T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLUMSU PERMÜTASYON GRUPLARI VE $\mathcal{S}$-GRUPLARI

MAT-YL-2008-0005

Okan ARSLAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT

AYDIN - 2008

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLUMSU PERMÜTASYON GRUPLARI VE $\mathcal{S}$-GRUPLARI
MAT-YL-2008-0005

Okan ARSLAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT

AYDIN - 2008

İÇİNDEKİLER

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE AYDIN

Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Okan ARSLAN tarafından hazırlanan “Sonlumsu Permütasyon Grupları ve $\mathcal{S}$-Grupları” başlıklı tez, ../../.... tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Mahmut KUZUCUOĞLU	Orta Doğu Teknik Ü.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT	Adnan Menderes Ü.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Selma A. BHUPAL	Adnan Menderes Ü.	
Üye :			
Üye :			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

İNTİHAL BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Okan ARSLAN

İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SONLUMSU PERMÜTASYON GRUPLARI VE $\mathcal{S}$-GRUPLARI

Okan ARSLAN

Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT

Bu tez; A. O. Asar'ın "On Finitary Permutation Groups" ve M. R. Dixon, M. J. Evans, V. N. Obraztsov, J. Wiegold'un "Groups That Are Covered By Non-Abelian Simple Groups" adlı makalelerinin bir derlemesidir.

Bir G grubunun her elemanının eşlenik sınıfı sonlu ise G ye FC-grup denir. Kendisi FC-grup olmayan ancak her özalt grubu FC-grup olan gruplara minimal FC-olmayan grup denir.

Komütatör grubu kendisinden farklı olan minimal FC-olmayan gruplar V. V. Belyaev tarafından 1978 yılında sınıflandırılmıştır. Belyaev, komütatör grubu kendisine eşit olan minimal FC-olmayan yerel sonlu bir G grubu var ise ya $G/Z(G)$ basit bir grup ya da p asal olmak üzere G nin bir p-grup olduğunu kanıtlamıştır. 1989 da Kuzucuoğlu ve Phillips $G/Z(G)$ nin basit olamayacağını göstermişlerdir. Dolayısıyla $G = G'$ özelliğini sağlayan yerel sonlu minimal FC-olmayan bir grup var ise bu grup bir p-gruptur. Ancak böyle bir grubun var olup olmadığı 30 yıldır açık bir problemdir.

F. Leinen ve V. V. Belyaev birbirlerinden bağımsız olarak böyle bir grup var ise bu grubun sonsuz bir Ω kümesi üzerindeki sonlumsu permütasyon grubunun bir altgrubuna izomorfik olacağını kanıtlamışlardır. Bu durumda $G = G'$ özelliğini sağlayan yerel sonlu minimal FC-olmayan bir grubun var olup olmadığını incelemek sonlumsu permütasyon grubun altgruplarını incelemekten geçmektedir. Asar bu makalesinde aşağıdaki şartların var olması durumunda böyle bir grubun olamayacağını kanıtlamıştır:
Yerel sonlu minimal FC olmayan bir G grubunun normal olmayan sonlu her F altgrubu için $y^p \in FC_G(F)$ olacak şekilde en az bir $y \in G \backslash N_G(F)$ varsa G mükemmel olamaz.
Değişmeli olmayan basit altgruplarının birleşimi ile oluşturulan bütün grupların oluşturduğu sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterelim. Bölüm 4 te, bu özellikte olan grupların($\mathcal{S}$-gruplar) temel özellikleri verilmiştir. Bu bölümde; G yerel derecelendirilmiş bir $\mathcal{S}$-grup, M grubu G nin serbest periyodik radikali ve G nin tüm sonlu mertebeden elemanları tarafından üretilen normal altgrubu N olmak üzere $N \neq 1$ ise $M \leq N \leq G$, G/N serbest periyodik, N/M basit olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte M de birimden farklı bir eleman varsa G nin sonlu her altgrubunun ya devirli ya da metadevirli olduğu kanıtlanmıştır.

2008, 72 sayfa

Anahtar Sözcükler

FC grup, minimal FC olmayan grup, sonlumsu permütasyon, hemen hemen primitif grup, tamamen imprimitif grup, yerel sonlu grup.

ABSTRACT

Master's Thesis

FINITARY PERMUTATION GROUPS AND $\mathcal{S}$-GROUPS

Okan ARSLAN

Adnan Menderes University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Erdal ÖZYURT

This thesis is a survey of A. O. Asar's and M. R. Dixon, M. J. Evans, V. N. Obraztsov, J. Wiegold's papers that are "On Finitary Permutation Groups" and "Groups that are Covered by Non-Abelian Simple Groups".

A group G is called FC-group if the conjugacy class of every element is finite. G is called minimal non-FC-group if G is not an FC-group, but every proper subgroup of G is an FC-group.

All minimal non-FC-groups that are different from their commutator subgroups are classified by Belyaev in 1978. Belyaev proved that if there exists a locally finite minimal non-FC-group G that is equal to its commutator subgroup is either $G/Z(G)$ is simple or G is a p-group for some prime p. In 1989, Kuzucuoğlu and Phillips showed that $G/Z(G)$ can not be simple. Therefore, if there exists a locally finite minimal non-FC-group G with $G = G'$ then it is a p-group for some prime p. But, existence of a perfect locally finite minimal non-FC-group has been a problem for 30 years.

F. Leinen and V. V. Belyaev are proved independently that if there exists such a group then it has a non-trivial representation into the group of finitary permutations on some infinite set Ω. So the existence problem of a perfect locally finite minimal non-FC-group turns out to investige to finitary permutation groups. Asar, in this paper, proved that there exist no such group if the following holds:

If G is a locally finite minimal non-FC-group and for every finite non-normal subgroup F of G there exists $y \in G \backslash N_G(F)$ such that $y^p \in FC_G(F)$, then G can not be perfect.

Let $\mathcal{S}$ denote the class of all groups that are the set theoretic union of their non-abelian simple subgroups. In chapter 4, some properties of such groups are examined. In this chapter, it is showed that if G is locally graded group, M is torsion-free radical of G and N is the normal subgroup of G generated by all the elements of finite order and if $N \neq 1$, then $M \leq N \leq G$, G/N torsion-free, N/M simple. In addition, if also $M \neq 1$, then every finite subgroup of G is cyclic or metacyclic.

2008,72 pages

Key Words:

FC group, minimal non-FC-group, finitary permutation, almost primitive group, totally imprimitive group, locally finite group.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşumunda bilgi ve birikimlerini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT'a; tezin oluşturulmasında yardım taleplerimi geri çevirmeyen sayın Öğr. Gör. Dr. Cansu BETİN'e; yüksek lisans yaptığım süre boyunca beni yönledirip her türlü desteği veren sayın Prof. Dr. Mahmut KUZUCUOĞLU'na; tezde yaptığı düzeltmelerden dolayı sayın Yrd. Doç. Dr. Selma A. BHUPAL'a ve tezin yazımında yardımı geçen bölümdeki tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde kuşkusuz en büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Bir G grubunun her elemanının eşlenik sınıfı sonlu ise G ye FC-grup denir. Kendisi FC-grup olmayan ancak her özalt grubu FC-grup olan gruplara minimal FC-olmayan grup denir.

Belyaev, [2] de komütatör grubu kendisinden farklı olan minimal FC-olmayan grupları sınıflandırmıştır. Belyaev, çalışmasında, bu özellikteki bir grubun Miller-Moreno tipinde grup olduğunu kanıtlamıştır. Eğer bir G grubu için G' sonsuz ve G nin aşikar olmayan her altgrubunun komütatör altgrubu sonlu oluyorsa G ye Miller-Moreno tipinde gruptur denir. Ayrıca Belyaev bu çalışmada, komütatör grubu kendisine eşit olan yerel sonlu minimal FC-olmayan bir G grubu var ise ya $G/Z\left(G\right)$ basit yerel sonlu bir grup ya da p asal olmak üzere G nin yerel sonlu bir p-grup olduğunu kanıtlamıştır. Daha sonra Kuzucuoğlu ve Phillips, [12] de, mükemmel, yerel sonlu, minimal FC-olmayan bir G grubu için $G/Z\left(G\right)$ nin basit olamayacağını göstermişlerdir. Bu durumda mükemmel, yerel sonlu, minimal FC-olmayan bir grup var ise bu grup p asal olmak üzere bir p-gruptur. Dolayısıyla, mükemmel, yerel sonlu, minimal FC-olmayan bir grubun var olup olmadığı problemi, mükemmel, yerel sonlu, minimal FC-olmayan bir p-grup var mıdır problemine dönüşmüştür. Bu soru üzerinde yoğun olarak farklı ülkelerde birçok matematikçi çalışmış ve sonunda [4] te V. V. Belyaev ve [13] te F. Leinen birbirlerinden bağımsız olarak mükemmel, yerel sonlu, minimal FC-olmayan bir grubun, sonsuz bir Ω kümesi üzerindeki sonlumsu permütasyon grubunun bir altgrubuna izomorfik olacağını kanıtlamışlardır.

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω üzerindeki bir x permütasyonu için $\operatorname{supp}(x) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha x \neq \alpha\}$ kümesine x in hareket ettirdiği noktaların kümesi(support) denir. Hareket ettirdiği noktaların kümesi sonlu olan x permütasyonlarının oluşturduğu küme bir gruptur. Bu gruba sonlumsu permütasyon grup denir ve $FSym\left(\Omega\right)$ ile gösterilir.

1980 li yıllara kadar sonlumsu permütasyon gruplarının yapısını anlamak üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır. 1966 yılında D. A. Suprunenko, Ω sonsuz bir küme olmak üzere $FSym\,(\Omega)$ nın her transitif yerel nilpotent altgrubunun bir p-grup olduğunu göstermiştir. 1974 yılında D. Segal, $FSym\,(\Omega)$ nın primitif altgrupları üzerine çalışmalar yapmış; 1975 ve 1976 yıllarında P. M. Neumann, imprimitif bir grubun maksimal bloğunun olup olmaması durumlarını inceleyerek $FSym\,(\Omega)$ da tamamen imprimitif, hemen hemen primitif altgrupların tanımlarını vermiş ve bu grupların yapılarını ayrı ayrı incelemiştir.

1974 yılında J. Wiegold, sonlumsu permütasyon grubunun bir G altgrubu için aşağıdaki ifadelerin birbirine denk olduğunu göstererek $Sym\,(\Omega)$ ya gömülebilen yerel sonlu gruplar ile ilgili bilgiler elde etmiştir:

(i) G bir FC gruptur.

(ii) G nin Ω üzerindeki tüm orbitleri sonludur.

(iii) G grubu sonlu epimorfik görüntülerinin direkt çarpımının bir altgrubuna izomorftur.

$G = G'$ özelliğini sağlayan yerel sonlu minimal FC-olmayan bir grubun var olup olmadığını incelemek sonlumsu permütasyon grubun altgruplarını incelemekten geçmektedir. Asar bu makalesinde aşağıdaki şartların var olması durumunda böyle bir grubun olamayacağını kanıtlamıştır:

Yerel sonlu minimal FC olmayan bir G grubunun normal olmayan sonlu her F altgrubu için $y^p \in FC_G(F)$ olacak şekilde en az bir $y \in G \backslash N_G(F)$ varsa G mükemmel olamaz.

Bir G grubunda herbir eleman G nin değişmeli olmayan basit bir altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye $\mathcal{S}$-grup denir. Yerel sonlu $\mathcal{S}$-gruplar Sonuç 4.24 ten de kolayca görüleceği üzere yerel sonlu basit gruplardır.

Yerel sonlu basit gruplarla sonlu basit grupları ilişkilendiren en önemli teoremlerden birisini Otto Kegel kanıtlamıştır. Buna göre; mertebesi sayılabilir sonsuz olan her yerel sonlu basit bir grup için $G_1 \le G_2 \le \cdots \le G_n \le \cdots$ şeklinde sonlu gruplardan oluşan artan bir altgrup dizisi yazılabilir ve her $i \in \mathbb{N}$ için G_i nin öyle bir maksimal normal N_i altgrubu vardır ki $G_i \cap N_{i+1} = 1$ olur([10, Teorem 4.5]). Burada $(G_i, N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisine Kegel dizisi, G_i/N_i sonlu basit gruplarına da Kegel çekirdek denir.

Kegel dizilerinde her $i \in \mathbb{N}$ için $N_i = 1$ olursa bu gruplar $\mathcal{S}$-gruplardır. Ancak [8] de Hickin ve [19] da Zaleskii-Serezhkin'in sonuçlarına göre, mertebesi sayılabilir sonsuz olan yerel sonlu basit grupların hangi Kegel dizisi alınırsa alınsın $N_i \neq 1$ dir. Bu durumda mertebesi sayılabilir sonsuz olan her yerel sonlu basit grup bir $\mathcal{S}$-grup değildir. Yerel sonlu her $\mathcal{S}$-grup basit grup olmasında rağmen yerel sonlu olma şartı kaldırılırsa yazarlar bu makalede basit olmayan $\mathcal{S}$-grupların nasıl inşa edileceğini göstermişlerdir. Yani(yerel sonlu olmayan) öyle $\mathcal{S}$-gruplar vardır ki bunlar basit grup değildir.

Bu bölümde; G yerel derecelendirilmiş bir $\mathcal{S}$-grup, M grubu G nin serbest periyodik radikali ve G nin tüm sonlu mertebeden elemanları tarafından üretilen normal altgrubu N olmak üzere $N \neq 1$ ise $M \leq N \leq G$, G/N serbest periyodik, N/M basit olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte M de birimden farklı bir eleman varsa G nin sonlu her altgrubunun ya devirli ya da metadevirli olduğu kanıtlanmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE BAZI TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde sıklıkla kullanacağımız temel tanım ve lemmalarla birlikte simetrik grup ve sonlumsu permütasyon grubu ile ilgili bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.1 Ω boştan farklı bir küme olmak üzere Ω dan Ω ya bütün birebir ve örten fonksiyonların oluşturduğu küme bir gruptur. Bu gruba Ω üzerinde tanımlı *simetrik grup* denir ve $Sym(\Omega)$ ile gösterilir.
Verilen bir $x \in Sym(\Omega)$ için

$$\mathrm{supp}(x) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha x \neq \alpha\}$$

kümesine x in *hareket ettirdiği noktaların kümesi(support)* denir. Benzer şekilde $Sym(\Omega)$ nın bir H altgrubu için

$$\mathrm{supp}\, H = \{\alpha \in \Omega \mid \text{en az bir } h \in H \text{ için } \alpha h \neq \alpha\}$$

kümesine de H nin *bir elemanı altında hareket eden noktaların kümesi(supportu)* denir. Eğer $\mathrm{supp}(x)$ sonlu ise x e *sonlumsu permütasyon* denir. Ω üzerinde tüm sonlumsu permütasyonların kümesi bir gruptur ve bu grup $FSym(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2 G bir grup ve $\mathcal{X}$ bir grup özelliği olsun. G nin sonlu üreteçli her alt kümesi $\mathcal{X}$ özelliğini sağlıyorsa G ye *yerel* $\mathcal{X}$*-grup* denir.

Tanım 2.3 G bir grup, $\mathcal{X}$ ile $\mathcal{Y}$ birer grup özelliği olsun. G nin $\mathcal{X}$ özelliğinde bir N normal altgrubu, G/N grubu $\mathcal{Y}$ özelliğini sağlayacak şekilde varsa G ye $\mathcal{X}$*-by-*$\mathcal{Y}$ *grup* denir.

Tanım 2.4 p bir asal sayı olmak üzere bir G grubu mertebesi p olan devirli grupların direkt çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu gruba *elemanter değişmeli* p*-grup* denir.

Tanım 2.5 G bir grup, Ω bir küme olsun. Eğer $\Omega \times G \longrightarrow \Omega$ dış işlemi,

(i) her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha 1_G = \alpha$,

(ii) her $\alpha \in \Omega$ ve her $x, y \in G$ için $(\alpha x)\, y = \alpha xy$

şartlarını sağlıyorsa G, Ω *üzerine etki eder* denir. Örneğin, $Sym(\Omega)$ nın her G altgrubu Ω üzerine etki eder.

G grubu Ω üzerine etki ediyor ise verilen bir $x \in G$ için $\varphi_x : \Omega \longrightarrow \Omega$, $\varphi_x(\alpha) = \alpha x$ ile tanımlı fonksiyon birebir ve örtendir. Çünkü $(\varphi_x)^{-1} = \varphi_{x^{-1}} : \Omega \longrightarrow \Omega$ tanımlanırsa $\alpha(\varphi_x \circ \varphi_{x^{-1}}) = \alpha(\varphi_{x^{-1}} \circ \varphi_x) = \alpha$ olur. Böylece $\varphi : G \longrightarrow Sym(\Omega)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha\varphi(xy) = \alpha\varphi(x)\,\varphi(y)$ olduğundan φ bir homomorfizmadır. G den $Sym(\Omega)$ ya tanımlı bir homomorfizmaya G nin Ω üzerine *permütasyon temsili* adı verilir. O halde G grubu Ω üzerine etki ediyorsa G nin Ω üzerinde bir permütasyon temsili vardır.

Tanım 2.6 G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin.

(i) $\alpha \in \Omega$ için $\alpha G = \{\alpha x \mid x \in G\}$ kümesine α nın G deki *orbiti* adı verilir.

(ii) $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha = \{x \in G \mid \alpha x = \alpha\}$ kümesine α nın G deki *nokta sabitleyeni* adı verilir. Ω nın boştan farklı bir Δ altkümesi için

$$G_\Delta = \{x \in G \mid \text{ her } \delta \in \Delta \text{ için } \delta x = \delta\}$$

kümesine Δ nın G deki *noktasal sabitleyeni*,

$$G_{\{\Delta\}} = \{x \in G \mid \Delta x = \Delta\}$$

kümesine de Δ nın G deki *kümesel sabitleyeni* adı verilir.

Lemma 2.7 *G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin. Bu takdirde her $\alpha \in \Omega$ için $|\alpha G| = |G : G_\alpha|$ olur. G sonlu ise $|G| = |\alpha G|\,|G_\alpha|$ dır.*

İspat. [5, Teorem 1.4A] □

Tanım 2.8 G bir grup olsun. G nin her elemanının eşlenik sınıfı sonlu ise G ye *FC grup* denir. Eğer G nin aşikar olmayan her altgrubu FC grup fakat kendisi FC grup değilse bu durumda G ye *minimal FC olmayan grup* denir.

G grubunun kendisi üzerine eşlenik etkisi tanımlanırsa $x \in G$ için $G(x) = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ ve $G_x = \{g \in G \mid xg = gx\} = C_G(x)$ olur. O halde Lemma 2.7 gereği x elemanının G deki eşlenik sınıfının eleman sayısı $|G : C_G(x)|$ tir. Dolayısıyla G nin herbir x elemanı için $|G : C_G(x)|$ sonlu ise G ye FC grup denir.

Tanım 2.9 G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin. Her $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha x = \beta$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ varsa G ye *transitif grup* veya G grubu Ω *üzerine transitif etki eder* denir.

Tanım 2.10 G grubu Ω kümesi üzerine transitif etki etsin. Ω nın boştan farklı bir Δ altkümesi verildiğinde G de alınan herbir x elemanı için $\Delta x = \Delta$ veya $\Delta x \cap \Delta = \emptyset$ oluyorsa Δ ya G nin bir *bloğu* denir. Ω nın kendisi ve tek elemanlı altkümeleri G nin birer bloklarıdır. Bu bloklara G nin *aşikar blokları* denir.

Tanım 2.11 G grubu Ω kümesi üzerine transitif etki etsin. Eğer G nin aşikar olmayan bir bloğu yoksa G ye *primitif grup* veya G grubu Ω *üzerine primitif etki eder* denir. Eğer G nin aşikar olmayan bir bloğu varsa bu durumda G ye *imprimitif grup* denir.

Tanım 2.12 Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın imprimitif bir altgrubu olsun. Eğer G nin bir maksimal bloğu varsa G ye *hemen hemen primitif(almost primitive)*, G nin bir maksimal bloğu yoksa G ye *tamamen imprimitif(totally imprimitive)* grup denir.

Lemma 2.13 Ω *boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere* $FSym(\Omega)$ *yerel sonludur.*

İspat. $g_1, \ldots, g_n \in FSym(\Omega)$ olmak üzere $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \leq FSym(\Omega)$ olsun. Bu durumda $\operatorname{supp} \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \subseteq \operatorname{supp}(g_1) \cup \cdots \cup \operatorname{supp}(g_n)$ olur. $g_1, \ldots, g_n \in FSym(\Omega)$ olduğundan $\operatorname{supp}(g_1) \cup \cdots \cup \operatorname{supp}(g_n)$ kümesi sonlu eleman içerir. O halde $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ grubunun sonlu küme üzerine aşikar olmayan etkisi vardır. Dolayısıyla bu grup sonludur. Böylece $FSym(\Omega)$ yerel sonlu olur. □

Lemma 2.14 Ω *sonsuz bir küme ve* $G \leq FSym(\Omega)$ *olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) G *nin her orbiti sonludur.*

(ii) G *bir FC gruptur.*

(iii) G *residually sonludur.*

İspat. [5, Lemma 8.3.D] □

Lemma 2.15 Ω *sonsuz bir küme ve* $G \leq FSym(\Omega)$ *olsun.* H *grubu* G *nin aşikar olmayan bir normal altgrubu ve* G/H *bir FC grup ise* H*,* G *nin tüm sonsuz orbitleri üzerinde transitiftir.*

İspat. [5, Lemma 8.3.E] □

Lemma 2.16 *Bir* G *grubunun normalleyen şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul* G *nin bütün altgruplarının yükselen(ascendant) olmasıdır.*

İspat. [16, 12.2.1] □

Lemma 2.17 *(Grün)* G *mükemmel grup ise* $Z(G/Z(G)) = 1$ *dir.*

İspat. $gZ(G) \in Z(G/Z(G))$ olsun. O halde her $x \in G$ için $gZ(G)$ ile $xZ(G)$ değişmelidir. Buradan $[x, g] \in Z(G)$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \phi_g : G &\rightarrow Z(G) \\ x &\mapsto [x, g] \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. $x, y \in G$ için,

$$\phi_g(xy) = [xy, g] = y^{-1}x^{-1}g^{-1}xyg = y^{-1}x^{-1}g^{-1}xgg^{-1}yg = y^{-1}[x, g]\, g^{-1}yg$$

olur. $[x, g] \in Z(G)$ olduğundan $y^{-1}[x, g] = [x, g]\, y^{-1}$ dir. Buradan,

$$\phi_g(xy) = [x, g]\, y^{-1}g^{-1}yg = [x, g]\,[y, g] = \phi_g(x)\,\phi_g(y)$$

bulunur. O halde ϕ_g bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmanın çekirdeği,

$$\mathrm{Ker}(\phi_g) = \{x \in G \mid [x, g] = 1\} = C_G(g)$$

olduğundan $G/C_G(g) \cong \mathrm{Im}(\phi_g) \leq Z(G)$ dir. O halde $G/C_G(g)$ değişmelidir. Öyleyse $G' \leq C_G(g)$ olur. G mükemmel olduğundan $G = C_G(g)$ dir. Dolayısıyla $g \in Z(G)$ olur. Buradan $Z(G/Z(G)) = 1$ elde edilir. □

Lemma 2.18 *G yerel sonlu bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. N ve G/N yerel çözülebilir ise G yerel çözülebilirdir.*

İspat. G nin sonlu üreteçli bir H altgrubunu alalım. Bu durumda $HN/N \cong H/H \cap N$ grubu G/N nin bir altgrubudur. G yerel sonlu olduğundan H sonludur. G/N yerel çözülebilir ve H sonlu olduğundan $H/H \cap N$ çözülebilirdir. O halde bir r doğal sayısı için $H^{(r)} \subset H \cap N$ olur. H sonlu olduğundan $H \cap N$ sonludur. Bu takdirde N yerel çözülebilir olduğundan $H \cap N$ çözülebilir olur. Öyleyse $H^{(r)}$ çözülebilirdir. Buna göre H çözülebilir olur. □

Sonuç 2.19 *G yerel sonlu bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. N yerel çözülebilir ve G/N değişmeli ise G yerel çözülebilirdir.*

Lemma 2.20 (*Plotkin*) *Bir grup normalleyen şartını sağlıyorsa yerel nilpotenttir.*

İspat. [16, 12.2.2] □

Lemma 2.21 *G yerel nilpotent bir grup olsun. G nin tüm sonlu mertebeden elemanlarının kümesi T, G nin endomorfizmaları altında değişmez kalır. Bu durumda G/T nin her elemanı sonsuz mertebedendir ve T grubu p-grupların direkt çarpımı şeklinde yazılabilir.*

İspat. [16, 12.1.1] □

Lemma 2.22 *G grubu Ω kümesi üzerine transitif etki etsin. Herhangi bir $x \in G$ için aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) Δ, *G nin aşikar olmayan bir bloğu ise* $G^x_{\{\Delta\}} = G_{\{\Delta x\}}$ *olur.*

(ii) $u \in G$ *ise* $\mathrm{supp}\,(u^x) = \mathrm{supp}\,(u)\,x$ *olur.*

(iii) $H \leq G$ *ise* $(\mathrm{supp}\,H)\,x = \mathrm{supp}\,H^x$ *olur.*

İspat. (i) $g \in G^x_{\{\Delta\}}$ ise en az bir $g_1 \in G_{\{\Delta\}}$ için $g = x^{-1}g_1x$ olur. Buradan $(\Delta x)\,g = \Delta x x^{-1} g_1 x = \Delta g_1 x = \Delta x$ olacağından $g \in G_{\{\Delta x\}}$ bulunur. Tersine, $g \in G_{\{\Delta x\}}$ ise $\Delta x g = \Delta x$ tir. Buna göre $\Delta x g x^{-1} = \Delta$ olacağından $g \in G^x_{\{\Delta\}}$ elde edilir.

(ii) $\alpha \in \mathrm{supp}\,(u^x)$ ise $\alpha x^{-1} u x \neq \alpha$ olur. Buradan $\alpha x^{-1} u \neq \alpha x^{-1}$ olacağından $\alpha x^{-1} \in \mathrm{supp}\,(u)$ bulunur. Öyleyse $\alpha \in \mathrm{supp}\,(u)\,x$ tir. Tersine $\alpha \in \mathrm{supp}\,(u)\,x$ ise $\alpha x^{-1} \in \mathrm{supp}\,(u)$ dur. O halde $\alpha x^{-1} u \neq \alpha x^{-1}$ dir. Buradan $\alpha \in \mathrm{supp}\,(u^x)$ elde edilir.

(iii) $(\mathrm{supp}\,H)\,x \subseteq \mathrm{supp}\,H^x$ olduğunu görelim. $\beta \in (\mathrm{supp}\,H)\,x$ ise $\beta = \alpha x$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in \mathrm{supp}\,H$ vardır. $\alpha \in \mathrm{supp}\,H$ olduğundan en az bir $h \in H$ için $\alpha h \neq \alpha$ dır. Böylece $\beta h^x = \alpha x x^{-1} h x = \alpha h x \neq \beta$ olur. Öyleyse $\beta h^x \neq \beta$ ve $h^x \in H^x$ olduğundan $\beta \in \mathrm{supp}\,H^x$ tir. Şimdi de $\mathrm{supp}\,H^x \subseteq (\mathrm{supp}\,H)\,x$ olduğunu görelim. $\beta \in \operatorname{supp} H^x$ ise en az bir $h^x \in H^x$ için $\beta h^x \neq \beta$ dır. Buna göre en az bir $h \in H$ için $\beta x^{-1} h \neq \beta x^{-1}$ olur. O halde $\beta \in (\operatorname{supp} H)\, x$ bulunur. □

Lemma 2.23 *G grubu Ω kümesi üzerine transitif etki etsin ve Δ ile Γ, G nin aşikar olmayan iki bloğu olsun. Bu durumda:*

(i) $G_{\{\Gamma\}}$, *Γ üzerine transitif etki eder.*

(ii) $\Delta \subseteq \Gamma$ *ise* $G_\Gamma \subseteq G_\Delta$ *olur.*

(iii) $\Delta \subseteq \Gamma$ *ise* $G_{\{\Delta\}} \subseteq G_{\{\Gamma\}}$ *olur.*

(iv) $\Delta \subseteq \Gamma$ *olmak üzere* $\left|G_{\{\Gamma\}} : G_{\{\Delta\}}\right|$ *sonludur.*

İspat. (i) Verilen bir $g \in G_{\{\Gamma\}}$ için $\psi_g(\gamma) = \gamma g$ ile tanımlı fonksiyon Γ üzerinde bir permütasyondur. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \psi : G_{\{\Gamma\}} &\rightarrow Sym(\Gamma) \\ g &\mapsto \psi_g \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Tanımlanan ψ fonksiyonu bir homomorfizma olduğundan $G_{\{\Gamma\}}$ grubu Γ üzerine etki eder. Şimdi bu etkinin transitif olduğunu gösterelim. G transitif olduğundan $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $\gamma_1 x = \gamma_2$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Buna göre $\Gamma x \cap \Gamma \neq \emptyset$ ve Γ blok olduğundan $\Gamma x = \Gamma$ bulunur. O halde $x \in G_{\{\Gamma\}}$ olur. Böylece $G_{\{\Gamma\}}$ nın Γ üzerine etkisi transitiftir.

(ii) $g \in G_\Gamma$ ise her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma g = \gamma$ dır. $\Delta \subseteq \Gamma$ olduğundan Δ nın her δ elemanı için $\delta g = \delta$ olacağından $g \in G_\Delta$ bulunur.

(iii) $g \in G_{\{\Delta\}}$ ise $\Delta g = \Delta$ dır. $\delta \in \Delta \subseteq \Gamma$ için $\delta g \in \Delta g = \Delta \subseteq \Gamma$ olduğundan $\Gamma \cap \Gamma g \neq \emptyset$ dir. Γ, G nin bir bloğu olduğundan $\Gamma = \Gamma g$ olur. Öyleyse $g \in G_{\{\Gamma\}}$ bulunur.

(iv) (i) de tanımlanan etkinin çekirdeği G_Γ olduğundan (ii) den $G_\Gamma \subseteq G_\Delta \subseteq G_{\{\Delta\}}$ dır. 1.İzomorfizma teoremi gereği $G_{\{\Gamma\}}/G_\Gamma$ grubu $Sym(\Gamma)$ grubunun bir altgrubuna izomorftur. Γ sonlu olduğundan $Sym(\Gamma)$ sonludur. Dolayısıyla $\left|G_{\{\Gamma\}} : G_{\{\Delta\}}\right|$ sonlu olur. □

Lemma 2.24 *Ω sonsuz bir küme ve G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir altgrubu olsun. Bu durumda $\langle G_\alpha \mid \alpha \in \Omega \rangle = G$ dir.*

İspat. $g \in G$ olsun. G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir altgrubu olduğundan $\text{supp}(g)$ sonludur. O halde $\alpha \in \Omega \setminus \text{supp}(g)$ için $\alpha g = \alpha$ dır. Buradan $g \in G_\alpha$ bulunur. $\square$

Lemma 2.25 *G bir grup, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $H_1, \ldots, H_n \leq G$ olsun. $g_i \in G$ olmak üzere $G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i g_i$ ise $|G : H_i| < n$ olacak şekilde bir $i = 1, \ldots, n$ vardır.*

İspat. [14] $\square$

Teorem 2.26 (*P. M. Neumann*) *G grubu sonsuz bir Ω kümesi üzerine transitif etki etsin. Ω nın sonlu bir Δ altkümesi için $\Delta g \cap \Delta = \emptyset$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.*

İspat. Her $g \in G$ için $\Delta g \cap \Delta \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O halde verilen bir $g \in G$ için $\delta_1 g = \delta_2$ olacak şekilde $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ vardır. Buradan $G = \bigcup_{\delta_1, \delta_2 \in \Delta} \{g \in G \mid \delta_1 g = \delta_2\}$ olur. $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ için $\delta_1 g = \delta_2$ ise $G_{\delta_1} g = \{xg \mid x \in G_{\delta_1}\}$ dir. O halde $\{g \in G \mid \delta_1 g = \delta_2\}$ kümesi G_{δ_1} in bir eşkümesidir. Δ sonlu olduğundan G grubu, $\delta \in \Delta$ olmak üzere G_δ nokta sabitleyenlerinin eşkümelerinin sonlu birleşimi olur. Öyleyse Lemma 2.25 gereği en az bir $\delta \in \Delta$ için $|G : G_\delta| = |\delta G|$ sonludur. Ancak bu G nin transitif ve Ω nın sonsuz olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\Delta g \cap \Delta = \emptyset$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. $\square$

Lemma 2.27 *Ω sonsuz bir küme ve G grubu $FSym(\Omega)$ nın imprimitif bir altgrubu olsun. G nin aşikar olmayan her bloğu sonludur.*

İspat. Δ, G nin aşikar olmayan bir bloğu olsun. $\delta \in \Delta$ ve $\alpha \in \Omega \setminus \Delta$ olmak üzere G transitif olduğundan $\delta x = \alpha$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ vardır. Dolayısıyla $\Delta x \neq \Delta$ olur. Δ blok olduğundan $\Delta x \cap \Delta = \emptyset$ dir. Buna göre $\Delta \subset \text{supp}(x)$ olacağından Δ sonludur. Böylece G transitif ve $G \leq FSym(\Omega)$ ise G nin aşikar olmayan her bloğu sonludur. $\square$

Lemma 2.28 *Ω sonsuz bir küme ve G grubu $FSym(\Omega)$ nın transitif bir altgrubu olsun. p bir asal sayı olmak üzere G' bir p-grup ise G de bir p-gruptur.*

İspat. $g \in G$ olsun ve $\Delta = \operatorname{supp}(g)$ alalım. Lemma 2.26 gereği $\Delta x \cap \Delta = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ vardır. $\operatorname{supp}(g^x) = \Delta x$ olduğundan g ile g^x in hareket ettirdiği noktalar birbirinden farklıdır. Buradan $|[g,x]| = |g^x g| = |g|$ olur. O halde G' bir p-grup ise G de bir p-gruptur. □

Lemma 2.29 *G grubu Ω kümesi üzerine transitif etki etsin ve $N \lhd G$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) G grubu N nin orbitleri üzerine transitif etki eder.

(ii) N nin Ω üzerindeki orbitleri aynı sayıda eleman içerir.

(iii) N nin Ω üzerindeki orbitleri G nin bloklarıdır.

İspat. (i) Bir $\alpha \in \Omega$ için $\Delta = \alpha N$ ve $g \in G$ olsun. Bu durumda $\Delta g = \alpha N g = \alpha g N$ olacağından Δg de N nin Ω üzerindeki bir orbiti olur. Dolayısıyla G grubu N nin orbitleri üzerine etki eder. $\Delta_1 = \alpha_1 N$ ve $\Delta_2 = \alpha_2 N$, N nin Ω üzerindeki iki orbiti olmak üzere G grubu Ω üzerine transitif etki ettiğinden $\alpha_1 x = \alpha_2$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır. Buradan $\Delta_1 x = \alpha_1 N x = \alpha_1 x N = \alpha_2 N = \Delta_2$ olur. O halde G grubu N nin orbitleri üzerine transitif etki eder.
(ii) Δ_1 ve Δ_2, N nin Ω üzerindeki iki orbiti ise (i) şıkkı gereği $\Delta_1 x = \Delta_2$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır. O halde $|\Delta_1| = |\Delta_2|$ olur.
(iii) Δ, N nin Ω üzerindeki bir orbiti ve $g \in G$ olsun. Buna göre Δg de N nin Ω üzerindeki bir orbiti olduğundan $\Delta g \cap \Delta = \emptyset$ veya $\Delta g = \Delta$ dır. O halde Δ, G nin bir bloğudur. □

Lemma 2.30 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın transitif bir altgrubu ve $H, K \leq G$ olsun. Eğer $G = HK$, H ile K nın elemanları değişmeli ve $H \neq 1$ ise $K = 1$ olur.*

İspat. Lemma 2.29 gereği G grubu H nin Ω üzerindeki orbitleri üzerine transitif etki eder. $G = HK$ olduğundan K grubu da bu orbitler üzerine transitif etki eder. H ile K nın elemanları değişmeli olduğundan H nin tüm orbitleri H-küme olarak birbirine izomorfiktir. H nin birimden farklı bir h elemanını alalım. h elemanı H nin bir orbitindeki noktayı hareket ettirir. H nin tüm orbitleri birbirine izomorfik olduğundan bu eleman H nin her orbitinde bir nokta hareket ettirmiş olur. Bu durumda supp(h) kümesi sonlu olduğundan H nin Ω üzerinde sonlu tane orbiti var olabilir. Bunları $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ile gösterelim. Ω sonsuz ve $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ aynı sayıda eleman içerdiğinden bu orbitler sonsuz elemanlıdır.
$k \in K$ olsun ve $\alpha k \neq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Omega$ alalım. Buna göre en az bir i için $\alpha \in \Delta_i$ olur. $x \in H$ için $\alpha x k = \alpha k x \neq \alpha x$ olduğundan k sonlumsu permütasyonu Δ_i içindeki her noktayı hareket ettirir. Oysa bu Δ_i sonsuz elemana sahip olduğundan çelişkidir. O halde her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha k = \alpha$ olacağından $k = 1$ dir. Dolayısıyla $K = 1$ elde edilir. $\square$

Önerme 2.31 *G grubu $FSym\,(\Omega)$ nın değişmeli ve transitif bir altgrubu olsun. Bu durumda Ω sonludur.*

İspat. G nin birimden farklı bir g elemanı için $\mathrm{fix}\,(g) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha g = \alpha\}$ kümesinin boş küme olduğunu gösterirsek $\mathrm{supp}\,(g) = \Omega$ olacağından istenen sonucuna ulaşmış oluruz. $\alpha \in \mathrm{fix}\,(g)$ ve $x \in G$ olsun. Buna göre $\alpha x g = \alpha g x = \alpha x$ olduğundan $\alpha x \in \mathrm{fix}\,(g)$ dir. Buradan $\Omega = \alpha G = \mathrm{fix}\,(g)$ olacağından $g = 1$ olur ki bu çelişkidir. O halde $\mathrm{fix}\,(g) = \emptyset$ olur. $\square$

Önerme 2.32 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym\,(\Omega)$ nın transitif bir altgrubu ve $N \lhd G$ olsun. G/N sonsuz bir küme üzerinde sonlumsu permütasyon grubu olarak temsil edilemiyorsa N transitiftir.*

İspat. N nin transitif olmadığını kabul edelim. O zaman $\Sigma = \{\alpha N \mid \alpha \in \Omega\}$ kümesinin elemanları Lemma 2.29 gereği G nin aşikar olmayan bloklarıdır. Buna göre G grubu Σ üzerinde sonlumsu permütasyon grubu olarak temsil edilir ve bu etki transitiftir. N grubu bu blokları sabit bırakacağından $G/N \leq FSym\left(\Sigma\right)$ olur. Ayrıca $\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \alpha N$ ve Sonuç 2.27 gereği αN ler sonlu olduğundan Σ sonsuzdur. Oysa bu hipotezle çelişir. O halde N transitiftir. □

Sonuç 2.33 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym\left(\Omega\right)$ nın transitif bir altgrubu ise G' de Ω üzerinde transitiftir.*

İspat. Önerme 2.31 gereği G/G' sonsuz bir küme üzerinde sonlumsu permütasyon grubu olarak temsil edilemez. O halde Önerme 2.32 gereği G' transitiftir. □

Teorem 2.34 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym\left(\Omega\right)$ nın bir altgrubu olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) $N \lhd G$ ve N transitif ise $G' \leq N$ dir.

(ii) G transitif ise G' mükemmeldir.

İspat. (i) $g, h \in G$ için $[g, h] \in N$ olduğunu göstermeliyiz. $\Delta = \operatorname{supp}(g) \cup \operatorname{supp}(h)$ olsun. Teorem 2.26 gereği $\Delta x \cap \Delta = \emptyset$ olacak şekilde $x \in N$ vardır. $c = [g, x]\,[h, x]\left[(gh)^{-1}, x\right]$ alalım.

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(g^x) &= \operatorname{supp}(g)\, x \subseteq \Delta x, \\ \operatorname{supp}(h^x) &= \operatorname{supp}(h)\, x \subseteq \Delta x \end{aligned}$$

ve

$$\operatorname{supp}\left(g^{-1}\right) \subseteq \Delta, \operatorname{supp}\left(h^{-1}\right) \subseteq \Delta, \operatorname{supp}(gh) \subseteq \Delta$$

olduğundan g^x ve h^x, g^{-1}, h^{-1} ve gh ile değişmelidir. O halde,

$$\begin{aligned} c &= [g, x]\,[h, x]\left[(gh)^{-1}, x\right] \\ &= g^{-1} g^x h^{-1} h^x\,(gh)\left((gh)^{-1}\right)^x \\ &= g^{-1} h^{-1} g h g^x h^x \left((gh)^{-1}\right)^x \\ &= [g, h]\left((gh)\,(gh)^{-1}\right)^x \\ &= [g, h] \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $N \lhd G$ olduğundan,

$$\begin{aligned} c &= [g,x]\,[h,x]\left[(gh)^{-1},x\right] \\ &= \left(x^{-1}\right)^{g} x \left(x^{-1}\right)^{h} x \left(x^{-1}\right)^{(gh)^{-1}} x \in N \end{aligned}$$

olur. Böylece $G' \leq N$ bulunur.

(ii) Sonuç 2.33 gereği G' ve G'' transitiftir. O halde (i) gereği $G' \leq G''$ olduğundan $G' = G''$ olur. Böylece G' mükemmeldir. □

Lemma 2.35 *G grubu sonsuz bir Ω kümesi üzerine hemen hemen primitif etki etsin. Bu durumda Δ_k, G nin maksimal bloğu olmak üzere $\Sigma = \{\Delta_k x \mid x \in G\}$ kümesinin her elemanı G nin bir bloğudur ve G grubu Σ üzerine primitif etki eder.*

İspat. G hemen hemen primitif olduğundan G nin $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_k$ şeklinde aşikar olmayan blokları vardır. $\Delta_k x \in \Sigma$ ve $y \in G$ için $\Delta_k x \cap (\Delta_k x)\, y \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\Delta_k \cap \Delta_k xyx^{-1} \neq \emptyset$ olur. Δ_k bir blok olduğundan $\Delta_k = \Delta_k xyx^{-1}$ dir. O halde $\Delta_k x = \Delta_k xy = (\Delta_k x)\, y$ olacağından $\Delta_k x$ kümesi G nin bir bloğudur. Verilen bir $g \in G$ için $\psi(g)(\Delta_k x) = \Delta_k xg$ ile tanımlı fonksiyon Σ üzerinde bir permütasyondur. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \psi : G &\rightarrow Sym(\Sigma) \\ g &\mapsto \psi(g) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Tanımlanan ψ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Diğer taraftan $\Delta_k x$, $\Delta_k y \in \Sigma$ ve $xy^{-1} \in G$ için $\Delta_k x(x^{-1}y) = \Delta_k y$ olduğundan G grubu Σ üzerine transitif etki eder.

Şimdi G nin Σ üzerine primitif etki ettiğini gösterelim. Γ, bu etkinin bir bloğu ve $\Delta_k \in \Gamma$ olsun. $\Gamma = \{\Delta_k, \Delta_k x_1, \ldots, \Delta_k x_n\}$ olarak alalım. Γ, G nin bloğu olduğundan her $g \in G$ için $\Gamma g = \Gamma$ veya $\Gamma g \cap \Gamma = \emptyset$ olur. Bu durumda $x_0 = 1$ olmak üzere $\overline{\Gamma} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Delta_k x_i \subset \Omega$ kümesinin G grubunun Ω üzerine etkisi için bir blok olduğunu göstereceğiz. $g \in G$ için $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma} g \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Buna göre

$\alpha \in \overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma} g$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Omega$ vardır. $\alpha \in \overline{\Gamma} = \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_k x_i$ ve $\alpha \in \overline{\Gamma} g = \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_k x_i g$ ise $\alpha \in \Delta_k x_j$ ve $\alpha \in \Delta_k x_i g$ olacak şekilde en az bir $0 \leq i, j \leq n$ vardır. Buradan $\Delta_k x_j \cap \Delta_k x_i g \neq \emptyset$ ve Δ_k bir blok olduğundan $\Delta_k x_j = \Delta_k x_i g$ dir. O halde $\Delta_k x_j \in \Gamma \cap \Gamma g$ olur. Γ bir blok olduğundan $\Gamma = \Gamma g$ dir. Dolayısıyla $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma} g$ bulunur. Öyleyse $\overline{\Gamma}$ bir blok olur. Δ_k maksimal blok olduğundan $\overline{\Gamma} = \Omega$ olur. Ancak bu Ω nın sonsuz olmasıyla çelişir. Dolayısıyla G grubu Σ üzerine primitif etki eder. □

Uyarı 2.36 ψ, Lemma 2.35 de tanımlı fonksiyon olmak üzere $G/\operatorname{Ker}\psi$ grubu Σ üzerine primitif etki eder.

Lemma 2.37 *G grubu sonsuz bir Ω kümesi üzerine tamamen imprimitif etki etsin. $\Sigma_k = \{\Delta_k x \mid x \in G\}$ olmak üzere G nin Σ_k ler üzerine etkisinin çekirdeği N_k normal altgrupları ise $N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k \leq \cdots$ dizisi oluşturulabilir ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olur.*

İspat. Verilen bir $g \in G$ için $\psi_k(g)(\Delta_k x) = \Delta_k x g$ ile tanımlı fonksiyon Σ_k üzerinde bir permütasyondur. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \psi_k : G &\rightarrow Sym(\Sigma_k) \\ g &\mapsto \psi_k(g) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Tanımlanan ψ_k fonksiyonu bir homomorfizmadır. Buna göre ψ_k homomorfizmasının çekirdeği,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\psi_k &= \{g \in G \mid \text{her } \Delta_k x \in \Sigma_k \text{ için } \Delta_k x g = \Delta_k x\} \\ &= \left\{g \in G \mid \text{her } x \in G \text{ için } \Delta_k x g x^{-1} = \Delta_k\right\} \\ &= \left\{g \in G \mid \text{her } x \in G \text{ için } x g x^{-1} \in G_{\{\Delta_k\}}\right\} \\ &= \left\{g \in G \mid \text{her } x \in G \text{ için } g \in x^{-1} G_{\{\Delta_k\}} x\right\} \\ &= \bigcap_{x \in G} x^{-1} G_{\{\Delta_k\}} x \\ &= Core_G(G_{\{\Delta_k\}}) \end{aligned}$$

olur. Lemma 2.22 gereği $\operatorname{Ker}\psi_k = N_k = \bigcap_{x\in G} G^x_{\{\Delta_k\}} = \bigcap_{x\in G} G_{\{\Delta_k x\}}$ tir.
Şimdi $N_k \leq N_{k+1}$ olduğunu gösterelim. $y \in N_k$ ise her $x \in G$ için $\Delta_k xy = \Delta_k x$ olur. Buradan $\Delta_k x = \Delta_k x \cap \Delta_k xy \subseteq \Delta_{k+1} x \cap \Delta_{k+1} xy$ olacağından her $x \in G$ için $\Delta_{k+1} x = \Delta_{k+1} xy$ dir. O halde $y \in N_{k+1}$ olur. Böylece $N_k \leq N_{k+1}$ bulunur. O halde $N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k \leq \cdots$ dizisi oluşturulabilir ve burada her $i \in I$ için $N_i \trianglelefteq G$ dir.
Şimdi $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olduğunu gösterelim. Her $g \in G$ için $\operatorname{supp}(g)$ sonlu ve G tamamen imprimitif olduğundan $\operatorname{supp}(g) \subseteq \Delta_k$ olacak şekilde bir k vardır. Δ_k bir blok olduğundan her $x \in G$ için $\Delta_k x \cap \Delta_k = \emptyset$ veya $\Delta_k x = \Delta_k$ dir. Dolayısıyla $\operatorname{supp}(g) \cap \Delta_k x = \emptyset$ veya $\operatorname{supp}(g) \subseteq \Delta_k x$ olur. Her iki durumda da $\Delta_k xg = \Delta_k x$ olacağından $g \in N_k$ bulunur. Böylece $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ dir. $\square$

Uyarı 2.38 Lemma 2.37 de tanımlanan Σ_k kümesinin her elemanı G nin bir bloğu olduğundan sonludur. Buna göre $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ olduğundan Ω sayılabilir sonsuzdur. Dolayısıyla G de sayılabilir sonsuz olur.

Uyarı 2.39 $N_i = \operatorname{Ker}\psi_i$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\rho_{i,x} : N_i &\rightarrow Sym(\Delta_i x) \\
n_i &\mapsto \overline{n}_i : \alpha x \mapsto \alpha x n_i
\end{aligned}
$$

fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmanın çekirdeği,

$$\operatorname{Ker}\rho_{i,x} = \{n_i \in N_i \mid \text{her } \alpha x \in \Delta_i x \text{ için } \alpha x n_i = \alpha x\} = G_{\Delta_i x}$$

tir. Bu durumda $N_i/G_{\Delta_i x}$, $Sym(\Delta_i x)$ in bir altgrubuna izomorf olur. $Sym(\Delta_i x)$ sonlu olduğundan $N_i/G_{\Delta_i x}$ de sonludur. Buradan $N_i/\bigcap_{x\in G} G_{\Delta_i x} \cong \operatorname{Cr}_{x\in G}(N_i/G_{\Delta_i x})$ ve $\bigcap_{x\in G} G_{\Delta_i x} = 1$ olduğundan $N_i \cong \operatorname{Cr}_{x\in G}(N_i/G_{\Delta_i x})$ tir. N_i deki herbir elemanın değiştirdiği nokta sayısı sonlu olduğundan $N_i \cong \operatorname{Dr}_{x\in G}(N_i/G_{\Delta_i x})$ elde edilir. Ayrıca direkt çarpımdaki gruplar birbirlerinin izomorfik kopyalarıdır.

Lemma 2.40 Ω *sonsuz bir küme olmak üzere* $FSym(\Omega)$ *nın primitif altgrupları* $Alt(\Omega)$ *veya* $FSym(\Omega)$ *dır.*

İspat. [18, Teorem 9.4] $\square$

3. SONLUMSU PERMÜTASYON GRUPLARI

Lemma 3.1 *Ω bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu ve $H \leq G$ olsun. G nin $\operatorname{supp} H$ yi kapsayan ve aşikar olmayan bir Δ bloğu verildiğinde aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) $\Gamma = \operatorname{supp}(H)$ *olmak üzere* $G_\Gamma \leq C_G(H)$ *dir.*

(ii) $N_G(H) \leq G_{\{\Delta\}}$ *dır.*

(iii) $H \cap G_\Delta = 1$ *ve* $G_\Delta \leq C_G(H)$ *dir.*

(iv) Her $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ *için* $H^x \leq G_\Delta$ *dır. Böylece* $[H^x, H] = 1$ *olur.*

(v) $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ *ise* $H' \leq [H, x]$ *tir.*

İspat. (i) $\Gamma = \operatorname{supp}(H)$ olsun. $g \in G_\Gamma$ ve $h \in H$ için $hg = gh$ olduğunu göstermeliyiz. $\alpha \in \Gamma$ ise $\alpha h_1 \neq \alpha$ olacak şekilde en az bir $h_1 \in H$ vardır. Buradan $\alpha h_1 h \neq \alpha h$ olduğundan $\alpha h\,(h^{-1} h_1 h) \neq \alpha h$ ve $h^{-1} h_1 h \in H$ olur. Böylece $\alpha h \in \Gamma$ dır. O halde $\alpha g h = \alpha h = \alpha h g$ bulunur. $\alpha \notin \Gamma$ ise bu durumda $\alpha g \notin \Gamma$ dır. $\alpha g \in \Gamma = \operatorname{supp} H$ olduğunu varsayalım. O halde $g \in G_\Gamma$ için $g^{-1} \in G_\Gamma$ dir. Buna göre $(\alpha g)\, g^{-1} = \alpha = \alpha g \in \Gamma$ olur. Ancak bu $\alpha \notin \Gamma$ ile çelişir. Buradan $\alpha g h = \alpha g = \alpha h g$ dır. Böylece her $\beta \in \Omega$ için $\beta g h = \beta h g$ dir. O halde $g \in C_G(H)$ bulunur.

(ii) $x \in N_G(H)$ için $\Delta x = \Delta$ olduğunu göstermeliyiz. Lemma 2.22 gereği $\operatorname{supp} H = \operatorname{supp} H^x = (\operatorname{supp} H)\, x \subseteq \Delta x$ olur. Buradan $\operatorname{supp} H \subseteq \Delta \cap \Delta x$ tir. Δ, G nin bir bloğu olduğundan $\Delta = \Delta x$ olur.

(iii) $g \in H \cap G_\Delta$ alalım. $\alpha \in \Delta$ ise $g \in G_\Delta$ olduğundan $\alpha g = \alpha$ dır. $\alpha \notin \Delta$ olsun. $\operatorname{supp} H \subseteq \Delta$ olduğundan $\alpha \notin \operatorname{supp} H$ dir. Öyleyse her $h \in H$ için $\alpha h = \alpha$ olur. $g \in H$ olduğundan $\alpha g = \alpha$ dır. Dolayısıyla her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha g = \alpha$ olduğundan $g = 1$ bulunur. Ayrıca Lemma 2.23 gereği $\Gamma \subseteq \Delta$ için $G_\Delta \subseteq G_\Gamma$ olduğundan (i) den $G_\Delta \subseteq C_G(H)$ bulunur.

(iv) $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ olsun. Bu durumda Δ blok olduğundan $\Delta \cap \Delta x = \emptyset$ olur. Her

$\delta \in \Delta$ için $\delta h^x = \delta$ olduğunu göstermeliyiz. $\delta \in \Delta$ ve $h^x \in H^x$ olsun. $\Delta \cap \Delta x = \emptyset$ olduğundan $\delta \notin \Delta x$ tir. Buradan $\delta x^{-1} \notin \Delta$ olacağından δx^{-1} noktası $\operatorname{supp} H$ nin elemanı olamaz. O halde her $h \in H$ için $\delta x^{-1} h = \delta x^{-1}$ olur. Dolayısıyla $\delta x^{-1} h x = \delta$ bulunur. Böylece $H^x \subseteq G_\Delta$ elde edilir. Şimdi $[H^x, H] = 1$ olduğunu gösterelim. $h^x \in H^x$ ve $H^x \leq G_\Delta \leq C_G(H)$ olduğundan her $h_1 \in H$ için $h^x h_1 = h_1 h^x$ tir. O halde $[h^x, h_1] \in [H^x, H]$ için $[h^x, h_1] = 1$ dir. Buradan her $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ için $[H^x, H] = 1$ olur.

(v) $a, b \in H$ olmak üzere $[a, b] \in H'$ için $[a, b] \in [H, x]$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ ve $\operatorname{supp} H \subseteq \Delta$ olduğundan $\Delta \cap \Delta x = \emptyset$ ve $\operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b) \subseteq \Delta$ olur. $w = [a, x][b, x]\left[(ab)^{-1}, x\right] \in [H, x]$ alalım. $w = [a, b]$ olduğunu göstereceğiz. $\operatorname{supp}(a^x) \subseteq \Delta x$, $\operatorname{supp}(b^x) \subseteq \Delta x$ ve $\Delta \cap \Delta x = \emptyset$ olduğundan a^x, b^x ile $a, b, (ab)^{-1}$ elemanları değişmelidir. Buna göre,

$$\begin{aligned} w &= [a, x][b, x]\left[(ab)^{-1}, x\right] = a^{-1} a^x b^{-1} b^x (ab)\left((ab)^{-1}\right)^x \\ &= a^x a^{-1} b^{-1} b^x (ab)\left((ab)^{-1}\right)^x = a^x b^x a^{-1} b^{-1} (ab)\left((ab)^{-1}\right)^x \\ &= a^x b^x \left(b^{-1} a^{-1}\right)^x a^{-1} b^{-1} ab = a^x b^x b^{-x} a^{-x} a^{-1} b^{-1} ab \\ &= [a, b] \end{aligned}$$

bulunur. O halde $H' \leq [H, x]$ elde edilir. □

Lemma 3.2 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G, $FSym(\Omega)$ nın tamamen imprimitif bir altgrubu olsun. Verilen bir $\alpha \in \Omega$ için aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) G_α nın her orbiti sonludur.

(ii) $K \leq G$ ise $|\alpha K| = |K : K \cap G_\alpha|$ dır.

İspat. (i) $\beta \in \Omega$ için βG_α nın sonlu olduğunu göstermeliyiz. G tamamen imprimitif olduğundan $\alpha, \beta \in \Delta$ olacak şekilde aşikar olmayan bir Δ bloğuna sahiptir. $g \in G_\alpha$ için $\alpha g = \alpha \in \Delta \cap \Delta g$ ve Δ kümesi G nin bloğu olduğundan $g \in G_{\{\Delta\}}$ dır. Buradan $G_\alpha \subseteq G_{\{\Delta\}}$ bulunur. Öyleyse G_α nın elemanları Δ yı sabit bırakır. O halde $\beta G_\alpha \subseteq \Delta G_\alpha = \Delta$ dır. Δ sonlu olduğundan βG_α sonlu olur.

(ii) $K \leq G$ olsun. Bu durumda $K \cap G_\alpha = K_\alpha$ olduğundan Lemma 2.7 gereği $|\alpha K| = |K : K_\alpha| = |K : K \cap G_\alpha|$ bulunur. $\square$

Lemma 3.3 Ω *bir küme olmak üzere* G *grubu* $FSym(\Omega)$ *nın bir altgrubu ve* F *de* G *nin sonlu bir altgrubu olsun.* $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ *olacak şekilde* G *nin bir* Δ *bloğu verildiğinde aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) $U = \left\{u \in G_{\{\Delta\}} \mid \operatorname{supp}(u) \subseteq \Delta\right\}$ *kümesi* $G_{\{\Delta\}}$ *nın* F *yi kapsayan bir normal altgrubudur.*

(ii) $y \in G$ *olmak üzere* $y^t \in G_{\{\Delta\}}$ *olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı* t *olsun. Ayrıca* y^t*,* F *yi normallesin. Bu halde*

$$F^{\langle y\rangle} = \left\langle F^{y^k} \mid k = 0, 1, \ldots, t-1 \right\rangle = F \times F^y \times F^{y^2} \times \cdots \times F^{y^{t-1}}$$

olur.

İspat. (i) $u_1, u_2 \in U$ için $\operatorname{supp}(u_1) \subseteq \Delta$ ve $\operatorname{supp}(u_2) = \operatorname{supp}\left(u_2^{-1}\right) \subseteq \Delta$ dır. Buradan $\operatorname{supp}\left(u_1 u_2^{-1}\right) \subseteq \operatorname{supp}(u_1) \cup \operatorname{supp}\left(u_2^{-1}\right) \subseteq \Delta \cup \Delta = \Delta$ olur. U kümesinin tanımı gereği $u_1 u_2^{-1} \in U$ olacağından $U \leq G_{\{\Delta\}}$ bulunur. $x \in G_{\{\Delta\}}$ ve $u \in U$ olsun. Buradan Lemma 2.22 gereği $u^x \in G^x_{\{\Delta\}} = G_{\{\Delta x\}} = G_{\{\Delta\}}$ dır. Aynı lemma gereği $\operatorname{supp}(u^x) = (\operatorname{supp}(u))x \subseteq \Delta x = \Delta$ olduğundan $u^x \in U$ olur. O halde $U \trianglelefteq G_{\{\Delta\}}$ bulunur. Ayrıca $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ olduğundan herhangi bir $f \in F$ için $f \in G_{\{\Delta\}}$ ve $\operatorname{supp} f \subseteq \Delta$ dır. Dolayısıyla $f \in U$ olur.

(ii) Hipotez gereği $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ ve $y^t \in G_{\{\Delta\}}$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı t dir. Bu durumda Lemma 2.22 gereği $\operatorname{supp} F^{y^i} = (\operatorname{supp} F)\, y^i \subseteq \Delta y^i$ dir. Her $i \leq t-1$ için $y^i \notin G_{\{\Delta\}}$ ve Δ blok olduğundan $\Delta \cap \Delta y^i = \emptyset$ dir. Buna göre i ve j birbirinden farklı olmak üzere $1 \leq i, j \leq t-1$ için $\Delta y^i \cap \Delta y^j = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\operatorname{supp} F^{y^i} \cap \operatorname{supp} F^{y^j} = \emptyset$ olur. Buradan $F^{y^i} \cap \left\langle F^{y^j} \mid j \neq i, j = 0, 1, \ldots, t-1 \right\rangle = 1$ olacağından $F^{\langle y\rangle} = F \times F^y \times F^{y^2} \times \cdots \times F^{y^{t-1}}$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.4 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu ve F de G nin değişmeli olmayan sonlu bir altgrubu olsun.* $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ *olacak şekilde G nin bir Δ bloğu verilsin. $G_{\{\Delta\}}$ nın normal ve değişmeli bir A altgrubu için $\langle A^x \mid x \in G \rangle \leq G_{\{\Delta\}}$ olur.*

İspat. $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ için $x^{-1} \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ olduğundan Lemma 3.1 gereği $F^{x^{-1}} \subseteq G_\Delta \subseteq G_{\{\Delta\}}$ dır. Buradan $F \subseteq G^x_{\{\Delta\}}$ olur. $A \trianglelefteq G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $A^x \trianglelefteq G^x_{\{\Delta\}}$ tir ve F değişmeli olmadığından $F' \neq 1$ dir. $x \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ olduğundan Lemma 3.1 gereği $F' \subseteq [F, x]$ olur. Şimdi $A^x \backslash G_{\{\Delta\}} = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $a = a_1^x \in A^x \backslash G_{\{\Delta\}}$ ise $F' \subseteq [F, a] = [F, a_1^x]$ olur. $F \leq G^x_{\{\Delta\}}$ ve $A^x \trianglelefteq G^x_{\{\Delta\}}$ olduğundan F, A^x i normaller. Öyleyse $[F, A^x] \subseteq A^x$ olacağından $F' \subseteq [F, a_1^x] \subseteq A^x$ tir. A^x değişmeli olduğundan $A^x \subseteq C_G(F') \subseteq N_G(F')$ olur. $\operatorname{supp} F' \subseteq \operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ olduğundan Lemma 3.1 gereği $N_G(F') \subseteq G_{\{\Delta\}}$ dır. Buradan $A^x \subseteq G_{\{\Delta\}}$ olur. Ancak bu $a \in A^x \backslash G_{\{\Delta\}}$ ile çelişir. Dolayısıyla her $x \in G$ için $A^x \subseteq G_{\{\Delta\}}$ bulunur. Böylece $\langle A^x \mid x \in G \rangle \leq G_{\{\Delta\}}$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.5 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu ve K de G nin bir yükselen(ascendant) altgrubu olsun. K, Ω üzerinde sonsuz bir orbite sahipse $K \lhd G$ ve K transitiftir.*

İspat. $i \in \Omega$ için iK orbiti sonsuz elemanlı olsun. K nin G grubunun normal olmayan bir altgrubu olduğunu kabul edelim. O halde $K \lhd K_1 \lhd K_2$ ve $K \ntriangleleft K_2$ olacak şekilde $K_1, K_2 < G$ vardır. Bu altgrupları bulmak için K_1 ile başlayalım. $K \lhd K_1$ alalım. Eğer $K \lhd K_2$ ise K nın K_3 te normal olup olmadığına bakalım. Bu şekilde devam ederek $K \lhd K_{t-1}$, $K \ntriangleleft K_t$ olacak şekilde bir t bulunabilir. Çünkü $K \ntriangleleft G$ olduğundan $g \notin N_G(K)$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. K, G nin yükselen altgrubu olduğundan $g \in K_t$ olacak şekilde bir t mevcuttur. K_t, g elemanını içeren en küçük altgrup ise $K_1 = K_{t-1}, K_2 = K_t$ seçilerek istenen altgruplara ulaşılır.

$K \lhd K_1$ olduğundan Lemma 2.29 gereği K_1, iK orbitleri üzerine transitif etki eder ve iK, K_1 in bir bloğu olur. $iK \neq iK_1$ olsaydı $ix \notin iK$ olacak şekilde bir

$x \in K_1$ vardır. $ix \in iKx$ ve iK blok olduğundan $iKx \cap iK = \emptyset$ olur. Buradan $iK \subset \text{supp}(x)$ bulunur. $\text{supp}(x)$ sonlu olduğundan iK sonlu olur. Ancak bu iK nın sonsuz olmasıyla çelişir. Öyleyse $iK = iK_1$ olur ve K grubu iK_1 üzerine transitif etki eder. Benzer şekilde iK_1, K_2 içinde aynı özelliklere sahiptir. O halde $iK_1 = iK_2 = iK$ olur ve K_1 grubu iK_2 üzerine transitif etki eder. Bu şekilde devam edilirse $iK = iG = \Omega$ bulunur. O halde K, Ω üzerine transitif etki eder. Böylece K yükselen altgrup ve $K \ntriangleleft G$ ise K, Ω üzerine transitif etki eder.
$K \triangleleft G$ ise Lemma 2.29 gereği iK, G nin bloğu olur. iK sonsuz olduğundan Lemma 2.27 gereği $iK = \Omega$ dır. Öyleyse K, Ω üzerine transitif etki eder.
Böylece sonsuz orbitli her yükselen altgrup Ω üzerine transitif etki eder.
K_1 ve K_2, $FSym(\Omega)$ nın transitif altgrupları ve $K \triangleleft K_1 \triangleleft K_2$ olduğundan [15, Teorem 3.3] gereği $K \triangleleft K_2$ olur ki bu çelişkidir. Öyleyse $K \triangleleft G$ olur. $\square$

Sonuç 3.6 *$G \leq FSym(\Omega)$ olmak üzere K grubu G nin bir yükselen altgrubu ve K transitif değilse K nın orbitleri sonludur.*

Teorem 3.7 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu ve F de G nin değişmeli olmayan sonlu bir altgrubu olsun.* $\text{supp}\, F \subseteq \Delta$ *olacak şekilde G nin aşikar olmayan bir Δ bloğunu alalım. S, $G_{\{\Delta\}}$ nın türev serisinin uzunluğu d olan çözülebilir bir normal altgrubu ise $\langle S^x \mid x \in G\rangle \lneqq G$ dir.*

İspat. G hemen hemen primitif grup olsun. O halde G nin Δ yı kapsayan maksimal bir Γ bloğu vardır. $\Sigma = \{\Gamma x \mid x \in G\}$ alalım. K, G nin Σ üzerine etkisinin çekirdeği olmak üzere Uyarı 2.36 gereği G/K grubu Σ üzerine primitif etki eder. Lemma 2.40 gereği $G/K \cong Alt\,(\Sigma)$ veya $G/K \cong FSym\,(\Sigma)$ olur. O halde $(G/K)_\Gamma \cong Alt(\Sigma \setminus \{\Gamma\})$ veya $(G/K)_\Gamma \cong FSym(\Sigma \setminus \{\Gamma\})$ dır. $xK \in (G/K)_\Gamma$ için,

$$\Gamma xK = \Gamma \Leftrightarrow (\Gamma x)\, K = \Gamma \Leftrightarrow \Gamma x = \Gamma \Leftrightarrow xK \in G_{\{\Gamma\}}/K$$

olduğundan $(G/K)_{\Gamma} = G_{\{\Gamma\}}/K$ dir. Öyleyse $G_{\{\Gamma\}}/K \cong Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ veya $G_{\{\Gamma\}}/K \cong FSym(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ olur. Buradan $\left[G_{\{\Gamma\}}/K : H/K\right] \leq 2$ olacak şekilde bir $H/K \leq G_{\{\Gamma\}}/K$ vardır ve $H/K \cong Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ dır. Çünkü $G_{\{\Gamma\}}/K \cong Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ ise $Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ bir basit grup olduğundan $\left[G_{\{\Gamma\}}/K : H/K\right] = 1$ dir. Eğer $G_{\{\Gamma\}}/K \cong FSym(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ ise $FSym(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ nin indeksi 2 olan tek altgrubu $Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ olduğundan $\left[G_{\{\Gamma\}}/K : H/K\right] = 2$ dir. Dolayısıyla $H/K \cong Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ olur. $\Delta \subseteq \Gamma$ için Lemma 2.23 gereği $G_{\{\Delta\}} \subseteq G_{\{\Gamma\}}$ ve $\left|G_{\{\Gamma\}} : G_{\{\Delta\}}\right| < \infty$ olur. Buradan $\left|G_{\{\Gamma\}}/K : G_{\{\Delta\}}K/K\right| < \infty$ olduğundan $\left|G_{\{\Gamma\}}/K : N/K\right| < \infty$ ve $N/K \leq G_{\{\Delta\}}K/K$ olacak şekilde bir $N/K \lhd G_{\{\Gamma\}}/K$ vardır. Buna göre $G_{\{\Delta\}}K/K$, $Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\})$ ya izomorf olan bir altgruba sahiptir. $N/K = H/K$ için iddia doğrudur. $N/K \neq H/K$ olsun. O halde $HN/K = G_{\{\Gamma\}}/K$ olur. Buradan $\left(G_{\{\Gamma\}}/K\right)/(N/K) = (HN/K)/(N/K) \cong (H/K)/(H/K \cap N/K)$ olduğundan $|(H/K)/(H/K \cap N/K)| = \left|\left(G_{\{\Gamma\}}/K\right)/(N/K)\right| < \infty$ olur. Ancak bu H/K nın sonsuz basit grup olmasıyla çelişir. Böylece $H/K \leq G_{\{\Delta\}}K/K \lneqq G_{\{\Gamma\}}/K$ olduğundan $Alt(\Sigma\backslash\{\Gamma\}) \cong H/K = G_{\{\Delta\}}K/K$ bulunur.

$S \lhd G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $SK/K \lhd G_{\{\Delta\}}K/K$ dir. Ancak $G_{\{\Delta\}}K/K$ basit grup olduğundan $SK/K = K$ dır. Buradan $S \leq K \lhd G$ olduğundan $S^G = \langle S^x \mid x \in G\rangle \leq K^G = K \lneqq G$ elde edilir.

G tamamen imprimitif ve $G' = G$ olsun. d üzerinde tümevarımla ispatı yapacağız. $d = 1$ ise S, $G_{\{\Delta\}}$ nın normal ve değişmeli altgrubu olacağından Lemma 3.4 gereği $S^G \leq G_{\{\Delta\}} \neq G$ olur. Türev serisinin uzunluğu d den küçük iken önerme doğru olsun. $L = \left\langle \left(S^{(d-1)}\right)^x \mid x \in G\right\rangle$ alalım. S, türev serisinin uzunluğu d olan çözülebilir bir grup olduğundan $S^{(d-1)} \lhd G_{\{\Delta\}}$ ve $S^{(d-1)}$ değişmeli olur. O halde Lemma 3.4 gereği $L \leq G_{\{\Delta\}} \neq G$ dir. $\Lambda = \{\Delta x \mid x \in G\}$ olsun ve M yi G nin Λ üzerine etkisinin çekirdeği olarak alalım. M, $G_{\{\Delta\}}$ nın içerdiği G de normal olan en büyük altgruptur. O halde L nin seçimi gereği $L \leq M$ dir. G tamamen imprimitif olduğundan $\overline{G} = G/M$, Λ üzerine tamamen imprimitif etki eder. $\overline{S} = SM/M \cong S/S \cap M$ olmak üzere $1 \neq S^{(d-1)} \leq L \leq M$ olduğundan $\overline{S}$, türev serisi d den küçük olan çözülebilir bir grup olur.

$\overline{F_1}$, $\overline{G}$ nin değişmeli olmayan sonlu bir altgrubu olsun ve $\mathrm{supp}(\overline{F_1}) \subseteq \Gamma$ olacak şekilde $\overline{G}$ nin Δ yı içeren bir Γ bloğunu alalım. $x_1, \ldots, x_r \in G$ olmak üzere $\Gamma = \{\Delta = \Delta x_1, \ldots, \Delta x_r\}$ olsun. $\Delta_1 = \Delta \cup \Delta x_2 \cup \cdots \cup \Delta x_r$ kümesi de G nin bir bloğudur ve $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{G_{\{\Delta_1\}}}$ olur. $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{G_{\{\Delta_1\}}}$ olduğundan $(G/M)_{\{\Gamma\}} = G_{\{\Delta_1\}}M/M = G_{\{\Delta_1\}}/M$ dir.

$T/M = \overline{T} = \overline{G}_{\Gamma}$ olsun. Buradan $\overline{G}_{\{\Gamma\}}/\overline{G}_{\Gamma} = \overline{G}_{\{\Gamma\}}/\overline{T}$ sonludur ve her $i = 1, .., r$ için $\overline{T} \leq \overline{G}_{\Delta x_i}$ dir. Buradan da $\overline{G}_{\{\Gamma\}}/\overline{T} = \left\{\overline{x_1}\overline{T}, \ldots, \overline{x_r}\overline{T}\right\}$ ise $\overline{X} = \langle \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r} \rangle$ olmak üzere $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{X}\,\overline{T}$ olur. Δ_1, G nin bir bloğu idi. $C = \{\Delta_1, \Delta_1 g_1, \Delta_1 g_2, \ldots\}$ alalım. G grubu C üzerine tamamen imprimitif etki eder. $G_{\{\Delta_1\}}$ nokta sabitleyeni olmak üzere Lemma 3.2 gereği $G_{\{\Delta_1\}}$ sonlu orbite sahiptir. Buradan Lemma 2.14 gereği $G_{\{\Delta_1\}}$ bir FC gruptur. O halde $G_{\{\Delta_1\}}/M = \overline{G_{\{\Delta_1\}}} = \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ olduğundan $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ de bir FC gruptur.

$\overline{X}^{\overline{G}_{\{\Gamma\}}} = \left\langle \overline{x_i}^{g} \mid g \in \overline{G}_{\{\Gamma\}}, x_i \in X, i = 1, \ldots, r \right\rangle \lhd \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ ve her $i = 1, \ldots, r$ için x_i nin eşlenik sınıfı sonlu olduğundan $\overline{X}^{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}$ sonlu üreteçlidir. O halde bu grup sonludur. Bununla beraber $\overline{X} \subseteq \overline{X}^{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}$ olduğundan $\overline{X} \lhd \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ ve $\overline{X}$ sonlu olacak şekilde $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{X}\,\overline{T}$ yazılabilir.

$D_S = S \cap T$ olsun. $S \lhd G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $D_S = S \cap T \lhd G_{\{\Delta\}} \cap T = T$ olur. Çünkü $\overline{T} \leq \overline{G}_{\Delta x_i}$ olduğundan $i = 1$ için $T \leq G_{\{\Delta\}}$ dır. Ayrıca $\Delta \subset \Delta_1$ olduğundan $G_{\{\Delta\}} \subset G_{\{\Delta_1\}}$ dir. O halde $S, T \subset G_{\{\Delta_1\}}$ olur. Dolayısıyla $ST/M \leq G_{\{\Delta_1\}}/M = \overline{G_{\{\Delta_1\}}} = \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ bulunur. Buradan,

$$S/D_S = S/S \cap T \cong ST/T \cong (ST/M)\,/\,(T/M) \leq \overline{G}_{\{\Gamma\}}/\overline{T}$$

olur. $\overline{G}_{\{\Gamma\}}/\overline{T}$ sonlu olduğundan S/D_S sonludur. $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ bir FC grup olduğundan her $\overline{x} \in \overline{X}$ için $\left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}(\overline{x})\right|$ sonludur. O halde $C_{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}(\overline{X}) = \bigcap\limits_{\overline{x} \in \overline{X}} C_{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}(\overline{x})$ ve $\overline{X}$ sonlu olduğundan $\left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}(\overline{X})\right| < \infty$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}(\overline{X})\right| < \infty \text{ ve } \left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : \overline{T}\right| < \infty \;&\Rightarrow\; \left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{G}_{\{\Gamma\}}}(\overline{X}) \cap \overline{T}\right| < \infty \\ \Rightarrow \left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{T}}(\overline{X})\right| < \infty \;&\Rightarrow\; \left|\overline{D}_S : \overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right| < \infty \end{aligned}$$

bulunur.

$\overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})$ grubu $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{X}\,\overline{T}$ tarafından normallenir. Çünkü $c \in \overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})$ ise her $x \in \overline{X}$ için $cx = xc$ olduğundan $c^x = xcx^{-1} = c$ dir. Öyleyse $\overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X}) \trianglelefteq \overline{X}$ olur. Diğer taraftan $c \in \overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})$, $t \in \overline{T}$, $x \in \overline{X}$ için $\overline{X} \triangleleft \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ ve $\overline{T} \leq \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ olduğundan $txt^{-1} \in \overline{X}$ dir. Buradan $ctxt^{-1} = txt^{-1}c$ olacağından $t^{-1}ctx = xt^{-1}ct$ bulunur. O halde $c^t \in C_{\overline{T}}(\overline{X})$ elde edilir. Böylece $C_{\overline{T}}(\overline{X}) \trianglelefteq \overline{T}$ olur. $\overline{D}_S \trianglelefteq \overline{T}$ ve $C_{\overline{T}}(\overline{X}) \trianglelefteq \overline{T}$ olduğundan $\overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X}) \trianglelefteq \overline{T}$ dir.

$\overline{S}$ türev serisinin uzunluğu d den küçük olan çözülebilir bir grup ve $\overline{D}_S = (S \cap T)\, M/M \leq SM/M = \overline{S}$ olduğundan $\overline{D}_S$ nin de türev serisinin uzunluğu d den küçük olur. Öyleyse $\overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})$ in türev serisinin uzunluğu d den küçüktür. Tümevarım hipotezi gereği $\overline{R} = \left\langle \left(\overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right)^{\overline{x}} \mid \overline{x} \in \overline{G} \right\rangle \neq \overline{G}$ olur. Buna göre $\overline{R} \triangleleft \overline{G}$ olduğundan $R \triangleleft G$ elde edilir.

Eğer R sonsuz orbite sahipse Lemma 3.5 gereği R transitif olacağından Teorem 2.34 gereği $G = G' \leq R \neq G$ olur. Ancak bu çelişkidir. O halde R nin Ω üzerindeki her orbiti sonludur. $\left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{T}}(\overline{X})\right|$ in sonlu olduğunu göstermiştik. $\left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{T}}(\overline{X})\right|$ ve $\left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : \overline{T}\right|$ sonlu olduğundan $\left|\overline{G}_{\{\Gamma\}} : \overline{T} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right|$ sonludur. Öyleyse,

$$\left|\overline{S} \cap \overline{G}_{\{\Gamma\}} : \overline{S} \cap \overline{T} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right| = \left|\overline{S} : \overline{D_S} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right| < \infty$$

olur. Buna göre $\overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X}) \leq \overline{R}$ olduğunu kullanırsak,

$$\left|\overline{S}\,\overline{R}/\overline{R}\right| = \left|\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{R}\right| \leq \left|\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right| = \left|\overline{S} : \overline{D}_S \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})\right| < \infty$$

bulunur. G tamamen imprimitif olduğundan $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_i \subset \cdots$ blok zinciri ile $N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq N_i \subsetneqq \cdots$ normal altgrup zinciri vardır ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ dir. $\alpha \in \Omega$ için αR orbitini alalım. αR nin sonlu olduğunu biliyoruz. O halde en az bir i için $\alpha R \subseteq \Delta_i$ olur. $N_R = \bigcap_{x \in G} G^x_{\{\alpha R\}}$ olsun. Bu durumda $R \subseteq N_R \subseteq N_i$ olur. Buradan $\overline{N_1}\,\overline{R}/\overline{R} \subseteq \overline{N_2}\,\overline{R}/\overline{R} \subseteq \cdots \subseteq \overline{N_i}\,\overline{R}/\overline{R} = \overline{N_i}/\overline{R} \subsetneqq \overline{N}_{i+1}/\overline{R} \subsetneqq \cdots$ dir ve $\overline{G}/\overline{R} = \bigcup_{k=i}^{\infty} \overline{N}_k/\overline{R}$ sonsuz bir gruptur. $\left|\overline{S}\,\overline{R}/\overline{R}\right|$ sonlu olduğundan $\overline{S}\,\overline{R}/\overline{R} \leq \overline{N}_j/\overline{R}$ olacak şekilde bir $\overline{N_j}/\overline{R}$ vardır. Buradan her $x \in G$ için $\left(\overline{S}\,\overline{R}/\overline{R}\right)^x \leq \left(\overline{N}_j/\overline{R}\right)^x$ olacağından $\overline{S}^x \subseteq \overline{N}_j^x = \overline{N}_j$ elde edilir. O halde $\langle S^x \mid x \in G \rangle \leq N_j \neq G$ bulunur.

G tamamen imprimitif ve $G' < G$ olsun. Eğer $G'S \lneqq G$ ise $G'S/G' \subsetneqq G/G'$

olur. G/G' değişmeli olduğundan $(G'S/G')^{G/G'} = G'S/G'$ dür. Buradan $S^G \leq G'S \neq G$ olur. $G'S = G$ olsun. $W = G'$, $S_1 = S \cap G'$ ve $U = \langle S_1^x \mid x \in G' \rangle$ alalım. $S \lhd G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $S \cap G' \trianglelefteq G_{\{\Delta\}} \cap G'$ olur. O halde $S_1 \lhd G'_{\{\Delta\}}$ dir. S çözülebilir olduğundan S_1 çözülebilirdir.

Sonuç 2.33 ve Teorem 2.34 gereği G', $FSym\,(\Omega)$ nın transitif altgrubudur ve mükemmeldir. $G'' = G'$, $S_1 \lhd G'_{\{\Delta\}}$ ve S_1 çözülebilir grup olduğundan yukarıda ispatlanan durum gereği $U \neq G' = W$ olur.

$U \lhd G' \lhd G$ olduğundan U, G nin yükselen altgrubudur. Eğer U bir sonsuz orbite sahipse Lemma 3.5 ve Teorem 2.34 gereği $U \lhd G$ ve $G' \subseteq U$ olur. Ancak bu $U \neq G' = W$ ile çelişir. Dolayısıyla U nun her orbiti sonludur. $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ olsun. U nun her orbiti sonlu olduğundan $\Phi = \alpha_1 U \cup \alpha_2 U \cup \cdots \cup \alpha_n U$ sonludur. Öyleyse G nin Φ yi içeren bir Π bloğu vardır. Buradan $\Pi U \supseteq \Phi U = \Phi \subset \Pi$ olduğundan $\Pi U \cap \Pi \neq \emptyset$ olur. O halde $U \subseteq G_{\{\Pi\}}$ dir. $Y = \{\Pi x \mid x \in G\}$ alalım. $B = \bigcap\limits_{x \in G} G_{\{\Pi\}}^x$, $\overline{G} = G/B$ ve $H = G_{\{\Delta\}}$ olsun.

Şimdi $\overline{H}$ grubunun $\overline{S}$ ile $\overline{H} \cap \overline{W}$ nin direkt çarpımı olarak yazılabileceğini gösterelim.

$$\overline{S} \cap \overline{W} = (S/B) \cap (W/B) = (S \cap W)\, B/B = S_1 B/B = B$$

ve Dedekind kuralı ile

$$\overline{S}\left(\overline{H} \cap \overline{W}\right) = \overline{H} \cap \overline{S}\,\overline{W} = \overline{H} \cap \overline{G} = \overline{H}$$

dir. Diğer taraftan $W \lhd G$ ise $\overline{H} \cap \overline{W} \lhd \overline{H} \cap \overline{G} = \overline{H}$ olur. Buradan $\overline{S} \cap (\overline{H} \cap \overline{W}) = \overline{1}$ ve $\overline{S} \trianglelefteq \overline{H}$ olduğundan $\overline{H} = \overline{S} \times \left(\overline{H} \cap \overline{W}\right)$ yazılabilir. $S \subset H$ olduğundan $\overline{S}' \subset \overline{S} \subset \overline{H}$ dir. Buradan $\overline{S}' \leq \left(\overline{H} \cap \overline{W}\right) \cap \overline{S} = \overline{1}$ olacağından $\overline{S}' = \overline{1}$ bulunur. O halde $\overline{S}$ değişmeli ve $\overline{H} = \overline{S} \times \left(\overline{H} \cap \overline{W}\right)$ olduğundan $\overline{S} \leq Z(\overline{H})$ bulunur.

$\Pi = \{\Delta = \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$ ve $V = G_{\{\Pi\}}$ olsun. $|V : H| < \infty$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $|V : A|$ sonlu olacak şekilde H içinde kapsanan ve V de normal olan A altgrubu vardır. $\overline{Z} = Z(\overline{A})$ olsun. Buna göre $a \in \overline{A} \cap \overline{S}$ ise $a \in \overline{A} \subseteq \overline{H}$ ve $a \in \overline{S} \subseteq Z\left(\overline{H}\right)$ olduğundan $a \in \overline{Z}$ olur. O halde $\overline{A} \cap \overline{S} \subseteq \overline{Z}$ bulunur. Buradan

$\left|\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{Z}\right|$ sonlu olur. Çünkü,

$$\begin{aligned} |V : A| = \left|\overline{V} : \overline{A}\right| < \infty \ &\Rightarrow \ \left|\overline{V} \cap \overline{S} : \overline{A} \cap \overline{S}\right| < \infty \\ &\Rightarrow \ \left|\overline{S} : \overline{Z}\right| < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $\left|\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{Z}\right|$ sonludur.
$X = \langle Z^x \mid x \in G\rangle$ kümesi tanımlayalım. $\overline{Z} char \overline{A} \lhd \overline{V}$ olduğundan $\overline{Z} \lhd \overline{V}$ dir. $\overline{Z}$ değişmeli olduğundan Lemma 3.4 gereği $X \leq G_{\{\Pi\}} \neq G$ olur. O halde $\overline{X} \neq \overline{G}$ elde edilir. Burada $\left|\overline{S}\,\overline{X}/\overline{X}\right| = \left|\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{X}\right| \leq \left|\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{Z}\right| < \infty$ olduğundan $\left|\overline{S}\,\overline{X}/\overline{X}\right|$ sonludur. Ayrıca $\overline{G}/\overline{X}$ iç içe giren aşikar olmayan normal altgrupların sonsuz(ascending) birleşimidir. $\overline{S}\,\overline{X}/\overline{X} \leq \overline{G}/\overline{X}$ ve $\overline{S}\,\overline{X}/\overline{X}$ sonlu olduğundan en az bir k için $\overline{S}\,\overline{X}/\overline{X} \leq \overline{N}_k/\overline{X} \lneqq \overline{G}/\overline{X}$ olur. Öyleyse $S \leq N_k \lhd G$ dir. Böylece $S^G \neq G$ elde edilir. □

Teorem 3.8 *Ω sonsuz bir küme ve G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) $a \in \Omega$ olmak üzere G_a çözülebilir bir grup değildir.

(ii) G normalleyen şartını sağlarsa bir p-gruptur ve G' minimal FC olmayan grup olur.

İspat. (i) G_a nokta sabitleyeninin G nin çözülebilir bir altgrubu olduğunu kabul edelim. Bu durumda G primitif değildir. G primitif olsaydı Lemma 2.40 gereği $G \cong Alt\,(\Omega)$ veya $G \cong FSym\,(\Omega)$ olurdu. Eğer $G \cong Alt\,(\Omega)$ ise $G_a \cong Alt(\Omega \backslash \{a\})$ olur. Bu durumda G_a çözülebilir sonsuz basit grup olur. Ancak bu bir çelişkidir. Eğer $G \cong FSym(\Omega)$ ise $G_a \cong FSym(\Omega\backslash\{a\})$ dır. $Alt(\Omega\backslash\{a\})$ basit ve $Alt(\Omega\backslash\{a\}) \subseteq FSym(\Omega\backslash\{a\})$ olduğundan $G_a \cong FSym(\Omega\backslash\{a\})$ çözülebilir bir grup olamaz. Böylece G primitif olamaz.
G aşikar olmayan maksimal bloğa sahip değildir. Eğer $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_k$ özalt bloklar olmak üzere Δ_k bloğu a elemanını içeren maksimal blok olsaydı Lemma 2.35 gereği G grubu $\Sigma_k = \{\Delta_k x \mid x \in G\}$ kümesi üzerine primitif etki

ederdi. Buradan $K = \bigcap\limits_{x\in G} G^{x}_{\{\Delta_k\}}$ olmak üzere Uyarı 2.36 gereği G/K, Σ_k üzerine primitif etki eder. Lemma 2.40 gereği $G/K \cong Alt(\Sigma_k)$ veya $G/K \cong FSym(\Sigma_k)$ olur. Δ_k sabit a elemanını içeren bir blok olsun. Teorem 3.7 in ispatında olduğu gibi $(G/K)_{\Delta_k} = G_{\{\Delta_k\}}/K$ dir. Bu durumda $G_{\{\Delta_k\}}/K \cong Alt(\Sigma_k \setminus \{\Delta_k\})$ veya $G_{\{\Delta_k\}}/K \cong FSym(\Sigma_k \setminus \{\Delta_k\})$ elde edilir. Δ_k sonlu olduğundan Lemma 2.23 gereği $\left|G_{\{\Delta_k\}} : G_a\right| < \infty$ olur. O halde $\left|G_{\{\Delta_k\}}/K : G_aK/K\right| < \infty$ olacağından G_aK/K sonsuz alterne gruptur veya $FSym(\Sigma_k \setminus \{\Delta_k\})$ sonlu indeksli bir altgruba sahip olur. Oysa her iki durum da G_aK/K çözülebilir olduğundan çelişkidir.

Böylece G tamamen imprimitiftir. G nin değişmeli olmayan sonlu bir F altgrubu ile $\operatorname{supp} F \cup \{a\} \subseteq \Delta$ olacak şekilde aşikar olmayan bir Δ bloğunu alalım. Buradaki F altgrubunu $x, y \in G$ ve $[x, y] \neq 1$ olmak üzere $F = \langle x, y\rangle$ şeklinde seçebiliriz. Lemma 2.23 gereği $\left|G_{\{\Delta\}} : G_a\right|$ sonludur. Öyleyse $G_{\{\Delta\}}$ nın çözülebilir G_a altgrubu içinde kapsanan ve indeksi sonlu olan bir S normal altgrubu vardır. Teorem 3.7 gereği $M = \langle S^x \mid x \in G\rangle \neq G$ dir. Burada $S \subset M$ ve $\left|G_{\{\Delta\}} : S\right|$ sonlu olduğundan $\left|G_{\{\Delta\}} : G_{\{\Delta\}} \cap M\right|$ sonludur. O halde $G_{\{\Delta\}}$, G nin aşikar olmayan bir N_j normal altgrubu tarafından kapsanır. Çünkü $G_{\{\Delta\}}/G_{\{\Delta\}} \cap M$ sonlu olduğundan $G_{\{\Delta\}}/G_{\{\Delta\}} \cap M = \left\{x_1 \left(G_{\{\Delta\}} \cap M\right), \ldots, x_r \left(G_{\{\Delta\}} \cap M\right)\right\}$ olmak üzere $G_{\{\Delta\}} = \left\langle x_1, \ldots x_r, G_{\{\Delta\}} \cap M\right\rangle$ yazılabilir. G tamamen imprimitif olduğundan $x_1, \ldots, x_r \in N_j$ olacak şekilde G nin aşikar olmayan bir N_j normal altgrubu vardır. Buna göre $G_{\{\Delta\}} \subset N_jM$ olur. Ancak $S \trianglelefteq G_{\{\Delta\}}$ olduğundan her $x \in G$ için $S^x \trianglelefteq G^x_{\{\Delta\}}$ dir. O halde M grubu etkinin çekirdeğinin içine girer. Dolayısıyla $G_{\{\Delta\}} \subset N_j$ olur. $a \in \Delta$ olduğundan $G_a \subset G_{\{\Delta\}} \subset N_j$ dir. Öyleyse G nin her x elemanı için $G_{ax} = G^x_a \subset N^x_j = N_j$ olur. Lemma 2.24 gereği $\langle G_{ax} \mid x \in G\rangle = G \subset N_j$ dir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde G_a çözülebilir grup olamaz.

(ii) G normalleyen şartını sağladığından Lemma 2.20 gereği yerel nilpotenttir. G yerel sonlu ve yerel nilpotent olduğundan Lemma 2.21 gereği maksimal p-altgruplarının direkt çarpımı şeklinde yazılabilir. O halde Lemma 2.30 gereği G bir p-gruptur. Şimdi G' nün minimal FC olmayan grup olduğunu gösterelim.

Sonuç 2.33 ve Teorem 2.34 gereği G', Ω üzerine transitif etki eder ve G' mükemmeldir. Buna göre Lemma 2.14 gereği G' bir FC grup olamaz. $H \lneqq G'$ alalım. H nın her orbiti sonlu ise Lemma 2.14 gereği H bir FC grup olur ki bu istenendir. H nin bir sonsuz orbitinin var olduğunu kabul edelim. G normalleyen şartını sağladığından Lemma 2.16 gereği H yükselen altgrup olur. O halde Lemma 3.5 gereği H normal ve transitiftir. Teorem 2.34 gereği $G' \leq H$ olur. Oysa bu bir çelişkidir. O halde H bir FC grup olmak zorundadır. Böylece G' minimal FC olmayan grup olur. $\square$

Teorem 3.9 *Ω sonsuz bir küme, $a \in \Omega$ ve G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) G_a yerel çözülebilir ise G yerel çözülebilirdir.

(ii) G_a yerel nilpotent-by-çözülebilir ise G bir p-gruptur.

İspat. G_a grubu için (i) veya (ii) geçerli olsun. Bu durumda G_a yerel çözülebilirdir. Çünkü G_a yerel nilpotent-by-çözülebilir ise G_a/N çözülebilir olacak şekilde yerel nilpotent bir $N \lhd G_a$ vardır. G yerel sonlu ve G_a/N ile N yerel çözülebilir olduğundan Lemma 2.18 gereği G_a yerel çözülebilir olur. Bu takdirde G tamamen imprimitiftir. Çünkü, eğer G primitif ise Lemma 2.40 gereği $G_a \cong Alt(\Omega\setminus\{a\})$ veya $G_a \cong FSym(\Omega\setminus\{a\})$ dır. $Alt(\Omega\setminus\{a\})$ sonsuz basit grup olduğundan ve $FSym(\Omega\setminus\{a\})$ indeksi 2 olacak şekilde $Alt(\Omega\setminus\{a\})$ altgrubuna sahip olduğundan her iki grup da yerel çözülebilir değildir. Öyleyse G primitif olamaz. Eğer G hemen hemen primitif ise G nin a yı içeren aşikar olmayan bir Γ maksimal bloğu vardır ve G grubu $\Sigma = \{\Gamma x \mid x \in G\}$ kümesi üzerine transitif etki eder. K bu etkinin çekirdeği olmak üzere G/K grubu $FSym(\Sigma)$ nın bir altgrubuna izomorftur. Daha önceki ispatlardan $(G/K)_\Gamma = G_{\{\Gamma\}}/K$, $G_a \leq G_{\{\Gamma\}}$ ve Uyarı 2.36 gereği G/K nın Σ üzerine primitif etki ettiğini biliyoruz. O halde Lemma 2.40 gereği $G/K \cong Alt(\Sigma)$ veya $G/K \cong FSym(\Sigma)$ olur. O halde $G_{\{\Gamma\}}/K \cong Alt(\Sigma\setminus\{\Gamma\})$ veya $G_{\{\Gamma\}}/K \cong FSym(\Sigma\setminus\{\Gamma\})$ olur. Γ sonlu ve $a \in \Gamma$

olduğundan Lemma 2.23 gereği $\left|G_{\{\Gamma\}} : G_a\right|$ sonludur. Öyleyse $\left|G_{\{\Gamma\}}/K : G_aK/K\right|$ sonlu olur. Oysa $Alt\left(\Sigma\backslash\{\Gamma\}\right)$ veya $FSym\left(\Sigma\backslash\{\Gamma\}\right)$ sonlu indeksli ve yerel çözülebilir bir altgruba sahip değildir. Böylece G tamamen imprimitif olur.

(i) G_a yerel çözülebilir bir grup olsun. Böylece G tamamen imprimitiftir. Lemma 2.37 gereği $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ olacak şekilde $N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_r \leq \cdots$ normal altgrup zinciri vardır. N_k lar FC grup olduğundan Lemma 2.14 ve Lemma 3.2 gereği $|aN_k| = |N_k : N_k \cap G_a|$ sonludur ve bu uzunluk $|\Delta_k|$ dan küçüktür. Çünkü $a \in \Delta_k$ olmak üzere $\Omega = \bigcup\limits_{x\in G} \Delta_k x$ olduğundan en az bir $x \in G$ için $a \in \Delta_k x$ tir. N_k nın elemanları $\Delta_k x$ i sabit bıraktığından $N_k \subset G_{\{\Delta_k x\}}$ tir. Buradan $aN_k = \{an \mid n \in N_k\} \subset \Delta_k x$ ve $|\Delta_k x| = |\Delta_k|$ olduğundan $|aN_k| < |\Delta_k|$ dır. $|N_k : N_k \cap G_a|$ sonlu olduğundan N_k nın $N_k \cap G_a$ da kapsanan bir M_k normal altgrubu $|N_k : M_k|$ sonlu olacak şekilde vardır. Buna göre M_k yerel çözülebilirdir. N_k grubunun birbirlerinin izomorfik kopyası olan grupların direkt çarpımı şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. O halde M_k bu simetrik grubun çözülebilir gruplarının direkt çarpımının bir altgrubudur. Sabit çözülebilir grupların direkt çarpımları da aynı uzunlukta türev serisine sahip bir çözülebilir grup olduğundan M_k çözülebilirdir.

S_k, N_k nın tüm çözülebilir normal altgruplarının çarpımı olsun. Bu halde $M_k \leq S_k$ ve S_k yerel çözülebilirdir. $S_k char N_k \trianglelefteq G$ olduğundan S_k, G de normaldir. $S = \langle S_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle \triangleleft G$ tanımlayalım. Bu durumda S yerel çözülebilirdir.

G/S sonlu ve normal altgrupların sonsuz birleşimidir. Çünkü,

$$G/S = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right) S/S = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k S/S = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k/N_k \cap S$$

yazılabilir. Burada $M_k \leq S_k < S$ olduğundan $M_k < N_k \cap S$ dir. O halde

$$|N_k : N_k \cap S| \leq |N_k : M_k| < \infty$$

olur.

Şimdi G/S nin bir FC grup olduğunu gösterelim. $xS \in G/S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k S/S$ ise en az bir k için $xS \in N_k S/S$ dir. $gS \in G/S$ için $gSxSg^{-1}S = gxg^{-1}S \in N_k S/S$

ve N_kS/S sonlu olduğundan G/S bir FC gruptur. Buradan Lemma 2.15 gereği S, Ω üzerine transitif etki eder. $S \lhd G$ ve S transitif olduğundan Teorem 2.34 gereği $G' \leq S$ olur. O halde G/S değişmelidir. Buna göre G/S değişmeli ve S yerel çözülebilir olduğundan Sonuç 2.19 gereği G yerel çözülebilirdir.

(ii) G_a yerel nilpotent-by-çözülebilir grup olsun. O halde G_a/N çözülebilir olacak şekilde yerel nilpotent bir $N \lhd G_a$ vardır. G_a/N nin türev serisinin uzunluğu $t \geq 0$ olsun. (i) gereği G yerel çözülebilir olur. $\tau(G_a)$, G_a nın Hirsch-Plotkin radikali(maksimal normal yerel nilpotent altgrubu) olsun. Buna göre $N \subset \tau(G_a)$ ve G_a/N çözülebilir olduğundan $G_a/\tau(G_a)$ grubu türev serisinin uzunluğu t den küçük olan çözülebilir bir gruptur.

Lemma 2.33 gereği G' transitiftir. Eğer G' yerel nilpotent olursa Lemma 2.30 gereği G' bir p-grup olacağından Lemma 2.28 gereği G de bir p-grup olur. O halde G' nün yerel nilpotent olduğunu göstermek yeterlidir. Genelliği bozmadan $G' = G$ alabiliriz.

(i) de olduğu gibi M_k yerel çözülebilirdir. $\tau(M_k)$, M_k nın Hirsch-Plotkin radikali olsun. $M_k < G_a$ ve G_a yerel nilpotent-by-çözülebilir olduğundan M_k/D çözülebilir olacak şekilde yerel nilpotent bir D normal altgrubu vardır. $\tau(M_k) char M_k \trianglelefteq N_k$ olduğundan $\tau(M_k) \lhd N_k$ dir. O halde $\tau(M_k) \lhd \tau(N_k)$ olur. Benzer şekilde $\tau(N_k) \lhd G$ dir. Ayrıca $D \subset \tau(M_k)$ ve M_k/D çözülebilir olduğundan $M_k/\tau(M_k)$ çözülebilirdir.

$K = \langle \tau(N_k) \mid k \geq 1 \rangle$ tanımlayalım. K, G nin yerel nilpotent ve normal altgrubudur. K, Ω üzerinde transitif ise Teorem 2.34 gereği $K \geq G' = G$ olacağından G' yerel nilpotent olur. K nın transitif olmadığını kabul edelim. G nin aşikar olmayan bir $aK = \Delta$ bloğunu alalım. $\Sigma = \{\Delta x \mid x \in G\}$ olmak üzere L, G nin Σ üzerine etkisinin çekirdeği ise G/L nin $FSym(\Sigma)$ nın bir altgrubuna izomorf olduğunu biliyoruz. Ayrıca $k \in K$ için $(\Delta x)k = \Delta xk = \Delta k_1 x = \Delta x$ olduğundan $k \in L$ olur. Öyleyse $K \leq L$ dir. G yerel çözülebilir olduğundan tamamen imprimitiftir. Dolayısıyla $\overline{G} = G/L$, Σ üzerine tamamen imprimitif etki eder. O halde $\overline{G} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_kL/L$ olur ve M_kL/L, N_kL/L de sonlu indeksli, türev serisinin uzunluğu t den küçük olan çözülebilir bir altgruptur. Öyleyse [3, Lemma4] gereği $\overline{N_k}$ nin sonlu indeksli ve türev serisinin uzunluğu t^2 den küçük veya eşit olan bir karakteristik altgrubu vardır. Buna $\overline{S_k}$ diyelim. $\overline{S_k} char \overline{N_k} \trianglelefteq \overline{G}$ olduğundan $\overline{S_k} \lhd \overline{G}$ olur. $\overline{G}/\overline{S_k}$ nın $\overline{N_k}/\overline{S_k}$ nın otomorfizmaları üzerine eşlenik etkisi tanımlanırsa $\left(\overline{G}/\overline{S_k}\right)/C_{\overline{G}/\overline{S_k}}(\overline{N_k}/\overline{S_k})$, $\mathrm{Aut}(\overline{N_k}/\overline{S_k})$ nın bir altgrubuna izomorf olur ve $\mathrm{Aut}(\overline{N_k}/\overline{S_k})$ sonludur.

G yerel çözülebilir ve $G = G'$ olduğundan G nin sonlu indeksli bir altgrubu yoktur. Çünkü $|G : H|$ sonlu ise G/M sonlu ve çözülebilir olacak şekilde H nin içinde bir $M \lhd G$ vardır. G/M çözülebilir olduğundan $G^{(t)} \leq M$ dir. Bu durumda $\overline{N_k}/\overline{S_k}$ değişmeli gruptur. Çünkü $\left(\overline{G}/\overline{S_k}\right)/C_{\overline{G}/\overline{S_k}}(\overline{N_k}/\overline{S_k})$ sonlu ise G nin sonlu indeksli bir altgrubu vardır. Oysa bu G nin yerel çözülebilir mükemmel grup olmasıyla çelişir. O halde $C_{\overline{G}/\overline{S_k}}(\overline{N_k}/\overline{S_k}) = \overline{1}$ veya $C_{\overline{G}/\overline{S_k}}(\overline{N_k}/\overline{S_k}) = \overline{G}/\overline{S_k}$ dır. $C_{\overline{G}/\overline{S_k}}(\overline{N_k}/\overline{S_k}) = \overline{1}$ olursa yine G nin sonlu indeksli bir altgrubuna ulaşılır. Dolayısıyla $C_{\overline{G}/\overline{S_k}}(\overline{N_k}/\overline{S_k}) = \overline{G}/\overline{S_k}$ dir. Öyleyse $\overline{N_k}/\overline{S_k}$ değişmeli gruptur.

$\overline{N_k}/\overline{S_k}$ değişmeli olduğundan $\overline{N_k}$ türev serisinin uzunluğu t^2+1 den küçük veya eşit olan çözülebilir bir gruptur. O halde $\overline{G}$ türev serisinin uzunluğu t^2+1 den küçük çözülebilir bir grup olur. Oysa bu $G = G'$ ile çelişir. Dolayısıyla K transitif olmak zorundandır. Buna göre $G = G'$ yerel nilpotent olur. □

Sonuç 3.10 *Ω sonsuz bir küme ve G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir transitif altgrubu olsun. $a \in \Omega$ olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) G_a yerel (nilpotent-by-değişmeli) ise G bir p-gruptur.

(ii) G_a yerel supersoluble ise G bir p-gruptur.

İspat. (i) G_a yerel (nilpotent-by-değişmeli) olduğundan G_a nın sonlu üreteçli her altgrubu nilpotent-by-değişmelidir. O halde $H \leq G_a$ ve H sonlu üreteçli ise H/N değişmeli olacak şekilde H nin nilpotent bir N normal altgrubu vardır. Buradan H/N ve N çözülebilir olduğundan H çözülebilirdir. Böylece G_a yerel çözülebilir olacağından Teorem 3.9 gereği G tamamen imprimitif olur. Buradan

Lemma 2.37 gereği G sayılabilir sonsuzdur. $F_1 \leq F_2 \leq \cdots$, G_a nın bir sonlu altgrup zinciri ve $G_a = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ olsun. G_a yerel (nilpotent-by-değişmeli) ve F_i sonlu olduğundan F_i nilpotent-by-değişmelidir. O halde F_i/N_i değişmeli olacak şekilde F_i nin nilpotent bir N_i normal altgrubu vardır. Buradan $F_i' \leq N_i$ ve N_i nilpotent olduğundan F_i' nilpotent olur. Böylece $G_a' = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i'$ ve $F_i' \leq F_{i+1}'$ olur. F_i' nilpotent olduğundan G_a' yerel nilpotenttir. Buradan G_a' yerel nilpotent ve G_a/G_a' değişmelidir. Öyleyse G_a yerel nilpotent-by-değişmelidir. Buna göre Teorem 3.9 gereği G bir p-grup olur.

(ii) G_a yerel supersoluble olsun. O halde G_a nın sonlu üreteçli her H altgrubu supersoluble olur. [16, 5.4.10] gereği H nilpotent-by-değişmeli gruptur. Öyleyse G_a yerel (nilpotent-by-değişmeli) grup olur. Böylece (i) gereği G bir p-gruptur. □

Lemma 3.11 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın tamamen imprimitif bir altgrubu ve A kümesi de G nin üreteç kümesi olsun. Bu durumda $\langle a\rangle^G$ değişmeli olmayacak şekilde bir $a \in A$ vardır.*

İspat. Her $a \in A$ için $\langle a\rangle^G$ nin değişmeli olduğunu kabul edelim. F, G nin değişmeli olmayan sonlu bir altgrubu olsun. G tamamen imprimitif olduğundan $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ olacak şekilde G nin aşikar olmayan bir Δ bloğu vardır. Teorem 2.26 gereği $G_{\{\Delta\}}$, G nin aşikar olmayan bir altgrubudur. Buradan $a \notin G_{\{\Delta\}}$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Aksi halde $G = \langle A\rangle \subset G_{\{\Delta\}} \lneqq G$ olur. F değişmeli olmayan bir grup olduğundan $F' \neq 1$ dir. Buradan Lemma 3.1 gereği $F' \leq [F, a]$ olur. Diğer taraftan $[F, a] = \left\langle (a^{-1})^x a \mid x \in F\right\rangle \leq \langle a\rangle^G$ olduğundan kabul gereği $\langle a\rangle^G \leq N_G(F')$ dür. $\operatorname{supp} F' \subseteq \operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ olduğundan Lemma 3.1 gereği $N_G(F') \subseteq G_{\{\Delta\}}$ bulunur. O halde $a \in G_{\{\Delta\}}$ olur. Oysa bu bir çelişkidir. Böylece $\langle a\rangle^G$ değişmeli olmayacak şekilde bir $a \in A$ vardır. □

Lemma 3.12 *G grubu $FSym(\Omega)$ nın bir altgrubu olsun. G nin bir F altgrubunu ve* $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ *olacak şekilde aşikar olmayan bir Δ bloğunu alalım. $y \in G\backslash G_{\{\Delta\}}$*

olmak üzere $y^t \in G_{\{\Delta\}}$ *yı sağlayan en küçük pozitif tamsayı* t *olarak verilsin. Bu durumda* $y^t \in FC_G(F)$ *ise* $(yx^{-1})^t \in C_G(F)$ *olacak şekilde bir* $x \in F$ *vardır. Buradaki* t *sayısı bu özellikteki en küçük pozitif tamsayıdır.*

İspat. Δ sonlu ve $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ olduğundan F sonludur. $y^t \in FC_G(F)$ ise $y^t = cx$ olacak şekilde $c \in C_G(F)$ ve $x \in F$ vardır. $y \in G \backslash G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $\Delta \cap \Delta y = \emptyset$ olur. Ayrıca $\Delta, \Delta y, \ldots, \Delta y^{t-1}$ blokları birbirinden farklı bloklardır. Eğer $\Delta y^i = \Delta y^j$ olsaydı $\Delta y^{j-i} = \Delta$ olacağından $y^{j-i} \in G_{\{\Delta\}}$ bulunurdu. Ancak bu t nin en küçük olmasıyla çelişir. Şimdi $1 \leq k \leq t$ olmak üzere her $z \in F$ ve her $i \in \Delta$ için $(yz)^k(i) = y^k(z(i))$ olduğunu tümevarımla gösterelim.
$k = 1$ için $(yz)(i) = y(z(i))$ olur. $k \leq t-1$ için $(yz)^k(i) = y^k(z(i))$ doğru olsun. $(yz)^{k+1}(i) = y^{k+1}(z(i))$ olduğunu gösterelim. $z \in F$ ve $i \in \Delta$ ise $z(i) \in \Delta$ dır. Öyleyse $y^k(z(i)) \notin \Delta$ olur. Eğer $y^k(z(i)) \in \Delta$ olsaydı $y^k(z(i)) \in \Delta y^k \cap \Delta$ olacağından $\Delta y^k \cap \Delta \neq \emptyset$ bulunurdu. Oysa bu $\Delta, \Delta y, \ldots, \Delta y^{t-1}$ bloklarının birbirinden farklı olmasıyla çelişir. Buradan $\operatorname{supp}(z) \subseteq \Delta$ olduğundan $y^k(z(i)) \notin \operatorname{supp}(z)$ dir. Öyleyse $z\left(y^k(x(i))\right) = y^k(z(i))$ bulunur. Böylece,

$$(yz)^{k+1}(i) = (yz)(yz)^k(i) = (yz)\,y^k(z(i)) = yy^k(z(i)) = y^{k+1}(z(i))$$

olur.
İspatlanan eşitlikte $k = t$ ve $z = x^{-1}$ alınırsa her $i \in \Delta$ için $(yx^{-1})^t(i) = y^t(x^{-1}(i)) = y^t x^{-1}(i) = c(i)$ olur. O halde $(yx^{-1})^t|_\Delta = c|_\Delta$ bulunur. Buradan $(yx^{-1})^t = c|_\Delta d$ olacak şekilde bir $d \in FSym(\Omega \backslash \Delta)$ vardır. Çünkü $y^t \in G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $\gamma \notin \Delta$ için $y^t x^{-1}(\gamma) \notin \Delta$ dır. Eğer $y^t x^{-1}(\gamma) \in \Delta$ olsaydı bu $(y^t)^{-1} \in G_{\{\Delta\}}$ olmasıyla çelişirdi. Buna göre $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta$ ve $d \in FSym(\Omega \backslash \Delta)$ olduğundan $d \in C_G(F)$ dir. O halde $(yx^{-1})^t \in C_G(F)$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.13 Ω *sonsuz bir küme olmak üzere* G *grubu* $FSym(\Omega)$ *nın tamamen imprimitif p-altgrubu olsun. Eğer* G *nin normal olmayan sonlu her* F *altgrubu için* $g^p \in C_G(F)$ *olacak şekilde bir* $g \in G \backslash N_G(F)$ *varsa* G *nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır.*

İspat. G nin aşikar olmayan her altgrubu sonlu orbite sahip olsun. Lemma 3.11 gereği $\langle c_1\rangle^G$ değişmeli olmayacak şekilde bir $c_1 \in G$ vardır. $F_1 = \langle c_1\rangle$ sonlu ve devirlidir. G tamamen imprimitif olduğundan $\Omega = \bigcup \Lambda_i$ olacak şekilde aşikar olmayan sonlu bloklardan oluşan $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots$ dizisi mevcuttur. $\operatorname{supp} F_1 \subseteq \Lambda_1$ olsun. Teorem 2.26 gereği $G_{\{\Lambda_1\}}$, G nin aşikar olmayan bir altgrubudur. $U_1 = F_1^{G_{\{\Lambda_1\}}}$ olarak alalım. Lemma 3.3 gereği $U = \left\{u \in G_{\{\Lambda_1\}} \mid \operatorname{supp}(u) \subseteq \Lambda_1\right\}$ olmak üzere $U \trianglelefteq G_{\{\Lambda_1\}}$ ve $F_1 \subseteq U$ dur. Normal kapanış tanımı gereği U_1, F_1 i içeren $G_{\{\Lambda_1\}}$ in en küçük normal altgrubu olduğundan $U_1 \subseteq U$ olur. O halde $\operatorname{supp} U_1 \subseteq \operatorname{supp} U \subseteq \Lambda_1$ bulunur. Λ_1 sonlu olduğundan U_1 sonludur ve $U_1 \lhd G_{\{\Lambda_1\}}$ dir. Buradan $G_{\{\Lambda_1\}} \subseteq N_G(U_1)$ olur. Lemma 3.1 gereği $N_G(U_1) \subseteq G_{\{\Lambda_1\}}$ dir. O halde $G_{\{\Lambda_1\}} = N_G(U_1)$ olur. Böylece $N_G(U_1) \subsetneqq G$ olacağından $U_1 \ntriangleleft G$ dir. U_1 normal olmayan sonlu bir grup olduğundan hipotez gereği $c_2^p \in C_G(U_1)$ olacak şekilde en az bir $c_2 \in G\backslash N_G(U_1) = G\backslash G_{\{\Lambda_1\}}$ vardır. $F_1 \leq U_1 = F_1^{G_{\{\Lambda_1\}}}$ olduğundan $c_2^p \in C_G(F_1)$ dir. Lemma 3.3 gereği $F_1^{\langle c_2\rangle} = F_1 \times F_1^{c_2} \times \cdots \times F_1^{c_2^{p-1}} = \langle c_1\rangle \times \langle c_1\rangle^{c_2} \times \cdots \times \langle c_1\rangle^{c_2^{p-1}}$ dir. $F_2 = \langle F_1, c_2\rangle = \left(F_1 \times F_1^{c_2} \times \cdots \times F_1^{c_2^{p-1}}\right) \rtimes \langle c_2\rangle$ olsun. F_2 sonlu olduğundan $\operatorname{supp} F_2 \subseteq \Lambda_2$ olacak şekilde aşikar olmayan sonlu Λ_2 bloğu vardır. $U_2 = F_2^{G_{\{\Lambda_2\}}}$ olsun. Buna göre $U_2 \lhd G_{\{\Lambda_2\}} \subsetneqq G$ olur. Yukarıda U_1 için yapılan işlemler U_2 için de yapılırsa U_2 sonlu, $\operatorname{supp} U_2 \subseteq \Lambda_2$ ve $U_2 \ntrianglelefteq G$ olur. Hipotez gereği $c_3^p \in C_G(U_2)$ olacak şekilde en az bir $c_3 \in G\backslash G_{\{\Lambda_2\}}$ vardır. Buradan $F_2^{\langle c_3\rangle} = F_2 \times F_2^{c_3} \times \cdots \times F_2^{c_3^{p-1}}$ olur. $F_3 = \langle F_2, c_3\rangle = \langle F_1, c_2, c_3\rangle = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ olsun. Bu şekilde devam edilirse G nin aşikar olmayan Λ_i bloklarından oluşan $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_3 \subset \cdots$ artan blok zincirine ve $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ özelliğinde olan sonlu $F_i = \langle c_1, c_2, \ldots, c_i\rangle$ altgrupları elde edilir. Burada her $i \geq 1$ için $c_{i+1} \in G\backslash G_{\{\Lambda_i\}}$ dir ve $\operatorname{supp} F_1 \subsetneq \operatorname{supp} F_2 \subsetneq \operatorname{supp} F_3 \subsetneq \cdots$ olur. Ayrıca $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ dir. $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ alalım. Bu durumda $\operatorname{supp} F$ sonsuzdur. Ayrıca $\operatorname{supp} F_1$ den bir eleman içeren F nin bir orbiti sonsuzdur. G nin aşikar olmayan her altgrubu sonlu orbite sahip olduğundan $F = G$ bulunur. Şimdi $\langle c_1\rangle^F$ in değişmeli olduğunu gösterirsek kabul gereği $\langle c_1\rangle^G$ değişmeli olur. Oysa bu Lemma 3.11 ile çelişir. $F = \bigcup F_i$, $F_1 < F_2 < \cdots$ olduğundan her i için $\langle c_1\rangle^{F_i}$ nin değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir.

$i = 1$ ise $F_1 = \langle c_1 \rangle$ değişmelidir. Keyfi bir $i > 1$ için önerme doğru olsun. Tümevarım hipotezi gereği $\langle c_1 \rangle^{F_i}$ değişmelidir. Burada F_{i+1} grubu,

$$F_{i+1} = F_i^{\langle c_{i+1} \rangle} \rtimes \langle c_{i+1} \rangle = \langle F_i, c_{i+1} \rangle = \left(F_i \times F_i^{c_{i+1}} \times \cdots \times F_i^{c_{i+1}^{p-1}} \right) \rtimes \langle c_{i+1} \rangle$$

şeklindedir. $x, y \in F_{i+1}$ olsun. $\langle c_1 \rangle^{F_{i+1}}$ in değişmeli olduğunu göstermek için $[c_1^x, c_1^y] = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in F_{i+1}$ ise,

$$\begin{aligned} x &= \left(a_0 a_1^{c_{i+1}} \dots a_{p-1}^{c_{i+1}^{p-1}} \right) c_{i+1}^r, a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in F_i, 0 \le r \le p-1, \\ y &= \left(b_0 b_1^{c_{i+1}} \dots b_{p-1}^{c_{i+1}^{p-1}} \right) c_{i+1}^s, b_0, b_1, \dots, b_{p-1} \in F_i, 0 \le s \le p-1 \end{aligned}$$

olur. $c_1^{a_0} \in F_i$ dir ve $1 \le u \le p-1$ için Lemma 3.1 gereği $\left[F_i, F_i^{c_{i+1}^u} \right] = 1$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} c_1^x &= c_1^{a_0 a_1^{c_{i+1}} \dots a_{p-1}^{c_{i+1}^{p-1}} . c_{i+1}^r} = c_1^{a_0 c_{i+1}^r}, \\ c_1^y &= c_1^{b_0 b_1^{c_{i+1}} \dots b_{p-1}^{c_{i+1}^{p-1}} . c_{i+1}^s} = c_1^{b_0 c_{i+1}^s} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $[c_1^x, c_1^y] = \left[c_1^{a_0 c_{i+1}^r}, c_1^{b_0 c_{i+1}^s} \right]$ dir.

$r \neq s$ olsun. Bu halde $F_i^{\langle c_{i+1} \rangle} = F_i \times F_i^{c_{i+1}} \times \cdots \times F_i^{c_{i+1}^{p-1}}$ olduğundan $(c_1^{a_0})^{c_{i+1}^r}$ ile $\left(c_1^{b_0}\right)^{c_{i+1}^s}$ bu direkt çarpımdaki farklı grupların içine düşer. Dolayısıyla $\left[c_1^{a_0 c_{i+1}^r}, c_1^{b_0 c_{i+1}^s} \right] = 1$ olur.

$r = s$ olsun. Bu halde $[c_1^x, c_1^y] = \left[c_1^{a_0 c_{i+1}^r}, c_1^{b_0 c_{i+1}^s} \right] = \left[c_1^{a_0}, c_1^{b_0} \right]^{c_{i+1}^r}$ olur. Tümevarım hipotezi gereği $\langle c_1 \rangle^{F_i}$ değişmeli ve $c_1^{a_0}, c_1^{b_0} \in \langle c_1 \rangle^{F_i}$ olduğundan $\left[c_1^{a_0}, c_1^{b_0} \right] = 1$ dir. Buna göre $\left[c_1^{a_0}, c_1^{b_0} \right]^{c_{i+1}^r} = 1$ bulunur.

Bu durumda $\langle c_1 \rangle^G$ değişmeli olur. Oysa bu Lemma 3.11 ile çelişir. Öyleyse G nin sonsuz orbite sahip aşikar olmayan bir altgrubu vardır. $\square$

Sonuç 3.14 Ω *sonsuz bir küme olmak üzere* G *grubu* $FSym(\Omega)$ *nın tamamen imprimitif p-altgrubu olsun.* G *nin normal olmayan sonlu her* F *altgrubu için* $y^p \in FC_G(F)$ *olacak şekilde bir* $y \in G \backslash N_G(F)$ *varsa* G *nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır.*

İspat. G nin normal olmayan sonlu bir F altgrubunu alalım. F sonlu olduğundan G nin $\operatorname{supp} F$ yi kapsayan aşikar olmayan bir Δ bloğu mevcuttur. Hipotez gereği $y^p \in FC_G(F)$ olacak şekilde bir $y \in G \backslash N_G(F)$ vardır. Lemma 3.1 gereği $C_G(F) \leq N_G(F) \leq G_{\{\Delta\}}$ dır. $F \leq G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $FC_G(F) \leq G_{\{\Delta\}}$ dır. O halde $y^p \in G_{\{\Delta\}}$ olur. Lemma 3.12 gereği $(yx)^p \in C_G(F)$ olacak şekilde en az bir $x \in F$ vardır. Dolayısıyla $x \in G_{\{\Delta\}}$ olur. $yx \in G_{\{\Delta\}}$ ise $y \in G_{\{\Delta\}}$ olur. Ancak bu $y \notin G_{\{\Delta\}}$ ile çelişir. O halde $yx \notin G_{\{\Delta\}} \supseteq N_G(F)$ dir. Buna göre $yx \notin N_G(F)$ ve $(yx)^p \in C_G(F)$ elde edilir. O halde Teorem 3.13 gereği G nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır. $\square$

Sonuç 3.15 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın tamamen imprimitif p-altgrubu ve G nin aşikar olmayan bloklarından oluşan $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_k \subset \cdots$ sonsuz artan zinciri aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde var olsun: Her $k \geq 1$ için $F_k = \{x \in G \mid \operatorname{supp}(x) \subseteq \Delta_k\}$ olmak üzere $\langle F_k^x \mid x \in G\rangle$ grubu $G_{\{\Delta_k\}}$ da kapsanan G nin en büyük normal altgrubudur.*
Bu durumda G nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır.

İspat. $\Sigma_k = \{\Delta_k x \mid x \in G\}$ olmak üzere G nin Σ_k üzerine etkisinin çekirdeği $M_k = \bigcap\limits_{x \in G} G^x_{\{\Delta_k\}}$ olsun. O halde M_k, $G_{\{\Delta_k\}}$ içinde kapsanan G nin en büyük normal altgrubudur. Hipotez gereği $M_k = \langle F_k^x \mid x \in G\rangle$ olur. $\overline{G} = G/M_k$ olsun. G sonsuz p-grup ve G nin $\Delta_k \subset \Delta_{k+1} \subset \cdots$ şeklinde blokları var olduğundan G nin aşikar olmayan normal altgrupları vardır. R, G nin aşikar olmayan bir normal altgrubu olsun. R nin orbitleri G nin blokları olduğundan sonludur. O halde $\overline{R}$ nin orbitleri sonlu olduğundan bir FC gruptur. Ayrıca G sonsuz p-grup olduğundan yerel nilpotenttir. O halde $\overline{R}$ de yerel nilpotenttir. [17, Sonuç 1.15] gereği yerel nilpotent FC grubun merkezi aşikar olmayan bir altgruptur. Bu merkez bir p-grup olduğundan $\Omega_1(Z(\overline{R})) = \left\{\overline{r} \in Z(\overline{R}) \mid \overline{r}^p = \overline{1}\right\}$ kümesi $\overline{R}$ nin elemanter değişmeli p-altgrubudur.
$1 \neq \Omega_1(Z(\overline{R})) char Z(\overline{R}) char \overline{R} \lhd \overline{G}$ olduğundan $\Omega_1(Z(\overline{R})) \lhd \overline{G}$ dir. $\Omega_1(Z(\overline{R}))$, Σ_k üzerine aşikar etki etmediğinden $\Omega_1(Z(\overline{R})) \nleq \overline{G_{\{\Delta_k\}}}$ olur. $\overline{z} \in$

$\Omega_1(Z(\overline{R}))\backslash\overline{G_{\{\Delta_k\}}}$ ve $|\overline{z}| = p$ olsun. Bu durumda $\overline{z}^p = \overline{1}$ olduğundan $z^p \in M_k$ dir. F_k nın tanımı gereği F_k, Δ_k üzerine etki eder. O halde F_k^x, Δ_k^x üzerine etki eder. Ayrıca $\operatorname{supp} F_k \subseteq \Delta_k$ ve $\operatorname{supp} F_k^x = \operatorname{supp} F_k x \subseteq \Delta_k x$ tir.

$M_k = \langle F_k^x \mid x \in G \rangle$ olduğunu biliyoruz. $x \in G$ alalım. $\operatorname{supp} F_k \subseteq \Delta_k$ olduğundan Lemma 3.1 gereği $x \in G\backslash G_{\{\Delta_k\}}$ iken $F_k^x \leq G_{\Delta_k} \leq F_k G_{\Delta_k}$ olur. $x \in G_{\{\Delta_k\}}$ olsun. $F_k^x \leq F_k \leq F_k G_{\Delta_k}$ olduğu gösterilirse $M_k \leq F_k G_{\Delta_k}$ olur. F_k nın tanımı gereği $\operatorname{supp} F_k^x \subseteq \Delta_k$ olduğunda $F_k^x \leq F_k$ bulunur. $\alpha \notin \Delta_k$ olsun. $x \in G_{\{\Delta_k\}}$ olduğundan $x^{-1} \in G_{\{\Delta_k\}}$ olur. Bu takdirde x ve x^{-1} permütasyonları Δ_k nin dışındaki bir noktayı Δ_k ya taşıyamaz. Çünkü $\alpha \notin \Delta_k$ için $\alpha x \in \Delta_k$ olsa $\alpha x x^{-1} = \alpha \in \Delta_k$ olur. Oysa bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha x^{-1} \notin \Delta_k$ olur. Buradan $\alpha x^{-1} F_k = \alpha x^{-1}$ olacağından $\alpha F_k^x = \alpha$ bulunur. O halde F_k^x in elemanları Δ_k kümesinin dışındaki elemanları sabit bırakır. Böylece $\operatorname{supp} F_k^x \subseteq \Delta_k$ elde edilir.

$M_k \leq F_k G_{\Delta_k}$ ve $G_{\Delta_k} \subseteq C_G(F_k)$ olduğundan $z^p \in F_k C_G(F_k)$ bulunur.

F, G nin normal olmayan sonlu bir altgrubu olsun. F sonlu ve G tamamen imprimitif olduğundan $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta_k$ olacak şekilde en az bir $k \geq 1$ vardır. O halde yukarıdaki paragraftan $y^p \in FC_G(F)$ olacak şekilde en az bir $y \in G\backslash G_{\{\Delta_k\}}$ vardır. Lemma 3.1 gereği $N_G(F) \subseteq G_{\{\Delta_k\}}$ olduğundan $y \in G\backslash N_G(F)$ dir. O halde Sonuç 3.14 gereği G nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır. □

Sonuç 3.16 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın tamamen imprimitif p-altgrubu ve G nin aşikar olmayan bloklarından oluşan $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_k \subset \cdots$ sonsuz artan zinciri aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde var olsun: Her $k \geq 1$ için $\langle y_k \rangle \cap G_{\{\Delta_k\}} \leq G_{\Delta_k}$ olacak şekilde bir $y_k \in G\backslash G_{\{\Delta_k\}}$ vardır.*

Bu durumda G nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır.

İspat. F, G nin normal olmayan sonlu bir altgrubu olsun. $\operatorname{supp} F \subseteq \Delta_k$ olacak şekilde Δ_k bloğunu alalım. Hipotez gereği $y_k^p \in G_{\Delta_k}$ olacak şekilde bir $y_k \in G\backslash G_{\{\Delta_k\}}$ vardır. Böylece Lemma 3.1 gereği $y_k \in G\backslash N_G(F)$ ve $y_k^p \in C_G(F)$ olur.

Buradan Teorem 3.13 gereği G nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır. □

Sonuç 3.17 *Ω sonsuz bir küme olmak üzere G grubu $FSym(\Omega)$ nın tamamen imprimitif p-altgrubu ve $G = \langle x \in G \mid x^p = 1 \rangle$ olsun. Bu durumda G minimal FC olmayan grup olamaz.*

İspat. G minimal FC olmayan grup olsun. O halde G nin aşikar olmayan her altgrubunun tüm orbitleri sonludur. $X = \{x \in G \mid x^p = 1\}$, $\langle X \rangle = G$ ve G nin aşikar olmayan Δ_i bloklarından oluşan sonsuz artan bir zinciri $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_k \subset \cdots$ olsun. Hipotez gereği her $k \geq 1$ için $x \in G \backslash G_{\{\Delta_k\}}$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır ve $\langle x \rangle \cap G_{\{\Delta_k\}} = 1$ dir. O halde Sonuç 3.16 gereği G nin sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu vardır ki bu çelişkidir. □

Uyarı 3.18 Sonuç 3.17 de G grubu, n bir doğal sayı olmak üzere $Y = \{x \in G \mid x^n = 1\}$ şeklinde bir küme tarafından üretilirse aynı sonuç elde edilemez. Çünkü her $k \geq 1$ için $x \in G \backslash G_{\{\Delta_k\}}$ olacak şekilde Y kümesinin bir x elemanının n den küçük bir kuvveti $G_{\{\Delta_k\}}$ içine düşebilir. Böylece Sonuç 3.16 daki $\langle x \rangle \cap G_{\{\Delta_k\}} \leq G_{\Delta_k}$ şartı sağlanmaz.

Örnek 3.19 $\Omega = \mathbb{N}$ olsun. Bu örnekte $FSym(\Omega)$ nın transitif olan ve FC grup olmayan yerel nilpotent hiperabelyen bir altgrubunu oluşturacağız.

$x_{k,n} = \prod_{i=0}^{2^{k-1}-1} \left(i + n2^k, i + n2^k + 2^{k-1}\right)$ olmak üzere $T_k = \{x_{k,n} \mid n = 0, 1, 2 \ldots\}$ olsun. Buradaki T_k lar

$$x_{1,n} = (2n, 2n+1),$$
$$x_{2,n} = (4n, 4n+2)(4n+1, 4n+3),$$
$$x_{3,n} = (8n, 8n+4)(8n+1, 8n+5)(8n+2, 8n+6)(8n+3, 8n+7),$$
$$\ldots$$

için

$$T_1 = \{(01), (23), (45), \ldots\},$$
$$T_2 = \{(02)(13), (46)(57), (810)(911), \ldots\},$$
$$T_3 = \{(04)(15)(26)(37), (812)(913)(1014)(1115), \ldots\},$$
$$\ldots$$

şeklindedir.

$k \geq 1$ olmak üzere $G_k = \langle T_1, T_2, \ldots, T_k \rangle$ tanımlayalım ve $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \leq FSym(\mathbb{N})$ olsun. Buna göre her $k \geq 1$ için G_k grubu G nin normal altgrubu ve $G_i/G_{i-1} = \langle T_1, \ldots, T_i \rangle / \langle T_1, \ldots, T_{i-1} \rangle$ elemanter değişmeli 2-gruptur. Dolayısıyla $G_1 \leq G_2 \leq G_3 \leq \cdots \leq G_k \leq \cdots$ olur ve G_i/G_{i-1} bölüm grupları değişmelidir. Buna göre G hiperabelyen gruptur. Diğer taraftan (01) elemanının eşlenik sınıfı sonlu olmadığından G grubu bir FC grup değildir.

Şimdi G' nün minimal FC olmayan grup olmadığını göstererek Teorem 3.8(ii) deki hipotezin bir nokta sabitleyenine kısıtlanamayacağını gösterelim.

$X = \langle x \in G' \mid x^2 = 1 \rangle$, $g \in G$, $x^2 = 1$ olmak üzere $x \in X$ olsun. Bu durumda $(x^g)^2 = (x^2)^g = 1$ ve $x^g \in G' \lhd G$ olduğundan $X \lhd G$ dir. Şimdi $k \geq 1$ olsun. Buna göre $x_{k,n} = g^{-1}x_{k,0}g$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Buradan $x_{k,0}x_{k,n} = x_{k,0}g^{-1}x_{k,0}g = [x_{k,0}, g] \in G'$ ve $x_{k,0}x_{k,n}$ nin mertebesi 2 olduğundan $x_{k,0}x_{k,n} \in X$ tir. Buradan $x_{k,n} \in x_{k,0}X$ bulunur. Böylece $G/X = \langle x_{k,0}X \mid k \geq 1 \rangle$ yazılabilir. $k, t \geq 1$ olmak üzere $x_{t,0}x_{k,0}x_{t,0}x_{k,0} = [x_{t,0}, x_{k,0}] \in G'$ ve $|x_{t,0}x_{k,0}x_{t,0}x_{k,0}| = 2$ olduğundan $x_{t,0}x_{k,0}x_{t,0}x_{k,0} \in X$ tir. Buna göre $x_{k,0}x_{t,0}X = x_{k,0}x_{t,0}\,(x_{t,0}x_{k,0}x_{t,0}x_{k,0}X) = x_{t,0}x_{k,0}X$ bulunur. Öyleyse $G' \subseteq X$ olacağından $X = G' = \langle x \in G' \mid x^2 = 1 \rangle$ bulunur. Dolayısıyla Sonuç 3.17 gereği G' minimal FC olmayan grup olamaz.

Teorem 3.20 *G yerel sonlu minimal FC olmayan grup olsun. G nin normal olmayan sonlu her F altgrubu için $y^p \in FC_G(F)$ olacak şekilde en az bir $y \in G \backslash N_G(F)$ varsa G mükemmel olamaz.*

İspat. G nin mükemmel grup olduğunu kabul edelim. Bu durumda [12, Teorem] gereği G bir p-gruptur ve Lemma 2.17 gereği $Z\left(G/Z(G)\right) = \overline{1}$ olur.

G bir p-grup olduğundan yerel nilpotenttir. $\overline{G} = G/Z(G)$ olsun. $\overline{G} = G/Z(G)$ grubu aşikar olmayan normal altgruplara sahiptir. Üstelik bu grup aşikar olmayan normal altgruplarının birleşimidir. Çünkü, G yerel nilpotent olduğundan $\overline{G}$ grubu yerel nilpotenttir. $\overline{G}$, FC grup olmadığından sonlu olamaz. Eğer $\overline{G}$ basit olsaydı basit ve yerel nilpotent bir grup sonlu olmak zorunda olduğundan çelişki ortaya çıkardı. Böylece $\overline{G}$ basit olamaz. Üstelik, $\overline{N}$ grubu $\overline{G}$ nin aşikar olmayan bir normal altgrubu olmak üzere $x \in \overline{G}$ için $x \notin \overline{N}$ ise $x\overline{N} \in \overline{G}/\overline{N}$ olur. $\overline{G}/\overline{N}$ grubu yerel sonlu p-grup olduğundan basit olamaz. Bu şekilde devam ederek $\overline{G}$ yi aşikar olmayan normal altgrupların birleşimi şeklinde yazabiliriz. $\overline{N}$, $\overline{G}$ nin aşikar olmayan normal altgrubu olsun. $\overline{G}$ yerel nilpotent minimal FC olmayan grup olduğundan $\overline{N}$ yerel nilpotent bir FC gruptur. Buna göre [17, Sonuç 1.15] gereği $\overline{N}$ nin merkezi aşikar olmayan bir gruptur ve [13, Teorem] gereği $Z\left(\overline{N}\right)$ nin mertebesi p olan bir $\overline{a}$ elemanı $\left\{\overline{a}^{\overline{x}} \mid \overline{x} \in \overline{G}\right\}$ kümesi sonsuz olacak şekilde seçilebilir.

$\Omega = \left\{\overline{a}^{\overline{x}} \mid \overline{x} \in \overline{G}\right\}$ alalım. [13, Teorem] gereği $\overline{G}$, Ω üzerine sonlumsu permütasyon grubu olarak etki eder. $\overline{K}$ bu etkinin çekirdeği olsun. Buradan $\overline{G}/\overline{K}$ grubu $FSym(\Omega)$ nın bir altgrubuna izomorftur. $\overline{G}/\overline{K}$ bir p-grup olduğundan $\overline{G}/\overline{K} = (G/Z(G))\,/\,(K/Z(G)) \cong G/K$ tamamen imprimitiftir. Dolayısıyla G/K grubu $FSym(\Omega)$ nın tamamen imprimitif bir altgrubu olur.

G/K tamamen imprimitif grubunun Teorem 3.13 ün hipotezlerini sağladığını gösterirsek G/K nın sonsuz orbite sahip aşikar olmayan bir altgrubu var olur. Oysa bu sonuç G/K nın minimal FC olmayan grup olmasıyla çelişir. Bunun için G/K nın normal olmayan sonlu bir X/K altgrubunu alalım. Buradan $X/K = \{x_1K, \ldots, x_nK\}$ ise $X = \langle x_1, \ldots, x_n, K\rangle = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle K$ olur. Buna göre $T = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ olmak üzere $X = KT = TK$ yazılabilir. G yerel sonlu olduğundan T sonludur. X/K sonlu ve G/K tamamen imprimitif olduğundan $\mathrm{supp}(X/K) \subseteq \Delta$ olacak şekilde G/K nın aşikar olmayan bir Δ bloğu vardır. $L/K = (G/K)_{\{\Delta\}}$ olsun. Teorem 2.26 gereği L/K grubu G/K nın aşikar olmayan bir altgrubu olduğundan $L \lneqq G$ dir ve G minimal FC olmayan grup olduğundan

L bir FC gruptur. $\text{supp}(X/K) \subseteq \Delta$ ve $T = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ olarak alındığından $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\text{supp}(x_i) \subseteq \Delta$ dır. Öyleyse L nin seçimi gereği $T \leq L$ olur.
$V = T^L = \left\langle t^l \mid t \in T, l \in L \right\rangle$ alalım. T sonlu ve L bir FC grup olduğundan V sonludur. $V \trianglelefteq L$ olduğundan $VK/K \trianglelefteq L/K = (G/K)_{\{\Delta\}}$ dir. Buradan $\text{supp}(VK/K) \subseteq \Delta$ ve $L/K = N_{L/K}(VK/K)$ olur. $T \leq V$ olduğundan $X = TK \leq VK$ olur. Öyleyse $X/K \leq VK/K$ dir.
Şimdi $L = N_G(V)$ olduğunu gösterelim. $V \trianglelefteq L$ olduğundan $L \leq N_G(V)$ dir. Diğer taraftan $x \in N_G(V)$ ise $V^x K/K \subseteq VK/K$ olur. Buradan,

$$\text{supp}(V^x K/K) \subseteq \text{supp}(VK/K) \subseteq \Delta$$

dır. Ayrıca,

$$\text{supp}(V^x K/K) = \text{supp}(VK/K)^{xK} = \text{supp}(VK/K)xK \subseteq \Delta xK$$

olduğundan $\Delta xK = \Delta$ dır. O halde $xK \in (G/K)_{\{\Delta\}} = L/K$ dır. Buradan $x \in L$ olacağından $L = N_G(V)$ bulunur. Buna göre V, G nin aşikar olmayan sonlu bir altgrubudur. Hipotez gereği $y^p \in VC_G(V)$ olacak şekilde en az bir $y \in G \backslash N_G(V) = G \backslash L$ vardır. Buradan $y \notin L$ olduğundan $yK \notin L/K$ fakat $y^p K \in (VK/K)\, C_{G/K}(VK/K)$ olur.
O halde Lemma 3.12 nin hipotezi sağlanır. Çünkü $\text{supp}(VK/K) \subseteq \Delta$, $yK \notin L/K = (G/K)_{\{\Delta\}}$ ve $y^p K \in (VK/K)\, C_{G/K}(VK/K)$ dir. Ayrıca $V \leq L$ ve $C_G(V) \subseteq N_G(V) = L$ olduğundan $y^p \in VC_G(V)$ iken $y^p \in L$ olur. Dolayısıyla $y^p K \in L/K = (G/K)_{\{\Delta\}}$ olacağından Lemma 3.12 gereği $(x^{-1}y)^p K \in C_{G/K}(VK/K)$ olacak şekilde en az bir $xK \in VK/K$ vardır. $X/K \leq VK/K$ olduğundan $C_{G/K}(VK/K) \leq C_{G/K}(X/K)$ dir. Dolayısıyla $(x^{-1}y)^p K \in C_{G/K}(X/K)$ bulunur. Eğer $(x^{-1}y)\, K \notin N_{G/K}(X/K)$ olduğunu gösterirsek G/K grubu Teorem 3.13 ün hipotezini sağlar. $\text{supp}\,(X/K) \subset \text{supp}\,(VK/K) \subset \Delta$ olduğundan Lemma 3.1 gereği $N_{G/K}(X/K) \subset (G/K)_{\{\Delta\}} = L/K$ olur. $xK \in VK/K \leq L/K = (G/K)_{\{\Delta\}}$ olduğunu biliyoruz. Eğer $(x^{-1}y)\, K \in (G/K)_{\{\Delta\}} = L/K$ ise,

$$\Delta = \Delta\left(\left(x^{-1}y\right) K\right) = \Delta\left(x^{-1}KyK\right) = \left(\Delta x^{-1}K\right) yK = \Delta yK$$

olur. Öyleyse $yK \in (G/K)_{\{\Delta\}} = L/K$ olur. Oysa bu $yK \notin L/K = (G/K)_{\{\Delta\}}$ ile çelişir. O halde Teorem 3.13 gereği G/K nın sonsuz orbite sahip olan aşikar olmayan bir altgrubu var olur. Ancak bu G/K nın minimal FC olmayan grup olmasıyla çelişir. $\square$

4. DEĞİŞMELİ OLMAYAN BASİT ALTGRUPLAR TARAFINDAN ÖRTÜLEN GRUPLAR

Değişmeli olmayan basit altgruplarının birleşimi şeklinde yazılabilen grupların sınıfını $\mathcal{S}$ ile gösterelim. Buna göre G grubunun bir $\mathcal{S}$-grup olması için gerek ve yeter koşul her $g \in G$ için $g \in H \leq G$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir H grubu olmasıdır. Bu kısımda $\mathcal{S}$-gruplar ile ilgili bazı özellikler incelenecektir.
Bu çalışma boyunca G grubunu değişmeli olmayan basit $S_i\,(i \in I)$ altgrupları tarafından örtülmüş bir $\mathcal{S}$-grup olarak alacağız. $\mathcal{S}$-grupların özelliklerine geçmeden önce bu bölümde kullanacağımız temel tanımlar ile bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 4.1 Bir G grubunun aşikar olmayan sonlu üretilmiş herbir H altgrubu için $[H : K] < \infty$ olacak şekilde bir $K \leq H$ var ise G ye *yerel derecelendirilmiş(locally graded) grup* denir.

Tanım 4.2 Bir G grubunun her elemanı sonlu mertebedense G ye *periyodik grup* denir. Eğer G nin birimden farklı her elemanı sonsuz mertebedense G ye *serbest periyodik(torsion-free) grup* denir.

Tanım 4.3 Bir G grubunun her $g \in G \backslash H$ için $H \cap H^g = 1$ olacak şekilde aşikar olmayan bir H altgrubu varsa G ye *Frobenius grup* denir.
Eğer G bir Frobenius grup ise [16, 8.5.5] gereği $G = HK$, $H \cap K = 1$ olacak şekilde $K = G \backslash \bigcup\limits_{x \in G} (H \backslash 1)^x \trianglelefteq G$ vardır. Burada K ya *Frobenius çekirdek*, H ye *Frobenius tümleyen(complement)* adı verilir.

Tanım 4.4 G bir grup olsun. G nin verilen N ve M normal altgrupları için $N \leq M$ veya $M \leq N$ ise G ye *uniserial grup* denir.

Tanım 4.5 G bir grup olsun. $N \leq G$, $M \trianglelefteq N$ için N/M grubuna G nin bir *parçasıdır(section)* denir.

Tanım 4.6 p bir asal sayı olsun. $\Phi \in \mathrm{Aut}\,(G)$ olmak üzere $\Phi^p = 1$ ve her $x \in G$ için $xx^{\Phi}x^{\Phi^2}\ldots x^{\Phi^{p-1}} = 1$ oluyorsa Φ ye G üzerinde p mertebeden *splitting otomorfizma* denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_p$ de birim fonksiyon p mertebeden bir splitting otomorfizmadır.
ϕ bir splitting otomorfizma, $N \trianglelefteq G$ ve N normal altgrubu ϕ-değişmez ise bu durumda ϕ otomorfizması N ve G/N üzerinde birer splitting otomorfizma belirler.

Teorem 4.7 *(Cauchy) Sonlu bir G grubunun mertebesi bir p asal sayısı tarafından bölünebiliyorsa G de p mertebeden bir eleman vardır.*

Lemma 4.8 *G sonlu bir grup olsun. Eğer X, G nin sabit nokta bırakmayan otomorfizmalarından oluşan bir grup ise $X \ltimes G$ bir Frobenius grup olur.*

İspat. Teoremin ispatı için $X \ltimes G$ nin öyle bir H altgrubunu bulmalıyız ki her $(f, g) \in (X \ltimes G)\backslash H$ için $H \cap H^{(f,g)} = 1$ olsun. Burada ilk olarak X ile G nin yarı direkt çarpımını tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathrm{Aut}(G) \\ f &\mapsto \varphi_f : g \mapsto f\,(g) \end{aligned}$$

fonksiyonunu alalım. Burada f bir otomorfizma olduğundan φ_f fonksiyonu G nin bir otomorfizmasıdır. O halde φ fonksiyonu tanımlıdır. Ayrıca her $g \in G$ için,

$$\varphi\,(f_1 f_2)\,(g) = f_1 f_2\,(g) = f_1\,(f_2\,(g)) = \varphi\,(f_1)\,(f_2\,(g)) = \varphi\,(f_1)\,\varphi\,(f_2)\,(g)$$

olduğundan φ bir homomorfizmadır. $X \times G$ kümesi $(f_1, g_1)\,(f_2, g_2) = \left(f_1 f_2, g_1^{\varphi_{f_2}} g_2\right) = (f_1 f_2, f_2\,(g_1)\,g_2)$ işlemi ile bir gruptur ve $(f, g) \in X \times G$ için

$(f,g)^{-1} = (f^{-1}, f^{-1}(g^{-1}))$ dir.

$H = X \times \{1\} \cong X$ alalım. Her $(1,g) \in X \ltimes G$ ve $(x,1) \in H$ için,

$$\begin{aligned}(1,g)^{-1}(x,1)(1,g) &= \left(1,g^{-1}\right)(x,1)(1,g) = \left(x, x\left(g^{-1}\right)\right)(1,g) \\ &= \left(x, 1\left(x\left(g^{-1}\right)\right)g\right) = \left(x, x\left(g^{-1}\right)g\right)\end{aligned}$$

ve $x \in X$ sabit nokta bırakmayan otomorfizma olduğundan $(1,g)^{-1}(x,1)(1,g) = (x, x(g^{-1})g) \notin H$ olur. Dolayısıyla $X \ltimes G$ Frobenius gruptur. □

Teorem 4.9 *(Feit-Thompson) Mertebesi tek sayı olan her grup çözülebilirdir.*

İspat. [7] □

Teorem 4.10 *Yerel çözülebilir her grup bölüm grupları değişmeli olan bir normal seriye sahiptir. Böylece basit ve yerel çözülebilir olan her grup asal mertebedendir.*

İspat. [16, 12.5.2] □

Teorem 4.11 *Sonlu G grubu bir p asal sayısı için p mertebeden bir splitting otomorfizmaya sahipse nilpotenttir ve nilpotentlik sınıfı p ye ve G nin üreteç sayısına bağlıdır.*

İspat. [9] ve [11, 6.4.2 ve 7.2.1] □

Teorem 4.12 *G yerel nilpotent grup ve H, G nin principal factoru(minimal normal altgrubu) olsun. Bu durumda $H \subset Z(G)$ dir.*

İspat. [16, 12.1.6] □

Teorem 4.13 *G sonlu bir Frobenius grup olsun. Eğer K Frobenius çekirdek ve H Frobenius tümleyen ise,*

(i) K nilpotenttir(Thompson),

(ii) H nin Sylow p-altgrupları $p > 2$ ise devirlidir, $p = 2$ ise bu altgruplar devirlidir veya genelleştirilmiş kuaterniyon grubudur(Burnside).

İspat. [16, 10.5.6] □

Teorem 4.14 *(Hölder, Burnside, Zassenhaus)*
G, Sylow altgrupları devirli olan sonlu bir grup ise m tek sayı, $0 \leq r < m$, $r^n \equiv 1(mod m)$ ve m ile n aralarında asal sayılar olmak üzere G grubu,

$$\left\langle a, b \mid a^m = b^n = 1, b^{-1}ab = a^r \right\rangle$$

şeklinde ifade edilebilir. Tersine, bu şekilde ifade edilebilen bir grubun tüm Sylow altgrupları devirlidir.(Böyle gruplara metadevirli(metacyclic) grup denir)

İspat. [16, 10.1.10] □

Lemma 4.15 *G bir nilpotent grup olsun. Eğer T, G nin periyodik elemanlarını içeren bir altgrubu ise G/T serbest periyodiktir.*

İspat. Varsayalım G/T serbest periyodik değildir. Bu durumda $(gT)^k = T$ olacak şekilde $gT \in G/T$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda

$$g^k \in T \Rightarrow \left|g^k\right| < \infty \Rightarrow \left(g^k\right)^n = 1, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow g \in T$$

olur. O halde G/T de sonlu mertebeden bir eleman birim eleman olmak zorundadır. Böylece G/T serbest periyodik olur. □

Değişmeli olmayan basit gruplar tarafından örtülen grupların sınıfını $\mathcal{S}$ ile gösterelim. Eğer her $g \in G$ için $g \in H \leq G$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir H altgrubu varsa G grubuna $\mathcal{S}$ sınıfındandır veya kısaca G bir $\mathcal{S}$-gruptur denir. Şimdi bir $\mathcal{S}$-grup örneği verelim ve $\mathcal{S}$-gruplarla ilgili bazı özellikleri inceleyelim:

Örnek 4.16 n bir doğal sayı olmak üzere $Alt\,(n)$ alterne grubu $n \geq 5$ için değişmeli olmayan basit bir gruptur. $Alt\,(\mathbb{N}) = \bigcup\limits_{n\geq 5} Alt\,(n)$ grubunu tanımlayalım. $Alt\,(\mathbb{N})$ grubundan alınacak her σ permütasyonu bu grubun değişmeli olmayan basit bir altgrubunda olacağından $Alt\,(\mathbb{N})$ bir $\mathcal{S}$-gruptur.

Lemma 4.17 *G bir $\mathcal{S}$-grup olsun. Bu durumda G mükemmeldir.*

İspat. G bir $\mathcal{S}$-grup olsun. Bu durumda her $g \in G$ için $g \in H \leq G$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir H grubu vardır. H değişmeli olmadığından en az bir komütatör eleman içerir. Öyleyse $H \cap G' \neq 1$ dir. $H \cap G' \trianglelefteq H$ ve H basit olduğundan $H \cap G' = H$ dir. Bu durumda $g \in H \subseteq G'$ olacağından $G \subseteq G'$ bulunur. O halde her $\mathcal{S}$-grup mükemmeldir. □

Lemma 4.18 *G bir $\mathcal{S}$-grup, $N \lhd G$ ise N ve G/N de $\mathcal{S}$-gruptur.*

İspat. G bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan her $g \in N \lhd G$ için $g \in H \leq G$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir H grubu vardır. Buradan $H \cap N \trianglelefteq H$ ve H basit olduğundan $H \cap N = H$ olur. O halde $H \subseteq N$ olacağından N bir $\mathcal{S}$-gruptur. Şimdi G/N nin bir $\mathcal{S}$-grup olduğunu gösterelim. Her $gN \in G/N$ için $gN \in T/N \leq G/N$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir T/N grubu arıyoruz. $T/N = HN/N$ alalım. Bu durumda $gN \in HN/N \leq G/N$ dir. HN/N nin değişmeli olmayan basit bir grup olduğunu gösterelim. $KN/N \trianglelefteq HN/N$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(hn)\,N\,(kn_1)\,N\,((hn)\,N)^{-1} \in KN/N \quad &\Rightarrow \quad hkh^{-1}N \in KN/N \Rightarrow hkh^{-1} \in K \\
&\Rightarrow \quad K \trianglelefteq H \Rightarrow K = 1 \vee K = H \\
&\Rightarrow \quad KN/N = N \vee KN/N = HN/N
\end{aligned}$$

olduğundan HN/N basittir. $HN/N \cong H/H \cap N$ değişmeli olsaydı $H' \subset H \cap N$ olurdu. H değişmeli olmayan basit bir grup olduğundan $H' = H$ dir. O halde $H \subseteq H \cap N$ olacağından $H \subseteq N$ bulunur. Oysa bu bir çelişkidir. Öyleyse HN/N değişmeli olamaz. □

Lemma 4.19 *A ve B aşikar olmayan gruplar, $H = A \times B$ bir $\mathcal{S}$-grup olsun. Bu durumda H nın her elemanının mertebesi p dir veya H torsion-freedir.*

İspat. H nin $|a| = r$, $|b| = s$, $r > s > 1$ olacak şekilde bir (a, b) elemanı var olsun. H bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan $(a, b) \in T \leq H$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir T grubu vardır. Buradan $(a, b)^s = (a^s, b^s) = (a^s, 1) \in T \cap A$ olacağından $T \cap A \neq 1$ dir. $T \cap A \trianglelefteq T$ ve T basit olduğundan $T \cap A = T$ olur. O halde $T \subseteq A$ dir. Buradan $b = 1$ bulunur. Ancak bu $|b| = s > 1$ ile çelişir. □

Lemma 4.20 *G bir $\mathcal{S}$-grup, $N \trianglelefteq G$ olsun. Bu durumda $|x| = |xN|$ dir. Aslında xN nin her elemanı aynı mertebedendir.*

İspat. xN sonsuz mertebeden ise x de sonsuz mertebeden olur. $|xN| = n > 1$ olsun. G bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan $x \in H_k \leq G$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit bir H_k grubu vardır. $N \cap H_k \trianglelefteq H_k$ ve H_k basit olduğundan $N \cap H_k = 1$ veya $N \cap H_k = H_k$ olur. Eğer $N \cap H_k = H_k$ ise $H_k \subset N$ olurdu. Oysa bu $x \notin N$ ile çelişir. O halde $N \cap H_k = 1$ dir. Buradan,

$$(xN)^n = N \Rightarrow x^n \in N \cap H_k = 1 \Rightarrow x^n = 1$$

elde edilir. $m < n$ için $x^m \notin N$ olduğundan $|x| = n$ olur.
$xn_1, xn_2 \in xN \subset G$ için $xn_1 \in H_1, xn_2 \in H_2$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit H_1 ve H_2 grupları vardır. $N \cap H_1 = 1$ ve $N \cap H_2 = 1$ olduğunu biliyoruz. $|x| = k$ olsun. Bu durumda,

$$(xn_1)^k = xn_1xn_1 \ldots xn_1 = x^k n_3 = n_3 \in N \cap H_1 = 1 \Rightarrow (xn_1)^k = n_3 = 1$$

bulunur. Benzer şekilde $(xn_2)^k = 1$ olacağından $|xn_1| = |xn_2| = |x|$ elde edilir. □

Lemma 4.21 *Her $\mathcal{S}$-grup bir tek maksimal normal serbest periyodik altgrup içerir. Bu grup aşikar altgrup olabilir.*

İspat. M ve N, G nin normal serbest periyodik altgrupları olsun. $m \notin N$ olacak şekilde $m \in M$ alalım. m sonsuz mertebeden olduğundan Lemma 4.20 gereği $mN \in MN/N$ sonsuz mertebedendir. Buradan her $n \in N$ için mn sonsuz mertebeden olacağından MN serbest periyodik olur. $M, N \trianglelefteq G$ olduğundan $MN \trianglelefteq G$ dir. Böylece G nin normal ve serbest periyodik iki altgrubunu aldığımızda bu altgrupların çarpımı şeklinde yazılan normal ve serbest periyodik MN grubunu elde ettik. Bu şekilde devam ederek normal ve serbest periyodik altgrupların çarpımı olan bir üst sınıra ulaşılır. Zorn Lemmadan normal ve serbest periyodik olan bu grupların maksimali vardır. □

Buna göre her $\mathcal{S}$-grup maksimal normal serbest periyodik altgruba sahiptir. Bunu serbest periyodik radikal olarak adlandıracağız ve $TF(G)$ ile göstereceğiz.

Sonuç 4.22 *G bir $\mathcal{S}$-grup, $N \trianglelefteq G$ ve N serbest periyodik olmasın. Bu durumda $TF(G) \leq N$ olur.*

İspat. $M = TF(G)$ ve $M \nleq N$ olsun. G bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan M, N, MN ve $M \cap N$ grupları $\mathcal{S}$-gruptur. Öyleyse $MN/M \cap N \cong M/M \cap N \times N/M \cap N$ grubu da bir $\mathcal{S}$-grup olur. M serbest periyodik olduğundan Lemma 4.20 gereği $M/M \cap N$ serbest periyodiktir. Lemma 4.19 gereği $MN/M \cap N$ nin her elemanının mertebesi p olamaz. O halde $MN/M \cap N$ serbest periyodik olacağından $N/M \cap N$ serbest periyodiktir. Buna göre Lemma 4.20 gereği N serbest periyodik olur. Oysa bu N nin serbest periyodik olmamasıyla çelişir. Dolayısıyla $M \leq N$ olmak zorundadır. □

Lemma 4.23 *G bir $\mathcal{S}$-grup, $\tau \in G$ bir involüsyon olsun. Bu durumda G nin aşikar olmayan bir N normal altgrubu için $\tau \in N$ olur.*

İspat. $\tau \notin N$ olduğunu kabul edelim. O halde Lemma 4.20 gereği her $n \in N$ için $n\tau$ da bir involüsyon olur. Buradan her $n \in N$ için,

$$n^{\tau} n = \tau^{-1} n \tau n = \tau^{-1} \tau^{-1} n^{-1} n = \left(\tau^{2}\right)^{-1} = 1$$

olduğundan $n^\tau = n^{-1}$ bulunur. Bu durumda her $m, n \in N$ için,

$$(mn)^\tau = \tau^{-1}mn\tau = m^{-1}\tau\tau^{-1}n^{-1} = m^{-1}n^{-1}$$

olacağından $n^{-1}m^{-1} = m^{-1}n^{-1}$ elde edilir. O halde N bir değişmeli basit $\mathcal{S}$-grup olur. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\tau \in N$ olmak zorundadır. □

Sonuç 4.24 *G yerel sonlu $\mathcal{S}$-grup ise basittir.*

İspat. G nin aşikar olmayan bir N normal altgrubunun olduğunu kabul edelim. $x \notin N$ alalım. G bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan $x \in H \leq G$ olacak şekilde değişmeli olmayan basit H grubu vardır. Buna göre $H \cap N$ grubu H nin normal altgrubu ve H basit olduğundan $H \cap N = 1$ veya $H \cap N = H$ dir. $x \in H$ ve $x \notin N$ olduğundan $H \cap N = 1$ olur. G yerel sonlu ve $H \leq G$ olduğundan H yerel sonludur. Eğer H involüsyon içermiyorsa H deki her eleman tek sayı mertebedendir. Dolayısıyla H nin sonlu üreteçli her altgrubunun mertebesi bir tek sayıdır. Çünkü S, H nin sonlu üreteçli ve mertebesi çift sayı olan bir altgrubu ise $2 \mid |S|$ olduğundan Teorem 4.7 gereği S de mertebesi 2 olan bir eleman var olurdu. Oysa bu H nin involüsyon içermemesiyle çelişir. Öyleyse Teorem 4.9 gereği H nin sonlu üreteçli her altgrubu çözülebilirdir. O halde H yerel çözülebilirdir. H grubu basit ve yerel çözülebilir olduğundan Teorem 4.10 gereği değişmelidir. Ancak bu H nin değişmeli olmamasıyla çelişir. Diğer taraftan H bir involüsyon içeriyorsa Lemma 4.23 gereği bu involüsyon N dedir. Ancak bu $H \cap N = 1$ ile çelişir. O halde G basit olmak zorundadır. □

Lemma 4.25 *G periyodik $\mathcal{S}$-grup olsun. Bu durumda aşağıdakilerden biri geçerlidir:*

(i) G uniserialdir,

(ii) G nin değişmeli olmayan, her elemanının mertebesi bir p asal sayısı olan bir altgrubu vardır ve bu grubun direkt kare çarpımına parça olarak sahiptir.

İspat. G uniserial olmasın. Bu durumda $N, M \trianglelefteq G$ için $M \nleq N$ ve $N \nleq M$ olur. G bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan M, N, MN ve $M \cap N$ grupları $\mathcal{S}$-gruptur. Öyleyse $MN/M \cap N \cong M/M \cap N \times N/M \cap N$ grubu da bir $\mathcal{S}$-gruptur. G periyodik olduğundan $MN/M \cap N$ serbest periyodik olamaz. $M/M \cap N$ ve $N/M \cap N$ grupları aşikar olmayan gruplar olduğundan Lemma 4.19 gereği $MN/M \cap N$ nin her elemanının mertebesi asal bir p sayısıdır. Dolayısıyla $M/M \cap N$ (veya $N/M \cap N$) nin her elemanının mertebesi p dir ve $M/M \cap N$ (veya $N/M \cap N$), G nin altgruplarına izomorf olan değişmeli olmayan basit altgruplar tarafından örtülür. Böylece G istenen formda altgruplara sahip olur.
Şimdi $M/M \cap N \times N/M \cap N$ nin basit altgruplar ile örtüldüğünü gösterelim. Bunun için $T \nsubseteq M \cap N$ olacak şekilde MN nin değişmeli olmayan basit bir T altgrubunu alalım. $f(mn) = (m(M \cap N), n(M \cap N))$ şeklinde tanımlı $f : MN \to M/M \cap N \times N/M \cap N$ fonksiyonu ile $\pi_1(m(M \cap N), n(M \cap N)) = m(M \cap N)$ şeklinde tanımlı $\pi_1 : MN/M \cap N \to M/M \cap N$ izdüşüm fonksiyonunu alalım. Buna göre $h = (\pi_1 f)|_T : T \to M/M \cap N$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. T basit olduğundan $\operatorname{Ker}(h) = 1$ veya $\operatorname{Ker}(h) = T$ dir. $\operatorname{Ker}(h) = T$ ise her $mn \in T$ için,

$$M \cap N = h(mn) = (\pi_1 f)|_T (mn) = \pi_1 (m(M \cap N), n(M \cap N)) = m(M \cap N)$$

olacağından $m \in M \cap N$ bulunur. Benzer şekilde π_2 izdüşüm fonksiyonu tanımlanırsa $n \in M \cap N$ olur. Dolayısıyla $mn \in M \cap N$ dir. Bu durumda $T \leq M \cap N$ olur. Ancak bu T nin seçimiyle çelişir. Böylece $\operatorname{Ker}(h) = 1$ bulunur. O halde T nin bir kopyası G nin $M/M \cap N$ ve $N/M \cap N$ parçalarının içindedir. Böylece $T \times T \leq M/M \cap N \times N/M \cap N$ elde edilir. □

Teorem 4.11 gereği G sonlu grubu p mertebeden splitting otomorfizmaya sahipse nilpotenttir ve nilpotentlik sınıfı p ile G nin üreteç sayısına bağlıdır. Bu sonucu yerel derecelendirilmiş gruplara genişletebiliriz:

Önerme 4.26 *Sonlu mertebeden elemanlarla üretilmiş yerel derecelendirilmiş G grubu p mertebeden φ splitting otomorfizmasına sahipse yerel nilpotenttir.*

İspat. $H \leq G$ ve H sonlu üreteçli olsun. Bu halde G nin sonlu üreteçli bir K altgrubu $H \leq K$ ve K nın üreteç elemanları sonlu mertebeden olacak şekilde vardır. Çünkü $h_i \in G$ olmak üzere $H = \langle h_1, \ldots, h_n \rangle$ ise $g_{i_j} \in G$ için $h_i = g_{i_1} \ldots g_{i_{k_i}}$ yazılabilir. Bu durumda $\left| g_{i_j} \right| < \infty$ olduğundan $K = \left\langle g_{1_1}, \ldots, g_{1_{k_1}}, \ldots, g_{i_1}, \ldots, g_{i_{k_i}}, \ldots, g_{n_1}, \ldots, g_{n_{k_n}} \right\rangle$ alınırsa istenen şekilde K grubu elde edilmiş olur. $L = \left\langle K, K^{\varphi}, K^{\varphi^2}, \ldots, K^{\varphi^{p-1}} \right\rangle$ olsun. L grubu G nin H yi içeren, sonlu üreteçli, φ-değişmez altgrubudur. G yerel derecelendirilmiş olduğundan $|L : T|$ sonlu olacak şekilde bir $T \leq L$ vardır. O halde L/N sonlu ve $N \leq T$ olacak şekilde $N \trianglelefteq L$ vardır.

$M = \bigcap_{i=1}^{p} N^{\varphi^i}$ alalım. M, L nin bir sonlu indeksli, φ-değişmez normal altgrubudur. L ve M grupları φ-değişmez olduğundan,

$$\begin{aligned} \psi \ &: \ L/M \to L/M \\ &\quad\ xM \mapsto x^{\varphi}M \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. $xM \in L/M$ olmak üzere,

$$(xM)^{\psi^p} = x^{\varphi^p}M = xM$$

ve

$$xM\,(xM)^{\psi}\,(xM)^{\psi^2}\ldots(xM)^{\psi^{p-1}} = \left(xx^{\varphi}x^{\varphi^2}\ldots x^{\varphi^{p-1}}\right)M = M$$

özellikleri sağlandığından L/M grubu p mertebeden ψ-splitting otomorfizmasına sahiptir. Öyleyse Teorem 4.11 gereği L/M nilpotenttir. Ayrıca L/M nin nilpotentlik sınıfı en fazla c olur ve bu c sayısı p ile L yi üreten minimum üreteç sayısına bağlıdır. $R = \bigcap_{|L:K|<\infty} K$ olsun. Bu durumda L/R residually nilpotenttir ve nilpotentlik derecesi en fazla c dir. Bunu göstermek için $R \neq dR \in L/R$ alalım. Buna göre $d \notin R$ dir ve R nin tanımı gereği L nin x elemanını içermeyen sonlu indeksli bir K altgrubu vardır. O halde $|L : N|$ sonlu olacak şekilde L nin K içinde kalan bir N normal altgrubu vardır ve $d \notin N$ dir. $M = \bigcap_{i=1}^{p} N^{\varphi^i}$

alırsak yukarıda kullanılan metodla L/M nilpotent olur. $M \leq N$ ve L/M nilpotent olduğundan L/N nilpotenttir ve nilpotentlik derecesi en fazla c dir. O halde $R \neq dR \in L/R$ için $dR \notin N/R$ ve $(L/R)/(N/R) \cong L/N$ nilpotent olacak şekilde $N/R \trianglelefteq L/R$ vardır. Böylece L/R residually nilpotent olur. L/R residually nilpotent olduğundan L/R nin birimden farklı her xR elemanı için bu grubun xR yi içermeyen bir M/R normal altgrubu $(L/R)/(M/R) \cong L/M$ nilpotent olacak şekilde vardır. c, L/M nin nilpotentlik sınıfı ise $\gamma_c(L/M) = M$ olduğundan yukarıdaki gibi seçilecek her M için $\gamma_c(L) \subseteq M$ olur. Dolayısıyla $\gamma_c(L) \subseteq \bigcap M$ bulunur. M nin L deki indeksi sonlu olduğundan $\gamma_c(L) \subseteq R$ dir. Öyleyse L/R nilpotenttir ve nilpotentlik derecesi en fazla c dir.

L/R nilpotent ve sonlu mertebeden sonlu eleman tarafından üretildiğinden çözülebilir periyodik gruptur. O halde L/R yerel sonlu olur. Dolayısıyla L/R sonludur. L sonlu üreteçli bir grup ve L/R sonlu olduğundan [16, 1.6.11] gereği R sonlu üreteçlidir. R yerel derecelendirilmiş olduğundan R nin sonlu üreteçli her H altgrubunun $|H : V|$ sonlu olacak şekilde bir V altgrubu vardır. R sonlu üreteçli olduğundan $H = R$ alınırsa $|R : V|$ sonlu olacak şekilde R nin bir V altgrubu vardır. $|L : R|$ ve $|R : V|$ sonlu olduğundan $|L : V|$ sonlu olur. O halde $R \leq V$ olacağından R, aşikar olmayan sonlu üretilmiş bir altgrubuna eşit olur. Öyleyse $R = 1$ olmak zorundadır. Böylece L sonlu ve nilpotenttir. $H \leq L$ olduğundan H sonlu ve nilpotent olur. Dolayısıyla G yerel nilpotenttir. $\square$

Teorem 4.27 *G yerel derecelendirilmiş $\mathcal{S}$-grup, $M = TF(G)$ ve G nin tüm sonlu mertebeden elemanları tarafından üretilmiş normal altgrubu N olsun. Eğer $N \neq 1$ ise $M \leq N \leq G$, G/N serbest periyodik ve N/M basittir. Eğer $M \neq 1$ ise G nin sonlu her altgrubu ya devirli ya da metadevirlidir.*

İspat. G/N nin birimden farklı bir gN elemanını alalım. N nin tanımı gereği g sonsuz mertebeden olur. Buna göre Lemma 4.20 den gN sonsuz mertebedendir. O halde G/N serbest periyodik gruptur. Sonuç 4.22 gereği $M \leq N$ dir. Şimdi N/M nin basit olduğunu gösterelim. $M \leq N \trianglelefteq G$ ve M grubu G nin serbest periyodik radikali olduğundan Lemma 4.21 gereği M, N nin de serbest periyodik radikali olur. N/M grubunun basit olmadığını kabul edelim. Bu durumda $M \lneq K \lneq N$ olacak şekilde $K \trianglelefteq N$ vardır. $M \lneq K$ olduğundan K serbest periyodik değildir. L, K deki tüm sonlu mertebeden elemanlarla üretilmiş grup olsun. $\psi \in \operatorname{Aut} K$ olmak üzere ψ bir otomorfizma olduğundan elemanların mertebelerini korur. O halde $a \in L$ iken $\psi(a) \in L$ olacağından $L^{\psi} \subset L$ bulunur. Dolayısıyla L, K nın karakteristik altgrubudur. $K \trianglelefteq N$ olduğundan $L \trianglelefteq N$ elde edilir. Buna göre Sonuç 4.22 gereği $M \leq L$ dir. $N \backslash L$ de mertebesi p olan bir x elemanı alalım. Lemma 4.20 gereği x ile eşlenikler L üzerinde p mertebeden bir splitting otomorfizma belirler. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \varphi_x : L &\rightarrow L \\ a &\mapsto a^x \end{aligned}$$

tanımlanırsa $L \trianglelefteq N$ olduğundan φ_x bir fonksiyondur. Ayrıca $a \in L$ olmak üzere,

$$\varphi_x^p(a) = \varphi_x^{p-1}(a^x) = a^{x^p} = a$$

ve

$$a\varphi_x(a)\,\varphi_x^2(a)\ldots\varphi_x^{p-1}(a) = aa^x a^{x^2}\ldots a^{x^{p-1}} = (ax)^p\, x^{-p} = 1$$

özellikleri sağlandığından L üzerinde p mertebeden bir splitting otomorfizma vardır. Önerme 4.26 gereği L yerel nilpotent olur. L nin principal factoru H ise bu grup L nin minimal normal altgrubudur. L bir $\mathcal{S}$-grup olduğundan H de bir $\mathcal{S}$-grup olur. Ayrıca L yerel nilpotent olduğundan Teorem 4.12 gereği H değişmelidir. Oysa bu H nin bir $\mathcal{S}$-grup olmasıyla çelişir. O halde N/M basit olmak zorundadır.

$M \neq 1$ olsun. G nin sonlu her altgrubunun devirli veya metadevirli olduğunu göstermek istiyoruz. G nin sonlu bir F altgrubunu alalım. $1 \neq m \in M$ olmak üzere $D = m^F = \left\langle m^f \mid f \in F \right\rangle$ grubunu tanımlayalım. F sonlu, G yerel derecelendirilmiş olduğundan D sonlu üreteçli yerel derecelendirilmiş gruptur ve F grubu D üzerine etki eder. $R = \bigcap\limits_{|D:K|<\infty} K$ tanımlayalım. Bu durumda Önerme

4.26 nin ispatında olduğu gibi D/R nilpotent olur.

D serbest periyodik olduğundan D/R sonsuzdur. O halde D nin F-değişmez olan bir W normal altgrubu $R \leq W$ olacak şekilde vardır ve D/W serbest periyodiktir. Çünkü D/R nilpotent olduğundan D/R de sonlu mertebeden elemanlar tarafından üretilmiş grup W/R ise [16, 5.2.7] gereği $(D/R)/(W/R) \cong D/W$ serbest periyodiktir ve $R \leq W \lhd D$ olur. Bu durumda herbir q asal sayısı için D/W grubunun residually sonlu q-grup olduğunu gösterelim. Her $dW \in D/W$ için D/W nun bu elemanı içermeyen bir M/W normal altgrubu $(D/W)/(M/W) \cong D/M$ sonlu q-grup olacak şekilde varsa D/W residually sonlu q-grup olur. $d \in D \backslash W$ olsun. $R \trianglelefteq W \trianglelefteq D$ olduğundan $d \notin R$ dir. $R = \bigcap_{|D:K|<\infty} K$ olarak tanımlamıştık. $d \notin R$ olduğundan D nin d elemanını içermeyen bir T altgrubu $|D:T|$ sonlu olacak şekilde vardır. $|D:T|$ sonlu olduğundan D nin T altgrubunda kapsanan bir S normal altgrubu $|D:S|$ sonlu olacak şekilde vardır ve $d \notin S$ dir. Böylece $R \leq S$ dir ve $R \trianglelefteq D$ olduğundan $R \trianglelefteq S$ elde edilir. $dW \notin SW/W \leq D/W$ ve $|D:S|$ sonlu olduğundan $(D/W)/(N/W) \cong D/N$ sonlu olacak şekilde bir $N/W \lhd D/W$ vardır. Ayrıca D/R nilpotent olduğundan D/R nin homomorfik görüntüsü olan $(D/R)/(N/R)$ de nilpotenttir. D/N sonlu ve nilpotent olduğundan p asal sayı olmak üzere D/N Sylow p-altgruplarının çarpımı şeklinde yazılabilir. Buna göre q, p den farklı bir asal sayı olmak üzere,

$$D/N = \underset{p \text{ asal}}{\mathrm{Dr}} \left(\mathrm{Syl}_p (D/N)\right) \Rightarrow D/N = \mathrm{Syl}_q (D/N) \times \underset{p \neq q}{\mathrm{Dr}} \left(\mathrm{Syl}_p (D/N)\right)$$

yazılabilir. D/N sonlu olduğundan $\mathrm{Syl}_q (D/N)$ sonlu bir q-gruptur. $M/N = \underset{p \neq q}{\mathrm{Dr}} \left(\mathrm{Syl}_p (D/N)\right)$ olsun. Buna göre $(D/W)/(M/W) \cong D/M \cong (D/N)/(M/N)$ sonlu q-grup olur.

$A = D/WD'D^q$ ve $q \nmid |F|$ olsun. Buna göre A aşikar olmayan elemanter değişmeli q-gruptur ve F grubu A üzerine grup otomorfizması olarak etki eder.

$f \in F$ olsun. $a \in A$ ise $a = dWD'D^q$ olacak şekilde $d \in D$ vardır. G bir $\mathcal{S}$-grup, $M \trianglelefteq G$ olduğundan Lemma 4.20 gereği $d \in M$ ve $f \notin M$ için $|f| = |df|$ dir.

Buradan,

$$|af| = \left|a^f\right| = \left|(dWD'D^q)^f\right| = \left|d^fWD'D^q\right| \mid |df| \Rightarrow |af| \mid |df| = |f|$$

bulunur. Böylece F, A üzerine sabit nokta bırakmayan otomorfizma grubu olarak etki eder. F, A daki bir a noktasını sabit bıraktığını kabul edelim. Yani $a^f = a$ olsun. Bu durumda $\left|a^f\right| = |a|$ ve A bir q-grup olduğundan,

$$\left(a^f\right)^n = 1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow n = q \vee a = 1$$

bulunur. Burada $n = q$ olamaz. Eğer $n = q$ olsaydı $q = \left|a^f\right| \mid |f|$ ve $|f| \mid |F|$ olduğundan $q \mid |F|$ bulunurdu. Ancak bu q nun seçimi ile çelişir. Öyleyse $a = 1$ olacağından f, a yı sabit bırakıyorsa a birim eleman olmak zorundadır. Bu durumda Lemma 4.8 gereği $A \rtimes F$ bir Frobenius grup olur. Burada A Frobenius çekirdek, F de Frobenius tümleyendir. Ayrıca G grubu hiçbir involüsyon içermez. Eğer içerseydi $1 \neq M \trianglelefteq G$ olduğundan Lemma 4.23 gereği bu involüsyon M de olurdu. Ancak bu M nin serbest periyodik olmasıyla çelişir. Bu durumda Teorem 4.13 gereği F nin her Sylow p-altgrubu devirlidir. O halde Teorem 4.14 gereği F metadevirli grup olur. $\square$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

"Yerel sonlu $\mathcal{S}$-gruplarında elemanların merkezleyenleri hakkındaki bilgiler $\mathcal{S}$-grubun yapısı hakkında ne tür bilgiler verir?" sorusu ve "Yerel sonlu $\mathcal{S}$-gruplarında sonlu altgrupların merkezleyenleri hakkındaki bilgiler $\mathcal{S}$-grubun yapısı hakkında ne tür bilgiler verir?" sorusu araştırmaya açık konular olarak halen beklemektedir.

Bu ve benzer sorular hakkında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü doktora öğrencilerinden Kıvanç Ersoy çalışmalarını sonlandırmak üzeredir.

KAYNAKÇA

[1] Asar, A. O. 2006. On finitary permutation groups. **Turkish J. Math.**, **30**: 101-116.

[2] Belyaev, V. V. 1978. Minimal non-FC-groups. (Russian)**Sixth All-Union Symposium on Group Theory**, pp 97-102, Cherkassy.

[3] Belyaev, V. V. and Kuzucuoğlu, M. 2003. Locally finite barely transitive groups, **Algebra and Logic**, **42**: 147-152.

[4] Belyaev, V. V. 1998. On the question of existence of minimal non FC - groups. **Siberian Math. J.**, **39**: 1093-1095.

[5] Dixon, J. D. and Mortimer, B. 1996. Permutation Groups. Springer-Verlag, p. 346, New York.

[6] Dixon, M. R., Evans, M. J., Obraztsov, V. N. and Wiegold, J. 2000. Groups that are covered by non-abelian simple groups, **Journal of Algebra**, **223**: 511-526.

[7] Feit, W. and Thompson, J. G. 1963. Solvability of groups of odd order, **Pacific J. Math.**, **13**: 775-1029.

[8] Hickin, K. 1986. Universal locally finite central extensions of groups, **Proc. London Math. Soc.**, **3** (52) no.1: 53-72.

[9] Hughes, D. R. and Thompson, J. G. 1959. The H_p-problem and the structure of H_p-groups, **Pacific J. Math.**, **9**: 1097-1101.

[10] Kegel, O. H. and Wehrfritz, B. A. F. 1973. Locally Finite Groups. North-Holland Publishing Company, p. 210, Amsterdam.

[11] Khukhro, E. I. 1993. Nilpotent groups and their automorphisms. Walter de Gruyter, de Gruyter Exposition in Mathematics Vol. 8, p. 252, Berlin/New York.

[12] Kuzucuoğlu, M. and Phillips, R. E. 1989. Locally finite minimal non-FC-groups, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, **105** no.3: 417-420.

[13] Leinen, F. 1999. A reduction theorem for perfect locally finite minimal non-FC-groups, **Glasgow Math. J.**, **4**: 81-83.

[14] Neumann, B. H. 1954. Groups covered by permutable subsets, **J. London Math. Soc.**, **29**: 236-248.

[15] Neumann, P. M. 1976. The structure of finitary permutation groups, **Arch. Math.**, **27**: 3-17.

[16] Robinson, D. J. S. 1995. A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, p. 499, New York.

[17] Tomkinson, M. J. 1984. FC-groups. Pitman Advanced Publishing Program, p. 171, London.

[18] Wielandt, H. 1960. Unendliche Permutationgruppen. Lecture Notes: Math. Inst. Univ., Tübingen.

[19] Zaleskii, A. E. and Serezhkin, V. N. 1981. Finite linear groups generated by reflections, **Math. USSR-Izv.**, **17:** 477-503.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Okan ARSLAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Lüleburgaz - 03.02.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi :

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a)

b)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Adnan Menderes Üniversitesi 2005 -

İLETİŞİM

E-posta Adresi : oarslan@adu.edu.tr

Tarih : 09.10.2008