T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2015-YL-009

İNJEKTİF MODÜLLERİN GENELLEŞTİRMELERİ

Serpil ÜNLÜ

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Serpil ÜNLÜ tarafından hazırlanan İnjektif Modüllerin Genelleştirmeleri başlıklı tez, 08/01/2015 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen Edeb. Fak.	
Üye :	Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen Edeb. Fak.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. A. Tuğba GÜROĞLU	CBÜ Fen Edeb. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2015 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

08/01/2015

Serpil ÜNLÜ

ÖZET

İNJEKTİF MODÜLLERİN GENELLEŞTİRMELERİ

Serpil ÜNLÜ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2015, 53 sayfa

Modül teoride injektif modüllerin önemli uygulamaları vardır. İnjektif modüller teorisi 1950'li yıllara dayanır. Bu tezde injektif modüller ve genelleştirmeleri çalışılmıştır. Bunun için bazı farklı injektif modül tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. A-injektif ve A-essential injektif modül, principally injektif modül, quasi-injektif ve pseudo-injektif modül tanımları ele alınmıştır. f-injektif modül, small PP-M-injektif modül ile small PPQ-injektif modül, SP-M-injektif ve relatif injektif modül tanımları çalışılmıştır. Son olarak, bu çalışmada bahsedilen injektif modüller arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler
İnjektif modül, essential altmodül, injektif halka, injektif hull.

ABSTRACT

GENERALIZATION OF INJECTIVE MODULES

Serpil ÜNLÜ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2015, 53 pages

There are important applications of injective modules in the module theory. Theory of injective modules goes back to years of 1950. In this thesis, injective modules and their generalizations have been studied. For this fact, definitions of some different injective modules and their basic properties are given. Definitions of A-injective and A-essential injective module, principally injective module, quasi-injective and pseudo-injective module have been reviewed. Definitions of f-injective module, small PP-M-injective module and small PPQ-injective module, SP-M-injective and relative injective module have been studied. Finally, we gave relations of the injective modules which they mentioned in this study.

Key Words
İnjective module, essential submodule, injective ring, injective hull.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince çalışmamın her aşamasında yardım, destek ve anlayışı için, değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam boyunca katkı ve önerileri ile bana destek veren Sayın Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e teşekkür ederim.
Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Serpil ÜNLÜ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$B \leq A$	:	B, A modülünün altmodülü
$B \lneqq A$	:	B, A modülünün öz altmodülü
$B \leq_e A$	:	B, A modülünün essential altmodülü
$B \ll A$	:	B, A modülünün small altmodülü
$B \leq_d A$	:	B, A modülünün direk toplananı
$A \oplus B$	:	A ile B modüllerinin direk toplamı
$Hom_R(M,M)$	:	M den M ye R-homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	:	M modülünün endomorfizma halkası
$Rad(M)$	:	M modülünün radikali
$J(R)$	:	M modülünün Jacobson radikali
$Soc(R)$	:	M modülünün socle'ı
$\mathscr{M}_R$	:	Sağ R-modüllerin kategorisi
$< f >$	:	f homomorfizmasının grafı
$f_{\vert A}$	:	f homomorfizmasının A ya kısıtlanışı
$\mathbf{r}(a)$	:	Bir M modülünün a elemanının R de sağ sıfırlayanı
$\mathbf{l}(a)$	:	Bir M modülünün a elemanının R de sol sıfırlayanı
$\mathbf{r}(X)$	:	Bir M modülünün X altkümesinin R de sağ sıfırlayanı
$\mathbf{l}(X)$	:	Bir M modülünün X altkümesinin R de sol sıfırlayanı
$Z(R_R)$, $Z(_RR)$	:	R halkasının tekil (singular) idealleri

1. GİRİŞ

Bu çalışmada bazı farklı injektif modül tanımları ve genelleştirmeleri incelenmiş, yeni genelleştirmeler için geçişler araştırılmıştır.

[10] çalışmasından injektif modül kavramının 1950 ve sonraki yıllarda çalışılmaya başlandığını biliyoruz.

İnjektif, quasi-injektif ve relatif injektif modül kavramları ile temel özellikleri [11] ve [14] çalışmalarında detaylı olarak incelenmiştir. Aşağıdaki denk koşullardan herhangi birini sağlayan bir E modülüne *injektiftir* denir:

(1) Her A modülü ve A nın herhangi X altmodülü için X den E ye her homomorfizma A dan E ye bir homomorfizmaya genişletilebilir. Yani, A nın her X altmodülü için bir $f : X \to E$ homomorfizması var ise $g_{|_X} = f$ olacak şekilde bir $g : A \to E$ homomorfizması vardır.

(2) (Baer Kriteri) R halkasının her sağ I idealinden E ye her homomorfizma R den E ye bir homomorfizmaya genişletilebilir. Yani, R nin herhangi bir I ideali ve her $f : I \to E$ homomorfizması için $g_{|_I} = f$ olacak şekilde bir $g : R \to E$ homomorfizması vardır.

(3) Her M modülü için E den M ye her monomorfizma parçalanabilirdir.

(4) E nin bir öz essential genişlemesi yoktur.

Her M modülünün minimal injektif ve aynı zamanda maksimal essential genişlemesi vardır. Bu genişleme izomorfizma altında tek türlü belirlidir ve M nin *injektif hull*u olarak adlandırılır. M nin injektif hullu $E(M)$ ile gösterilir.

İnjektif modüllerin modül teoride uygulama alanları geniştir. Teorinin gelişiminde farklı tanımlamalar ve injektif modül genelleştirilmeleri çalışılmıştır.

Aksi belirtilmedikçe çalışmamız boyunca halkalar birimli ve modüller birimsel sağ R-modül olarak alınacaktır.

Başlangıçta, bu çalışma boyunca kullanacağımız temel tanımlar ve özellikler verilmiştir. Bu bölümde [1], [9] ve [11] çalışmalarındaki tanımlar ve teoremler temel alınmıştır.

Üçüncü bölümde ilk olarak A-injektif modül tanımı ve temel özellikleri verilmiş, sonra A-essential injektif modül tanımı ile benzer temel özellikler ele alınmıştır. Ayrıca A-injektif modüller ile ilgili özellikler için [11] çalışmasından yararlanılmıştır. A-injektif ve A-essential injektif modüllerin direk toplamı ve direk çarpımı koruduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte bir modülün essential genişlemesi ile injektif genişlemesi ve [5] çalışmasında gösterildiği gibi bir modülün injektif hullu tanımlanmıştır. Daha sonra bir modülün tümleyeni ile bir homomorfizmanın grafı tanımlanarak kısıtlanmış homomorfizma tanımı verilmiştir. Bu tanımlar kullanılarak bir modülün A-injektif ve A-essential injektif olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir. Yine burada A-injektif modüller için verilen Baer Kriteri A-essential injektif modüller için de ifade edilmiştir [12].

Dördüncü bölümde, principally injektif (P-injektif) modül tanımı ile bu tanıma denk koşullar incelenmiştir. Principally injektif modül örnekleri verilmiştir. Bu örnekler ile her cismin bir sağ P-injektif halka olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca P-injektif modüller için direk çarpımın korunduğu gösterilmiştir. Sonra bir sağ P-injektif halkanın sağladığı özellikler incelenmiştir. Principally halkalar için [11] çalışmasında verilen C_2 ve C_3 şartları ele alınmıştır. Bunun yanında weakly injektif modül tanımı verilmiştir. Bir sağ P-injektif halka için Jacobson radikali ile singular idealin eşitliği gösterilmiş ve Kasch halkası tanımlanarak P-injektif modüller ile ilişkisi incelenmiştir. Bu bölümün sonunda, yarı-mükemmel ve sağ P-injektif bir halkanın sağ Kasch halka olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır [13].

Beşinci bölümde ilk olarak quasi-injektif ve pseudo-injektif modül tanımları verilmiştir. Ayrıca bu modüller arasındaki ilişki incelenmiştir. Pseudo-injektif bir modülün direk toplananının hangi şartlar altında quasi-injektif olduğu araştırılmıştır [8]. Daha sonra I-injektif modül ile f-injektif modül tanımı verilerek f-injektif modülün direk çarpımı ve direk toplamı koruduğu gösterilmiştir. Bir modülün I-injektif olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir [6]. Bu bölümde son olarak, small PP-M-injektif modül ile small PPQ-injektif modül tanımları ve özellikleri verilerek bir small PP-M-injektif modülün her direk toplananının small PP-M-injektif olduğu gösterilmiştir. Ayrıca SP-M-injektif modül ve buna bağlı olarak relatif injektif modül tanımları verilerek bir small PPQ-injektif modülün direk toplananlarının relatif injektif olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte hangi şartlar altında small PP-M-injektif modülün bölüm modüllerinin de small PP-M-injektif olduğu araştırılmıştır [15].

Sonuç bölümünde ise verilen farklı injektif modüller arasındaki ilişki incelenmiştir.

2. TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1 [9]. R bir halka olsun.
(1) M bir toplamsal değişmeli grup ve
(2) $M \times R \to M$, $(m,r) \mapsto mr$ ile tanımlı dış çarpım dönüşümü için $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ olmak üzere
(a) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$,
(b) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$,
(c) $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$,
özellikleri varsa M ye *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir. Eğer R birimli bir halka ve M_R, $m1 = m$ özelliğini sağlıyorsa M ye *birimsel sağ R-modül* denir. Benzer tanım sol R-modüller için de yapılır.

Tanım 2.1.2 [9]. M bir sağ R-modül ve A, M nin bir altkümesi olsun. Eğer A, M deki işlemlere göre bir R-modül oluyorsa A ya M nin *altmodülü* denir ve $A \leq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 [9]. M bir R-modül olsun.
(1) Her $A \leq M$ altmodülü için $A = 0$ veya $A = M$ ise M ye *basit modül* denir.
(2) Her $A \leq {}_R R_R$ ideali için $A = 0$ veya $A = R$ ise R halkasına *basit halka* denir.
(3) A, M nin bir altmodülü olsun. $0 \lneqq A$ ve M nin $B \lneqq A$ olacak şekilde her B altmodülü için $B = 0$ oluyorsa A ya *minimal altmodül* denir.
(4) A, M nin bir altmodülü olsun. $A \lneqq M$ ve M nin $A \lneqq B$ olacak şekilde her B altmodülü için $B = M$ oluyorsa A ya *maksimal altmodül* denir.

Tanım 2.1.4 [9]. R bir halka, M bir R-modül olsun. $m \in M$ için $mR = \{mr : \ r \in R\}$, M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle M nin m ile *üretilmiş (devirli) altmodülü* denir.

Tanım 2.1.5 [9]. Bir halkanın devirli ideallerine *principal ideal* denir. Her ideali principal ideal olan değişmeli bir halkaya *principal ideal halkası* denir.

Tanım 2.1.6 [9]. R bir halka, M bir R-modül ve B, M nin altmodülü olsun. $M = B \oplus C$ olacak şekilde M nin bir C altmodülü varsa B ye M nin bir *direk toplananı (direct summand)* denir. $M \neq 0$ olsun. M nin sıfırdan ve kendisinden başka direk toplananı yoksa M ye *direk parçalanamaz (direct indecomposable)* denir.

Tanım 2.1.7 [9]. $\mathscr{M}_R$, R-modüllerin bir kategorisi olsun.

(a) Her $M \in \mathscr{M}_R$ için $\sum\limits_{\varphi \in Hom_R(B,M)} Im(\varphi) = M$ ise B_R ye $\mathscr{M}_R$ kategorisinin *üreteci (generator)* denir.

(b) Her $M \in \mathscr{M}_R$ için $\bigcap\limits_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) = 0$ ise C_R ye $\mathscr{M}_R$ kategorisinin *eşüreteci (cogenerator)* denir.

Lemma 2.1.8 [9, 3.4.9 Lemma]. *Aşağıdaki diyagram değişmeli olsun. Yani, $\lambda = \beta\alpha$ sağlansın.*

$$\begin{tikzcd} & M \\ A \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

O zaman,

(1). $Im(\alpha) + Ker(\beta) = \beta^{-1}(Im(\lambda))$,

(2). $Im(\alpha) \cap Ker(\beta) = \alpha(Ker(\lambda))$ *olur.*

Sonuç 2.1.9 [9, 3.4.11 Corollary].

(1). $\alpha : A \to B$ *homomorfizması için aşağıdakiler denktir:*

(a). *α bir parçalanabilir monomorfizmadır.*

(b). *$\beta\alpha = 1_A$ olacak şekilde $\beta : B \to A$ homomorfizması vardır.*

(2). *$\beta : B \to C$ homomorfizması için aşağıdakiler denktir:*

(a). *β bir parçalanabilir epimorfizmadır.*

(b). *$\beta\gamma = 1_C$ olacak şekilde $\gamma : C \to B$ homomorfizması vardır.*

Teorem 2.1.10 [9, 3.7.1 Theorem]. *R bir halka, M bir R-modül olsun. $Hom_R(M,M)$, M den M ye bütün homomorfizmaların kümesini belirtsin. $Hom_R(M,M)$,*

(i). $(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$,

(ii). $(\alpha_1\alpha_2)(a) = \alpha_1(\alpha_2(a))$

işlemleriyle birlikte birimli bir halkadır.

Tanım 2.1.11 [9]. Teorem 2.1.10 da verilen halkaya M nin *endomorfizma halkası* denir ve $End(M_R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12 [9]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı her altmodülü ile arakesiti sıfırdan farklı olan sıfırdan farklı bir A altmodülüne *essential (large) altmodül* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir. Yani, $0 \neq A \leq M$ olmak üzere her $0 \neq U \leq M$ için $U \cap A \neq 0$ dır. Buna denk olarak, $A \neq 0$ olmak üzere her $U \leq M$ için $U \cap A = 0$ iken $U = 0$ oluyorsa A ya M nin *essential altmodülü* denir.

Tanım 2.1.13 [1]. Bir M modülünün sıfırdan farklı her altmodülü M de essential ise M ye *uniform modül* denir.

Tanım 2.1.14 [9]. A ve B iki R-modül olmak üzere bir $\alpha : A \to B$ homomorfizması için $Im(\alpha) \leq_e B$ ise α ya *essential homomorfizma* denir.

Tanım 2.1.15 [9]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin her U altmodülü için $A+U=M$ iken $U=M$ koşulunu sağlayan M nin bir A altmodülüne M de *small (superfluous) altmodül* denir ve $A \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 [9]. A ve B iki R-modül olmak üzere bir $\alpha : A \to B$ homomorfizması için $Ker(\alpha) \ll A$ ise α ya *small homomorfizma* denir. Eğer α örten ise α ya *small epimorfizma* denir.

Lemma 2.1.17 [9, 5.1.5 Lemma]. *M ve N birer modül olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a). *$A \leq B \leq M \leq N$ ve $A \leq_e N$ ise $B \leq_e M$ dir.*

(b). *$i = 1, \ldots, n$ için $A_i \leq_e M$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \leq_e M$ dir.*

(c). *$B \leq_e N$ ve $\varphi \in Hom_R(M,N)$ ise $\varphi^{-1}(B) \leq_e M$ dir.*

(d). *$\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ essential monomorfizma olsun. O zaman $\beta\alpha : A \to C$ essential monomorfizmadır.*

Teorem 2.1.18 [9, 5.3.1 Theorem]. *Bir Q_R modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *Her $\xi : Q \to B$ monomorfizması parçalanabilirdir (split) (yani $Im(\xi)$, B de bir direk toplanandır).*

(2). *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir:*

$$\begin{tikzcd} & Q \\ A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, dotted, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

(3). *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması için $Hom(\alpha, 1_Q) : Hom_R(B,Q) \to Hom_R(A,Q)$ bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.19 [9]. Teorem 2.1.18 in denk koşullarından birini sağlayan bir Q_R modülüne *injektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.20 A bir grup olsun. Eğer sıfırdan farklı her $z \in \mathbb{Z}$ için $Az = A$ oluyorsa *A bölünebilir (divisible) grup* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.21 [9, 4.5.5 Theorem]. *$D_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir bir modül olmak üzere $\varphi : D_{\mathbb{Z}} \to B_{\mathbb{Z}}$ bir monomorfizma ise φ, parçalanabilirdir (yani $Im(\varphi)$, B nin bir direk toplananıdır).*

Teorem 2.1.22 [9, 5.5.1 Theorem]. *Bir $\mathbb{Z}$-modülün (=abel grup) injektif olması için gerek ve yeter koşul bölünebilir olmasıdır.*

Lemma 2.1.23 [9, 5.5.2 Lemma]. *Eğer D bölünebilir (=injektif) bir $\mathbb{Z}$-modül ise $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$, sağ R-modül olarak injektiftir.*

Tanım 2.1.24 [9]. R bir halka, M bir R-modül ve $\eta : M \to Q$ bir monomorfizma olsun. Eğer Q injektif modül ve η bir essential monomorfizma ise η ya M nin *injektif hull*u denir. Aynı zamanda Q da M nin *injektif hull*u olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.25 *$i : \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ monomorfizması $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün bir injektif hulludur. Burada $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü injektiftir ve $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \leq_e \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir.*

Teorem 2.1.26 [9, 5.3.1 Theorem]. *Bir P_R modülü için aşağıdakiler denktir:*
(1). *Her $\xi : B \to P$ epimorfizması parçalanabilirdir (yani $Ker(\xi)$, B de bir direk toplanandır).*
(2). *Her $\beta : B \to C$ epimorfizması ve her $\psi : P \to C$ homomorfizması için $\psi = \beta\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda : P \to B$ homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram*

değişmelidir:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

(3). *Her* $\beta : B \to C$ *epimorfizması için* $Hom(1_P, \beta) : Hom_R(P,B) \to Hom_R(P,C)$ *bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.27 [9]. Teorem 2.1.26 nın denk koşullarından birini sağlayan bir P_R modülüne *projektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.28 [9]. R bir halka, M bir R-modül ve $\xi : P \to M$ bir epimorfizma olsun. Eğer P projektif modül ve ξ bir small epimorfizma ise ξ ye M nin *projektif örtüsü (projective cover)* denir.

Önerme 2.1.29 [11, Proposition 2.1]. *Herhangi bir (quasi-)injektif M modülü için aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(C_1). *M nin her altmodülü, M nin bir direk toplananında essentialdır.*

(C_2). *M nin bir direk toplananına izomorf olan M nin bir A altmodülü M nin bir direk toplananıdır.*

Önerme 2.1.30 [11, Proposition 2.2]. *Bir M modülü* C_2 *şartını sağlıyorsa aşağıdaki özelliğe sahiptir:*

(C_3). M_1 *ve* M_2 *altmodülleri* $M_1 \cap M_2 = 0$ *olacak şekilde M nin direk toplananları ise* $M_1 \oplus M_2$ *de M nin bir direk toplananıdır.*

Tanım 2.1.31 [9]. R bir halka ve M bir R modül olsun.

(a) M nin altkümelerinin boş olmayan her ailesinin bir maksimal elemanı varsa M modülüne *Noether modül* denir.

(b) M nin altkümelerinin boş olmayan her ailesinin bir minimal elemanı varsa M

modülüne *Artin modül* denir.

(c) M nin altmodüllerinin $... \leq A_{i-1} \leq A_i \leq A_{i+1} \leq ...$ zinciri sonlu sayıda farklı A_i altmodülü içeriyorsa zincir *sonlu adımda durur* denir.

Tanım 2.1.32 [9]. M bir R-modül ve A, M nin bir altmodülü olsun.
(a) M nin altmodüllerinin her azalan zinciri $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq ...$ sonlu adımda duruyorsa M modülü *azalan zincir şartını sağlar* denir.
(b) M nin altmodüllerinin her artan zinciri $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq ...$ sonlu adımda duruyorsa M modülü *artan zincir şartını sağlar* denir.

Tanım 2.1.33 [9]. Bir M modülü azalan zincir şartını sağlıyorsa M ye *Artin modül* denir. Bir M modülü artan zincir şartını sağlıyorsa M ye *Noether modül* denir.

Tanım 2.1.34 [9]. R bir halka ve $r \in R$ olsun.
(1) En az bir $n \in \mathbb{N}$ için $r^n = 0$ ise r ye *nilpotent eleman* denir.
(2) Eğer $r^2 = r$ ise r ye *idempotent eleman* denir.

Teorem 2.1.35 [9, 8.1.3 Theorem]. *R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:*
(1). *M nin her altmodülü basit altmodüllerin bir toplamıdır.*
(2). *M, basit altmodüllerin bir toplamıdır.*
(3). *M, basit altmodülerin bir direk toplamıdır.*
(4). *M nin her altmodülü M nin bir direk toplananıdır.*

Tanım 2.1.36 [9]. Teorem 2.1.35 in denk koşullarından birini sağlayan bir M_R modülüne *yarıbasit (semisimple) modül* denir. R_R ve $_RR$ birer yarıbasit modül ise R halkasına sırasıyla *sağ* ve *sol yarıbasit halka* denir.

Teorem 2.1.37 [9, 9.1.1 Theorem]. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*

$$(1).\ \sum_{A \ll M} A = \bigcap_{\substack{B \leq M, \\ B \text{ maksimal}}} B \quad , \qquad (2).\ \bigcap_{A \leq_e M} A = \sum_{\substack{B \leq M, \\ B \text{ minimal}}} B$$

Tanım 2.1.38 [9]. (a) Teorem 2.1.37.(1) de tanımlanan M nin altmodülüne M nin *(Jacobson) radikali* denir ve $Rad(M)(J(R))$ ile gösterilir.
(b) Teorem 2.1.37.(2) de tanımlanan M nin altmodülüne M nin *socle'ı* denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.39 [9]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin her epimorf görüntüsünün bir projektif cover'ı varsa M ye *yarı-mükemmel (semiperfect) modül* denir.

Sonuç 2.1.40 [9, 11.3.2 Corollary]. *R bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*
(1). *R_R yarı-mükemmeldir ancak ve ancak*
(a). *$\overline{R} := R/Rad(R)$ yarıbasittir,*
(b). *Her ε idempotenti için $\varepsilon = \overline{e}$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotenti vardır.*
(2). *R_R nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul $_RR$ nin yarı-mükemmel olmasıdır.*

Tanım 2.1.41 [9]. Sonuç 2.1.40 ın (1) ve (2) koşullarını sağlayan bir R halkasına *yarı-mükemmel (semiperfect) halka* denir.

Tanım 2.1.42 [1]. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $1-x$ elemanının R de sol tersi varsa x *sol quasi-regular* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, $1-x$ elemanının R de sağ tersi varsa x *sağ quasi-regular* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.43 [1, 15.3 Theorem]. *R bir halka olsun. R nin aşağıda verilen altkümelerinin her biri R nin Jacobson radikaline eşittir:*
(J_1) *R nin bütün maksimal sol (sağ) ideallerinin kesişimidir.*

(J_2) *R nin bütün sol (sağ) primitive ideallerinin kesişimidir.*

(J_3) $\{x \in R : \text{her } r, s \in R \text{ için } rxs \text{ quasi-regular}\}$

(J_4) $\{x \in R : \text{her } r \in R \text{ için } rx \text{ quasi-regular}\}$

(J_5) $\{x \in R : \text{her } s \in R \text{ için } xs \text{ quasi-regular}\}$

(J_6) *R nin bütün quasi-regular sol (sağ) ideallerinin birleşimidir.*

(J_7) *R nin bütün quasi-regular ideallerinin birleşimidir.*

(J_8) *R nin tek en geniş small sol (sağ) idealidir.*

Tanım 2.1.44 M bir R-modül ve X, M nin bir altkümesi olsun.
$\mathbf{r}(X) = \{s \in R : \text{her } x \in X \text{ için } xs = 0\}$ kümesine X in *sağ sıfırlayanı* ve
$\mathbf{l}(X) = \{s \in R : \text{her } x \in X \text{ için } sx = 0\}$ kümesine de X in *sol sıfırlayanı* denir.

Tanım 2.1.45 R bir halka ve M bir R-modül olsun.
$Z(M) = \{x \in M : \text{bir } I \leq_e R_R \text{ için } xI = 0\} = \{x \in M : \mathbf{r}(x) \leq_e R_R\}$ kümesine M nin *tekil (singular) altmodülü* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *tekil modül*, $Z(M) = 0$ ise M ye *tekil olmayan (nonsingular) modül* denir. Sol R-modüller için de benzer tanım yapılır.

Lemma 2.1.46 *(Zorn Lemma) A boş olmayan bir küme ve $\leq$ bağıntısı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. A nın her zincirinin bir üst sınırı varsa A kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.*

3. A-İNJEKTİF VE A-ESSENTİAL İNJEKTİF MODÜLLER

Başlangıç olarak Mohamed Refat Moharam'ın [12] de injektif modüller ile ilgili yapmış olduğu tanımlar ve temel özellikler ele alınmıştır. Ayrıca A-injektif modül tanımı ve temel özellikleri için [11] den yararlanılmıştır. A-injektif bir modülün her direk toplananının da A-injektif olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu modüllerin direk çarpım ve direk toplam için genelleştirmeleri verilmiştir. [5] kullanılarak, her modülün bir minimal injektif genişlemeye ve bir maksimal essential genişlemeye sahip olduğu ifade edilmiştir. Sonra injektifliğin bir genelleştirmesi olan essential injektif modüller tanıtılmıştır. Yine bu kısımda, tümleyen ve graf özellikleri kullanılarak bu modüllerin bazı temel özellikleri incelenmiştir.

3.1. A-İnjektif Modüller

Tanım 3.1.1 [12]. N ve A iki modül olsun. Eğer her $i : X \to A$ monomorfizması ve her $\varphi : X \to N$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\psi : A \to N$ homomorfizması varsa N modülüne *A ya göre injektif* (ya da *A-injektif) modül* denir.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Bir başka deyişle, A nın her X altmodülü için her $\varphi : X \to N$ homomorfizması $\psi : A \to N$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa N modülüne *A-injektiftir* denir.

Eğer bir N modülü her A modülü için A-injektif ise N ye injektif modül denir.

Tanım 3.1.2 [12]. Eğer bir M modülü M-injektif ise M ye *quasi-injektif modül* denir.

Lemma 3.1.3 [12]. *Eğer N, A-injektif bir modül ise o zaman her $f : N \to A$ monomorfizması için $Im(f)$, A da direk toplanandır. Buna ek olarak, A parçalanamaz bir modül ise f bir izomorfizmadır.*

İspat. N, A-injektif modül ve $f : N \to A$ bir monomorfizma olsun. $A = Im(f) \oplus Ker(\psi)$ olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & N \\ N \arrow[ur, "1_N"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 2.1.8 den, $Im(f) + Ker(\psi) = \psi^{-1}(Im(1_N)) = \psi^{-1}(N) = A$ ve $Im(f) \cap Ker(\psi) = f(Ker(1_N)) = f(0) = 0$ bulunur. Böylece $A = Im(f) \oplus Ker(\psi)$ eşitliği gösterilmiş olur. Yani $Im(f)$, A da direk toplanandır.

$A = Im(f) \oplus Ker(\psi)$ ve A parçalanamaz olduğundan $Ker(\psi) = 0$ olmak zorundadır. Buradan $A = Im(f)$ olur. O halde f örtendir. Dolayısıyla f bir izomorfizma olur. $\square$

Sonuç 3.1.4 [12]. *Eğer N, A nın bir altmodülü ve A-injektif bir modül ise o zaman N, A nın direk toplananıdır.*

Teorem 3.1.5 [1]. *A ve N iki halka olmak üzere $\theta : A \to N$ homomorfizma ve $B \leq Ker(\theta)$ olsun. $\pi : A \to A/B$ doğal homomorfizma olmak üzere $\overline{\theta}\pi = \theta$ olacak şekilde tek türlü $\overline{\theta} : A/B \to N$ homomorfizması vardır. Yani,*

$$\begin{tikzcd} & N \\ A \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\pi"'] & A/B \arrow[u, dotted, "\overline{\theta}"'] \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $\overline{\theta} : A/B \to N$ homomorfizması vardır.

Önerme 3.1.6 [12].

(1). *Eğer N, A-injektif bir modül ise o zaman N nin her direk toplananı da A-injektiftir.*

(2). *Eğer N, A-injektif bir modül ise o zaman A nın her B altmodülü için N, B-injektif ve A/B-injektiftir.*

İspat. (1). $N = N_1 \oplus N_2$ olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & & N_1 \arrow[r, "i_1"] & N \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "f'"'] \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

N, A-injektif modül olduğundan $i_1 f = \varphi i$ olduğunu biliyoruz. $\pi_1 : N \to N_1$ kanonik epimorfizma olmak üzere $f' = \pi_1 \varphi$ eşitliği vardır. Her $x \in X$ için $f'(x) = f(x)$ olduğunu göstermeliyiz. O zaman $x \in X$ için $f'(x) = \pi_1 \varphi(x) = \pi_1 \varphi(i(x)) = \pi_1(\varphi i(x)) = \pi_1(i_1 f(x)) = 1_N(f(x)) = f(x)$ olur.

(2). N, A-injektif bir modül ve B, A nın bir altmodülü olsun. Önce N nin B-injektif olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ B_1 \arrow[r, "i_1"'] \arrow[urr, "f"] & B \arrow[ur, dotted, "g_{|B}"'] \arrow[r, "i_2"'] & A \arrow[u, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

N, A-injektif olduğundan $g i_2 i_1 = f$ olacak şekilde $g : A \to N$ homomorfizması vardır. $g_{|B} = g i_2$ olduğundan $g i_2 i_1 = (g_{|B}) i_1 = f$ bulunur. Buradan N modülü B-injektif olur.

Şimdi N modülünün A/B-injektif olduğunu gösterelim. X/B, A/B nin bir altmodülü ve $\varphi : X/B \to N$ bir homomorfizma olsun. π, A dan A/B ye doğal homomorfizmayı göstersin ve $\pi' = \pi_{|X}$ olsun. N, A-injektif bir modül olduğundan $\varphi\pi'$, $\theta : A \to N$ homomorfizmasına genişler. O zaman $\theta(B) = \varphi\pi'(B) = \varphi(0) = 0$ dır. Buradan $B \leq Ker(\theta)$ olur. Böylece Teorem 3.1.5 ten, $\overline{\theta}\pi = \theta$ olacak şekilde

$\overline{\theta} : A/B \to N$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
 & & N \\
 & X/B \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, "\varphi"] & A/B \arrow[u, dotted, "\overline{\theta}"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u, "\pi'"] & A \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

O halde her $x \in X$ için $\overline{\theta}(x+B) = \overline{\theta}\pi(x) = \theta(x) = \varphi\pi'(x) = \varphi(x+B)$ olur. Yani, $\overline{\theta}(x+B) = \varphi(x+B)$ dir. Böylece φ, $\overline{\theta}$ ye genişler. Buradan N, A/B-injektif olur. □

Önerme 3.1.7 [12]. *(Baer Kriteri) Bir N modülünün A-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için N nin aR-injektif olmasıdır.*

İspat. N modülü A-injektif olsun. Önerme 3.1.6 dan, N modülünün aR-injektif olduğu açıktır.

Karşıt olarak, her $a \in A$ için N modülü aR-injektif olsun. $X \leq A$ ve $\varphi : X \to N$ bir homomorfizma olsun. $S = \{(B, \psi) : X \leq B \leq A$ ve $\psi : B \to N$, φ nin genişlemesi$\}$ kümesini tanımlayalım. $X \leq X \leq A$ alırsak $\varphi : X \to N$ kendisinin (φ nin) genişlemesidir. Buradan $(X, \varphi) \in S$ olur. Yani S kümesi boştan farklıdır. Şimdi $C = \bigcup B_i$ olsun. $\psi : C \to N$, φ nin genişlemesidir. Buradan $(C, \psi) \in S$ olur ve S kümesinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma'dan $X \leq B \leq A$ ve $\psi : B \to N$ homomorfizması φ nin genişlemesi olacak şekilde bir maksimal (B, ψ) çifti vardır. $B \leq_e A$ olduğunu gösterelim. Bunun için sıfırdan farklı her $a \in A$ için $aR \leq A$ olmak üzere $aR \cap B \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. O zaman $aR \cap B = 0$ olduğunu kabul edelim. $aR \neq 0$ olduğundan $B = 0$ olmalıdır. Bu bir çelişkidir. O halde $aR \cap B \neq 0$ dır. $B \neq A$ olduğunu varsayalım ve $a \in A \setminus B$ elemanını göz önüne alalım. $K = \{r \in R : ar \in B\}$ olsun. Buradan $aK \neq 0$ olduğu açıktır. $\mu(ak) = \psi(ak)$

olacak şekilde $\mu : aK \to N$ homomorfizmasını tanımlayalım. Hipotezden μ, $\nu : aR \to N$ homomorfizmasına genişletilebilir. Şimdi $\chi(b+ar) = \psi(b)+\nu(ar)$ olacak şekilde $\chi : B+aR \to N$ homomorfizması tanımlayalım. $r \in K$ için $b+ar = 0$ ise $\chi(b+ar) = \psi(b)+\nu(ar) = \psi(b)+\mu(ar) = \psi(b)+\psi(ar) = \psi(b+ar) = \psi(0) = 0$ olduğundan χ iyi tanımlıdır. Ancak $(B+aR,\chi)$ çiftinin varlığı (B,ψ) nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $B = A$ dır ve φ, $\psi : A \to N$ ye genişler. □

Önerme 3.1.8 [12]. *Bir N modülünün $(\bigoplus_{i\in I} A_i)$-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için N nin A_i-injektif olmasıdır.*

İspat. N modülü $(\bigoplus_{i\in I} A_i)$-injektif olsun. Önerme 3.1.6 dan, her $i \in I$ için N nin A_i-injektif olduğu açıktır.

Karşıt olarak, her $i \in I$ için N modülü A_i-injektif olsun. $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, $X \leq A$ ve $\varphi : X \to N$ bir homomorfizma olsun. Zorn Lemma'dan, A nın X i öz olarak içeren bir X' altmodülü için φ homomorfizmasının $X' \to N$ şeklindeki bir homomorfizmaya genişletilemediğini varsayalım. O zaman $X \leq_e A$ dır. $X = A$ olduğunu gösterelim. Bunun için $X \neq A$ olduğunu kabul edelim. O halde $a \notin X$ olmak üzere $j \in I$ için $a \in A_j$ vardır. N, A_j-injektif olduğundan Önerme 3.1.6 dan N, aR-injektif olur. (Önerme 3.1.7 nin ispatına benzer şekilde) φ homomorfizması $\psi : X+aR \to N$ homomorfizmasına genişletilebilir. Bu durum φ nin maksimal olmasıyla çelişir. Bu çelişkinin nedeni $X \neq A$ kabulüdür. O halde $X = A$ olmalıdır. Buradan N modülü $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$-injektif olur. □

Önerme 3.1.9 [12]. *$\{M_i\}_{i\in I}$, modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\prod_{i\in I} M_i$ nin A-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için M_i nin A-injektif olmasıdır.*

İspat. $\prod\limits_{i\in I} M_i$, A-injektif olsun. $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$ olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \arrow[ur, "\pi_i\psi"'] & \end{tikzcd}$$

M modülü A-injektif olduğundan ψ homomorfizması vardır. Buradan her $i \in I$ için M_i, A-injektif olur.

Karşıt olarak, her $i \in I$ için M_i, A-injektif modül olsun. Aşağıdaki diyagramdan, ψ homomorfizmasının var olduğunu söyleyebiliriz:

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[r, "i_i"] & M \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \arrow[ur, "i_i\psi"'] & \end{tikzcd}$$

O halde $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$ modülü A-injektif olur. □

Önerme 3.1.10 [11]. *$M_1 \oplus M_2$ nin quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul $i, j = 1, 2$ olmak üzere M_i nin M_j-injektif olmasıdır. Özel olarak, bir quasi-injektif modülün bir toplananı da quasi-injektiftir.*

Sonuç 3.1.11 [12]. *$\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$ nin quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul $i, j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere M_i nin M_j-injektif olmasıdır. Ayrıca M^n nin quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin quasi-injektif olmasıdır.*

Tanım 3.1.12 [12]. M ve E iki modül olsun. Eğer $f : M \to E$ bir monomorfizma ise (E, f) çiftine M modülünün bir *genişlemesi* denir. Eğer $Im(f) \leq_e E$ ise bu genişlemeye M modülünün *essential genişlemesi* denir. Eğer $Im(f)$ injektif ise bu genişlemeye M nin *injektif genişlemesi* denir. [5] te her modülün bir minimal injektif genişlemeye ve aynı zamanda bir maksimal essential genişlemeye sahip olduğu gösterilmiştir. Bu genişlemenin M nin *injektif hull*u olarak adlandırıldığını ve $E(M)$ ile gösterildiğini hatırlayalım. İnjektif hull, izomorfizma farkıyla tek türlüdür.

Lemma 3.1.13 [12]. *Bir N modülünün A-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in Hom(E(A), E(N))$ için $f(A) \leq N$ olmasıdır.*

İspat. $E(N)$ nin injektif olduğunu biliyoruz. $f \in Hom(A, E(N))$ homomorfizmasını göz önüne alalım. $X \leq A$ ve $g : X \to N$ bir homomorfizma olsun.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r] & E(N) \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & A \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Diyagramdan görüldüğü gibi, $E(N)$ injektif olduğundan g, $f : A \to E(N)$ homomorfizmasına genişler. Kabulden, $f(A) \leq N$ olduğundan $f : A \to N$, g nin bir genişlemesidir. Böylece N modülü A-injektif olur.

Karşıt olarak, N, A-injektif bir modül ve $X = \{a \in A : f(a) \in N\} \leq A$ olsun. N, A-injektif olduğundan aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir g homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r] & E(N) \\ X \arrow[ur] \arrow[r] & A \arrow[u, dotted, "g"'] \arrow[r] & E(A) \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

$f_{|A} = g$ alırsak g, X den N ye homomorfizmanın genişlemesidir. Şimdi, $N \cap (g-f)A = 0$ oduğunu göstermeliyiz. $n \in N \cap (g-f)A$ olmak üzere $n \in N$ ve $a \in A$ için $n = (g-f)(a)$ olsun. O zaman $f(a) = g(a) - n \in N$ dir. Böylece, X kümesinin tanımından $a \in X$ olur. Buradan $n = g(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$ olur. Yani, $N \cap (g-f)A = 0$ bulunur. Böylece, $N \leq_e E(N)$ ve $(g-f)A \leq E(N)$ olduğundan $(g-f)A = 0$ olur. O halde $f(A) = g(A) \leq N$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.1.14 [11]. X, bir M modülünün bir altmodülü olsun. X, M nin bir Y altmodülü için $X \cap Y = 0$ özelliğine göre maksimal ise X altmodülüne Y nin *tümleyeni (complement)* denir.

Tanım 3.1.15 [12]. A ve B iki modül ve $f : A \to B$ bir homomorfizma olsun. $< f >= \{a + f(a) : a \in A\}(= \{a - f(a) : a \in A\})$ kümesi $A \oplus B$ toplamının bir altmodülüdür ve f nin *grafi* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.16 [12]. A ve B iki modül ve $f : A \to B$ bir homomorfizma olsun. $X \leq A$ olmak üzere $g : X \to B$ homomorfizmasına A dan B ye *kısıtlanmış (partial) homomorfizma* denir. Ayrıca g nin bir *genişlemesi*, $X \leq Y \leq A$ ve $h_{|_X} = g$ olacak şekilde $h : Y \to B$ bir homomorfizmadır. $X \leq A$ olsun. Eğer bir $f : X \to B$ kısıtlanmış homomorfizma için f nin A da öz genişlemesi yoksa f ye *maksimal kısıtlanmış homomorfizma* denir.

Lemma 3.1.17 [12]. *Bir M modülünün A ve B altmodülleri için $M = A \oplus B$ olsun. C nin M de B nin tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul A dan B ye maksimal kısıtlanmış homomorfizmanın grafının C olmasıdır.*

İspat. C, A dan B ye maksimal kısıtlanmış homomorfizmanın grafı olsun. $f : X \to B$, A dan B ye bir maksimal kısıtlanmış homomorfizma ve $b \in < f > \cap B$ olsun. O zaman $b = x + f(x)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Buradan $x = b - f(x) \in B \cap A = 0$ dır. f homomorfizma olduğundan $x = 0$ için $f(x) = 0$ dır. Böylece $b = 0$ olur. O halde $< f > \cap B = 0$ dır. Şimdi $< f > \leq C \leq M$ ve $C \cap B = 0$ olduğunu varsayalım. π_A ve π_B sırasıyla A ve B üzerine M nin projeksiyonlarını belirtsin. Yani $\pi_A : A \oplus B \to A$, $\pi_B : A \oplus B \to B$ olsun. $\pi_{A|_C} : C \to A$ homomorfizması bir monomorfizmadır. Çünkü $Ker(\pi_{A|_C}) = C \cap B = 0$ dır. $Y = \pi_A(C)$ ve $X = \pi_A(< f >)$ olsun. O zaman $X = \pi_B(< f >) \leq \pi_A(C) = Y$ dir. Her $y \in Y$, $c \in C$ için $y = \pi_A(c)$ iken $g : Y \to B$, $g(y) = \pi_B(c)$ ile tanımlansın. O zaman her $x \in X$ için $g(x) = \pi_B(x + f(x)) = f(x)$ olur. Buradan $g : Y \to B$, f ye genişler. f

nin maksimalliğinden $X = Y$ bulunur. O zaman $C = \pi_A^{-1}(Y) = \pi_A^{-1}(X) =< f >$ dir. Buradan $< f >$, M de B nin tümleyeni olur.

Karşıt olarak C, M de B nin tümleyeni olsun. $X = A \cap (C \oplus B)$ ve $\pi : C \oplus B \to B$ projeksiyonunu alalım. $\pi_{|X} = f$ maksimal kısıtlanmış homomorfizma olsun. O zaman $< f >$, B nin tümleyenidir. $C \leq M = A \oplus B$ olduğundan verilen bir $c \in C$ elmanını $a \in A$, $b \in B$ için $c = a + b$ şeklinde yazarız. O zaman $c - b = a \in A \cap (C \oplus B) = X$ dir. Buradan $\pi(a) = \pi(c - b) = \pi(c) - \pi(b) = 0 - b$ bulunur. Böylece $c = a - f(a) \in < f >$ olur. O zaman $C \leq < f >$ elde edilir. O halde $C =< f >$ dir. Yani C, B nin tümleyenidir. □

Aşağıdaki önermede verilen injektifliğin karakterizasyonu için [3] çalışmasından yararlanılmıştır.

Önerme 3.1.18 [12]. *Bir M modülünün A ve B altmodülleri için $M = A \oplus B$ olsun. B nin A-injektif olması için gerek ve yeter koşul B nin M de her C tümleyeni için $M = C \oplus B$ olmasıdır.*

İspat. B, A-injektif ve C, B nin M de bir tümleyeni olsun. O zaman Lemma 3.1.17 den, $X \leq A$ olmak üzere $C =< f >$ olacak şekilde $f : X \to B$ bir maksimal kısıtlanmış homomorfizma vardır.Buradan B, A-injektif olduğundan $X = A$ olur ve böylece $C = \{a + f(a) : a \in A\}$ dır. Her $a \in A$ için $a = a + f(a) - f(a) \in C \oplus B$ olur. Böylece Lemma 3.1.17 den $M = C \oplus B$ bulunur.

Karşıt olarak, $X \leq A$ ve $f : X \to B$, A dan B ye bir maksimal kısıtlanmış homomorfizma olsun. Lemma 3.1.17 den $< f >$, B nin bir tümleyenidir. Böylece kabulden, $M =< f > \oplus B$ olur. $A = X$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Bunun için herhangi bir $a \in A$ alalım. O zaman bazı $x \in X$ ve $b \in B$ için $a = x + f(x) + b$ dir. Buradan $a - x = f(x) + b \in A \cap B = 0$ olur. Böylece $a = x \in X$ olur ve dolayısıyla $A = X$ bulunur. □

3.2. A-Essential İnjektif Modüller

Tanım 3.2.1 [12]. A ve B iki modül olsun. $Ker(f) \leq_e X$ olacak şekilde A nın her X altmodülü için $f : X \to B$ kısıtlanmış homomorfizma A ya genişletilebiliyorsa B ye *A-essential injektif modül* denir. Yani, $Ker(f) \leq_e X$ olacak şekilde aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $g : A \to B$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd}
 & & B \\
0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "g"']
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.2.2 [12]. *A, B herhangi iki modül ve $M = A \oplus B$ olsun. O zaman B nin A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul A nın her X altmodülü için B nin (A/X)-injektif olmasıdır.*

İspat. B, A-essential injektif ve $X \leq_e A$ olmak üzere $X \leq C \leq A$ olsun. $\Phi : C/X \to B$ bir homomorfizma olsun ve $\overline{c} = c + X$ olacak şekilde her $c \in C$ için $\phi(c) = \Phi(\overline{c})$ ile $\phi : C \to B$ homomorfizmasını tanımlayalım. Buradan $X \leq Ker(\phi)$ olduğu açıktır. O zaman $X \leq_e A$ olduğundan $Ker(\phi) \leq_e C$ dir. Kabulden her $c \in C$ için $\phi(c) = \psi(c)$ olacak şekilde bir $\psi : A \to B$ homomorfizması vardır. Her $c \in C$ için $\Psi : A/X \to B$ dönüşümünü $\Psi(\overline{c}) = \psi(c)$ ile tanımlayalım. φ homomorfizma olduğundan Ψ iyi tanımlıdır. Böylece her $\overline{c} \in C/X$ için $\Psi(\overline{c}) = \psi(c) = \phi(c) = \Phi(\overline{c})$ bulunur. O halde her $X \leq_e A$ için B, A/X-injektif bulunur.

Karşıt olarak $C \leq A$ ve $Ker(\alpha) \leq_e C$ olacak şekilde $\alpha : C \to B$ bir homomorfizma olsun. $\overline{\alpha} : C/Ker(\alpha) \to B$ homomorfizmasını $\overline{\alpha}(c + Ker(\alpha)) = \alpha(c)$ olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi D, C nin A da bir tümleyeni olsun ve $X = Ker(\alpha) \oplus D$ alalım. Buradan $X \leq_e C \oplus D \leq_e A$ olduğundan $X \leq_e A$ olur. $\phi(c + Ker(\alpha)) = c + X$ olacak şekilde $\phi : C/Ker(\alpha) \to A/X$ homomorfizmasını tanımlayalım. ϕ iyi tanımlı ve monomorfizmadır. Kabulden, diyagram değişmeli olacak şekilde $\overline{\beta} : A/X \to B$ vardır. Yani her $c \in C$ için $\overline{\alpha}(c + Ker(\alpha)) = \overline{\beta}\phi(c + Ker(\alpha)) = \overline{\beta}(c + X)$ dir.

$\beta : A \to B$ homomorfizmasını $\beta(c) = \overline{\beta}(c+X)$ olarak tanımlayalım. O zaman her $c \in C$ için $\beta(c) = \alpha(c)$ dir. Böylece B, A-essential injektif olur. $\square$

Teorem 3.2.3 [12]. *Bir M modülünün A ve B altmodülleri için $M = A \oplus B$ olsun. B nin A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul $C \cap A \leq_e A$ olacak şekilde B nin her tümleyen altmodülü C için $M = C \oplus B$ olmasıdır.*

İspat. B, A-essential injektif modül ve $C \cap A \leq_e A$ olacak şekilde C, B nin bir tümleyeni olsun. $X = A \cap (C \oplus B)$ tanımlayalım ve $\varphi : X \to B$ dönüşümü, $C \oplus B \to B$ projeksiyonunun kısıtlanışı olsun. $Ker(\varphi) = C \cap X = C \cap A \cap (C \oplus B) = C \cap A \leq_e A$ dır. O zaman hipotezden φ dönüşümü, $\phi : A \to B$ homomorfizmasına genişletilebilir. Böylece B, A-injektif olur. Önerme 3.1.18 den, $M = C \oplus B$ bulunur. Karşıt olarak, $X \leq A$ ve $Ker(\varphi) \leq_e X$ olacak şekilde $\varphi : X \to B$ bir homomorfizma olsun. φ nin bu şartı sağlayan maksimal homomorfizma olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $Ker(\varphi) \leq_e A$ olur. Buradan $Ker(\varphi) \leq A \cap < \varphi >$ dir. O halde $Ker(\varphi) \leq A \cap < \varphi > \leq A$ ve $Ker(\varphi) \leq_e A$ olduğundan $A \cap < \varphi > \leq_e A$ bulunur. Açıkça $< \varphi > \cap B = 0$ dır. C, B nin $< \varphi >$ yi içeren bir tümleyeni olsun. O zaman $A \cap < \varphi > \leq A \cap C \leq A$ ve $A \cap < \varphi > \leq_e A$ olduğundan $A \cap C \leq_e A$ dır. Kabulden $M = C \oplus B$ dir. Şimdi $\phi : A \to B$ dönüşümü, $C \oplus B \to B$ projeksiyonunun kısıtlanışı olsun. $x \in X$ alalım. O zaman $x - \varphi(x) \in < \varphi > \leq C$ olur. Böylece $\phi(x) = \varphi(x)$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.2.4 [12]. *A ve B iki modül olmak üzere B, A-essential injektif modül olsun. $C \leq A$ ise B, C-essential injektiftir.*

İspat. X, C nin bir altmodülü ve $Ker(\phi) \leq_e C$ olacak şekilde $\phi : X \to B$ bir homomorfizma olsun. B modülü A-essential injektif olduğundan her $x \in X$ için $\phi(x) = \psi(x)$ olacak şekilde $\psi : A \to B$ vardır. $\psi_{|C} : C \to B$ homomorfizmasını göz önüne alalım. O zaman her $x \in X$ için $\psi_{|C}(x) = \psi(x) = \phi(x)$ dir. Buradan B, C-essential injektif bulunur. $\square$

Baer kriterinin essential injektifliğe genellemesi olarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.2.5 [12]. *Bir B modülünün A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için B nin aR-essential injektif olmasıdır.*

İspat. B modülü A-essential injektif ise Önerme 3.2.4 ten, B nin aR-essential injektif olduğu açıktır.

Karşıt olarak, her $a \in A$ için B modülü aR-essential injektif olsun. $X \leq A$ ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olacak şekilde $\phi : X \to B$ bir homomorfizma olsun. $S = \{(Y, \psi) : X \leq Y \leq A, \psi : Y \to B$ homomorfizması ϕ nin genişlemesi, $Ker(\psi) \leq_e Y\}$ kümesini göz önüne alalım. $(X, \phi) \in S$ olduğundan S kümesi boştan farklıdır. Zorn Lemma'dan ψ, ϕ nin genişlemesi olacak şekilde (Y, ψ) maksimal çiftini seçebiliriz. Buradan $Y \leq_e A$ olduğu açıktır. $Y \neq A$ olduğunu kabul edelim ve $a \in A \setminus Y$ elemanını göz önüne alalım. $K = \{r \in R : ar \in Y\}$ olsun. O zaman $aK \neq 0$ dır. $\mu : aK \to B$ homomorfizmasını $\mu(ak) = \psi(ak)$ olarak tanımlayalım. $Ker(\mu) = aK \cap Ker(\psi)$ ve $Ker(\psi) \leq_e Y$ olduğundan $Ker(\mu) \leq_e aK$ dır. Açıkça $aK \leq aR$ dir ve kabulden μ, $\nu : aR \to B$ homomorfizmasına genişletilebilir. $\chi(y + ar) = \psi(y) + \nu(ar)$ olacak şekilde $\chi : Y + aR \to B$ homomorfizmasını tanımlayalım. Eğer $y + ar = 0$ ise $ar = -y \in Y$ olduğundan $r \in K$ olur ve böylece $\chi(y + ar) = \psi(y) + \nu(ar) = \psi(y) + \mu(ar) = \psi(y) + \psi(ar) = 0$ olur. Buradan χ iyi tanımlıdır. Ayrıca $Y \leq_e A$ olduğundan $Ker(\psi) \leq_e Y \leq_e Y + aR \leq A$ olur. Buradan $Ker(\psi) \leq_e Y + aR$ dir. O halde $(\chi, Y + aR) \in S$ olur. Bu durum (Y, ψ) çiftinin maksimalliği ile çelişir. Böylece $Y = A$ olur. O zaman $\psi : A \to B$, ϕ nin genişlemesidir. Buradan B modülü A-essential injektif olur. $\square$

Şimdi Önerme 3.1.8 in ve Önerme 3.1.9 un essential injektifliğe genellemesi olan aşağıdaki önermeler verilebilir:

Önerme 3.2.6 [12]. *Bir B modülünün $(\bigoplus_{i\in I} A_i)$-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için B nin A_i-essential injektif olmasıdır.*

İspat. B modülü $(\bigoplus_{i\in I} A_i)$-essential injektif olsun. Önerme 3.2.4 ten, her $i \in I$ için B modülünün A_i-essential injektif olduğu açıktır.

Karşıt olarak, her $i \in I$ için B modülü A_i-essential injektif olsun. $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ olsun ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olacak şekilde $\phi : X \to B$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Zorn Lemma'dan ϕ nin X i öz olarak içeren A nın her X' altmodülü için $X' \to B$ homomorfizmasına genişletilemediğini varsayalım. O zaman $X \leq_e A$ dır. Şimdi $X = A$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $X \neq A$ alalım. Buradan $a \notin X$ olacak şekilde $j \in I$ için $a \in A_j$ vardır. B, A_j-essential injektif olduğundan Önerme 3.2.4 ten B, aR-essential injektiftir. Önerme 3.2.5 te verilenlere benzer olarak ϕ, ϕ nin maksimalliği ile çelişen $\psi : X + aR \to B$ homomorfizmasına genişletilebilir. Bu iddiamızı ispatlar. Dolayısıyla B modülü A-essential injektif olur. $\square$

Önerme 3.2.7 [12]. *$\prod_{i\in I} B_i$ nin A-essential injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için B_i nin A-essential injektif modül olmasıdır.*

İspat. $\prod_{i\in I} B_i$, A-essential injektif olsun. $X \leq A$ ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olacak şekilde $\phi : X \to B_i$ bir homomorfizma olsun. $\eta_i : B_i \to \prod_{i\in I} B_i$ içerim dönüşümü (canonical injection) vardır. $Ker(\phi) \leq Ker(\eta_i\phi) \leq X$ ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olduğundan $Ker(\eta_i\phi) \leq_e X$ tir. O zaman kabulden $\eta_i\phi$, $\theta : A \to \prod_{i\in I} B_i$ homomorfizmasına genişletilebilir. $\eta_i\psi = \theta$ olacak şekilde $\psi : A \to B_i$ homomorfizmasını tanımlayalım. Buradan her $x \in X$ için $\phi(x) = \psi(x)$ tir ve böylece B_i, A-essential injektif olur.

Karşıt olarak her $i \in I$ için B_i, A-essential injektif olsun. $X \leq A$ ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olacak şekilde $\phi : X \to \prod_{i\in I} B_i$ bir homomorfizma olsun. $\pi_i : \prod_{i\in I} B_i \to B_i$ projeksiyon dönüşümü vardır. Buradan, $Ker(\phi) \leq Ker(\pi_i\phi) \leq X$ ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olduğundan $Ker(\pi_i\phi) \leq_e X$ tir. Hipotezden $\pi_i\phi$, $\theta_i : A \to B_i$ homomorfizmasına genişletilebilir. $\psi = (\theta_i)_{i\in I} = \prod_{i\in I} \theta_i : A \to \prod_{i\in I} B_i$ dönüşümünü tanımlayalım. ψ nin bir homomorfizma olduğu açıktır. Her $x \in X$ için $\psi(x) = \prod_{i\in I}\theta_i(x) = \prod_{i\in I}\pi_i\phi(x) = \phi(x)$ olduğundan $\prod_{i\in I} B_i$, A-essential injektif olur. $\square$

Sonuç 3.2.8 [12]. *$M = A \oplus B$, $A = A_1 \oplus A_2$ ve $B = B_1 \oplus B_2$ olsun. Eğer B, A-essential injektif ise B_1, A_1-essential injektiftir.*

4. PRINCIPALLY İNJEKTİF HALKALAR VE MODÜLLER

Bu bölümde Nicholson ve Yousif'in [13] çalışması ele alınmıştır. Başlangıçta principally injektif (P-injektif) modül tanımı verilmiştir. P-injektiflik için [7] de çalışılan denk şartlar verilmiştir. P-injektifliğin direk çarpımı koruduğu gösterilmiştir. Ayrıca verilen örnekler sonucunda her cismin bir sağ P-injektif halka olduğu görülmüştür. Farklı bir tanım olarak zayıf (weakly) injektif modül kavramı verilmiştir. Sağ principally halkalar için Jacobson radikali ile singular ideallerin eşitliği gösterilmiştir. Son olarak, Kasch halkası tanımlanmış ve P-injektiflik ile ilişkisi incelenmiştir.

Bu bölümde yine R birimli bir halka, M bir birimsel R-modül olsun. X, M nin bir altkümesi olmak üzere $\mathbf{r}(X)$, X in sağ sıfırlayanını ve $\mathbf{l}(X)$ de sol sıfırlayanını göstersin. Bir R halkası için $J(R)$, R nin Jacobson radikalini, $Z(R_R)$ ile $Z(_RR)$ singular ideallerini ve $Soc(R_R)$ ile $Soc(_RR)$ de socle'larını belirtsin.

4.1. Principally İnjektif Modüller ve Özellikleri

Tanım 4.1.1 [13]. R bir halka, M bir sağ R-modül olsun. Eğer $a \in R$ için aR den M ye her R-homomorfizması R ye genişletilebiliyorsa M_R ye *principally injektif (*kısaca *P-injektif) modül* denir. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{tikzcd} & & M \\ 0 \arrow[r] & aR \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[u, dotted, "f"'] \end{tikzcd}$$

Şimdi P-injektifliğe denk koşulları gösteren aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.1.2 [13]. *Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1). *R_R, P-injektiftir.*

(2). *Her $a \in R$ için $\boldsymbol{lr}(a) = Ra$ dır.*

(3). *Eğer $a, b \in R$ için $\boldsymbol{r}(b) \subseteq \boldsymbol{r}(a)$ ise $Ra \subseteq Rb$ dir.*

(4). *Her $a, b \in R$ için $\boldsymbol{l}[bR \cap \boldsymbol{r}(a)] = \boldsymbol{l}(b) + Ra$ dır.*

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) denklikleri ve (4) ün (2) yi gerektirmesi [7] de verilmiştir. Aşağıda (3) ün (4) ü gerektirmesi gösterilecektir:

(3) $\Rightarrow$ (4). Eğer $a, b \in R$ için $\mathbf{r}(b) \subseteq \mathbf{r}(a)$ ise $Ra \subseteq Rb$ dir.

$\mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)] = \mathbf{l}(b) + Ra$ olduğunu gösterelim. $bR \cap \mathbf{r}(a) = \{t : t \in bR$ ve $t \in \mathbf{r}(a)\} = \{t : t = br, r \in R$ ve $at = 0\} = \{br : abr = 0, r \in R\}$ dir. $x \in \mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)]$ olsun. Buradan $xbr = 0$ dır. O halde $\mathbf{r}(ab) \subseteq \mathbf{r}(xb)$ olur. (3) ten, $R(xb) \subseteq R(ab)$ sağlanır. Böylece $r_1 \in R$ için $1xb = r_1ab$ olur. Buradan $xb - r_1ab = (x - r_1a)b = 0$ bulunur. O halde $x - r_1a \in \mathbf{l}(b)$ dir. Böylece $x \in \mathbf{l}(b) + Ra$ olur. Yani $\mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)] \subseteq \mathbf{l}(b) + Ra$ elde edilir. $\square$

Tanım 4.1.3 [13]. Lemma 4.1.2 nin denk şartlarından herhangi birini sağlayan bir R halkası *sağ principally injektif (*kısaca *sağ P-injektif)* olarak adlandırılır ve *sağ principal genişleme (extension) özelliğini sağlar* denir.

Teorem 4.1.4 [9, 13.2.1 Theorem]. *R_R bir Noether modül olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*

(1). *R_R injektiftir.*

(2). *R_R bir eşüreteçtir.*

(3). *${}_RR$ injektiftir.*

(4). *${}_RR$ bir eşüreteçtir.*

(5). *R_R nin her A altmodülü için $\boldsymbol{rl}(A) = A$ dır ve ${}_RR$ nin her B altmodülü için $\boldsymbol{lr}(B) = B$ dir.*

Tanım 4.1.5 [9]. Teorem 4.1.4 ün denk koşullarından birini sağlayan bir R halkasına *quasi-Frobenius halka* denir. Kısaca R, *QF-halka* olarak ifade edilir. Açıkça bir *QF-halka*, sağ self-injektif olan bir sağ Noether halkadır.

Tanım 4.1.6 [4]. Bir R halkasının her bölüm halkası (quotient ring) quasi-Frobenius ise R halkasına *dengelenmiş (balanced) halka* denir.

Tanım 4.1.7 [4]. M bir R-modül olsun. M nin her R-endomorfizması ile değişmeli olan, M nin abel grup olarak her endomorfizması bir halka elemanı ile çarpım şeklinde veriliyorsa M ye *dengelenmiş (balanced) modül* (ya da başka bir deyişle, *M çifte merkezleyen özelliğine (double centralizer property) sahiptir*) denir. Yani, her toplamsal f endomorfizması, her R-endomorfizması g için $fg = gf$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman her $x \in M$ için $f(x) = xr$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Dengelenmiş olmayan modüller durumunda böyle bir f bulunamaz.

Şimdi dengelenmiş halkayı Tanım 4.1.7 yardımıyla tanımlayalım:

Tanım 4.1.8 [4]. Bir R halkası için her sağ R-modül dengelenmiş ise bu halkaya *dengelenmiş halka* denir.

Tanım 4.1.9 Sıfırdan başka sıfırlayanı olmayan modüle *sadık (faithful) modül* denir.

Örnek 4.1.10 [13]. Değişmeli QF-1 halkaları (yani, sadık modülleri dengelenmiş olan halkalar) P-injektiftir.

Örnek 4.1.11 [13]. R bir sağ P-injektif halka olsun. $U \subseteq R$ bir sol çarpımsal kapalı altküme (denominator set) olsun. Bu durumda $Q = \{u^{-1}r | u \in U, r \in R\}$ bölüm halkası sağ P-injektiftir.

Lemma 4.1.12 [13]. *Her i indisi için R_i halka olmak üzere $\prod R_i$ çarpımının sağ P-injektif olması için gerek ve yeter koşul her R_i halkasının sağ P-injektif olmasıdır.*

İspat. $\prod R_i$, sağ P-injektif olsun. R_i nin her i indisi için sağ P-injektif olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
 & R_i \arrow[r, "i_1"] & \prod R_i \\
aR_i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"'] & R_i \arrow[u, dotted, "g"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Diyagramdan, $fi = i_1\alpha$ eşitliği vardır. Şimdi $gi = \alpha$ olacak şekilde g nin var olduğunu gösterelim. $\pi_i : \prod R_i \to R_i$ kanonik dönüşümü için $\pi_i f = g$ tanımlayalım. O zaman $gi = \pi_i fi = \pi_i i_1 \alpha = \alpha$ olduğundan R_i, sağ P-injektif halka olur.
Karşıt olarak, her i için R_i sağ P-injektif halka olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & \prod R_i \arrow[r, "\pi_i"] & R_i \\
aR_i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "i"'] & R_i \arrow[u, dotted, "k"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Buradan $hi = \pi_i\beta$ eşitliği vardır. İlk kısımdaki gibi $ki = \beta$ olacak şekilde $k : R_i \to \prod R_i$ homomorfizmasının var olduğunu gösterelim. $i_1 : R_i \to \prod R_i$ doğal içerim dönüşümü olmak üzere $k = i_1 h$ olsun. O zaman $ki = i_1 hi = i_1 \pi_i \beta = \beta$ olduğundan istenen gösterilmiş olur. □

Lemma 4.1.13 [13]. *Herhangi bir tamlık bölgesi (domain) D nin sağ P-injektif olması için gerek ve yeter koşul D nin bir bölümlü halka olmasıdır.*

Lemma 4.1.13 gereğince, her cisim açıkça bir sağ P-injektif halkadır.

Lemma 4.1.14 [13]. *R halkası, her sonlu üretilmiş ideali esas ideal olan bir tamlık bölgesi olsun. O zaman R nin sıfırdan farklı her m elemanı için R/mR, P-injektif bir halkadır.*

İspat. R halkasının sıfırdan farklı her m elemanı için R/mR nin P-injektif olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 4.1.2.(2) den, $\mathbf{lr}(\overline{a}) = (R/mR)(\overline{a})$ olduğunu göstermeliyiz. $R/mR = \overline{R}$ yazalım. $\overline{b} = b + mR \in R/mR$ olmak üzere $\overline{b} \in \mathbf{lr}(\overline{a})$ olsun. Hipotezden, R nin sonlu üretilmiş ideali esas ideal olduğundan $mR + aR$ ideali dR idealine eşit olur. Yani, $mR + aR = dR$ ve $m = dm_1$, $a = dm_2$ dir. Buradan $\overline{b} \in \mathbf{lr}(\overline{a})$ olduğundan $\overline{ax} = \overline{0}$ ve $\overline{b}\overline{x} = \overline{0}$ olacak şekilde $\overline{x} \in \overline{R}$ vardır. $\overline{x} = m_1 + mR$ için $\overline{0} = (a + mR)(m_1 + mR) = am_1 + mR$ dir. Buradan $\overline{am_1} = \overline{0}$ olur. Benzer şekilde, $\overline{0} = (b + mR)(m_1 + mR) = bm_1 + mR$ olduğundan $\overline{b}\overline{m_1} = \overline{0}$ bulunur. Böylece R tamlık bölgesi olduğundan $b \in dR$ olur. Buradan $\overline{b} \in \overline{dR} = \overline{a}\overline{R}$ dir. R değişmeli olduğundan $\overline{a}\overline{R} = \overline{R}\overline{a}$ dir. O halde $\mathbf{lr}(\overline{a}) \subseteq \overline{a}\overline{R}$ sağlanır. Karşıt olarak, $\overline{a}\overline{R} \subseteq \mathbf{lr}(\overline{a})$ olduğu benzer şekilde gösterilir. □

Örnek 4.1.15 Sıfırdan farklı her n tamsayısı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ P-injektif halkadır, yani $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ olduğundan sıfırdan farklı her $n \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}_n$, P-injektif halka olur.

Teorem 4.1.16 [13]. *R bir sağ P-injektif halka ve $a, b \in R$ olsun.*

(1). *Eğer bR, aR ye gömülürse Rb, Ra nın homomorf görüntüsüdür.*

(2). *Eğer aR, bR nin homomorf görüntüsü ise Ra, Rb ye gömülür.*

(3). *Eğer $bR \cong aR$ ise $Ra \cong Rb$ dir.*

İspat. (1). Eğer $\sigma : bR \to aR$ monomorfizma ise $v \in R$ için $\sigma = v\cdot$ olsun. O zaman, $\sigma(br) = vbr = aur$ olduğundan $u \in R$ olmak üzere $vb = au$ bulunur. Buradan $\varphi : Ra \to Rb$ homomorfizmasını $(ra)\varphi = (ra)u = r(au) = r(vb)$ olarak tanımlayalım. Lemma 4.1.2 den $\mathbf{r}(vb) \subseteq \mathbf{r}(b)$ olduğundan $Rb \subseteq Rvb$ olur. O zaman her $b \in Rb$ için $b = rvb = (ra)\varphi$ olacak şekilde $ra \in Ra$ vardır. Buradan φ örten olur. Dolayısıyla φ epimorfizmadır.

(2). Eğer $\sigma : bR \to aR$ epimorfizma ise (1) deki gibi $u, v \in R$ olmak üzere $\sigma = v\cdot$, $vb = au$ ve $\varphi : Ra \to Rb$, $(ra)\varphi = r(vb)$ olsun. Buradan $s \in R$ olmak üzere $a = \sigma(bs) = vbs$ yazarız. O zaman $(ra)\varphi = 0$ ise $rau = rvb = 0$ olur. Buradan

$ra = r(vbs) = r\sigma(bs) = 0$ bulunur. Böylece φ birebir olur. Dolayısıyla φ monomorfizmadır.

(3). (1) ve (2) nin ispatından açıktır. $\square$

Aşağıdaki teorem, [11] de verilen C_2 ve C_3 şartlarının bir sağ P-injektif halka için de sağlandığını gösterir.

Teorem 4.1.17 [13]. *R bir sağ P-injektif halka ve $a, b \in R$ olsun.*

(1). *$aR \cong bR$ ve $bR \leq_d R$ ise $aR \leq_d R$ dir.*

(2). *$aR \leq_d R$, $bR \leq_d R$ ve $aR \cap bR = 0$ ise $(aR \oplus bR) \leq_d R$ dir.*

İspat. (1). $aR \cong bR$ ve $bR \leq_d R$ olsun. $bR = eR$, $e^2 = e$ ve $\sigma : aR \to bR$ bir izomorfizma olmak üzere $\sigma(a) = bd$ ve $\sigma^{-1}(e) = ac$ olsun. O zaman $bdc = \sigma(a)c = \sigma(ac) = \sigma(\sigma^{-1}(e)) = e$ olur. Şimdi $f = cbd$ iken f nin bir idempotent olduğunu gösterelim:

$f^2 = (cbd)(cbd) = c\sigma(a)cbd = c\sigma(ac)bd = cebd$ olur. $bR = eR$ olduğundan $bd = es$ olacak şekilde $d, s \in R$ vardır. Buradan $cebd = cees = ces = cbd = f$ bulunur. Ayrıca $af = a(cbd) = \sigma^{-1}(e)bd = \sigma^{-1}(e)es = \sigma^{-1}(e^2s) = \sigma^{-1}(es) = \sigma^{-1}(bd) = a$ dır. O halde $Ra \subseteq Rf$ dir. Her $r \in R$ için $fr = (cbd)r = c\sigma(a)r = c\sigma(ar)$ olur. Bu durum her $r \in R$ için sağlandığından özel olarak a nın sağ sıfırlayanı $x \in R$ için de sağlanır. $x \in \mathbf{r}(a)$ ise $ax = 0$ dır. Yani, $fx = (cbd)x = c\sigma(a)x = c\sigma(ax) = c\sigma(0) = 0$ dır. Buradan $x \in \mathbf{r}(f)$ dir. Lemma 4.1.2 den, $\mathbf{r}(a) \subseteq \mathbf{r}(f)$ ise $Rf \subseteq Ra$ dır. Sonuç olarak, $Ra = Rf$ bulunur. Teorem 4.1.16 dan, $Rf = Ra$ ise $fR = aR$ olur. f idempotent olduğundan, $R = fR \oplus (1-f)R = aR \oplus (1-f)R$ bulunur. Böylece $aR \leq_d R$ olur.

(2). $aR \leq_d R$, $bR \leq_d R$ ve $aR \cap bR = 0$ olsun. $aR \oplus bR = eR \oplus (1-e)bR$ olacak şekilde $aR = eR$, $e^2 = e$ alalım. Dolayısıyla $(1-e)bR \cong bR$ olur. O halde (1) den, $(1-e)bR = gR$, $g^2 = g$ dir. Böylece $(1-e)br = gt$ olacak şekilde $g, t \in R$ vardır. Buradan $ebr - eebr = egt$ olmak üzere $ebr - ebr = egt = 0$ bulunur.

Yani $eg = 0$ olur. Şimdi $h = e + g - ge$ nin idempotent olduğunu gösterelim: $h^2 = (e+g-ge)(e+g-ge) = e^2+eg-ege+ge+g^2-gge-gee-geg+gege = e+ge+g-ge-ge = e+g-ge = h$ elde edilir. Yani h bir idempotenttir. O halde $aR \oplus bR = hR$ olur. Yani, $(aR \oplus bR) \leq_d R$ bulunur. □

4.2. Principally İnjektif Halkalar ile İlgili Özellikler

Tanım 4.2.1 [13]. $E(M)$, M_R modülünün injektif hullu olsun. Eğer her sonlu üretilmiş $N_R \leq E(M)$ altmodülü için $X_R \cong M$ olacak şekilde $N \leq X_R \leq E(M)$ varsa M ye *zayıf (weakly) injektif modül* denir.

Teorem 4.2.2 [13]. *R nin sağ self-injektif halka olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ P-injektif halka ve R_R nin zayıf injektif modül olmasıdır.*

İspat. R sağ self-injektif halka ise sağ P-injektif ve zayıf injektif olduğu açıktır. Karşıt olarak, R sağ P-injektif halka ve R_R zayıf injektif modül olsun. $a \in E(R_R)$ ise $a \in R$ olduğunu gösterelim. $a \notin R$ olsun. O zaman R_R zayıf injektif olduğundan $X \cong R_R$ olmak üzere $R + aR \leq X \leq E(R_R)$ vardır. Buradan X_R, Teorem 4.1.17.(1) özelliğini sağlar. Yani $X \leq_d R_R$ dir. Bu durumda $R \leq_e E(R)$ olduğu bilindiğinden R den büyük başka altmodül yoktur. O halde $R = X$ dir. Böylece $a \in R$ olmalıdır. □

Teorem 4.2.3 [13]. *Bir R halkası sağ P-injektif ise $J(R) = Z(R_R)$ dir.*

İspat. $a \in Z(R_R)$ olsun. $\mathbf{r}(a) \leq_e R_R$ olduğundan $\mathbf{r}(1-a) \leq R_R$ için $\mathbf{r}(a) \cap \mathbf{r}(1-a) = 0$ iken $\mathbf{r}(1-a) = 0$ olur. Buradan $\mathbf{lr}(1-a) = \mathbf{l}(0) = R$ olur ve Lemma 4.1.2 den, $\mathbf{lr}(1-a) = R(1-a)$ elde edilir. Yani $R = R(1-a)$ bulunur. O halde Teorem 2.1.43 ten, $a \in J(R)$ olur. Şimdi $a \in J(R)$ olsun. $bR \leq R_R$ alalım ve $bR \cap \mathbf{r}(a) = 0$ olsun. Lemma 4.1.2 den, $\mathbf{l}(b) + Ra = \mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)] = \mathbf{l}(0) = R$ olur. Buradan $\mathbf{l}(b) + Ra = R$ olduğundan $\mathbf{l}(b) = R$ olur. O halde $b = 0$ elde edilir ve böylece $bR = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\mathbf{r}(a) \leq_e R_R$ dir. Yani $a \in Z(R_R)$ dir. □

Sonuç 4.2.4 [13]. *Eğer R sol ve sağ P-injektif bir halka ise $Z(R_R) = Z(_RR)$ dir.*

Tanım 4.2.5 [13]. R bir halka olsun. Eğer her basit sağ modül R içine gömülürse R ye *sağ Kasch halka* denir. Denk olarak, R nin her maksimal sağ ideali M için $\mathbf{l}(M) \neq 0$ ise R ye *sağ Kasch halka* denir. Sol Kasch halka da benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 4.2.6 R bir halka ve I, R nin bir sağ ideali olsun. Eğer $f : I \to I^n$ örten dönüşümü varsa I ya *n-üretilmiş ideal* denir.

Tanım 4.2.7 [13]. R bir halka olsun. Eğer R nin n-üretilmiş sağ ideallerinden R ye olan R-dönüşümlerinin hepsi soldan çarpma ile veriliyorsa R ye *sağ n-injektif halka* denir.

Lemma 4.2.8 [13]. *Eğer R sağ 2-injektif ve sağ Kasch halka ise o zaman R bir sol P-injektif halkadır.*

İspat. I bir sağ principal ideal ve $b \in \mathbf{rl}(I)$ ise Lemma 4.1.2 den, $b \in I$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $b \notin I$ ise M/I, $(bR+I)/I$ nın bir maksimal altmodülü ve $\sigma : (bR+I)/M \to R_R$ monomorfizma olsun. Eğer $\gamma(x) = \sigma(x+M)$ ile tanımlanan $\gamma : bR+I \to R$ bir homomorfizma ise $c \in R$ için $\gamma = c\cdot$ alalım. O zaman $cb = \sigma(b+M) \neq 0$ dır. Diğer yandan $I \subseteq M$ olduğundan $cI = 0$ olur. Buradan $b \in \mathbf{rl}(I)$ olduğundan $cb = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. O halde R bir sol P-injektif halka olur. □

Lemma 4.2.9 [13]. *R bir sağ P-injektif ve sağ Kasch halka olsun. O zaman $J = J(R)$ olmak üzere $\mathbf{l}(J)$, $_RR$ de essentialdır.*

İspat. $0 \neq b \in R$ için M yi bR de maksimal seçelim ve $\sigma : bR/M \to R_R$ monomorfizma olsun. Eğer $\alpha : bR \to R$, $\alpha(x) = \sigma(x+M)$ ile tanımlı ise $a \in R$ için $\alpha = a\cdot$ olur. Buradan $ab = \sigma(b+M) \neq 0$ dır. Ancak $bJ \subseteq M$ olduğundan

$abJ = \alpha(bJ) = 0$ olur. Böylece $0 \neq ab \in Rb \cap \mathbf{l}(J)$ bulunur. O halde $\mathbf{l}(J)$, ${}_RR$ de essentialdır. $\square$

Teorem 4.2.10 [9, 9.3.5 Theorem]. *Eğer $R/Rad(R)$ yarıbasit halka ise o zaman her M_R modülü için aşağıdakiler vardır:*

(1). *$Rad(M) = MRad(R)$ dir.*

(2). *$Soc(M) = \mathbf{l}(Rad(R)) := \{m | m \in M$ ve $mRad(R) = 0\}$ dır.*

Teorem 4.2.11 [13]. *R bir yarı-mükemmel ve sağ P-injektif halka olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:*

(1). *R sağ Kasch halkadır.*

(2). *$Soc(R_R)$, ${}_RR$ de essentialdır.*

Bu durumda, $Soc(R_R) = Soc({}_RR)$ ve $Z({}_RR) = J(R) = Z(R_R)$ dir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): $J = J(R)$ yazalım. Teorem 4.2.10 dan, R/J yarıbasit halka olduğundan $Soc(R_R) = \mathbf{l}(J)$ dir. O halde Lemma 4.2.9 dan, (2) şartı sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (1): $M \subseteq R$ bir maksimal sağ ideal olsun. R yarı-mükemmel olduğundan $(1-e) \in M$ ve $eR \cap M \subseteq J$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ seçelim. O zaman $\mathbf{l}(eR \cap M) \supseteq \mathbf{l}(J) \supseteq Soc(R_R)$ olur. Böylece hipotezden $\mathbf{l}(eR \cap M)$, ${}_RR$ de essentialdır. Özel olarak, $0 \neq Re \cap \mathbf{l}(eR \cap M) = \mathbf{l}[(1-e)R \oplus (eR \cap M)] = \mathbf{l}(M)$ olur. Böylece (1) ispatlanmış olur.

Şimdi (2) den, $Soc(R_R) \leq_e {}_RR$ olduğundan $b \in R$ için $Soc(R_R) \cap bR \neq 0$ olur. Buradan $Soc(R_R) \cap \sum bR \neq 0$ sağlanır. O halde $0 \neq Soc(R_R) \cap bR \subseteq Soc(R_R) \cap \sum bR$ olur. Böylece $Soc({}_RR) \subseteq Soc(R_R)$ bulunur. Teorem 4.2.3 ten, $Soc(R_R) \subseteq \mathbf{r}(J)$ dir ve R/J yarıbasit olduğundan $\mathbf{r}(J) = Soc({}_RR)$ dir. O halde $Soc(R_R) = Soc({}_RR)$ bulunur. Son olarak, R yarı-mükemmel olduğundan $Z({}_RR) \subseteq J$ sağlanır. (2) den $\mathbf{l}(J)$, ${}_RR$ de essential olduğundan $J \subseteq Z({}_RR)$ olur. Teorem 4.2.3 ten, $J = Z(R_R)$ olduğundan $Z({}_RR) = Z(R_R)$ bulunur. $\square$

5. ÇEŞİTLİ İNJEKTİF MODÜLLER VE GENELLEŞTİRMELERİ

5.1. Quasi-İnjektif ve Pseudo-İnjektif Modüller

Bu bölümde S. K. Jain ve Surjeet Singh'nın [8] ortak çalışmasından yararlanılmıştır. İlk olarak quasi-injektif ve pseudo-injektif modül tanımları ifade edilmiştir. Pseudo-injektif bir modülün direk toplananının da pseudo-injektif olup olmadığı araştırılmıştır. Yine pseudo-injektif modülün direk toplananının hangi şartlar altında quasi-injektif olduğu araştırılmıştır.

Tanım 5.1.1 [8]. R, sıfırdan farklı birimli bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. M nin her N altmodülü için N den M içine her R-homomorfizma M nin bir R-endomorfizmasına genişletilebiliyorsa M ye *quasi-injektif modül* denir. Eğer M nin her N altmodülü için N den M içine her R-monomorfizması M nin bir R-endomorfizmasına genişletilebiliyorsa M ye *pseudo-injektif modül* denir.

$$\begin{tikzcd} & M \\ N \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[u, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

Örnek 5.1.2 [8]. R, aşağıdaki işlem tablosu ile verilen ve $\{e_1, e_2, e_3, n_1, n_2, n_3, n_4\}$ tabanına sahip $\mathbb{Z}/<2>$ üzerinde bir cebir olsun.

	e_1	e_2	e_3	n_1	n_2	n_3	n_4
e_1	e_1	0	0	0	0	n_3	0
e_2	0	e_2	0	n_1	0	0	n_4
e_3	0	0	e_3	0	n_2	0	0
n_1	n_1	0	0	0	0	0	0
n_2	n_2	0	0	0	0	0	0
n_3	0	0	n_3	0	0	0	0
n_4	0	0	n_4	0	0	0	0

Buradan $M = e_2R$ bir sağ R-modül olsun. O zaman M, pseudo-injektif olan ancak quasi-injektif olmayan bir modüldür.

Lemma 5.1.3 [8]. *Bir pseudo-injektif modülün bir direk toplananı da pseudo-injektiftir.*

İspat. $M = M_1 \oplus M_2$ pseudo-injektif modül olsun. Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi f' endomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "i"] & M \\
N_1 \arrow[r, "i_1"'] \arrow[ur, "f"] & M_1 \arrow[u, "g"'] \arrow[r, "i"] & M \arrow[u, "f'"']
\end{tikzcd}$$

M, pseudo-injektif olduğundan $f'ii_1 = if$ dir. $f'_{|M_1} = g$ olsun. Buradan $if(n_1) = f'ii_1(n_1) = f'i_1(n_1) = g(n_1)$ ve $if(n_1) = f(n_1)$ olduğundan $f(n_1) = g(n_1)$ bulunur. Böylece istenen elde edilmiş olur. □

Teorem 5.1.4 [8]. *$N_1 \oplus N_2$ pseudo-injektif bir modül ve $\sigma : N_1 \to N_2$ bir monomorfizma olsun. O zaman σ parçalanabilirdir (split) ve N_1 quasi-injektiftir.*

İspat. $x \in N_1$ için $\eta(\sigma(x)) = (x,0)$ ile tanımlanan $\eta : \sigma(N_1) \to N_1 \oplus N_2$ bir monomorfizma ve $N_1 \oplus N_2$ pseudo-injektif olduğundan η, $N_1 \oplus N_2$ nin bir η^* endomorfizmasına genişletilebilir. Eğer $q : N_2 \to N_1 \oplus N_2$ doğal injeksiyon ve $p : N_1 \oplus N_2 \to N_1$ doğal projeksiyon ise o zaman $\lambda\sigma = 1_{N_1}$ olacak şekilde $\lambda = p\eta^* q : N_2 \to N_1$ vardır. Sonuç 2.1.9 dan σ, parçalanabilirdir.

Şimdi N_1 in quasi-injektif modül olduğunu gösterelim. $N_1 \oplus N_1' = N_2$ olsun. Böylece $N_1 \oplus N_2 = N_1 \oplus N_1 \oplus N_1'$ olur ve Lemma 5.1.3 ten, $T = N_1 \oplus N_1$ pseudo-injektiftir. $M_1 = M_2 = N_1$ olmak üzere $T = M_1 \oplus M_2$ yazalım. $N \leq N_1$ olmak üzere $\sigma : N \to N_1$ bir R-homomorfizma olsun. Burada N yi M_1 de içerilen T nin bir altmodülü olarak görürsek o zaman $x \in N$ için $\eta(x) = (x, \sigma(x))$ ile tanımlanan $\eta : N \to T$ bir monomorfizma olur. Buradan T, pseudo-injektif olduğundan η, T nin bir λ endomorfizmasına genişletilebilir. Eğer $q_1 : M_1 \to T$ doğal injeksiyon ve $p_2 : T \to M_2$ doğal projeksiyon ise $\mu = p_2\lambda q_1$, N_1 in bir endomorfizmasıdır ve σ nın bir genişlemesidir. Buradan N_1, quasi-injektif bulunur.

□

Sonuç 5.1.5 [8]. *Bir M modülünün quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul $M \oplus M$ nin pseudo-injektif olmasıdır.*

İspat. M modülü quasi-injektif ise $M \oplus M$ de quasi-injektif olur. Buradan $M \oplus M$ pseudo-injektif bulunur.
Karşıt olarak, $M \oplus M$ pseudo-injektif modül olsun. Teorem 5.1.4 ten M quasi-injektif olur. □

5.2. f-İnjektif Modüller

Bu kısımda Ram Niwas Gupta'nın [6] çalışması göz önüne alınmıştır. I-injektif modül ile f-injektif modül tanımları ve genelleştirmeleri verilmiştir. I-injektiflik için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir. Daha önceki bölümlerde göstermiş olduğumuz gibi bu bölümde de f-injektifliğin direk çarpımı koruduğu gösterilmiştir.

Tanım 5.2.1 [6]. R birimli bir halka, M birimsel sağ R-modül ve I, R nin bir sağ ideali olsun. I dan M ye her R-homomorfizması ve her $x \in I$ için $f(x) = mx$ olacak şekilde $m \in M$ varsa M ye *I-injektif modül* denir. Başka bir deyişle, M nin I-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f : I \to M$ R-homomorfizmasının R den M ye R-homomorfizmasına genişletilebilmesidir. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{tikzcd} & M \\ I \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & R \arrow[u, dotted, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Ayrıca her sonlu üretilmiş sağ I ideali için M modülü I-injektif ise M ye *f-injektif modül* denir.

Bir M modülü, R nin her sağ I ideali için I-injektif ise M ye *injektif modül* denir. Bu durum 'Eğer $p \in R$ ise M, pR-injektiftir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{lr}(p) \subseteq Mp$' biçiminde ifade

edilmiştir ([2], Teorem 2). Diğer yandan, $Mp \subseteq \mathbf{lr}(p)$ olduğundan
M, pR-injektiftir $\Leftrightarrow \mathbf{lr}(p) = Mp$ dir.

Burada $S \subseteq M$ altkümesi için S nin sağ sıfırlayanını $\mathbf{r}(S) = \{r \in R : Sr = 0\}$ ve $X \subseteq M$ altkümesi için X in sol sıfırlayanını $\mathbf{l}(X) = \{m \in M : mX = 0\}$ olarak göz önüne alalım.

Teorem 5.2.2 [6]. *Bir M modülünün her sonlu üretilmiş sağ I ideali için I-injektif olması için gerek ve yeter koşul;*
(1). *Her $p \in R$ için $\boldsymbol{lr}(p) = Mp$ ve*
(2). *Her sonlu üretilmiş A ve B sağ idealleri için $\boldsymbol{l}(A \cap B) = \boldsymbol{l}(A) + \boldsymbol{l}(B)$*
olmasıdır.

İspat. Her sonlu üretilmiş sağ I ideali için M, I-injektif olsun. Buradan her $p \in R$ için M, pR-injektif olur. Böylece $\mathbf{lr}(p) = Mp$ bulunur.
Şimdi A ve B, R nin sonlu üretilmiş sağ idealleri olsun. $x \in \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ alalım. O zaman $x = a + b$ olacak şekilde $a \in \mathbf{l}(A)$ ve $b \in \mathbf{l}(B)$ vardır. $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğundan $(a+b)(A \cap B) = 0$ ise $x(A \cap B) = 0$ bulunur. Yani $x \in \mathbf{l}(A \cap B)$ olur ve böylece $\mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B) \subset \mathbf{l}(A \cap B)$ bulunur. Tersine, $m \in \mathbf{l}(A \cap B)$ olsun. $m_1 \in M$ sabit elemanını seçelim. Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $f_1(a) = m_1 a$ ve $f_2(b) = (m + m_1)b$ olacak şekilde $f_1 : A \to M$, $f_2 : B \to M$ dönüşümlerini tanımlayalım. Açıkça
f_1 ve f_2, $A \cap B$ üzerinde eşittir. Böylece her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $f : A + B \to M$, $f(a+b) = f_1(a) + f_2(b)$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Buradan her $a \in A$, $b \in B$ için $n(a+b) = f(a+b)$ olacak şekilde $n \in M$ vardır. Böylece $na = f(a) = m_1 a$ olur. Yani $(n - m_1)A = 0$ bulunur. Aynı zamanda her $b \in B$ için $nb = f(b) = f_2(b) = (m + m_1)b$ olur. Yani $(m + m_1 - n)B = 0$ bulunur. O zaman
$m = (n - m_1) + (m + m_1 - n) \in \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ dir. O halde $\mathbf{l}(A \cap B) = \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ bulunur.
Karşıt olarak, (1) ve (2) özellikleri sağlansın. O zaman [2] sonucu gereğince her

$p \in R$ için M modülü pR-injektif olur. I, $(n-1)$ eleman tarafından üretilen bir sağ ideal olmak üzere M, I-injektif olsun. $I = a_1R + a_2R + ... + a_nR$ olmak üzere $f : I \to M$ olsun. $J = a_1R + ... + a_{n-1}R$ ve $K = a_nR$ alalım. $f_{|_J} = f_1$, $f_{|_K} = f_2$ olarak gösterelim. O zaman her $x \in J$ için $f_1(x) = m_1x$, her $y \in K$ için $f_2(y) = m_2y$ olacak şekilde M de m_1, m_2 elemanları vardır. f_1 ve f_2, $J \cap K$ üzerinde eşittir. Buradan her $x \in J \cap K$ için $f_1(x) = f_2(x)$ olup $m_1x = m_2x$ dir. O zaman $(m_1 - m_2)x = 0$ ise $(m_1 - m_2)(J \cap K) = 0$ olur. Bu durumda $m_1 - m_2 = n_1 - n_2$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbf{l}(J)$ ve $n_2 \in \mathbf{l}(K)$ vardır. $m = m_1 - n_1 (= m_2 - n_2)$ olsun. O zaman her $x \in J$ için
$mx = (m_1 - n_1)x = m_1x - n_1x = m_1x = f_1(x) = f(x)$ olur. Aynı şekilde $my = f(y)$ bulunur. Buradan her $x \in I$ için $f(x) = mx$ olur. O halde M, I-injektif modül olur. □

Sonuç 5.2.3 [6]. *R bir Noether halka ve M bir R-modül olsun. M nin injektif olması için gerek ve yeter koşul*

(1). *Her $p \in R$ için $\mathbf{lr}(p) = Mp$ ve*

(2). *R nin I ve J sağ idealleri için $\mathbf{l}(I \cap J) = \mathbf{l}(I) + \mathbf{l}(J)$*

olmasıdır.

İspat. R halkası Noether olduğundan her sağ ideali sonlu üretilmiştir. Teorem 5.2.2 gereği M modülü her sağ I ideali için I-injektif olduğundan injektif olur. □

Teorem 5.2.4 [6]. *M bir injektif sağ R-modül olsun. O zaman,*

(i). *Her A ve B sağ idealleri için $\mathbf{l}(A \cap B) = \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ dir.*

(ii). *R nin her sonlu S altkümesi için $\mathbf{lr}(S) = MS$ dir.*

İspat. (i). Teorem 5.2.2 den açıktır.

(ii). $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, R nin bir sonlu altkümesi olsun. O zaman

$\mathbf{lr}(S) = \mathbf{l}[\mathbf{r}(s_1) \cap \mathbf{r}(s_2) \cap ... \cap \mathbf{r}(s_n)] = \mathbf{lr}(s_1) + \mathbf{lr}(s_2) + ... + \mathbf{lr}(s_n) =$

$Ms_1 + Ms_2 + ... + Ms_n = MS$ olur. □

Teorem 5.2.5 [6]. *$\{M_i\}_{i\in I}$, R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\prod\limits_{i\in I} M_i$ nin f-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her M_i modülünün f-injektif olmasıdır.*

İspat. Genel injektif modül diyagramlarını kullanarak kolayca ispatlanır. □

Teorem 5.2.6 [6]. *$\{M_i\}_{i\in I}$, R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ nin f-injektif modül olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için M_i nin f-injektif olmasıdır.*

İspat. Her $i \in I$ için M_i, f-injektif olsun. I, R nin sonlu üretilmiş ideali olmak üzere $g : I \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ olsun. $J \subseteq I$ sonlu bir altküme olmak üzere $g(I) \subseteq \bigoplus\limits_{j\in J} M_j$ olur.

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi"] & \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \\ I \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & R \arrow[u, dotted, "f"'] \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Teorem 5.2.5 teki gibi $h_{|_I} = \pi g$ olacak şekilde h homomorfizması vardır.
$i : \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ olmak üzere $f = ih$ alınırsa $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, f-injektif olur. □

5.3. Small PPQ-İnjektif Modüller

Bu bölümde Wongwai ve Sthityanak'ın [15] çalışması ele alınmıştır. İlk olarak, *PP-M*-injektif ve *PPQ*-injektif modüller tanımlanmış ve genel özellikleri verilmiştir. Sonra *SP-M*-injektif modül ve buna bağlı olarak relatif injektif modüller tanımlanmıştır. Son olarak, small *PP-M*-injektif modülün bölüm modüllerinin hangi şart altında small *PP-M*-injektif olduğu araştırılmıştır.

Tanım 5.3.1 [15]. M bir sağ R-modül olsun. Eğer M nin bir small ve principal altmodülünden N ye her R-monomorfizma M den N ye bir

R-homomorfizmasına genişletilebilirse N ye *small pseudo principally M-injektif (*kısaca, *small PP-M-injektif) modül* denir. Eğer M modülü small PP-M-injektif ise M ye *small pseudo principally quasi-injektif (*kısaca, *small PPQ-injektif) modül* denir.

Lemma 5.3.2 [15].

(1). *Bir N modülü small PP-M-injektif ise o zaman N, M nin her X altmodülü için small PP-X-injektiftir.*

(2). *Bir small PP-M-injektif modülün her direk toplananı da small PP-M-injektiftir.*

İspat. (1). $m \in X$ olmak üzere $mR \ll X$ ve $\alpha : mR \to N$ bir R-monomorfizması olsun. Aşağıdaki diyagramda da görüldüğü gibi $mR \ll M$ olduğundan $i_1 : mR \to X$, $i_2 : X \to M$ içerim dönüşümleri olmak üzere $\alpha = \widehat{\alpha} i_2 i_1$ olacak şekilde $\widehat{\alpha} : M \to N$ bir R-homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ mR \arrow[r, "i_1"'] \arrow[urr, "\alpha"] & X \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, dotted] & M \arrow[u, dotted, "\widehat{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

O zaman α, $\widehat{\alpha} i_2$ ye genişler. Böylece istenen gösterilmiş olur.

(2). N bir small PP-M-injektif modül ve X, N nin bir direk toplananı olduğunu kabul edelim. $m \in M$ olmak üzere $mR \ll M$ ve $\alpha : mR \to X$ bir R-monomorfizması olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\varphi"] & N \\ mR \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, "\alpha"] & M \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi : X \to N$ bir doğal içerim dönüşümü olsun. $\varphi\alpha$ dönüşümü bir monomorfizma olduğundan $i : mR \to M$ içerim dönüşümü olmak üzere $\varphi\alpha = \beta i$ olacak şekilde $\beta : M \to N$ bir R-homomorfizması vardır. O zaman $\pi : N \to X$ doğal epimorfizma olmak üzere α, $\pi\beta$ ya genişler. Böylece X, small PP-M-injektif modül olur. $\square$

Örnek 5.3.3 [15]. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$, $M_R = R_R$ ve $N_R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman,

(1). N, small PP-M-injektif modüldür.

(2). N, small PPQ-injektif modüldür.

İspat.
(1). $0 \neq x \in F$ için $m = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $mR = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, M nin sıfırdan farklı small ve principal altmodülüdür. $\varphi : mR \to N$ bir R-monomorfizma olsun. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in mR$ olduğundan $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $x_{11}, x_{12} \in F$ vardır. $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Buradan $x_{11} = 0$ bulunur. Her $a, b, c \in F$ için $\widehat{\varphi} : M \to N$, $\widehat{\varphi}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_{11} & bx_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tanımlayalım. $\widehat{\varphi}$ nın bir R-homomorfizma olduğu açıktır ve φ homomorfizması $\widehat{\varphi}$ ya genişler. O halde N, small PP-M-injektif modül olur.

(2). N bir small PP-M-injektif modül olduğundan $N \leq M$ için Lemma 5.3.2.(1) gereğince N, small PP-N-injektif olur. Yani N, small PPQ-injektif modüldür. □

Tanım 5.3.4 [15]. Bir M modülünün bir small ve principal altmodülünden N ye her R-homomorfizması M den N ye genişletilebiliyorsa N ye *small principally M-injektif* (kısaca *SP-M-injektif) modül* denir. M ve N sağ R-modülleri için M, SP-N-injektif ve N, SP-M-injektif ise M ve N ye *relatif SP-injektif modüller* denir.

Önerme 5.3.5 [15]. *Eğer $M_1 \oplus M_2$ small PPQ-injektif modül ise M_1 ve M_2 modülleri relatif SP-injektiftir.*

İspat. $M_1 \oplus M_2$ bir small PPQ-injektif modül olsun. M_1 modülünün SP-M_2-injektif olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r] & M_1 \oplus M_2 \\
aR \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & M_2 \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$a \in M_2$, $aR \ll M_2$, $\varphi : aR \to M_1$ bir R-homomorfizma olsun. Her $x \in aR$ için $\alpha : aR \to M_1 \oplus M_2$, $\alpha(x) = (\varphi(x), x)$ ile tanımlansın. α bir R-monomorfizmadır. $M_1 \oplus M_2$, small PP-M_2-injektif modül olduğundan $i : aR \to M_2$ içerim dönüşümü ile $\alpha = \beta i$ olacak şekilde $\beta : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ R-homomorfizması vardır.
$\pi : M_1 \oplus M_2 \to M_1$ doğal epimorfizma olsun. O zaman $\varphi = \pi\alpha = \pi\beta i$ olur. Böylece M_1, SP-M_2-injektif modül olur. Benzer şekilde M_2 nin de SP-M_1-injektif modül olduğu gösterilir. $\square$

Teorem 5.3.6 [15]. *M bir sağ R-modül olsun. M nin her small ve principal altmodülü projektif ise o zaman bir small PP-M-injektif modülün her bölüm modülü small PP-M-injektif olur.*

İspat. N bir small PP-M-injektif modül, X, N nin bir altmodülü, $aR \ll M$ ve $\varphi : aR \to N/X$ bir R-monomorfizması olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\eta"] & N/X \\
aR \arrow[ur, "\widehat{\varphi}"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[u, dotted, "\beta"'] \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagramda görüldüğü gibi $\varphi = \eta\widehat{\varphi}$ olacak şekilde $\eta : N \to N/X$ doğal epimorfizması için $\widehat{\varphi} : aR \to N$ bir R-homomorfizması vardır. $x \in Ker(\widehat{\varphi})$ ise $\varphi(x) = \eta\widehat{\varphi}(x) = X$ olur. Buradan $x = 0$ dır. Böylece $\widehat{\varphi}$ bir monomorfizmadır. N small PP-M-injektif modül olduğundan $\beta : M \to N$ bir R-homomorfizması vardır. Bu durumda $\widehat{\varphi}$, β ya genişler. O zaman $\eta\beta$, φ nin M ye genişlemesidir. Buradan N/X bir small $PP-M$-injektif modül olur. $\square$

6. SONUÇ

Çalışmamızın bu bölümünde önceki bölümlerde tanımlanan farklı injektif modüller arasındaki ilişki araştırılmıştır.

6.1. Bazı Gerektirmeler

Lemma 6.1.1 *A ve B herhangi iki modül olsun.*

B, A-injektif modül $\Rightarrow$ *B, A-essential injektif modüldür.*

Karşıtı, A modülünün uniform olması durumunda sağlanır.

Lemma 6.1.2 *R bir halka, M bir sağ R-modül ve I, R nin bir sağ ideali olsun.*

O zaman,

M, f-injektif modül $\Rightarrow$ *M, I-injektif modül* $\Rightarrow$ *M, P-injektif modüldür.*

Lemma 6.1.3 *Her injektif modül f-injektiftir. Ancak karşıtı R nin Noether halka olması durumunda sağlanır.*

Lemma 6.1.4 *R birimli bir halka, M bir R-modül olsun.*

M, quasi-injektif modül $\Rightarrow$ *M, pseudo-injektif modüldür.*

Lemma 6.1.5 *M bir sağ R-modül olsun.*

M, SP-M-injektif modül $\Rightarrow$ *M, small PP-M-injektif modüldür.*

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F. W., Fuller, K. R. 1992. Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Math., No:13, Springer Verlag, New York.

[2] Baer, R. 1940. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. **Bull. Am. Math. Soc.**, 46: 800-806.

[3] Burgess, W. D., Raphael, R. 1993. On modules with the absolute direct summand property. In **Proceedings of the Biennial Ohio State-Denison Conferance** (1992). World Scientific, 137-148.

[4] Camillo, V. P. 1970. Balanced rings and a problem of Thrall. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 149: 143-153.

[5] Eckmann, B., Schopf, A. 1953. Über injective moduln. **Arch. Math.**, 4: 75-78.

[6] Gupta, R. N. 1967. On f-injective modules and semi-hereditary rings. **Fridtjof Nonsens Instıtutt Publications**, 35 (2): 323-328.

[7] Ikeda, M., Nakayama, T. 1954. On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 5: 15-19.

[8] Jain, S. K., Singh, S. 1975. Quasi-injective and pseudo-injective modules. **Canad. Math. Bull.**, 18 (3): 359-366.

[9] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph no.17.

[10] Matlis, E. 1958. İnjective modules over Noetherian rings. **Pacific Journal Math.**, 8: 511-528.

[11] Mohamed, S. H., Müller, B. J. 1990. Continuous and Discrete Modules. Cambridge at the University Press, Cambridge.

[12] Moharam, M. R. 2004. On generalized injective modules and related concepts. Faculty of Education Ain Shams University, Cairo.

[13] Nicholson, W. K., Yousif, M. F. 1995. Principally injective rings. **Journal of Algebra**, 174: 77-93.

[14] Sharpe, D. W., Wamos, P. 1972. İnjective Modules. Cambridge at the University Press, Cambridge.

[15] Wongwai, S., Sthityanak, O. 2012. Small PPQ-injective modules. **Science and technology RMUTT Journal**, 2 (1): 29-38.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Serpil ÜNLÜ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Balıkesir, 30.04.1990

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	serpilunlu90@gmail.com
Tarih	:	08.01.2015