in \mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ olduğundan K, bir $\mathscr{Y}$-altmodülünde bir tümleyen olur. Hipotezden K, M nin direk toplananıdır. Böylece M, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül olur. □

Şimdi Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modülün direk toplananının da Tip 1 $\mathscr{X}$-extending olduğunu ispat etmek için gerekli olan aşağıdaki temel özelliği verebiliriz (bakınız [9, Lemma 1.2.6]).

Lemma 3.1.6 *$M = M_1 \oplus M_2$ bir R-modül, N ve K, M_1 in altmodülleri olsun.*
K, N nin M_1 de tümleyenidir $\Leftrightarrow$ $K \oplus M_2$, N nin M de tümleyenidir.

İspat. [[9], Lemma 1.2.6]. □

Lemma 3.1.7 *$\mathscr{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. Tip 1 $\mathscr{X}$-extending bir modülün her direk toplananı da bir Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.*

İspat. M bir R-modül olmak üzere M nin M_1 ve M_2 altmodülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ ve M, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül olsun. N, M_1 in bir $\mathscr{X}$-altmodülü olmak üzere K, N nin M_1 de bir tümleyeni olsun. Lemma 3.1.6 dan $K \oplus M_2$, N nin M de bir tümleyeni olur. Hipotezden $K \oplus M_2$, M nin bir direk toplananı olur. Bu durumda $M = K \oplus M_2 \oplus T$ olacak şekilde M nin bir T altmodülü vardır. Buradan modülarite kuralından, $M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (K \oplus M_2 \oplus T) = K \oplus [M_1 \cap (M_2 \oplus T)]$ dir. O halde K, M_1 in bir direk toplananı olur ve böylece M_1, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür. $\square$

Lemma 3.1.8 *M bir R-modül, K, M nin bir altmodülü ve L, K nın M de bir tümleyeni olsun. K nın M de kapalı olması için gerek ve yeter koşul K nın M de L nin bir tümleyeni olmasıdır.*

İspat. K, M de bir kapalı altmodül olsun. H, M nin $H \cap L = 0$ ve $K \subseteq H$ olacak şekilde bir altmodülü olsun. N, H nin $K \cap N = 0$ olacak şekilde bir altmodülü olsun. O zaman $K \cap (N \oplus L) = 0$ dır. Gerçekten, $x \in K \cap (N \oplus L)$ alalım. Böylece $x \in K$ ve $x \in (N \oplus L)$ olur. $x = n + l$ olacak şekilde $n \in N$, $l \in L$ vardır. $x - n = l \in H \cap L = 0$ olduğundan $l = 0$ yani, $x = n \in K \cap N = 0$ ve buradan $x = 0$ bulunur. Bu durumda L, K nın bir tümleyeni olduğundan $L = N \oplus L$ olur ve buradan $N = 0$ bulunur. Böylece $K \leq_e H$ olur. Hipotezden K, M de kapalı olduğu için $K = H$ olur. Böylece K, L nin M de bir tümleyenidir.
Karşıt olarak K, L nin M de bir tümleyeni olsun. O zaman $K \oplus L \leq_e M$ olur. K, M de tümleyen olacağından bu durumda K, M de kapalı olur. $\square$

3.2. Bazı Özel Sınıflara Göre Tip 1 Extending Modüller

Bu bölümde literatürde bazı özel modül sınıflarına göre elde edilen Tip 1 extending modüllerin karakterizasyonları incelenecektir.

Lemma 3.2.1 *$\mathscr{I}$, injektif R-modüllerin sınıfı olmak üzere her R-modül Tip 1 $\mathscr{I}$-extending modüldür.*

İspat. N, M nin bir injektif altmodülü ve K, N nin M de tümleyeni olsun. N injektif altmodül olduğundan M nin bir direk toplananıdır. Yani, $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M nin bir N' altmodülü vardır. Diğer yandan, [6, Lemma 5] gereğince

$M = N \oplus N''$ ve $K \subseteq N''$ olacak şekilde M nin bir N'' altmodülü vardır. Burada $N \oplus K$, M de essential altmodül olduğundan $K = (K \oplus N) \cap N'' \leq_e M \cap N'' = N''$ yani K, N'' de essential altmodül olur. Ancak K, N nin tümleyeni olarak M de bir tümleyen altmodül, böylece M kapalı altmodül olduğundan $K = N''$ elde edilir. Öyle ise K, M nin bir direk toplananı olur. Buradan M, Tip 1 $\mathscr{I}$-extending altmodüldür. $\square$

$\mathscr{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olmak üzere bir $\mathscr{X}$-altmodülünü essential olarak içeren R-modüllerin sınıfını $\mathscr{X}^e$ ile gösterelim. $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X}^e$ olduğu açıktır. Gerçekten bir $\mathscr{X}$ sınıfı için $N \in \mathscr{X}$ ise $N \leq_e N$ olduğundan $N \in \mathscr{X}^e$ olur. Böylece $\mathscr{X}^e \neq \varnothing$ dır.

Lemma 3.2.2 *$\mathscr{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. M nin Tip 1 $\mathscr{X}$-extending olması için gerek ve yeter koşul M nin Tip 1 $\mathscr{X}^e$-extending olmasıdır.*

İspat. M, Tip 1 $\mathscr{X}^e$-extending olsun. $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X}^e$ olduğundan Lemma 3.1.5 gereğince M nin Tip 1 $\mathscr{X}$-extending olduğu açıktır.
Tersine M, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül ve N, M nin bir $\mathscr{X}^e$-altmodülü olsun. K, N nin M de bir tümleyeni olsun. $N \in \mathscr{X}^e$ olduğundan $N_1 \leq_e N$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathscr{X}$ altmodülü vardır. Buradan $K \cap N = 0$ olduğundan $K \cap N_1 = 0$ olur. Bu durumda K, N_1 in tümleyeni olur. Gerçekten K nın $N_1 \cap K = 0$ özelliğine göre maksimal olduğunu gösterelim. $K' \cap N_1 = 0$ olacak şekilde $K \leq K' \leq M$ var olduğunu kabul edelim. $N_1 \leq_e N$ olduğundan $K' \cap N = 0$ olur. Öyle ise $K = K'$ olur. O halde K, N nin M de bir tümleyenidir. Hipotezden K, M nin bir direk toplananı olduğundan M, bir Tip 1 $\mathscr{X}^e$-extending modül olur. $\square$

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\mathscr{X}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ R-modül sınıflarını göz önüne alalım.
$\mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_n = \{M : M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n, M_i \in \mathscr{X}_i, 1 \leq i \leq n\}$ kümesi de bir R-modül sınıfını gösterir. $\mathscr{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. $\mathscr{X}$-altmodüllerin sonlu

sayıdaki direk toplamları olan R-modüllerin sınıfı $\mathscr{X}^{\oplus}$ ile gösterilir. Yani $\mathscr{X}^{\oplus} = \{M : M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n, M_i \in \mathscr{X}, 1 \leq i \leq n\}$ şeklindedir. Böylece aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir.

Teorem 3.2.3 *$I = \{i : 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}\}$ ve M bir R-modül olsun. O zaman M nin Tip 1 $(\mathscr{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{X}_n)$-extending olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için Tip 1 $\mathscr{X}_i$-extending olmasıdır.*

Sonuç 3.2.4 *$\mathscr{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı ve M bir R-modül olsun. M nin Tip 1 $\mathscr{X}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 1 $\mathscr{X}^{\oplus}$-extending olmasıdır.*

Bu sonuç uniform ve uniform boyuta sahip özel modül, basit ve Artin modül sınıflarında aşağıdaki biçimde uygulanabilir:

Önerme 3.2.5 *$\mathscr{U}_1$ ve $\mathscr{U}$ sırasıyla uniform ve sonlu boyuta sahip R-modüllerin sınıfını göstersin. M bir R-modül olmak üzere M nin Tip 1 $\mathscr{U}$-extending olması için gerek ve yeter koşul Tip 1 $\mathscr{U}_1$-extending olmasıdır.*

İspat. Açıkça $\mathscr{U}_1 \subseteq \mathscr{U}$ ve $\mathscr{U}$ sınıfındaki her modül uniform modüllerin bir sonlu direk toplamı olan essential bir altmodüle sahiptir. O zaman Lemma 3.1.5 ile Tip 1 $\mathscr{U}$-extending modül, Tip 1 $\mathscr{U}_1$-extending olur.
Karşıt olarak M, Tip 1 $\mathscr{U}_1$-extending olsun. Sonuç 3.2.4 ile M, Tip 1 $\mathscr{U}_1^{\oplus}$-extending modüldür. Buradan Lemma 3.2.2 den M, $(\mathscr{U}_1^{\oplus})^e$-extending bulunur. $(\mathscr{U}_1^{\oplus})^e = \mathscr{U}$ olduğundan M, Tip 1 $\mathscr{U}$-extending modüldür. □

Önerme 3.2.5 in bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.2.6 *$\mathscr{C}_1$ ve $\mathscr{A}$ sırasıyla basit ve Artin R-modüllerin sınıfını göstersin. Bir R-modül M nin Tip 1 $\mathscr{A}$-extending olması için gerek ve yeter şart Tip 1 $\mathscr{C}_1$-extending olmasıdır.*

İspat. $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{A}$ olduğundan Tip 1 $\mathscr{A}$-extending modül Tip 1 $\mathscr{C}_1$-extending olur. Karşıt olarak M bir Tip 1 $\mathscr{C}_1$-extending modül olsun. Sonuç 3.2.4 ile M, Tip 1 $\mathscr{C}_1^{\oplus}$-extending olur. Buradan Lemma 3.2.2 ile M, Tip 1 $(\mathscr{C}_1^{\oplus})^e$-extending modüldür. Diğer yandan, [22, Teorem 6.6.4] gereğince $\mathscr{A} \subseteq (\mathscr{C}_1^{\oplus})^e$ olduğundan M, Tip 1 $\mathscr{A}$-extending modül olur. □

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere $(1 \leq i \leq n)$ için $\mathscr{X}_i$ ler R-modüllerin sınıfını göstersin.

$\mathscr{X}_1 ... \mathscr{X}_n = \{M : 0 = M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq ... \leq M_n = M, M_i/M_{i-1} \in \mathscr{X}_i, 1 \leq i \leq n\}$ ile tanımlı $\mathscr{X}_1 ... \mathscr{X}_n$, R-modüllerin bir sınıfı olacaktır. $\mathscr{X}_i = \mathscr{X}$ olması durumunda $\mathscr{X}_1 ... \mathscr{X}_n = \mathscr{X}^n$ ve $\mathscr{X}^w = \bigcup\limits_{n \geq 1} \mathscr{X}^n$ ile gösterilmiştir.

Teorem 3.2.7 *n bir pozitif tam sayı ve her $1 \leq i \leq n$ için $\mathscr{X}_i$ ler altmodüllere göre kapalı R-modüllerin sınıfı olsun. O zaman M bir R-modül olmak üzere M nin Tip 1 $(\mathscr{X}_1 ... \mathscr{X}_n)$-extending olması için gerek ve yeter şart her $1 \leq i \leq n$ için Tip 1 $\mathscr{X}_i$-extending olmasıdır.*

İspat. $\mathscr{X}_i \subseteq \mathscr{X}_1 ... \mathscr{X}_n$ olduğundan Lemma 3.1.5 gereğince bir yön açıktır. Tersine her $1 \leq i \leq n$ için M, Tip 1 $\mathscr{X}_i$-extending modül olsun. n üzerinde tümevarım ile M nin Tip 1 $(\mathscr{X}_1 ... \mathscr{X}_n)$-extending olduğunu gösterelim. $n = 2$ olsun. N, M nin bir $(\mathscr{X}_1 \mathscr{X}_2)$-altmodülü olsun. O zaman $N_1 \in \mathscr{X}_1$, $\frac{N}{N_1} \in \mathscr{X}_2$ olacak şekilde N nin bir $N_1 \leq N$ altmodülü vardır. K nın N nin M de bir tümleyeni olduğunu kabul edelim. L', N_1 in N deki tümleyeni olsun. $N \cap L' = 0$ olması L' yü $\frac{N}{N_1}$ içine gömer. Ancak $L' \hookrightarrow \frac{N}{N_1} \in \mathscr{X}_2$ olduğundan $L' \in \mathscr{X}_2$ olur. Aynı zamanda $L' \oplus N_1 \leq_e N$ olduğundan açıkça N nin bir tümleyeni, $L' \oplus N_1$ in de bir tümleyeni olur. Böylece K, $L' \oplus N_1$ in M de bir tümleyeni olur. Buradan $N \oplus L' \in \mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2$ ve $N_1 \oplus L' \leq_e N$ olduğundan $N \in (\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2)^e$ olur. Böylece $\mathscr{X}_1 \mathscr{X}_2 \subseteq (\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2)^e$ bulunur. M, $1 \leq i \leq 2$ için Tip 1 $\mathscr{X}_i$-extending olduğundan Teorem 3.2.3 den M, Tip 1 $(\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2)$-extending ve böylece Teorem 3.2.2 gereğince Tip 1 $(\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2)^e$-extending olur. O zaman $\mathscr{X}_1 \mathscr{X}_1 \subseteq (\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2)^e$

olduğundan Lemma 3.1.5 den M, Tip 1 $(\mathscr{X}_1\mathscr{X}_2)$-extending bulunur. □

3.3. Singular Altmodül ve Tip 1 Extending Modüller

M bir R-modül olsun. M nin
$Z(M) = \{m \in M : R$ nin bir essential E sağ ideali için $mE = 0\}$ ile tanımlı altmodülüne M nin *singular altmodülü* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *singular modül*, $Z(M) = 0$ ise M ye *non-singular modül* denir. M nin $Z(M)$ singular altmodülü için $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$ olacak şekilde M nin $Z_2(M)$ altmodülüne M nin *ikinci (second) singular altmodülü (Goldie burulmalı (torsion) altmodülü)* denir. Bundan başka $Z_2(M)$, M nin bir kapalı (closed) altmodülüdür. Eğer $Z_2(M) = M$ ise M ye *Goldie burulmalı modül*, $Z_2(M) = 0$ ise M ye *Goldie burulmasız (torsion free) modül* denir. Ayrıca $Z(M) = 0$ ise M Goldie burulmasız modül olur. Yani, non-singüler bir modül Goldie burulmasızdır.

$\mathscr{S}$ ve $\mathscr{T}_G$ sırasıyla singular ve Goldie burulmalı R-modüllerin sınıfını göstersin. $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{G}} \subset \mathscr{S}^e$ olduğundan M nin Tip 1 $\mathscr{S}$-extending olması için gerek ve yeter şart M nin Tip 1 $\mathscr{T}_G$-extending olmasıdır (Bakınız Lemma 3.2.2 ve Lemma 3.1.5).

Önerme 3.3.1 *M nin Tip 1 $\mathscr{T}_G$-extending modül olması için gerek ve yeter şart $Z_2(M)$ extending ve $Z_2(M)$, M' injektif olacak şekilde M nin bir M' altmodülü için $M = Z_2(M) \oplus M'$ olmasıdır.*

İspat. $M = Z_2(M) \oplus M'$, $Z_2(M)$ extending ve $Z_2(M)$, M'-injektif olduğunu kabul edelim. N, M nin bir $\mathscr{T}_G$-altmodülü ve K, M de N nin bir tümleyeni olsun. O zaman $K \oplus N$, M de essential altmodüldür. Aynı zamanda $N \leq Z_2(M)$ dir. Modülarite kuralından $(N \oplus K) \cap Z_2(M) = N \oplus (K \cap Z_2(M))$ dir.
Buradan $(N \oplus K) \cap Z_2(M)$, $Z_2(M)$ de essential olur. Şimdi L, $K \cap Z_2(M)$ nin K da bir tümleyeni olsun. Buradan $(K \cap Z_2(M)) \oplus L$, K da essential ve böylece $N \oplus (K \cap Z_2(M)) \oplus L \leq_e N \oplus K \leq_e M$ olduğundan ve essential olma özelliğinin geçişliğinden $N \oplus (K \cap Z_2(M)) \oplus L$, M de essential olur. $N \oplus (K \cap Z_2(M))$, $Z_2(M)$ de

essential olduğundan $Z_2(M) \cap L = 0$ dır. $Z_2(M)$, M'-injektif olduğundan genelliği bozmaksızın $L \subseteq M'$ alınabilir. Bundan başka $Z_2(M) \oplus L$, M de essentialdır. Böylece $L = (Z_2(M) \oplus L) \cap M'$ olduğundan $L \leq_e M'$ olur. Fakat $L \leq_{cl} K \leq_{cl} M$ olduğundan $L \leq_{cl} M$ olur ve böylece $L = M'$ bulunur. Böylece M', K nın bir altmodülü olur. Yani $M' \leq K$ dır.

$K = M \cap K = (Z_2(M) \oplus M') \cap K = M' \oplus (Z_2(M) \cap K)$ olur. Böylece $Z_2(M) \cap K$, K da kapalı olur ve buradan geçişlilik gereği $Z_2(M) \cap K$, M de kapalı bulunur. Böylece $Z_2(M) \cap K$, $Z_2(M)$ de kapalı olur.

Diğer yandan $Z_2(M)$ extending olduğu için $Z_2(M) \cap K$, $Z_2(M)$ nin bir direk toplananıdır. O halde K, M nin bir direk toplananıdır. O halde M, Tip 1 $\mathscr{T}_G$-extending modül olur.

Tersine M bir Tip 1 $\mathscr{T}_G$-extending modül olsun. K, $Z_2(M)$ nin M de bir tümleyeni olsun. Hipotezden K, M nin bir direk toplananı olur. $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' altmodülü vardır. Şimdi $Z_2(M) = Z_2(K) \oplus Z_2(K') = 0 \oplus Z_2(K') \subseteq K'$. Diğer yandan $K \oplus Z_2(M)$, $M = K \oplus K'$ de essentialdır ve $Z_2(M) = Z_2(M) \cap M = Z_2(M) \cap (K \oplus K') = Z_2(M) \oplus (K \cap K') = K' \cap (K \oplus Z_2(M))$ olur. Böylece $Z_2(M) = [K \oplus Z_2(M)] \cap K' \leq_e M \cap K' = K'$ olur. Fakat $Z_2(M)$, M de closed olduğundan $Z_2(M) = K'$ yani $M = Z_2(M) \oplus K$ bulunur. M Tip 1 $\mathscr{T}_G$-extending olduğundan $Z_2(M)$ Tip 1 $\mathscr{T}_G$-extending böylece $Z_2(M)$, extending olur. Şimdi $Z_2(M)$ nin K-injektif olduğunu gösterelim. N nin M nin bir altmodülü ve

$N \cap Z_2(M) = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman N, $Z_2(M)$ nin M de bir L tümleyeninin altmodülüdür. Hipotezden L, M nin bir direk toplananıdır. M nin bir L' altmodülü için $M = L \oplus L'$ yazalım. $Z_2(M) = Z_2(L) + Z_2(L') = Z_2(L') \subseteq L'$ olur. $L' = L' \cap M = L' \cap [Z_2(M) \oplus K] = Z_2(M) \oplus (L' \cap K)$ olur. [19, Lemma 5] gereğince $Z_2(M)$, K-injektif modül olur. □

Mod-R, sağ R-modüller kategorisinde Goldie burulmalı teori için $\mathscr{T}$, *torsion* (burulmalı) R-modüllerin sınıfını, $\mathscr{F}$ burulmasız modüllerin yani non-singular

R-modüllerin sınıfını göstersin. Buna göre Tip 1 $\mathscr{F}$-extending modüller için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.2 *M bir R-modül olsun. M nin Tip 1 $\mathscr{F}$-extending olması için gerek ve yeter şart M nin bir M' extending altmodülü için $M = Z_2(M) \oplus M'$ olmasıdır.*

İspat. M Tip 1 $\mathscr{F}$-extending modül olsun. N, $Z_2(M)$ nin M de bir tümleyeni olsun. O zaman $N \cap Z_2(M) = 0$ dır. Buradan N, burulmasız olur. Zorn Lemma ile $Z_2(M)$, M de N nin bir K tümleyen altmodülünde içerilir. Hipotezden K, M nin bir direk toplananıdır. Yani $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' altmodülü vardır. $N \oplus Z_2(M)$, M de essential olduğundan $(N \oplus Z_2(M)) \cap K$, K da essential olur. Fakat $Z_2(M) = Z_2(M) \oplus (N \cap K) = (Z_2(M) \oplus N) \cap K$ olduğundan $Z_2(M)$, K da essential olur. Ancak $Z_2(M)$, M nin bir kapalı altmodülü olduğundan $Z_2(M)$, K da kapalı olur. O halde $Z_2(M) = K$. Böylece $M = Z_2(M) \oplus K'$ yazılır. Şimdi K' modülünün extending olduğunu gösterelim. Lemma 3.1.7 den K' de Tip 1 $\mathscr{F}$-extending modüldür. $K' \in \mathscr{F}$ olduğundan K' extending modül olur.

Tersine N, M nin bir $\mathscr{F}$-altmodülü olsun. K nın, N nin M de bir tümleyeni olduğunu kabul edelim.

İddia: $N \cap (K + Z_2(M)) = 0$ dır. $N \cap (K + Z_2(M)) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $0 \neq x = y + z$, $y \in K$, $z \in Z_2(M)$ ve $x \in N$ olsun. O zaman $zE \subseteq Z(M)$ olacak şekilde R nin bir essential E sağ ideali vardır. Burada $xE \neq 0$ dır. Böylece $xe \neq 0$ olacak şekilde $e \in E$ vardır. $zE \subseteq Z(M)$ olduğundan $zeF = 0$ olacak şekilde R nin bir F essential sağ ideali vardır. $xe \neq 0$ olduğundan $xeF \neq 0$ olur. Böylece $f \in F$ için $0 \neq xef = yef + zef = yef \in K \cap N = 0$ dır. . Bu bir çelişkidir. Böylece $N \cap (K + Z_2(M)) = 0$ olmalıdır. Fakat K, $K \cap N = 0$ özelliğine göre maksimal olduğundan $K = K + Z_2(M)$ yani $Z_2(M) \subseteq K$ olur. Buradan modülarite kuralı ile $K = K \cap M = K \cap (Z_2(M) \oplus M') = Z_2(M) \oplus (K \cap M')$ bulunur. Şimdi K, M de tümleyen olduğundan K, M de kapalı olur. O halde kapalı olma özelliğinin geçişliği gereği $K \cap M'$, M' de kapalıdır. Hipotezden M' extending olduğu için $K \cap M'$, M'

nün direk toplananı olur. Buradan $M' = (K \cap M') \oplus M''$ olacak şekilde $M'' \leq M'$ vardır. $M = Z_2(M) \oplus M' = Z_2(M) \oplus (K \cap M') \oplus M'' = K \oplus M''$ olur. Böylece M, Tip 1 $\mathscr{F}$-extending modül olarak bulunur.

□

Şimdi artan zincir şartları ile bazı karakterizasyonlar için aşağıdaki tanımı verebiliriz:

M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $\underline{r}(m) = \{r \in R : mr = 0\}$ verilsin. Diğer yandan $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ bir M modülünün altmodüllerinin bir ailesi olsun. Eğer her $F \subseteq \Lambda$ sonlu altkümesi için $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ direk toplam ve $\sum\limits_{\lambda \in F} X_\lambda$, M nin bir direk toplananı ise $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ailesine M nin bir *yerel direk toplananı (local summand)* denir.

Lemma 3.3.3 *M bir R-modül olsun. R, $m \in M$ için $\underline{r}(m)$ biçimindeki sağ idealler üzerinde artan zincir şartını (ACC) sağlarsa M nin her yerel direk toplananı M de kapalı olur.*

Lemma 3.3.4 *$m \in M$ için R halkası $\underline{r}(m)$ biçimindeki sağ idealler üzerinde ACC şartını sağlamak üzere M bir R-modül olsun. M bir Tip 1 U-extending modül olduğunu kabul edelim. O zaman M uniform altmodüllerinin bir direk toplamıdır ancak ve ancak M nin her sıfırdan farklı altmodülü bir uniform altmodül içerir.*

İspat. Gereklilik yönü açıktır.

Tersine, M nin sıfırdan farklı her altmodülü bir uniform altmodül içerdiğini kabul edelim. U, M nin bir uniform altmodülü ve W, U nun M de bir tümleyeni olsun. Hipotezden, $M = W \oplus W'$ olacak şekilde M nin bir W' altmodülü vardır. Diğer yandan $U \oplus W$, M de essentialdır ve W, M de kapalı olacağından $(U \oplus W)/W$, M/W nın bir essential altmodülüdür. Buradan M/W uniformdur. $M/W \cong W'$ olduğundan W' uniform olur (Bakınız [13]). Böylece M bir uniform direk toplanana sahiptir. Zorn Lemma ile $i \in I$ için her bir M_i altmodülü M nin bir uniform direk toplananı olmak üzere M, M nin bir $\{M_i : i \in I\}$ *maksimal yerel toplananı*nı içerir.

Şimdi $N = \bigoplus_{I} M_i$ olsun. [13, Lemma 3.18] ile N, M nin bir kapalı altmodüldür. Eğer N, M de essential ise o zaman $N = M$ dir. N nin M de essential olmadığını kabul edelim. C, $N \cap C = 0$ şartına göre M nin bir uniform altmodülü ve B, M de $N \subseteq B$ olacak şekilde C nin bir tümleyeni olsun. M, Tip 1 U-extending hipotezinden B, M nin bir direk toplananıdır. Böylece $M = B \oplus B'$ olacak şekilde M nin bir B' altmodülü vardır. Yukarıdaki argümente benzer şekilde B' uniformdur. Böylece $\{M_i : i \in I\} \cup \{B'\}$, M nin bir yerel toplananı olur. Ancak bu durum N nin maksimalliği ile çelişir. O halde $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ dir. □

Lemma 3.3.5 *M sonlu uniform boyutlu bir R-modül olsun. O zaman, M nin extending modül olması için gerek ve yeter şart M nin bir Tip 1 U-extending modül olmasıdır.*

İspat. Açıktır. □

Lemma 3.3.6 *R bir tamlık bölgesi ve $\mathscr{U}$, sonlu uniform boyuta sahip R-modüllerin sınıfını göstersin. M, sıfırdan farklı injektif altmodül içermeyen bir burulmasız Tip 1 $\mathscr{U}$-extending modül olsun. O zaman M sonlu uniform boyutludur.*

Teorem 3.3.7 *R bir tamlık bölgesi ve $\mathscr{U}$ sonlu uniform boyutlu R-modüllerin sınıfı olsun. O zaman burulmasız R-modül M extending modüldür ancak ve ancak M, Tip 1 $\mathscr{U}$-extending modüldür.*

3.4. Zayıf Tip 1 Extending Modüller

Bu bölümde daha önce [10] çalışmasındaki temel terminoloji kullanılarak [11] makalesi incelenmiştir.

Tanım 3.4.1 $\mathscr{X}$, R-modüllerin bir sınıfı ve M, bir sağ R-modül olsun. M nin her $\mathscr{X}$-altmodülü N için M nin bir direk toplananı olacak şekilde M de N nin bir K tümleyeni var ise M ye *zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül* denir.

Açıkça extending yani CS modül zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modüldür. Lemma 5.1.3 ten $\mathscr{M}$ bütün sağ R-modüllerin sınıfı olmak üzere extending modül Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modüle denk olmasına rağmen zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending olmayan extending modüller vardır.

Örnek 3.4.2 Bir p asalı için $(Z/Zp) \oplus (Z/Zp^3)$ bir zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modüldür. Ancak extending modül değildir.

İspat. [11, Proposition 3.1] den, $(Z/Zp) \oplus (Z/Zp^3)$ zayıf Tip 2 $\mathscr{M}$-extending modül olmadığından denklik gereği extending modül de değildir. Lemma 3.4.8 dan ispatı açıktır. $\square$

Önerme 3.4.3 *$\mathscr{X}$, R-modüllerin herhangi bir sınıfı olsun. O zaman her Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül, zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.*

İspat. Açıktır. $\square$

Lemma 3.4.4 *$\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ olmak üzere $\mathscr{X}$ ve $\mathscr{Y}$, R-modüllerin sınıflarını göstersin. Bu durumda her zayıf Tip 1 $\mathscr{Y}$-extending modül, zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.*

İspat. Açıktır. $\square$

Önerme 3.4.5 *R-modüllerin herhangi $\mathscr{X}$ sınıfı için bir M modülünün zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending olması için gerek ve yeter şart M nin zayıf Tip 1 $\mathscr{X}^e$-extending olmasıdır.*

İspat. $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X}^e$ olduğundan Lemma 3.4.4 gereğince yeter şart açıktır.
Tersine N, M nin bir $\mathscr{X}^e$-altmodülü olsun. Buradan L, N de essential olacak şekilde M nin bir L $\mathscr{X}$-altmodülü vardır. M, zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül olduğundan K, M de direk toplanan olacak şekilde M de L nin bir K tümleyeni vardır. Açıkça K, M de N nin de bir tümleyenidir. Böylece M zayıf Tip 1 $\mathscr{X}^e$-extending modül olur. $\square$

Lemma 3.4.6 *M_1 ve M_2, R-modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1, M_2-injektiftir ancak ve ancak $N \cap M_1 = 0$ olmak üzere M nin her N altmodülü için $M = M_1 \oplus M'$ ve $N \leq M'$ olacak şekilde M nin bir M' altmodülü vardır.*

Önerme 3.4.7 *$\mathscr{X}$, sağ R-modüllerin altmodüllere göre kapalı bir sınıfı olsun. M_1 bir zayıf Tip1 $\mathscr{X}$-extending R-modül ve $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak şekilde M_2 bir injektif R-modül olsun. O zaman $M = M_1 \oplus M_2$, zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.*

İspat. L, M nin bir $\mathscr{X}$-altmodülü olsun. N, L de $L \cap M_2$ nin bir tümleyeni olsun. O zaman $N \cap M_2 = 0$ ve $(L \cap M_2) \oplus N$, L de essentialdır. Lemma 3.4.6 gereğince M_2, M_1-injektif olduğundan ve $N \cap M_2 = 0$ olacak şekilde
$N \leq M$ olduğundan $M = M_2 \oplus M'$ ve $N \leq M'$ olmak üzere M nin bir M' altmodülü vardır. Genelliği bozmaksızın $N \leq M_1$ kabul edilebilir. Bu durumda N, M_1 in bir $\mathscr{X}$-altmodülüdür. Böylece M_1 de N nin tümleyeni olan M_1 in bir N' direk toplananı vardır. Bundan başka, M_2 injektif olduğundan $M' \leq_d M_2$ olacak şekilde M_2 de $L \cap M_2$ nin bir M' tümleyeni vardır. $L' = N' \oplus M'$ olsun. $L' \leq_d M$ dir.
$[(L \cap M_2) \oplus N] \cap L' = 0$ ve $(L \cap M_2) \oplus (N \oplus L') \leq_e M$ dir. Böylece [13, 1.10] gereğince L', M de $(L \cap M_2) \oplus N$ nin bir tümleyenidir. Fakat $(L \cap M_2) \oplus N \leq_e L$ olduğundan L', M de L nin de bir tümleyeni olur. Böylece M zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül olur. □

Lemma 3.4.8 *R bir halka, $\mathscr{M}$ bütün R-modüllerin sınıfını göstersin. S bir basit (simple) ve U bir düzgün (uniform) R-modül olmak üzere $M = S \oplus U$ olsun. O zaman M zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modüldür. Bundan başka M nin extending olması için gerek ve yeter koşul S nin $(U/Soc(U))$-injektif olmasıdır.*

İspat. N, M nin bir altmodülü olsun. Eğer $N \cap S \neq 0$ ise o zaman $N \cap S = S$ dir ve $S \subseteq N$ olur. Böylece modülarite kuralından $N = N \cap M = N \cap (S \oplus U) = S \oplus (N \cap U)$ olur. Buradan $N \cap U = 0$ ise o zaman $N = S$ olur. Böylece U, N nin M de direk toplananı olan bir tümleyeni olarak bulunur. Böylece M zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending olur. Şimdi $N \cap U \neq 0$ ise N, M de essential ve tümleyeni 0 dır. Burada 0, M nin direk toplananı olarak düşünüldüğünde M yine zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modül olur. $N \cap S = 0$ olsun. Eğer $N \neq 0$ ise $N \oplus S$, M de essential olduğundan S, N nin M de bir tümleyenidir. S tümleyeni M nin bir direk toplananı olduğundan M zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending olur. Eğer $N = 0$ ise o zaman M, N nin bir tümleyeni olur. Böylece M nin zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modül olduğu görülür. □

Uyarı: Herhangi zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending bir modülün bir direk toplananının da zayıf Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modül olup olmadığı açık problemdir.

Teorem 3.4.9 *M bir R-modül olsun. Eğer M ve M nin tüm direk toplananları zayıf Tip 1 U_1-extending ise o zaman M (ve M nin bütün direk toplananları) zayıf Tip 1 U-extending modüldür.*

İspat. U sonlu uniform boyutlu R-modüllerin sınıfını, U_1 uniform ve sıfır modüllerinin sınıfını göstersin. N, M nin sıfırdan farklı U-altmodülü olsun. İspatı N nin uniform boyutu üzerinde tümevarım ile yaparız. Eğer N uniform ise N nin uniform boyutu 1 olduğundan ispat tamamdır. N nin uniform olmadığını kabul edelim. $M = L \oplus L'$ olacak şekilde U nun M de bir L tümleyeni ve M nin L' altmodülü vardır. Buradan $(N \cap L) \cap U = 0$ dır. Böylece $N \cap L$, N den daha küçük uniform boyuta sahiptir. Tümevarım hipotezi ile $L = H \oplus H'$ olacak şekilde L de $N \cap L$ nin bir H tümleyeni ve L nin H' altmodülü vardır. Buradan $H \cap N = 0$ ve $(H \oplus N) \cap L = H \oplus (N \cap L)$, L de essentialdır. Bundan başka $U \oplus L$, M de essentialdır ve buradan $(U \oplus L) \cap L' \cong U$, L' nün bir essential altmodülüdür. Böylece L' uniformdur. Eğer $(H \oplus N) \cap L' \neq 0$ ise o zaman $(H \oplus N) \cap L' \leq_e L'$ ve böylece $H \oplus N \leq_e M$ olur. Bu durumda H, M de N nin bir tümleyenidir. $(H \oplus N) \cap L' = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $N \cap (H \oplus L') = 0$ dır. Böylece $N \oplus (H \oplus L')$, M de essential olur. O halde $H \oplus L'$, M de N nin bir tümleyeni olur. Her iki durumda da M nin N nin bir tümleyeni olan P direk toplananı vardır. Böylece M zayıf Tip 1 U-extending modüldür. Açıkça M nin herhangi direk toplananı da zayıf Tip 1 U-extending modül olur. $\square$

4. CS-MODÜLÜNE BENZER MODÜLLER

Bu bölümde ağırlıklı olarak [3], [4], [5], [8], [27], [30] ve [31] çalışmaları incelenmiştir.

4.1. C_{11}-Modüller, ECS VE CESS Modüller

Tanım 4.1.1 R bir halka olsun. R nin her sağ (sol) ideali sağ R-modül (sol R-modül) olarak projektif ise R ye *sağ (sol) kalıtsal (hereditary) halka* denir. Eğer R hem sağ hem de sol kalıtsal ise R ye *kalıtsal halka* denir.

Tanım 4.1.2 Bir R halkasının her sonlu üreteçli sağ (sol) ideali sağ (sol) R-modül olarak projektif ise R ye *sağ (sol) yarı-kalıtsal (semi-hereditary) halka* denir. Eğer R hem sağ hem de sol yarı-kalıtsal ise R ye *yarı-kalıtsal* denir.
Değişmeli ve yarı-kalıtsal bir tamlık bölgesine *Prüfer domain*, değişmeli kalıtsal bir tamlık bölgesine de *Dedekind domain* denir.

Örnek 4.1.3 Her yarıbasit R halkası kalıtsaldır. Yarıbasit R halkası üzerinde sol (sağ) R-modüller projektif olur. Cisimler basit olduğundan yarıbasit, böylece her F cismi kalıtsaldır. Ayrıca F cismi üzerindeki her modül projektif olur. Aynı zamanda F cismi Dedekind domaindir. Buradan F nin Prüfer domain olduğu da söylenebilir.

Örnek 4.1.4 Herhangi esas ideal bölgesi (principal ideal domain) (PID) sağ kalıtsaldır. Bir D bölüm halkası (division ring) üzerinde $D[x]$ polinom halkası PID olacağından $D[x]$ sağ kalıtsal olur.

Örnek 4.1.5 R bir Dedekind halkası ise $S = M_n(R)$ sağ kalıtsal halka olur. R bir prüfer domain ise $S = M_n(R)$ bir yarı-kalıtsal halkadır.

Bir R halkasının sonlu üreteçli bir I ideali uygun bir e idempotenti için eR biçiminde ifade edilebilir. $R = eR \oplus (1-e)R$ olduğundan I_R projektiftir. Böylece R sağ (sol) yarı-kalıtsal halka olur. Buradan, her sonlu üreteçli (finitely generated) sağ R-modül P projektiftir ancak ve ancak P sağ esas (principal) ideallerin bir sonlu direkt toplamına izomorftur.

Tanım 4.1.6 R bir değişmeli tamlık bölgesi (commutative domain) olsun. R nin kesir cismindeki sıfırdan farklı her x elemanı için ya x, R de ya da x^{-1}, R de ise R ye *valuation domain* denir, yani K değişmeli tamlık bölgesi R nin kesir cismi olmak üzere K nın her x elemanı için $x \notin R$ ise $x^{-1} \in R$ özelliğini sağlıyorsa R ye *valuation domain* denir (Bakınız [24]).

Tanım 4.1.7 [31]. Bir M modülünün her N altmodülünün M de direk toplanan olan bir tümleyeni varsa M ye C_{11}*-modül* veya *M,* C_{11} *özelliğini sağlar* denir.

Açıkça CS-modüller C_{11}-modüllerdir. Genel durumda her ayrıştırılamaz (indecomposable) CS-modül düzenlidir (uniformdur). Benzer şekilde ayrıştırılamaz C_{11}-modül uniform olur. Ancak C_{11}-modülün CS olması gerekmez. Örneğin bir p asal tamsayısı için $M = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$, $\mathbb{Z}$ modülünü göz önüne alalım. $M_{\mathbb{Z}}$, C_{11}-modül ancak CS-modül değildir [30].

Diğer yandan bir uniform modülün CS-modül olduğu açıktır, ancak karşıt olarak aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.1.8 *M bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1). *M ayrıştırılamaz CS ise M uniformdur.*

(2). *M ayrıştırılamaz* C_{11} *ise M uniformdur.*

İspat. (1). M ayrıştırılamaz ve CS modül olsun. N, M nin bir altmodülü olsun. Şimdi N nin M de essential olduğunu gösterelim. Hipotezden M, CS olduğundan M, C_1 şartını sağlar. Yani $N \leq_e L$ olacak şekilde $L \leq_d M$ vardır. Ancak M ayrıştırılamaz olduğundan $L = M$ dir.Yani, $N \leq_e M$ olur. Böylece M uniform olur. (2). M ayrıştırılamaz olduğundan C_{11} şartını sağlasın. N, M nin bir altmodülü olsun. Şimdi N nin M de essential olduğunu gösterelim. M, C_{11} olduğundan tanım gereği N nin M de direk toplanan olan bir K tümleyen altmodülü vardır. Yani, $N \cap K = 0$ olacak şekilde K maksimal ve $K \leq_d M$ dir. Ancak M ayrıştırılamaz olduğundan $K = M$ olur. Ancak bu bir çelişkidir. Yani N, M nin sıfırdan farklı her altmodülü ile sıfırdan farklı arakesite sahiptir. Böylece M uniform olur. □

Lemma 4.1.9 *Her C_1 şartını sağlayan modül C_{11} modüldür.*

İspat. $N \leq M$ olsun. Hipotezden $N \leq_e K$ olacak şekilde bir $K \leq_d M$ vardır. O zaman $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. Burada $N \cap K' = 0$ dır ve K' bu özelliğe göre maksimaldir. O halde K', N nin M de bir tümleyeni olur. Bu da ispatı tamamlar. □

C_1 modüller direk toplananlar altında kapalı ancak direk toplamlar altında kapalı değildir. Diğer yandan C_{11}-modüller direk toplamlar altında kapalı olurken direk toplananlar altında kapalı değildir.

CS-modüllerin direk toplananları CS-modüldür ancak CS-modüllerin direk toplamı genel olarak CS-modül olmak zorunda değildir. Ancak C_{11}-modüllerde bu iki durum farklıdır. C_{11}-modülün her direk toplananı C_{11}-modül olmayabilir. Ancak teorideki açık probleme C_{11} ile aşağıdaki gibi cevap verilir.

Teorem 4.1.10 *C_{11}-modüllerin direk toplamı da C_{11}-modüldür.*

İspat. [30, Theorem 2.4]. □

Sonuç 4.1.11 *C_1 şartını sağlayan modüllerin direk toplamı C_{11}-modüldür.*

İspat. Lemma 4.1.9 ve Teorem 4.1.10 dan açıktır. □

Tanım 4.1.12 [21]. (i) M bir sağ R-modül ve N, M nin altmodülü olsun. Eğer N, devirli bir altmodülü essential olarak kapsıyorsa yani $xR \leq_e N$ olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N ye M nin bir *EC-altmodülü* denir.
(ii) N, M de EC-altmodül olsun. Eğer $N \leq_{cl} M$ ise N ye M de *EC-closed* altmodül denir.
Eğer M nin her EC-closed altmodülü M nin bir direk toplananı ise M ye *ECS-modül* denir.

Böylece EC-closed altmodül, kapalı altmodül olduğundan her CS-modül ECS-modül olur. Ayrıca (von Neumann) regüler halkalar kendi üzerinde modül olarak ECS-modüllerdir.

Diğer yandan, CS-modüllerde olduğu gibi ECS-modüllerin direk toplamlarının ECS-modül olması gerekmez. Örneğin, $M_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$, $M_2 = \mathbb{Q}$ ve $M_{\mathbb{Z}} = M_1 \oplus M_2$ olarak alınırsa M iki tane ECS-modülün direk toplamıdır, ancak M, $\mathbb{Z}$-modül olarak bir ECS-modül değildir (Bakınız [4, Örnek 3.2.5]).

Ayrıca ECS-modüllerin direk toplamlarının hangi koşullar altında ECS-modül oldukları [4] de incelenmiştir. Fakat bir ECS-modülün direk toplananının da ECS-modül olduğu elemanter olarak aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

Lemma 4.1.13 *Bir ECS-modülün her direk toplananı ECS-modüldür.*

İspat. $M = M_1 \oplus M_2$ ve M, ECS-modül olsun. M_1 in ECS-modül olduğunu gösterelim. N_1, M_1 de bir EC-closed altmodül olsun. O zaman N_1, M_1 de kapalı ve $xR \leq_e N_1$ olacak şekilde $x \in N_1$ vardır. Buradan M_1, M de kapalı ve
$N_1 \leq M_1 \leq M$ olduğundan N_1, M de kapalı olur. Böylece N_1, M de EC-closed altmodüldür. Hipotezden $N_1 \leq_d M$ dir. O zaman $M = N_1 \oplus N_1'$ olacak şekilde

M nin bir N_1' altmodülü vardır. Modülarite kuralından, $M_1 = M_1 \cap (N_1 \oplus N_1') = N_1 \oplus (M_1 \cap N_1')$ elde edilir. O halde M_1 bir ECS-modül olur. $\square$

Tanım 4.1.14 [21]. Eğer bir M modülünün her devirli alt modülü bir direk toplananında essential ise M ye *principally extending (P-extending) modül* denir.

Tanım 4.1.15 Bir R halkası verilsin. R nin her N altmodülü için, N nin sağ sıfırlayanı bir idempotent tarafından üretilen principal sağ ideal ise R halkasına *Baer Halka* denir.

Şimdi aşağıdaki gerektirmeleri verebiliriz (Bakınız [4, Önerme 3.1.9]).

Önerme 4.1.16 *Bir R halkası üzerinde bir M modülü için aşağıdaki şartları göz önüne alalım:*

(1). *M bir CS-modüldür.*

(2). *M bir ECS-modüldür.*

(3). *M bir P-extending modüldür.*

O zaman $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ *dir. Ancak karşıtı genelde doğru değildir.*

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$. Açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$. Bir $m \in M$ için mR nin M_R deki kapanışı L, M nin bir EC-closed alt modülüdür. Varsayımdan L, M nin bir direk toplananıdır. O halde M_R, P-extending modüldür.

Şimdi $M_2(R)$, [16, Example 13.8] deki R üzerinde 2×2 tipinden matrislerin halkası olarak alınırsa $M_2(R)$ von Neumann regular ve Baer halka değildir. Böylece $M_2(R)$ ne sağ ne de sol CS-halka değildir. O halde $(2) \nRightarrow (1)$ dir.

Son olarak, R halkası [2, Example 3.2] deki halka olsun. Yani

$R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ olarak alalım. Bu durumda, R sağ P-extending modüldür.

Ancak R_R, CS-modül değildir [5]. R_R sonlu Goldie boyutlu olduğundan R_R de bir maksimal düzgün (ve böylece EC-closed) altmodül vardır ve bu altmodül R_R nin bir direk toplananı değildir. O halde R_R, ECS-modül değildir. Böylece (3) $\not\Rightarrow$ (2) olur. $\square$

Teorem 4.1.17 *M_R bir nonsingular modül olsun. Bu durumda, M modülünün P-extending olması için gerek ve yeter koşul M nin ECS-modül olmasıdır.*

İspat. M modülünün P-extending sağ R-modül olduğunu kabul edelim. X, M de bir EC-closed alt modül olsun. O halde bir $x \in X$ için xR modülü X de bir essential altmodüldür. Varsayımdan, M nin bir L direk toplananı var olduğundan xR, L de essential olur. M_R nonsingular olduğundan $X = L$ dir. Böylece M_R, ECS-modüldür. Tersi, Önerme 4.1.16 ten kolayca elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.18 *M bir R-modül ve M nin her yerel dik toplananı bir direk toplanan olsun. Eğer M nin her sıfır olmayan altmodülü, sıfır olmayan bir devirli düzgün altmodül kapsıyorsa bu durumda M nin CS-modül olması için gerek ve yeter şart M nin P-extending modül olmasıdır.*

İspat. M, CS-modül ise açıkça P-extending modüldür.

Tersi için $0 \neq K \leq M$ ve K, M de bir tümleyen olsun. O halde hipotezden K, bir düzgün devirli U altmodülünü kapsar ve U bir U' direk toplananında essentialdır. Böylece U', M nin düzgün bir direk toplananıdır. Zorn Lemmadan, K nın bir N altmodülü vardır ve buradan $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$, M nin bir yerel direk toplananı ve N_i lerin düzgün olma özelliğine göre maksimaldir. Hipotezden $M = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \leq M$ vardır. Buradan $K = K \cap M = K \cap (N \oplus N') = N \oplus (K \cap N')$ olur. O halde $K \cap N'$, M de bir tümleyendir. Eğer $K \cap N' \neq 0$ olsaydı yukarıdaki tartışmadan, $K \cap N'$ altmodülü bir düzgün V direk toplananını kapsar. Bu durumda $N \oplus V$, M nin bir yerel direk toplananıdır. Ancak bu durum N nin seçimi ile çelişir. Böylece $K \cap N' = 0$ ve $K = N$ bulunur. Yani K, M nin bir direk toplananıdır. O halde M, CS-modüldür. $\square$

Örnek 4.1.19 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve S de $R[x,y,z]$ polinomlar halkası olsun. $s = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ olmak üzere $R = S/S_s$ değişmeli halkası olsun. Bu durumda $M_R = R \oplus R \oplus R$ modülü EC-kapalı olmayan, kapalı altmodül kapsar.

Eğer bir R halkası C_{11}-modül ise R ye *sağ* C_{11}*-halka* denir.

Tanım 4.1.20 [8]. Bir M modülünün essential socle'a sahip her tümleyeni M nin bir direk toplananı ise M ye *CESS-modül* denir.

Tanım 4.1.21 [27]. Eğer bir M modülünün her yarıbasit altmodülü M nin bir direk toplananında essential ise M ye *zayıf CS-modül (weak CS-modül)* denir.

Lemma 4.1.22 *Her CS-modül bir CESS-modüldür ve her CESS-modül bir zayıf CS-modüldür.*

İspat. Her CS-modülün bir $CESS$-modül olduğu açıktır. O zaman her $CESS$-modülün bir zayıf CS-modül olduğunu gösterelim. N, M nin bir yarıbasit altmodülü olsun. O zaman $SocN = N$ dir. N, tümleyen altmodül ise $SocN = N \leq_e N \leq_c M$ olduğundan hipotez gereği $N \leq_d M$ olur. Eğer N tümleyen altmodül değilse kapalı altmodül de değildir. O zaman $N \leq_e L$ olacak şekilde M de N nin bir L kapanışı (kapalı altmodülü) vardır. Yani L, M de kapalı altmodül olur ve böylece M de tümleyen altmodül olur. Şimdi $SocN = N \leq_e L \leq M$ olduğundan $SocN \leq SocL \leq L$ olduğu için $socL \leq_e L$ bulunur. L, essential socle'a sahip bir tümleyen altmodül olduğundan ve M, $CESS$-modül olduğundan $L \leq_d M$ dir. Böylece ispat tamamlanır. □

Diğer yandan genel teoride bir extending modül CS-modül ile denktir. Bu denklik fully invariant özelliği ile CS-modüllerin genellemesi olarak aşağıdaki biçimde verilebilir:

Tanım 4.1.23 [7]. M bir sol R-modül ve S, M nin endomorfizma halkası olsun. O zaman M bir sağ S-modül ve R-S-bimodül olur. M nin R-S alt modüllerine *fully invariant* ya da *karakteristik altmodülleri* denir. N, M nin bir fully invariant altmodülü ise $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.24 [3]. Her fully invariant altmodülü bir direk toplananında essential olan modüle *FI-extending modül* denir.

Lemma 4.1.25 *Her C_1 şartını sağlayan modül bir FI-extending modüldür.*

İspat. Tanımdan açıktır. □

Uyarı : FI-extending modülün her direk toplananı da FI-extending modül olmak zorunda değildir.

Lemma 4.1.26 [29, Lemma 2]. *K, M de bir tümleyen altmodül olsun. K nın M nin bir direk toplananı olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi : K \oplus L \to M$ homomorfizmasının $\theta : M \to M$ homomorfizmasına genişletilebilecek şekilde M de K nın bir L tümleyeninin var olmasıdır.*

İspat. K, M nin bir direk toplananı olduğunu kabul edelim. O zaman $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M nin bir K' altmodülü vardır. Açıkça $L = K'$ alınırsa ispat tamamlanır.

Tersine, K altmodülünün M de verilen özelliklere sahip bir L tümleyeni var olduğunu kabul edelim. $\varphi : K \oplus L \to M$ homomorfizması $x \in K$, $y \in L$ için $\varphi(x+y) = x$ biçiminde tanımlansın. Hipotezden $\theta(x+y) = x$, $(x \in K, y \in L)$ olacak biçimde bir $\theta : M \to M$ homomorfizması vardır. Burada $K \subseteq Im(\theta)$ ve $L \subseteq Ker(\theta)$ dır. $0 \neq v \in Im(\theta)$ olsun. O zaman $v = \theta(u)$ olacak şekilde bir $u \in M$ vardır. Dikkat edilirse $u \notin L$ dir. Böylece $(L + uR) \cap K \neq 0$ dır, çünkü L, K nın tümleyenidir. Buradan $0 \neq x = y + ur$ olacak şekilde $x \in K$, $y \in L$ ve $r \in R$ elemanları vardır. O zaman $x = \theta(x) = \theta(y+ur) = \theta(y) + \theta(ur) = 0 + vr = vr$ olur. Böylece her sıfırdan farklı $v \in Im(\theta)$ için $vR \cap K \neq 0$ olur. O halde $K \leq_e Im(\theta)$ dır. Ancak K, M de tümleyen olduğundan kapalı olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani, $K = Im(\theta)$ bulunur. Buradan $M = K \oplus Ker(\theta)$ olduğu kolayca görülür. □

Lemma 4.1.27 [4, Önteorem 4.1.8]. *Bir M modülü için aşağıdaki şartlar denktir:*
(1). M bir FI-extending modüldür.
(2). M nin her fully invariant altmodülü M nin bir direk toplananı olan bir tümleyene sahiptir.
(3). $X \trianglelefteq M$ olsun. $X \leq_e L$ ve her $f : L \oplus K \to M$ homomorfizması $g : M \to M$ endomorfizmasına genişleyecek şekilde M nin bir L kapalı altmodülü ve L nin M de bir K tümleyen altmodülü vardır.

İspat. $(1) \Leftrightarrow (2)$. X, M nin bir fully invariant altmodülü olsun. İlk önce M nin FI-extending modül olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X \leq_e eM$ olacak şekilde $e = e^2 \in End(M_R)$ vardır. Böylece $(1-e)^2 = (1-e)$ idempotent olduğundan $(1-e)M$ de M nin dik toplananıdır. Buradan $X \cap (1-e)M \leq_e eM \cap (1-e)M = 0$ olur ve $X \cap (1-e)M = 0$ elde edilir. Ayrıca $X \oplus (1-e)M \leq_e eM \oplus (1-e)M = M$ olduğundan $X \oplus (1-e)M \leq_e M$ dir. Böylece $(1-e)M$, X in M deki tümleyenidir. Tersine, $c = c^2 \in End(M_R)$ olmak üzere cM, X in tümleyeni olsun. $x \in X$ alalım. Bu durumda $x = cx + (1-c)x$ olur. X fully invariant altmodül olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. Buradan $X \subseteq (1-c)M$ dir. Böylece $X \leq_e (1-c)M$ elde edilir. Yani M, FI-extending modüldür.
$(2) \Leftrightarrow (3)$. Lemma 4.1.26 den açıktır. □

4.2. CLS-Modüller

Bu kısımda Tercan'ın [33] çalışmasındaki CLS-modüller yardımıyla açık probleme çözüm yaklaşımları incelenecektir.

Tanım 4.2.1 M bir modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. Eğer M/N nonsingular ise N ye M de *L-closed altmodül* denir.

Tanım 4.2.2 Her L-closed altmodülü direk toplanan olan bir modüle *CLS-modül* denir.

Değişmeli tamlık bölgesi üzerinde her torsion modül bir CLS-modüldür.

Uyarı: Burada karışıklığı önlemek amacıyla "L-closed" gösterimi CLS-modül için [33] makalesinde verilen closed altmodül anlamında kullanılmıştır.

Lemma 4.2.3 *M bir modül olsun.*

(1). *Her L-closed altmodül bir tümleyen (complement) altmodüldür.*

(2). *Eğer M nonsingular ise her tümleyen altmodül L-closed altmodüldür.*

İspat. (1). K, M nin L-closed altmodülü olsun. K, N de essential olacak şekilde N, M nin bir altmodülü olsun. Böylece N/K singular modüldür [17]. O zaman $N/K \leq Z(M/K)$ olur. Ancak hipotezden $Z(M/K) = 0$ olduğu için $N/K = 0$ dır, yani buradan $K = N$ bulunur. Böylece K, M de genel teorideki kapalı altmodüle karşılık gelir. Kapalı altmodül tümleyen olduğundan K, M de bir tümleyen altmodül olur.

(2). K, M nin bir tümleyen altmodülü olsun. K nın M de L-closed olmadığını kabul edelim. O zaman tanımdan M/N nonsingular değildir. O halde R nin bir sağ essential E ideali için $mE \leq K$ olacak şekilde $m \in M/K$ elemanı vardır. Şimdi $r \in R$, $k \in K$ için $mr + k$ elemanını göz önüne alalım. $F = \{r, s \in R : rs \in E\}$ olsun. O zaman F, R_R de essentialdır ve $(mr + k)F \leq K$ dır. Eğer $mr + k \neq 0$ ise o zaman $(mr + k)F \neq 0$ ve böylece $K \cap (mr + k)R \neq 0$ olur. Buradan $K \leq_e mR + K$ olur. Böylece K, M de kapalı değildir, yani K genel teorideki denklikten M de tümleyen altmodül değildir. Bu durum hipotez ile çelişir. O halde K, M de L-closed olmak zorundadır. □

Lemma 4.2.4 *Her CS-modül, bir CLS-modüldür.*

İspat. Lemma 4.2.3 (1) gereğince, her L-closed altmodül tümleyen olduğundan ispat açıktır. □

Karşıt olarak, aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 4.2.5 *Her nonsingular CLS-modül bir CS-modüldür.*

İspat. Lemma 4.2.3 (2) gereğince açıktır. □

Ayrıca *CLS*-modüllerin *CS*-modüllerden farklı olduğunu gösteren aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.2.6 [33, Example 6]. *Bir p asal tamsayısı için,* $M = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3)$ *olsun. M,* $\mathbb{Z}$*-modül olarak CLS-modüldür fakat CS-modül değildir.*

İspat. $M_{\mathbb{Z}}$ singular olduğundan, M bir *CLS*-modüldür. Ancak $K = \mathbb{Z}(1+\mathbb{Z}p, p+\mathbb{Z}p^3)$ olsun. K, M de p^2 mertebeden bir tümleyen altmodüldür ancak M nin bir direk toplananı değildir. Böylece M bir *CS*-modül değildir. □

Lemma 4.2.7 *Bir CLS-modülün her direk toplananı da bir CLS-modüldür.*

İspat. M bir *CLS*-modül ve K ve K' altmodülleri için $M = K \oplus K'$ olduğunu kabul edelim. L, K nın bir L-closed altmodülü olsun. $\frac{M}{L\oplus K'} = \frac{K\oplus K'}{L\oplus K'} \cong \frac{K}{L}$ olduğundan $L \oplus K'$, M nin bir L-closed altmodülüdür. Böylece $L \oplus K'$, M nin bir direk toplananı olur. Buradan L, M nin bir direk toplananı olarak bulunur. O zaman modülarite kuralından L, K nın bir direk toplananı olur. Böylece K bir *CLS*-modüldür. □

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Karşılaştırmalar

Bu bölüme extending modül teorisindeki aşağıdaki genel sınıflandırma teoremi ile başlayabiliriz.

Teorem 5.1.1 *M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki özellikler birbirine denktir:*
(1). *M, extending modüldür.*
(2). *M, CS-modüldür.*
(3). *M nin her altmodülü bir direk toplananda essentialdır (M, C_1 şartını sağlar).*

Önerme 5.1.2 *M bir R-modül olsun.*
M, CS-modüldür $\Rightarrow$ M, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.

İspat. Önerme 3.1.3. □

Lemma 5.1.3 *$\mathscr{M}$, bütün R-modüllerin sınıfı olsun. M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*
(1). *M, CS-modüldür.*
(2). *M, Tip 1 $\mathscr{M}$-extending modüldür.*

İspat. Lemma 3.1.4. □

Lemma 5.1.4 *M, Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modül $\Rightarrow$ M, zayıf Tip 1 $\mathscr{X}$-extending modüldür.*

İspat. Önerme 3.4.3. □

Lemma 5.1.5 [4, Tanım 4.1.1]. *M, CS-modül $\Rightarrow$ M, C_{11}-modüldür.*
Ancak C_{11}-modülün CS-modül olması gerekmez.

İspat. Tanım 4.1.7 ile açıktır. □

Diğer yandan bir uniform modülün CS-modül olduğu açıktır. Ancak karşıt olarak aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 5.1.6 *M bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1). *M ayrıştırılamaz (indecomposable) CS-modül ⇒ M uniform modüldür.*

(2). *M ayrıştırılamaz (indecomposable) C_{11}-modül ⇒ M uniform modüldür.*

İspat. Lemma 4.1.8. □

Lemma 5.1.7 *Her M modülü C_1 şartını sağlar ⇒ M modülü C_{11}-modüldür.*

İspat. Lemma 4.1.9. □

Açık Problem : M modülü C_{11} şartını sağlar ⇒ M, P-extending modüldür.

Önerme 5.1.8 [4, Önerme 3.1.9]. *Bir R modülü için aşağıdaki şartları düşünelim:*

(1). *M bir CS-modüldür.*

(2). *M bir ECS-modüldür.*

(3). *M bir P-extending modüldür.*

O zaman $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ *dir. Ancak karşıtı genelde doğru değildir.*

Lemma 5.1.9 [8, Lemma 1.1]. *Her CS-modül bir CESS-modüldür ve her CESS-modül bir zayıf CS-modüldür.*

Lemma 5.1.10 [21, Lemma 2.14]. *M bir ayrıştırılamaz modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1). *M, extending modüldür.*

(2). *M, P-extending modüldür.*

(3). *M, uniform modüldür.*

Tanım 5.1.11 [21]. M bir R-modül olsun. M nin uniform boyutu n olan her kapalı altmodülü M nin bir direk toplananı ise M ye *n-extending modül* denir. Buna denk olarak M nin, sonlu n uniform boyuta sahip her A altmodülü M nin bir direk toplananında essential ise M, n-extending modüldür.
Özel olarak, $n = 1$ için 1-extending modül tanımlanır.

Lemma 5.1.12 *1-extending modülün herhangi direk toplananı da 1-extending modüldür.*

İspat. $M = M_1 \oplus M_2$ modülü verilsin. M, 1-extending modül olsun. N_1, M_1 in uniform boyutu 1 olan bir kapalı altmodülü olsun. N_1 bu şartlarla M nin de bir altmodülüdür. Hipotezden N_1, M nin bir direk toplananı olur. Böylece
$M = N_1 \oplus N_1{}'$ olacak şekilde M nin bir $N_1{}'$ altmodülü vardır. O zaman modülarite kuralından, $M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (N_1 \oplus N_1{}') = N_1 \oplus (M_1 \cap N_1{}')$ olur. Yani N_1, M_1 in bir direk toplananı olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 5.1.13 [21, Lemma 2.15]. *Sağ Noether bir R halkası üzerinde bir M modülünün 1-extending olması için gerek ve yeter şart M nin P-extending olmasıdır.*

Lemma 5.1.14 [21, Corolary 2.16]. *M sonlu boyutlu bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*
(1). *M, extending modüldür.*
(2). *M, 1-extending modüldür.*
(3). *M, P-extending modüldür.*

Tanım 5.1.15 [21]. (i) M bir sağ R-modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. Eğer N, devirli bir altmodülü essential olarak kapsıyorsa yani $xR \leq_e N$ olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N ye M nin bir *EC-altmodülü* denir.
(ii) N, M de EC-altmodül olsun. Eğer $N \leq_{cl} M$ ise N ye M de *EC-closed altmodül* denir.

NOT : EC-altmodül ve EC-kapalı altmodül [4] çalışmasında sembolik olarak ec-altmodül ve ec-kapalı altmodül olarak gösterilmiştir.

Tanım 5.1.16 [21]. M bir R-modül olsun. M nin her devirli alt modülü M nin bir direk toplananında essential ise M ye bir *P-extending modül* denir.
M nin her EC-kapalı altmodülünün M nin bir direk toplananı olması bu duruma denktir.

Tanım 5.1.17 [21]. M bir R-modül olsun. Eğer M nin her sonlu uniform boyutlu EC-closed altmodülü M nin bir direk toplananı ise M ye *FP-extending modül* denir.

Tanım 5.1.18 [28]. M bir modül olsun. Eğer M nin her altmodülü P-extending ise M ye *Fully Principally Extending Module* (kısaca *FP-extending modül*) denir.

NOT : [21] de verilen FP-extending modül ile [28] de tanımlanan FP-extending modül farklıdır.

Lemma 5.1.19 [28]. *Her FP-extending modül, P-extending modüldür.*

İspat. M modülü FP-extending modül olsun. O zaman tanımdan M nin her altmodülü, özel olarak kendisi altmodül olarak P-extending olur. □

Tanım 5.1.20 M_R bir modül olsun. Eğer M nin her EC-altmodülü K için M nin bir D direk toplananı var ve D, K nın M deki tümleyeni ise M ye EC_{11}*-modül* denir. O halde C_{11} modüllerin (dolayısıyla CS-modüllerin) EC_{11}-modül olduğu açıktır.

Önerme 5.1.21 [4]. *M bir R-modül olsun. M, P-extending modül ise M, EC_{11}-modüldür.*

İspat. K, M nin bir ec-altmodülü olsun. O halde xR, K da essential olacak şekilde bir $x \in K$ vardır. M, P-extending modül olduğundan xR, D de essential olacak şekilde M nin bir D direk toplananı vardır. Böylece $M = D \oplus D'$ olacak şekilde M de bir D' altmodülü vardır. $xR \cap D' \leq_e D \cap D' = 0$ olduğundan $xR \cap D' = 0$ dır. Ayrıca $xR \oplus D' \leq_e D \oplus D' = M$ elde edilir. $xR \cap D' \leq_e K \cap D'$ olduğundan $K \cap D' = 0$ olur. $xR \oplus D' \leq K \oplus D' \leq M$ ve $xR \oplus D'$, M de essential olduğundan $K \oplus D'$, M de essentialdır. Dolayısıyla M, EC_{11}-modüldür. $\square$

EC_{11}-modül P-extending modül olmayabilir.

Örnek 5.1.22 $R = \mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkası ve $M = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülünü alalım. Örnek [4, Örnek 1.4.5] den M_R, CS-modül değildir. Böylece M sonlu Goldie boyutlu olduğu için Teorem 4.1.17 (3) den, ECS-modül değildir. Ayrıca $Z(M) = 0$ olduğundan M, nonsingulardir. Teorem 4.1.17 (i) den, P-extending modül değildir. Fakat $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü düzgün olduğundan CS-modüldür. Böylece C_{11}-modül olur. Teorem 5.1.21 den M, C_{11}-modül olduğundan EC_{11}-modüldür. Dolayısıyla M, EC_{11}-modül olmasına rağmen P-extending modül değildir.

Sonuç 5.1.23 [4, Sonuç 4.2.8]. *M_R bir indecomposable modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*

(1). *M_R, ECS-modüldür.*

(2). *M_R, P-extending modüldür.*

(3). *M_R, EC_{11}-modüldür.*

(4). *M_R, düzgün modüldür.*

Önerme 5.1.24 [3]. *M bir modül olsun. Aşağıdaki durumları göz önüne alalım:*

(1). *M, C_1 şartını sağlar.*

(2). *M, C_{11}-modüldür.*

(3). *M, FI-extending modüldür.*

Böylece $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ sağlanır. Ancak genel olarak tersi doğru değildir.

İspat. [3, Proposition 1.2]. $\square$

5.2. Öneriler

Bu çalışmada aşağıda listelenen farklı modüllerin tanımları verilmiş, ilgili bölümler içinde temel özellikleri ve karşılaştırmaları incelenmiştir.
Bu kısımda geçişleri çalışılan bu modüller toplu olarak tekrar bir arada listelenerek direk toplanan özelliğini koruyup korumadıkları referans verilerek belirtilmiştir. Böylece konu araştırmacılara özetle sunulmuştur.

(1) Extending modül

(2) CS-modül

(3) C_1 şartını sağlayan modül

(4) Tip 1 X-extending modül

(5) Zayıf Tip 1 X-extending

(6) C_{11} şartını sağlayan modül

(7) ECS-modül

(8) $CESS$-modül

(9) 1-extending modül

(10) FP-extending modül

(11) EC_{11}-modül

(12) CLS-modül

(13) FI-extending modül

(14) Zayıf CS-modül

(15) EC-closed altmodül

(1), (2) ve (3) modüllerinin denkliğinden ve extending modülün her direk toplananı da extending olduğundan, durum CS-modül ve C_1 şartını sağlayan modül için de geçerlidir. Ancak bu durum burada çalışılan tüm CS-benzeri modüller için aynı biçimde gelişmemiştir. Örneğin bir FI-extending bir modülün direk toplananı FI-extending olmayabilir.

(4)

Lemma 5.2.1 [9, Lemma 2.5]. *M bir Tip 1 X-extending modül ise M nin herhangi direk toplananı da Tip 1 X-extending modüldür.*

İspat. İspatı elemanterdir. □

(5)

Lemma 5.2.2 *Zayıf Tip 1 X-extending bir modülün herhangi direk toplananı da zayıf Tip 1 X-extending modüldür.*

(6)

Lemma 5.2.3 [30, Theorem 2.4]. *C_{11}-modüllerin herhangi direk toplamı da C_{11}-modül olur. Özel olarak, uniform modüllerin herhangi direk toplamı C_{11}-modül olur. Ancak bir C_{11}-modülün direk toplananı C_{11}-modül olmak zorunda değildir.*

(7)

Lemma 5.2.4 [4, Önteorem 3.1.8]. *M bir ECS-modül ise her direk toplananı da ECS-modüldür.*

(8)

Lemma 5.2.5 [8, Lemma 1.2]. *$CESS$-modülün herhangi bir direk toplananı da bir $CESS$-modüldür.*

(9)

Lemma 5.2.6 [21], 5.1.12. 1-*extending modülün herhangi bir direk toplananı da* 1-*extending modüldür.*

(10)

Lemma 5.2.7 [28, Proposition 9]. *$M \oplus M$ bir FP-extending modül ise M, FP-extending modül olur.*

(11)

Lemma 5.2.8 [4, Teorem 4.2.15]. *M bir EC_{11}-modül ve X, M nin bir altmodülü olsun. Eğer M nin bir direk toplananı ile X in arakesiti, X in bir direk toplananı ise X bir EC_{11}-modül olur.*

(12)

Lemma 5.2.9 [33, Lemma 7]. *Bir CLS-modülün herhangi direk toplamı da CLS-modüldür.*

(13)

Lemma 5.2.10 [4, Teorem 4.1.5]. *FI-extending modüllerin direk toplamı FI-extending modül olur.*

FI-extending modüllerin direk toplananı FI-extending olmayabilir.

(14)

Açık Problem: [27]. Bir zayıf CS-modülün direk toplananı K olsun. K nın zayıf CS-modül olup olmadığı açık problemdir.

(15)

Lemma 5.2.11 [21, Lemma 2.11]. *EC-closed altmodülün her direk toplananı da EC-closed altmodül olur.*

KAYNAKLAR

[1] Anderson F., Fuller, K. 1992. Rings and Categories of Modules, Springer Verlag.

[2] Birkenmeier, G. F., Kim, J. Y., Park, J. K. 1999. When is the CS condition hereditary?, **Communications Algebra**, 27 (8): 3875-3885.

[3] Birkenmeier, G. F., Tercan, A. 2007. When some complement of a submodule is a summand, **Communications in Algebra**, 35: 597-611.

[4] Celep Yücel, C. 2008. CS-Modüller ve Genelleştirilmiş CS-Halka ve Modül Sınıfları Üzerine Araştırmalar, Tez, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü.

[5] Celep Yücel, C., Tercan, A. 2009. Modules whose ec-closed submodules are direct summand, **Taiwanese Journal of Mathematics**, 13 (4): 1247-1256.

[6] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R. 1977. Rings in which every complement right ideal is a direct summand, **Quart. J. Math. Oxford**, 28, 61-80.

[7] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R. 2006. Lifting modules, Springer Verlag.

[8] Çelik, C. 1998. CESS-modules, **Tr. J. of Mathematics**, 22, 69-75.

[9] Doğruöz, S. 1997. Extending modules relative to modules classes, Ph. D. Thesis, University of Glasgow.

[10] Doğruöz, S., Smith, P. F. 1998. Modules which are extending relative to module classes, **Communications in Algebra**, 26 (6): 1699-1721.

[11] Dogruöz, S., Smith, P. F. 2000. Modules which are weak extending relative to module classes, **Acta Math. Hungar.**, 87 (1-2), 1-10.

[12] Doğruöz, S., Ürün, Ö. 2012. Surveys in Mathematics and Mathematical Sciences, 1 (2): 117-162.

[13] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R. 1994. Extending Modules, Pitman Research Notes in Mathematics Series 313, Longman Scientific Tecnical.

[14] Goal, V. K., Jain, S. K. 1976. [76]: Semiperfect rings with quasi-projective left idals, **Math. J. Okayama Univ.**, 19, 39-43.

[15] Goldie, A. W. 1958. The Structure of Prime Rings Under Ascending Chain Conditions, **Proc. London Math. Soc.**, 3-8 (4): 589-608.

[16] Goodearl, K. R. 1979. Von Neumann Regular Rings, Pitman, London.

[17] Goodearl, K. R., Warfield, R. B. 1989. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, Cambridge University Press, London Mathematical Society, Student Texts 16.

[18] Harada, M. 1982. On modules with extending properties, **Osaka J. Math.**, 19: 203-215.

[19] Harmancı, A., Smith, P. F. 1993. Finite direct sums of CS-modules, **Houston Journal of Mathematics**, 19 (4): 523-532.

[20] Jeremy, L. 1971. Sur les modules et anneaux quasi-continuous, C. R. Acad. Sci. Paris, 273: 80-83.

[21] Kamal, M. A., Elmnophy, O. A. 2005. On p-extending modules, Acta Mathematica, Univ. Commeniance, 74: 279-286.

[22] Kasch, F. 1982. Modules and Rings, Academic Press, London Mathematical Society Monograph No.17.

[23] Lam, T. Y. 1998. Lectures on modules and rings, Springer-Verlag.

[24] Matsumura, H. 1986. Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press.

[25] Mohamed, S., Bouhy, T. 1977. Continuous modules, **Arabian J. Sci. Eng.**, 2: 107-122.

[26] Mohamed, S. H., Müller, B. J. 1990. Continuous and Discrete Modules. London Mathematical Society Lecture Note Series 147, Cambridge University Press.

[27] Patrick, S. 1990. CS-modules and weak CS-modules, In Lecture Notes in Mathematics, 1448, Springer Verlag, 99-115.

[28] Shallal, E. A. 2013. Fully principally extending module, **Iraqi Journal of Science**, 54 (4) : 1163-1166.

[29] Smith, P. F., Tercan, A. 1992. Continuous and quasi-continuous modules, **Houston Journal of Mathematics**, 18 (3): 339-348.

[30] Smith, P. F., Tercan, A. 1993. Generalization of CS-modules, **Communications in Algebra**, 21 (6): 1809-1847.

[31] Smith, P.F., Tercan, A. 2004. Direct summands of modules which satisfy C_{11}, **Algebra Colloquium**, 11 (2): 231-237.

[32] Takil, F., Tercan, A. 2009. Modules whose submodules are essentially embedded in direct summands, **Communications in Algebra**, 37 (2): 460-469.

[33] Tercan, A. 1995. On CLS-Modules, **Rocky Mountain Journal of Mathematics**, 25 (4), Fall.

[34] Utumi, Y. 1960. On continuous reguler rings and semisimple self-injektif rings, **Canad. J. Math.**, 12: 597-605.

[35] Ürün, Ö. 2011. Her Closed Alt modülü Direkt Toplanan Olan Modüllerin Haritası, MAT-YL Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Nila ÖZTEKİN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	ANKARA, 15.11.1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Anadolu Üniversitesi, Ortaöğretim Alan Eğitimi (Tezsiz Yüksek Lisans) Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (Tezli Yüksek Lisans)
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	MEB - 2011 (Devam etmekte)

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	nilanila09@hotmail.com
Tarih	:	26.06.2015