T.C
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2008-0003

TÜREVLİ HALKALARDA BAZI DEĞİŞMELİLİK KOŞULLARI

NİHAL BABA GÜNEL

DANIŞMAN
PROF.DR. HATİCE KANDAMAR

AYDIN- 2008

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Ana Bilim Dalı *Yüksek Lisans* Programı öğrencisi *Nihal Baba GÜNEL* tarafından hazırlanan *Türevli Halkalarda Bazı Değişmelilik Koşulları* başlıklı tez, *10.09.2008* tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Prof.Dr. Hatice KANDAMAR	Adnan Menderes Üniv.	....
Üye	: Prof.Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Üniv.	....
Üye	: Yrd.Doç.Dr. Hülya GÜNAYDIN	Adnan Menderes Üniv.	....
Üye	:	....	....
Üye	:	....	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu *Yüksek Lisans* tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun …………………………………… sayılı kararıyla (*Tarih*) tarihinde onaylanmıştır.

Unvanı, Adı Soyadı
Enstitü Müdürü

İNTİHAL BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik akademik ve etik kurullara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Nihal Baba GÜNEL
İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TÜREVLİ HALKALARDA BAZI DEĞİŞMELİLİK KOŞULLARI

Nihal Baba GÜNEL

Adnan Menderes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

Bu çalışma, karakteristiği 2 den farklı olan türevli asal halkalarda bazı değişmelilik koşullarını araştırmak amacıyla ele alınmıştır. Bu bağlamda, literatürde yer alan makalelerin bir arada özetlenerek Lie idealler için verilen bazı değişmelilik koşullarının (σ,τ)-Lie idealler içinde incelenmesini araştıran bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir.

I. Bölümde halkalarla ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

II. Bölümde asal halkalarda türev ve Lie ideal kavramları üzerinde durulmuş ve bu kavramlarla ilgili teoremler incelenmiştir.

III. Bölümde σ ve τ , karakteristiği 2 den farklı asal bir halkanın iki otomorfizması olmak üzere, Lie ideal için verilen bazı sonuçların (σ,τ)-Lie ideali için uyarlanması yer almaktadır.

Aynı zamanda II ve III. bölümlerde incelenen teoremlerin hipotezlerine uyan veya uymayan koşullar altında örnekler bulunarak bu teoremler üzerindeki koşulların zayıflatılıp zayıflatılamayacağı incelenmiştir. Asal halkalar üzerinde ispatlanan bazı teoremlerin yarı asal halkalar için incelenmesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

2008, 52 sayfa

Anahtar Sözcükler

Asal halka, Lie ideal, (σ, τ)-Lie ideal, türev, (σ, τ)-türev

ABSTRACT

MSc. Thesis

SOME COMMUTATIVITY CONDITIONS OF PRIME RINGS WITH DERIVATION

Nihal Baba GÜNEL

Adnan Menderes University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

The objective of this thesis is to investigate some commutativity conditions in prime rings with derivation of characteristic not 2. As a result of examining some studies which include commutativity conditions, the thesis presents some studies investigate the relatonships between the derivation and Lie ideals. The following steps were taken as the organisation of the study. Some fundamental properties about rings have been given in Chapter I.

In chapter II., some papers that manifest the relationship between the ordinary derivation and the Lie ideal and the applications of some of them have been summarized.

Chapter III deals with the relationship between (σ, τ)-derivation and (σ, τ)-Lie ideals, under the condition that R is prime ring of characteristic not 2, σ and τ are automorphisms of R. Some studies under these conditions have been examined and also some examples have been given.

Key Words:

Prime ring, Lie ideal, (σ, τ)-Lie ideal, derivation, (σ, τ)-derivation

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim insanı sayın Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a ve tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ ve Yrd. Doç. Dr. Hülya İnceboz GÜNAYDIN'a yorumlarıyla çalışmama sağlamış oldukları bilimsel katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında bana her zaman anlayış ve sabır gösterip destek olan kıymetli eşim Korhan GÜNEL'e ve maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim. Özellikle akademik çalışma yapmamı büyük ölçüde teşvik eden ve desteklerini her daim hissettiğim Doç. Dr. A. Fevzi BABA ile Yrd. Doç. Dr. Murat HATİPOĞLU'na en içten şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Nihal Baba GÜNEL

Bu çalışma **FBE–08006** no ve **Türevli ve Genelleştirilmiş Türevli Halkalarda Bazı Değişmelilik Koşulları Üzerine** projesi adıyla Yüksek Lisans tez projesi kapsamında Adnan Menderes Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projeleri Kurulu tarafından desteklenmiştir.

SİMGELER DİZİNİ

Z : R halkasının merkezi

$C_{\sigma,\tau}$: R halkasının (σ, τ) merkezi

$[x, y]$: x ile y elemanlarının komütatör çarpımı

$[U, V]$: U ile V kümelerinin komütatör çarpımı

d : R halkası üzerinde tanımlı türev

$\in$: eleman

$\notin$: eleman değil

$\subset$: alt küme

$\not\subset$: alt küme değil

$[x, y]_{\sigma,\tau}$: x ile y elemanlarının (σ, τ) - komütatör çarpımı

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Türev içeren bazı koşullar altında asal halkanın değişmeliliği konusunun araştırılması 1957 yılında E. C. Posner tarafından ispatlanan ve daha sonraki çalışmalara ışık tutan aşağıdaki teorem ile başlamıştır.

R bir asal halka, *d* *R* halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere halkanın her *x* elemanı, kendisinin türev altındaki görüntüsü ile değişmeli ise *R* halkası değişmelidir.

Bu konuda çalışan matematikçiler halkanın hangi koşullarda değişmeli olacağını araştırmıştır. *R* halkasının türevi *d*, merkezi *Z* ve $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesi $[x, y]$ ile gösterilmek üzere

i. Her $x \in R$ için $[d(x), x] \in Z$

ii. $d(R) \subset Z$

iii. $d^2(R) \subset Z$

iv. $d_1 d_2(R) \subset Z$

halkaların değişmeliliği konusunda ele alınan koşullardan bazılarıdır. Bu koşullar altında bir halkanın değişmeliliği incelenirken

i. *d* türevi yerine (σ, τ)-türev veya genelleştirilmiş türevler

ii. *R* halkası yerine, onun ideali, Lie-ideali, (σ, τ)-sağ Lie ideali, (σ, τ)-sol Lie ideali

iii. Asal *R* halkası yerine, yarı asal halka alınarak genelleştirmeler yapılmıştır.

I. N. Herstein tarafından 1978 yılında, *R* karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, *d* *R* halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere $d(R) \subset Z$ koşulu sağlanıyorsa *R* halkasının değişmeli olduğu ispatlanmıştır.

Daha sonra J. Bergen ve arkadaşları tarafından *U*, karakteristiği 2 den farklı bir asal halkanın Lie ideali olmak üzere $d(U) \subset Z$ iken $U \subset Z$ olduğu ispatlanarak I. N. Herstein'ın teoremi genelleştirilmiştir. 1995 yılında Lie ideal için ispatlanan bu teorem N. Aydın ve arkadaşı tarafından , (σ, τ)-Lie ideal için genelleştirilmiştir.

R karakteristiği 2 den farklı asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(R) \subset Z$ koşulu altında R halkasının değişmeli olduğu, 1981 yılında P. H. Lee ve arkadaşı tarafından ispatlanmıştır. J. Bergen ve arkadaşları tarafından R halkası yerine onun U Lie ideali alınarak $U \subset Z$ olduğu kanıtlanmış ve böylece önceki teorem genelleştirilmiştir. 1995 yılında N. Aydın ve arkadaşı bu teoremi Lie ideal yerine (σ, τ)-Lie ideal alarak genelleştirilmişlerdir.

Diğer taraftan E. C. Posner 1957 yılında yaptığı çalışmasında d_1 ve d_2 R asal halkasının iki türevi olmak üzere d_1d_2 türev iken $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu kanıtlamıştır. Daha sonra I. N. Herstein 1978 yılında d, yarı asal bir halkanın türevi olmak üzere $d^2 = 0$ iken $d = 0$ olduğunu kanıtlamıştır.

Daha sonra I, R asal halkasının sıfırdan farklı ideali olmak üzere $d^2(I) = 0$ iken $d = 0$ olduğu ispatlandı. Bergen ve arkadaşları 1981 yılında U, bir R asal halkasının merkez tarafından kapsanmayan Lie ideali olmak üzere $d^2(U) = 0$ ise d hakkında ne söylenebilir sorusuna yanıt aradılar.

P. H. Lee ve arkadaşı 1981 yılında d_1 ve d_2 bir R asal halkasının sıfırdan farklı iki türevi olmak üzere $d_1d_2(R) \subset Z$ iken R halkasının değişmeli olduğunu ispatlamışlardır. Bergen ve arkadaşlarının 1981 yılında yaptıkları çalışmada bir R asal halkasının merkez tarafından kapsanmayan U Lie idealini alarak $d_1d_2(U) = 0$ iken $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu kanıtlamışlardır.

Halkanın özellikleri incelenirken onun idealleri, Lie-idealleri, (σ, τ)-sağ veya (σ, τ)-sol Lie idealleri önem taşımaktadır. J. Bergen ve arkadaşları U, karakteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideali olmak üzere R halkasının, $[R, M] \subset U$ ve $[R, M] \not\subset Z$ koşullarını sağlayan bir M idealinin varlığını kanıtlamışlardır. Bu teorem N. Aydın ve arkadaşı tarafından, bir R asal halkasının merkezi ve (σ, τ)-merkezi tarafından kapsanmayan bir U (σ, τ)-Lie ideali için genelleştirilmiştir.

1999 yılında N.Aydın U karekteristiği 2 den farklı bir R yarı asal halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideal ise bu taktirde R halkasının $[R, M] \subset U$ ve $[R, M] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M idealinin var olduğunu ispatlayarak, J.Bergen ve arkadaşları tarafından verilen teoremi genelleştirmiştir.

Bu çalışmada J. Bergen ve arkadaşlarının 1981 yılında yaptığı çalışmada kanıtladığı lemma ve teoremlere yer verilmiş, bu çalışmada ispatlanan lemma ve teoremlerin daha sonraki yıllarda hangi koşullarla genelleştirildiği belirtilmiş ve örnekler verilmiştir.

Ayrıca J. Bergen ve arkadaşlarının kanıtladığı bazı teoremlerin bir genelleştirilmesinin yer aldığı N. Aydın ve arkadaşı tarafından yapılan çalışmada kanıtlanan lemma ve teoremlere yer verilmiş, bazı lemma ve teoremler için örnekler verilmiş ve bu teoremlerin hangi koşullarda genelleştirilebileceği araştırılmıştır.

BÖLÜM: ÖN BİLGİLER

1.1.Tanım: R bir halka olmak üzere +, . R halkası üzerinde iki işlem olsun.

i. Her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka denir.

ii. Her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ ise R halkasına değişmeli halka denir.

iii. i ve ii şıklarının ikisi birden sağlanıyorsa R halkasına birimli ve değişmeli halka denir.

iv. Her $a \in R$ için, $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise böyle n sayılarının en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve char $R = n$ ile gösterilir.

v. $Z = Z(R) = \{c \in R \mid cx = xc \text{ her } x \in R \text{ için}\}$ kümesine R halkasının merkezi denir.

1.2.Tanım: R bir halka ve A, B ve P, R halkasının idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq B$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının asal ideali denir.

1.3.Teorem: R bir halka ve P, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

i. P asal idealdir.

ii. Her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

iii. Her $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

iv. U ve V, R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dır.

v. U ve V, R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dır.

1.4.Tanım : (0) ideali asal ideal olan halkaya asal halka denir.

1.5.Önerme: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

i. R asal halkadır.

ii. Her a, $b \in R$ için $aRb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

iii. R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

iv. R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

$M_{2x2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi matrislerin toplama ve çarpma işlemlerine göre asal halkadır.

1.6.Tanım: R bir halka, A ve Q, R halkasının iki ideali olsun.

$A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının yarı-asal ideali denir.

1.7.Teorem: R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

i. Q yarı-asal idealdir.

ii. $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$

iii. $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq$ Q ise $a \in$ Q

iv. U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq$ Q ise $U \subseteq$ Q

v. U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq$ Q ise $U \subseteq$ Q

1.8.Tanım: R bir halka olsun.

i. $a \in R$ için, $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın nilpotent elemanı denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n pozitif tamsayısına a elemanının nilpotentlik indeksi denir.

ii. A**,** R halkasının bir ideali olsun. A nın keyfi olarak alınan $a\ a_2, \ldots, a_n$ elemanları için, $a_1,\ a_2, \ldots. a_n = 0$ ise A idealine R halkasının nilpotent ideali denir.

iii. Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya yarı-asal halka denir.

1.9.Önerme: R asal halka olsun. ab, $b \in Z$ ise $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

1.10.Önerme: R, yarı-asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezlesin. Bu takdirde $a \in Z$ dir.

1.11.Tanım: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. Her a, $b \in A$ için $ab - ba \in A$ ($ab + ba \in A$) oluyorsa A ya R halkasının Lie (Jordan) alt halkası denir.

x, $y \in R$ için xy - yx ifadesi komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir.

1.12.Tanım: A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. Her $u \in U$ ve her $a \in A$ için $ua - au \in U$ ($ua + au \in U$) oluyorsa U kümesine A nın bir Lie (Jordan) ideali denir.

1.13.Tanım: X ve Y, R halkasının iki alt kümesi olsun. $[X,Y]$ ile xy - yx, $x \in X$, $y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir. Özel olarak $U \subset R$ olmak üzere

Her $u_i \in U$, her $r_i \in R$ için,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i r_i - r_i u_i$$

ifadesi, U kümesi ile R kümesinin komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[U, R]$ ile gösterilir.

1.14.Tanım: 1.15.Tanıma göre R halkasının U toplamsal alt grubu için $[U,R] \subset U$ ise U kümesine R halkasının bir Lie ideali denir.

1.15.Özellik: x, y, $z \in R$ için

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu özelliğe Jacobi özdeşliği denir.

1.16.Tanım: R bir halka, $\sigma, \tau : R \rightarrow R$ iki dönüşüm olsun. x, $y \in R$ için,

$x\sigma(y) - \tau(y)x$ ifadesi $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. R halkasının bir U toplamsal alt grubu için

i. $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U kümesine R halkasının (σ,τ) - sağ Lie ideali denir

ii. $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U kümesine R halkasının (σ,τ) - sol Lie ideali denir.

iii. U kümesi, R halkasının hem (σ,τ) - sağ Lie ideali ve hem de (σ,τ) - sol Lie ideali ise

U kümesine R halkasının (σ,τ) - *Lie ideali* denir.

1.17.Tanım: $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$ eşitliğine ait bazı özdeşlikler aşağıdakiler gibidir.

i. $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y, z]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(z)]y$

ii. $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y, \sigma(z)] + [x, z]_{\sigma,\tau}\, y$

iii. $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = [[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} + [x, [y, z]]_{\sigma,\tau}$

1.18.Tanım: $C_{\sigma,\tau} = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c,$ her $x \in R\}$ kümesine R halkasının (σ,τ) - merkezi denir.

1.19.Tanım: R bir halka ve $d{:}R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $x, y \in R$ olmak üzere

i. $d(\mathrm{xy}) = d(x)y + xd(y)$ ise d ye R halkasının bir türevi denir.

ii. $g : R \rightarrow R$ bir fonksiyon olmak üzere

$d(xy) = d(x)y + g(x)d(y) = d(x)g(y) + xd(y)$ ve $gd = dg$

ise d ye g ile belirlenen bir yarı-türev denir**.**

iii. $0 \neq \alpha : R \rightarrow R$ bir endomorfizma olmak üzere $d(\mathrm{xy}) = d(x)\alpha(y) + xd(y)$ ise d ye bir α-türev denir.

iv. σ ve τ R halkasının iki otomorfizması ve $d(\mathrm{xy}) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ ise d ye bir (σ,τ) - türev denir.

2. BÖLÜM: ASAL HALKALARDA LİE İDEALLER VE TÜREVLER

Bu bölümde asal halkaların Lie idealleri ile türevleri arasındaki ilişkiyi ele alan çalışmalardan bazıları ele alınacak, bazı sonuçlar için örnekler verilecektir.

2.1.Teorem: *R* karekteristiği 2 den farklı bir asal halka olsun.d_1, d_2 *R* halkasının iki türevi olmak üzere d_1d_2 *R* halkasının türevi ise d_1 ve d_2 türevlerinden en az biri sıfırdır (Posner Edward C. 1957).

$0: R \to R$ dönüşümünün *R* halkasının bir türevi olduğu gözönüne alınır ve 2.1.Teoremde d_1 ve d_2 yerine $a \in R$ ile üretilen I_a iç türevi alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.Sonuç: *R* karekteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, $a \in R$ ve I_a, a ile üretilen iç türev olsun. $I_a^2 = 0\ ise\ I_a = 0$ dır. Bir başka deyişle, $[a, [a, x]] = 0$ ise $a \in Z$ olur.

2.3.Lemma: *R* sıfırdan farklı nilpotent ideal içermeyen karekteristiği 2 den farklı bir halka, *U*, *R* halkasının sıfırdan farklı Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda *U*, *R* halkasının merkezindedir veya *U*, *R* halkasının sıfırdan farklı bir idealini içerir (Herstein, I.N.1969).

2.4.Teorem: *d*, *R* asal halkasının sıfırdan farklı türevi ve a, *R* halkasının her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ koşulunu sağlayan bir elemanı olsun.

i. *R* karekteristiği 2 den farklı bir halka ise a, *R* halkasının merkezindedir.

ii. *R* karekteristiği 2 olan bir halka ise a^2, *R* halkasının merkezindedir. (Herstein, I.N. 1979).

2.5.Lemma: *R* 2-burulmasız bir yarı asal halka ve *T*, *R* halkasının bir Lie ideali olsun. $[T, T]$ merkez tarafından kapsanıyor ise *T* de merkez tarafından kapsanır (Herstein, I.N.1970).

2.6.Teorem: *R* yarı asal, 2-burulmasız bir halka ve *U*, *R* halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer *R* halkasının bir t elemanı her $u \in U$ için $tu - ut$ elemanı ile değişmeli ise *t*, *U* Lie idealinin bütün elemanlarıyla değişmelidir (Herstein, I.N.1970).

2.7.Teorem: R bir halka d, $d^3 \neq 0$ koşulunu sağlayan bir türev olsun. A, $d(R)$ tarafından üretilen alt halka ise A alt halkası R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar (Herstein, I.N.1978).

Aksinden söz edilmedikçe bundan sonraki kısımda R karekteristiği 2 den farklı bir asal halka olarak alınacaktır.

2.8.Lemma: U, R halkasının merkez tarfından kapsanmayan bir Lie ideali olmak üzere, R halkası $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ koşullarını sağlayan en az bir M ideali kapsar.

İspat: Önce $[U, U] \neq 0$ olduğunu gösterelim. $[U, U] = 0$ olduğunu varsayalım. Böylece her $a \in U$ ve her $x \in R$ için $ax\text{-}xa \in U$ olduğundan $a(ax\text{-}xa) - (ax\text{-}xa)a = 0$ yani

$$[a, [a, x]] = 0, \text{ her } x \in R$$

elde edilir. Böylece $I_a^2 = 0$ bulunur. 2.2.Sonuçtan dolayı $a \in Z$ olur. Dolayısıyla her $a \in U$ için $a \in Z$ olduğundan $U \subset Z$ olur. Bu da teoremin hipotezi ile çelişir. O halde $[U, U] \neq 0$ dır.

Şimdi $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının en az bir tane M idealinin var olduğunu gösterelim.

$M = R[U, U]R$, R halkasının bir idealidir. Aynı zamanda $[U, U] \neq 0$ olduğundan $M \neq 0$ dır. Diğer taraftan her x, y, z $\in R$ için

$$\begin{aligned}[x[u, v]y, z] &= x[u, v]yz - zx[u, v]y \\ &= x(uv\text{-}vu)yz - zx(uv\text{-}vu)y \\ &= xuvyz - xvuyz - zxuvy - zxvuy \\ &= [xuvy, z] - [xvuy, z] \in U\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $[M, R] \subset U$ elde edilir.

Şimdi $M = R[U, U]R \neq 0$ ideali için $[M, R] \not\subset Z$ olduğunu gösterelim.

$[M, R] \subset Z$ ise o zaman $[M, [M, R]] = 0$ elde edilir. Bu da $M \subset Z$ olmasını gerektirir. Burada M, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan $R = Z$ elde edilir. Böylece $U \subset Z$ olduğu görülür. Bu da hipotez ile çelişir. O halde $[M, R] \not\subset Z$ olur.

Aşağıda 2.8.Lemmayı sağlayan bir örnek verilecektir.

Örnek1: $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ asal halkası ve R halkasının $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$ Lie ideali alınırsa R halkasının $M = \left\{ \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3r \end{bmatrix} \mid 3x,3y,3z,3r \in \mathbb{Z} \right\}$ ideali $[M,R] \subset U$ ve $[M,R] \not\subset Z$ koşullarını sağlar.

Çözüm: $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$ R halkasının Lie idealidir. Çünkü, her

$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix} \in U$ için,

$A + B = \begin{bmatrix} x+u & y+v \\ z+w & -(u+x) \end{bmatrix} \in U$ olduğundan U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi $[U,R] \subset U$ ve $[R,U] \subset U$ olduğunu gösterelim.

$i \in \{1,2, \dots ,n\}$ olmak üzere

$A_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & -x_i \end{bmatrix} \in U$, $B_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \in R$ için

$$A_iB_i - B_iA_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & -x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & -x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_ic_i - b_iz_i & 2x_ib_i + y_id_i - a_iy_i \\ z_ia_i - 2x_ic_i - d_iz_i & -(y_ic_i - b_iz_i) \end{bmatrix} \in U$$

elde edilir. *U*, *R* halkasının toplamsal alt grubu olduğu için $\sum_{i=1}^{n}(A_iB_i - B_iA_i)$ elemanı da U nun elemanıdır. Benzer şekilde [*R*,*U*] $\subset$ *U* olduğu gösterilebilir.

B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \in$ *U* ve *C* = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in$ *R* için,

$$BC - CB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan *U*, *Z* tarafından kapsanmaz.

M = $\left\{ \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3r \end{bmatrix} \middle| 3x, 3y, 3z, 3r \in \mathbb{Z} \right\}$ *R* halkasının bir idealidir. Çünkü

A = $\begin{bmatrix} 3x_1 & 3y_1 \\ 3z_1 & 3r_1 \end{bmatrix}$ ve B = $\begin{bmatrix} 3x_2 & 3y_2 \\ 3z_2 & 3r_2 \end{bmatrix} \in M$ olmak üzere,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3(x_1 + x_2) & 3(y_1 + y_2) \\ 3(z_1 + z_2) & 3(r_1 + r_2) \end{bmatrix} \in M$$

olduğundan *R* halkasının toplamsal bir alt grubudur.

Her $A = \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3r \end{bmatrix} \in$ *M* ve her $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R$ için,

$$AB = \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(xa + yc) & 3(xb + yd) \\ 3(za + zc) & 3(rb + rd) \end{bmatrix} \in M$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(ax+bz) & 3(ay+br) \\ 3(cx+dz) & 3(cy+dr) \end{bmatrix} \in M$$

elde edilir. $[M,R] \not\subset Z$ olduğunu gösterelim.

$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ o & 3 \end{bmatrix} \in M \, ve \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in R$ için

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ o & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ o & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 30 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $[M, R] \not\subset Z$ dir.

1999 yılında N.Aydın 2.8.Lemmayı yarı-asal halkalar için genelleştirmiştir (Aydın, N. 1999).

Şimdi bu lemmanın *R* yarı asal halkalar için sağlandığına bir örnek verelim.

Örnek2: $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \right\}$ yarı asal halkasının $U \not\subset Z$ olacak şekilde $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x,y,z,t \in \mathbb{Z} \right\}$ Lie ideali için *R* halkasının bir $M = \left\{ \begin{bmatrix} 2u & 2v & 0 \\ 2w & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid 2u, 2v, 2w, 2t \in \mathbb{Z} \right\}$ ideali $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ koşullarını sağlar. $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x,y,z,t \in \mathbb{Z} \right\}$ Lie idealidir. Çünkü her

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ z_1 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 0 \\ z_2 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U \text{ için } A+B=\begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 0 \\ z_1+z_2 & t_1+t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$$

olduğundan *U*, *R* halkasının toplamsal bir alt grubudur. Şimdi $[U,R] \subset U$ ve $[R,U] \subset U$ olduğunu gösterelim. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere

$$A_i=\begin{bmatrix} x_i & y_i & 0 \\ z_i & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U \text{ ve } B_i=\begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \end{bmatrix} \in R \text{ ise}$$

$$A_iB_i - B_iA_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 0 \\ z_i & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & y_i & 0 \\ z_i & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_ic_i - z_ib_i & x_ib_i + y_id_i - a_iy_i - b_it_i & 0 \\ z_ia_i + t_ic_i - c_ix_i - d_iz_i & z_ib_i - y_ic_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$$

elde edilir. *U*, *R* halkasının toplamsal alt grubu olduğu için $\sum_{i=1}^{n}(A_iB_i - B_iA_i)$ elemanı da *U* nun elemanıdır. Benzer şekilde $[R,U] \subset U$ olduğu görülür.

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U \ ve \ X=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in R \quad \text{olmak üzere,}$$

$$CX - XC = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ elde edilir. Bu da $U \not\subset Z$ olduğunu verir.

M, *R* halkasının bir idealidir. Çünkü

$$A=\begin{bmatrix} 2u_1 & 2v_1 & 0 \\ 2w_1 & 2t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ve \ B=\begin{bmatrix} 2u_2 & 2v_2 & 0 \\ 2w_2 & 2t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M \text{ olmak üzere,}$$

$A+B=\begin{bmatrix} 2(u_1+u_2) & 2(v_1+v_2) & 0 \\ 2(w_1+w_2) & 2(t_1+t_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ olduğundan *M* kümesi, R halkasının toplamsal bir alt grubudur.

$A=\begin{bmatrix} 2u & 2v & 0 \\ 2w & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M \ ve \ B=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \in R$ için

$AB=\begin{bmatrix} 2(ua+vc) & 2(ub+vd) & 0 \\ 2(wa+tc) & 2(wb+td) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ ve

$BA=\begin{bmatrix} 2(au+bw) & 2(av+bt) & 0 \\ 2(cu+dw) & 2(cv+dt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ elde edilir.

$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M \ ve \ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in R$ olmak üzere

$$AB-BA=\begin{bmatrix} 14 & 20 & 0 \\ 12 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 14 & 8 & 0 \\ 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan [*M*, *R*] $\not\subset$ *Z* dir. Şimdi [*M*, *R*] $\subset$ *U* olduğunu gösterelim.

$A=\begin{bmatrix} 2u & 2v & 0 \\ 2w & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M \ ve \ B=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \in R$ için

$AB=\begin{bmatrix} 2(ua+vc) & 2(ub+vd) & 0 \\ 2(wa+tc) & 2(wb+td) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$

Böylece [*M*, *R*] $\subset$ *U* olduğu görülür.

2.9.Lemma: *U*, *R* halkasının merkez tarfından kapsanmayan bir Lie ideali olsun. O zaman $C_R(U) = Z$ dir.

İspat: $C_R(U) = \{ x \in R \mid ux = xu$, her $u \in U \}$ kümesi, her $x, y \in C_R(U)$ için $x-y$, $xy \in C_R(U)$ olduğundan R halkasının alt halkasıdır. Ayrıca her $x \in C_R(U)$ ve her $r \in R$ için $xr - rx \in C_R(U)$ olduğundan $C_R(U)$ toplamsal alt grubu R halkasının bir Lie idealidir. Böylece 2.3.lemmadan $C_R(U) \subset Z$ dir.

Diğer taraftan $Z \subset C_R(U)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $C_R(U) = Z$ elde edilir.

2.10.Lemma: U,R halkasının bir Lie ideali olsun. $a \in R$, $[U,U]$ kümesini merkezler ise U kümesini de merkezler. Ayrıca, $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dur.

İspat: $[U, U]$, R halkasının bir Lie idealidir. $[U, U] \not\subset Z$ olsun. Bu durumda 2.8.Lemmada U yerine $[U, U]$ alırsak $C_R([U, U]) = Z$ olduğu görülür. Yani $a \in C_R([U, U])$ ise $a \in Z$ dir. Dolayısı ile $a \in C_R(U)$ dur. Şimdi $[U, U] \subset Z$ olsun. Bu durumda $x \in R$ ve $u \in U$ olmak üzere $\alpha = [u, [u, x]]$ elemanı $[U, U] \subset Z$ olduğundan R halkasının merkezindedir. Ayrıca $\alpha u = [u, [u, x]]u = [u, [u, ux]] \in Z$ dir.

Sonuç olarak α ve $\alpha u \in Z$ olur. O halde 1.9.Önerme kullanılırsa $\alpha = 0$ veya $u \in Z$ elde edilir.

Eğer $\alpha = 0$ ise $u \in Z$ olur. Yani $a \in C_R(U)$ olur.

Böylece her iki durumda da $a \in C_R(U)$ olduğu elde edildi. Bu da $C_R([U, U]) = C_R(U)$ olmasını gerektirir.

Herstein 1970 yılında yayınladığı “ On the Lie structure of an associative ring ” isimli makalesinde yukarıda verilen lemmayı karekteristiği ikiden farklı yarı-asal halkalar için ispatlamıştır (Herstein 1970).

2.11.Lemma: U, R halkasının merkez tarfından kapsanmayan bir Lie ideali olsun. $aUb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: U, $U \not\subset Z$ koşulunu sağlayan Lie ideal ve $aUb = 0$ olsun. 2.8.Lemmadan dolayı R halkasının $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ koşullarını sağlayan en az bir M ideali vardır. Her $u \in U$, her $m \in M$ ve her $y \in R$ olmak üzere, $[mau, y] \in [M, R] \subset U$ dur. O halde

$$0 = a[mau, y]b$$

$= a[ma, y]ub + ama[u, y]b$

eşitlikleri sağlanır.

Son ifadede $a[u, y]b \in aUb = 0$ olduğundan $a[ma, y]ub = 0$ elde edilir. Bu ifade düzenlenir ve $ymaub = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = a[ma, y]ub = amayub - ymaub$$

$$= amayub$$

elde edilir. Sonuç olarak

$amayub = 0$ $\forall u \in U$, $\forall m \in M$, $\forall y \in R$

bulunur. Yani $aMaRUb = 0$ olur.

$a \neq 0$ ise R asal halka olduğundan $Ub = 0$ dır. Böylece her $u \in U$ ve her $x \in R$ için

$$0 = (ux - xu)b$$

$$= uxb - xub$$

olur. $xub = 0$ olduğu göz önüne alınırsa son ifadeden

$$uxb = 0 \quad \forall u \in U, \ \forall x \in R$$

elde edilir. O halde $URb = 0$ dır. Böylece $U \neq 0$ ve R asal halka olduğundan $b = 0$ bulunur.

2.12.Lemma: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun. U, R halkasının $d(U) = 0$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Her $u \in U$, $x \in R$ için $d(U) = 0$ olduğundan, $d(ux\text{-}ux) = 0$ dır. Son ifade düzenlenir ve $d(U) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = d(ux-xu)$$

$$= d(ux)-d(xu)$$

$= ud(x) + d(u)x – d(x)u – xd(u)$

$= ud(x) - d(x)u$

elde edilir. Böylece her $u\in U$ ve her $x \in R$ için $ud(x) = d(x)u$ olduğu görülür.

Buradan da U nun $d(R)$ yi merkezlediği elde edilir. Burada 2.4.Teorem kullanılırsa $U\subset Z$ olduğu görülür.

2.13.Lemma: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun. U, R halkasının $d(U) \subset Z$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir.

İspat: $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda 2.10.Lemmadan $V = [U, U] \not\subset Z$ olur.

Her $u,w \in U$ için $d(u)$, $d(w) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$d(uw\text{-}wu) = (d(u)w\text{-}wd(u)) + (ud(w)\text{-}d(w)u)$$

$$(d(u)w\text{-}wd(u)) + (ud(w)\text{-}d(w)u) = 0$$

elde edilir. Yani her u, $w \in U$ için $d([u, w]) = 0$ dır. Buradan $d([U, U]) = d(V) = 0$ oluğu görülür. 2.12.Lemmada U yerine $V = [U, U]$ Lie ideali alınırsa $V \subset Z$ elde edilir. Son ifade kabulümüzle çelişir. O halde $U \subset Z$ dir.

2.14.Lemma: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi ve U, R halkasının $U \not\subset Z$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. $t\in R$ olmak üzere $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise $t = 0$ olmak zorundadır.

İspat: Her $u\in U$, $x\in R$ için $(ux\text{-}xu)u = (ux)u - (xu)u = [u, xu] \in U$ olduğundan $t(ux\text{-}xu)u = 0$ dır. Böylece

$$0 = td((ux\text{-}xu)u)$$

$$= td((ux\text{-}xu))u + t(ux\text{-}xu)d(u)$$

eşitlikleri sağlanır. $td((ux\text{-}xu)u) = 0$ olduğu kullanılırsa son ifade

$$t(ux\text{-}xu)d(u) =0$$

olmasını gerektirir. Son eşitlikte x yerine $d(v)y$, $v\in U$, $y\in R$ alınır ve $tx = 0$ olduğu kullanılırsa $tud(U)yd(u) = 0$ bulunur. Böylece $tud(U)Rd(u) = 0$ olur. Burada $d(U) \neq 0$ olduğu gözönüne alınır R halkasının asal olduğu kullanılırsa $tUd(U) = 0$ bulunur. 2.11.Lemma kullanılırsa son ifade $t = 0$ olmasını gerektirir.

Aşağıda 2.14.Lemmayı sağlayan bir örnek verilecektir.

Örnek: $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ halkasını göz önüne alalım.
$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$ R halkasının bir Lie ideali ve d : R → R ye
$d\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ile tanımlanan türev olmak üzere $t\in R$ için $td(U) = 0$(veya $d(U)t=0$) iken $t = 0$ dır.

Çözüm: $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ halkasının asal halka olduğu açıktır.
Yukarıda verilen U kümesinin R halkasının bir Lie ideali olduğunu gösterelim.

Her $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix} \in U$ için,

A + B = $\begin{bmatrix} x+u & y+v \\ z+w & -(u+x) \end{bmatrix} \in U$ olduğundan U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

Şimdi $[U,R] \subset U$ ve $[R,U] \subset U$ olduğunu gösterelim.

$i \in \{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere

$A_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & -x_i \end{bmatrix} \in U$, $B_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \in R$ için

$$A_iB_i - B_iA_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & -x_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ z_i & -x_i \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} y_i c_i - b_i z_i & 2x_i b_i + y_i d_i - a_i y_i \\ z_i a_i - 2x_i c_i - d_i z_i & -(y_i c_i - b_i z_i) \end{bmatrix} \in U$$

elde edilir. *U*, *R* halkasının toplamsal alt grubu olduğu için $\sum_{i=1}^{n}(A_i B_i - B_i A_i)$ elemanı da U nun elemanıdır. Benzer şekilde [*R*, *U*] $\subset$ *U* olduğu açıktır.

U, Lie idealinin *d* altında görüntüsü

$$d(U)=\left\{ d\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \in U \right\}$$

$$=\left\{ \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{Z} \right\}$$

ve $T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \in R$ için *Td*(*U*) = 0 koşulunu sağladığını gösterelim. Bu durumda her $\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in$ *d*(*U*) için

$T\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}y & t_{12}y \\ t_{21}y & t_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Bu denklem çözülürse

$t_{11}y = 0$

$t_{12}y = 0$

$t_{21}y = 0$

$t_{22}y = 0$

elde edilir. $d(U) \neq 0$ olduğundan $d(U)$ kümesinde sıfırdan farklı bir eleman vardır. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in d(U)$ olduğu göz önüne alınırsa $t_{11} = t_{12} = t_{21} = t_{22} = 0$ olduğu görülür. Böylece

$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.15.Teorem: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi ve U, R halkasının $d^2(U) = 0$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir.

İspat: $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda 2.10.Lemmadan dolayı $V = [U, U] \not\subset Z$ olduğu açıktır. Eğer $V \subset Z$ olduğu gösterilirse ispat biter.

$U \not\subset Z$ olduğu göz önüne alınırsa 2.8.lemmadan dolayı $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ koşullarını sağlayan bir M ideali vardır.

Diğer taraftan $m \in [M, R] \subset U \cap M$ ve $u \in V$ ve $y \in R$ için

i. $w = d(u) \in d[U, U] \subset U$ ve $d^2(U) = 0$ olduğundan $d(w) = 0$ olur.
ii. $m \in [M, R]$ ve $d^2(U) = 0$ olduğundan $d^2(m) = 0$ dır.
iii. $[w, y]$, $[m, y] \in U$ olduğundan $d^2[w, y] = d^2[m, y] = 0$ dır.
iv. $mw \in U$ olduğundan $[mw, y] \in [M, R] \subset U$ olur. Yani $d^2[mw, y] = 0$ dır.

$d^2[mw, y] = 0$ ifadesi düzenlenir ve (i), (ii), (iii) ve (iv) de elde edilen ifadeler kullanılırsa

$0 = d^2[mw, y]$

$= d^2([m, y]w + m[w, y])$

$= d^2([m, y]w) + d^2(m[w, y])$

$= d(d[m, y]w) + d(dm[w, y])$

$= d(d[m, y]w + [m, y]d(w)) + d(d(m)[w, y] + md([w, y]))$

$= d^2([m, y])w + d[m, y]d(w) + d([m, y])d(w) + [m, y]d^2(w) + d^2(m)[w, y] + d(m)d([w, y]) + d(m)d([w, y]) + md^2([w, y])$

$= 2d(m)d([w, y]))$

elde edilir. R halkasının karekteristiği 2 den farklı olduğundan, son ifade her $m \in [M, R]$, her $y \in R$ ve her $u \in V$ için $d(m)d[d(u), y]) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece

$$d([M, R])d([d(u), R]) = 0 \qquad \forall u \in V \qquad (1)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $[M, R]$, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie ideali olduğundan 2.14.Lemma kullanılırsa (1) ifadesi $d[d(V), R]) = 0$ olmasını gerektirir.

Böylece $u \in V$, $x \in R$ için $d^2(U) = 0$ olduğu da kullanılırsa

$$0 = d([d(u),x])$$

$$= d(d(u)x\text{-}xd(u))$$

$$= d^2(u)x + d(u)d(x)\text{-}d(x)d(u)\text{-}x\, d^2(u)$$

$$= d(u)d(x)\text{-}d(x)d(u)$$

$$= [d(u), d(x)]$$

eşitlikleri sağlanır. Yani $d(V)$, $d(R)$ yi merkezler. Burada 2.4.Teorem kullanılırsa $d(V) \subset Z$ elde edilir. $V = [U, U]$ kümesinin R halkasının $d(V) \subset Z$ olacak şekilde bir Lie ideali olduğu göz önüne alınırsa 2.13.Lemmadan $V \subset Z$ dir. Burada 2.5.Lemma kullanılırsa $U \subset Z$ elde edilir. Böylece ispat biter.

Ram Awtar 2.15.Teoremin daha genel hali olan aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi ve U, R halkasının $d^2(U) \subset Z$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir (Ram Awtar 1984).

Ayrıca P.H.Lee ve T.K.Lee 2.15.Teoremin daha genel durumu olan aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem: d ve δ, $d\delta(U) \subseteq Z$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı türevleri ise $U \subset Z$ dir (P.H.Lee ve T.K.Lee 1982).

2.15.Teoremde $U = R$ veya U, R halkasının bir ideali olarak alınırsa $d^2(U) = 0$ olması $d = 0$ olmasını gerektirir. 2.15.Teorem, 2.1.Teoremin daha genel halidir.

2.16.Sonuç: U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $a \in R$ için $[a, [a, U]] = 0$ ise $[a, U] = 0$ dır.

İspat: 2.15.Teoremde U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan Lie ideali ve d türevi de $a \in R$ ile üretilen iç türev olarak alınırsa $d^2(U) = 0$ yani $[a, [a, U]] = 0$ olduğunda $[a, U] = 0$ olur.

2.15.Teoremin bir sonucu olarak elde ettiğimiz yukarıdaki ifade 2.2.Sonucun bir genellemesidir.

$a \in C_R(d(U))$ ve $a \notin Z$ olsun. Bu durumda $U \not\subset Z$ olduğunda 2.5.Lemma kullanılırsa $[U, U] \not\subset Z$ olduğu görülür. Böylece U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan Lie ideali olduğu göz önüne alınır ve 2.9.Lemma kullanılırsa $C_R([U, U]) = Z$ elde edilir.

Aynı zamanda aşağıda vereceğimiz sonuç 2.16.Sonucun bir genellemesidir.

2.17.Sonuç: R 2-burulmasız yarı asal halka, halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $a \in R$ için $[a, [a, U]] = 0$ ise $[a, U] = 0$ dır (Herstein I.N. 1969).

2.18.Teorem: U, R halkasının merkez tarfından kapsanmayan bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi ise $C_R(d(U)) = Z$ dir.

İspat: $a \in C_R(d(U))$ fakat $a \notin Z$ olsun. U, R halkasının $U \not\subset Z$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olduğundan 2.9.Lemma kullanılırsa $V = [U, U]$, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie idealidir.

Ayrıca her $u, v \in U$ için $d[u, v] = [d(u), v] + [u, d(v)]$ olduğundan $d(V) = d[U, U] \subset U$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $a \in C_R(d(U))$ olduğundan,

$$ad(u) = d(u)a \qquad \forall u \in V \subset U \qquad (1)$$

bulunur. Burada $d(u) \in d(V) \subset U$ olduğu kullanılır ve (1) ifadesinde $u \in U$ yerine $d(u)$ alınırsa, $ad(d(u)) = d(d(u))a$ bulunur. Yani

$$ad^2(u) = d^2(u)a \qquad \forall u \in V \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ifadesine tekrar türev uygulanırsa

$$d(ad(u)) = d(d(u)a)$$

yani

$$d(a)d(u) + ad^2(u) = d^2(u)a + d(u)d(a)$$

eşitliği elde edilir. Burada (2) ifadesi kullanılırsa

$$d(a)d(u) = d(u)d(a)$$

elde edilir. Buradan da $d(a)$ elemanının $d(V)$ kümesini merkezlediği görülür. Sonuç olarak a ve $d(a)$ elemanları $d(V)$ yi merkezler.

Ayrıca $u \in V$ için

$$d(au\text{-}ua) = d(a)u + ad(u)\text{-}\ d(u)a - ud(a)$$

olduğu açıktır. Burada (1) eşitliği kullanılırsa

$$d(au\text{-}ua) = d(a)u\text{-}\ ud(a) \in d(V) \qquad \forall u \in V \text{ için} \qquad (3)$$

bulunur.

Böylece $d(a)$ elemanı $d(V)$ kümesini merkezlediğinden (3) ifadesi kullanılırsa $[d(a), [d(a), V]] = 0$ elde edilir. Son ifade 2.16.Sonuçtan $[d(a), V] = 0$ olmasını gerektirir. $V \not\subset Z$ olduğundan 2.9.Lemma kullanılırsa $d(a) \in Z$ olur. Sonuç olarak $a \in C_R(d(U))$ ise $d(a) \in Z$ olduğu gösterilmiş oldu. Dolayısıyla $a^2 \in C_R(d(U))$ da olduğundan $d(a^2) \in Z$ dir. Yani $d(a^2) = 2ad(a) \in Z$ olur. CharR ≠ 2 olduğundan son ifade $ad(a) \in Z$ olmasını gerektirir. Bu durumda $ad(a) \in Z$, $d(a) \in Z$, $a \notin Z$ olduğundan 1.9.Önerme kullanılırsa $d(a) = 0$ olduğu görülür.

Böylece $a \notin Z$ koşulunu sağlayan her $a \in C_R(d(U))$ için $d(a) = 0$ dır.

$C_R(d(U))$ kümesinin bir b elemanı için $d(b) \neq 0$ ise yukarda yapılan işlemler kullanılarak $b \in Z$ elde edilir.

Ayrıca $a \in C_R(d(U))$, $a \notin Z$ ise $d(a) = 0$ dır. a, $b \in C_R(d(U))$, $a \notin Z$ elemanları için $d(a + b) = d(a) + d(b) = d(b) \neq 0$ olduğundan $d(a + b) \neq 0$ dır. $a + b \in C_R(d(U))$ ve $d(a + b) \neq 0$ olduğundan $a + b \in Z$ olur. Buradan $a \in Z$ elde edilir, bu $a \notin Z$ oluşu ile çelişkidir. Böylece $C_R(d(U)) \not\subset Z$ olduğu kabul edilirse, her $a \in C_R(d(U))$ için $d(a) = 0$ olduğu elde edilir.

$W = \{x \in R: d(x) = 0\}$ olsun.

Her $a \in C_R(d(U))$ elemanı için $d(a) = 0$ olduğundan $a \in W$ olur. Buradan $C_R(d(U)) \subset W$ olduğu görülür. $a \in C_R(d(U))$ ise $d(a) = 0$ olduğu kullanılırsa her $u \in U$ için $d(au\text{-}ua) = ad(u)\text{-}d(u)a = 0$ elde edilir. Her $a \in C_R(d(U))$ ve $u \in U$ için $d(au\text{-}ua) = 0$ olduğundan $[a, U] \subset W$ sonucuna varılır.

Diğer taraftan U, R halkasının $U \not\subset Z$ koşulunu sağlayan ideali olduğundan 2.7.Lemma kullanılırsa $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ olacak şekilde en az bir tane M idealinin vardır. $m \in [M, R] \subset U \cap M$ ise $ma \in M$ olur. Böylece $u \in U$ için $[ma, u] \in U$ dır. $[m, u]a + m[a, u] \in U$ olduğu görülür. Diğer taraftan a, $[a,u] \in W$ olduğu kullanılırsa

$$d([m, u]a + m[a, u]) = d([m, u])a + (d(m))[a, u]$$

elde edilir. a elemanı $d(U)$ kümesini merkezlediğinden a, $d([m, u]a + m[a, u])$ yani $d([m, u])a + (d(m))[a, u]$ elemanı ile değişmelidir. a elemanının $d([m, u])$ ve $d(m)$ elemanları ile değişmeli olduğu kullanılırsa

$$0 = [a, d([m, u]a + d(m) [a, u]]$$

$$= d(m)[a ,[a, U]]$$

elde edilir. $[M, R] \not\subset Z$ ve $[M, R]$ R halkasının bir Lie ideali olduğundan 2.14.Lemma kullanılırsa $[a, [a, U]] = 0$ olur. $U \not\subset Z$ olduğu göz önüne alınırsa 2.15. Teoremden $a \in Z$ elde edilir. Bu ispatı bitirir.

U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $\overline{d(U)}$, $d(U)$ ile üretilen alt halka olsun. 1978 yılında $d^3 \neq 0$ ise d(R) alt halkasının R halkasının sıfırdan farklı bir ideal kapsadığı Herstein tarafından ispatlandı (Herstein 1978).

Şimdi $d^3 \neq 0$ iken $\overline{d(U)}$ alt halkasının R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsadığı gösterilecektir.

Aksinden söz edilmedikçe, R karekteristiği 2 den farklı asal halka U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi kabul edilecektir. Ayrıca V ile $[U, U]$ Lie ideali, W ile $[V, V]$ Lie ideali gösterilecektir.

2.19.Lemma: $d^3 \neq 0$ olmak üzere $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir λ sol idealini ve sıfırdan farklı bir ρ sağ idealini kapsıyor ise $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: $V = [U,U]$ ve $d(V) \subset U$ olduğundan $d(d(V)) \subset d(U)$ dolasıyla $\overline{d(d(V))} \subset \overline{d(U)}$ olduğu açıktır.

$a \in \lambda \subset \overline{d(V)}$ ve $x \in R$ olsun. λ sol ideal olduğundan $xa \in \lambda$ dır. Dolayısıyla

$d(xa) \in d(\lambda) \subset \overline{d(d(V))} \subset \overline{d(U)}$ olduğundan $d(xa) \in \overline{d(U)}$ elde edilir.

Yani $d(x)a + xd(a) \in \overline{d(U)}$ olur.

Diğer taraftan $d(x)a + xd(a) \in \overline{d(U)}$ olduğu kullanılırsa her $x \in R$ ve $a \in \lambda$ için $d(x)a \in \lambda \subset \overline{d(V)} \subset \overline{d(U)}$ olduğundan

$$xd(a) \in \overline{d(U)} \qquad \forall x \in R \tag{1}$$

bulunur. Buradan $Rd(\lambda) \subset \overline{d(U)}$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $d(\rho)R \subset \overline{d(U)}$ ifadesinin sağlandığı gösterilebilir.

V, R halkasının Lie ideali olduğundan her $a \in \lambda$, $u \in V$ için, $d(ua - au) = d(u)a + ud(a) - d(a)u - ad(u) \in d(V)$ dir. Buradan V Lie idealinin toplamsal alt grup olduğu kullanılırsa

$$d(a)u - ud(a) + ad(u) - d(u)a \in \overline{d(V)} \tag{2}$$

elde edilir. (1) ifadesi, λ nın sol ideal olduğu ve $\lambda d(V) \subset \overline{d(V)}$ olduğu kullanılırsa, son ifadede yer alan $ud(a)$, $d(u)a$ elemanları $\overline{d(V)}$ tarafından kapsanır. Böylece (2) ifadesi

$$d(a)u \in \overline{d(U)} \qquad \forall a \in \lambda, \forall u \in V$$

olmasını gerektirir. O halde $d(\lambda)V \subset \overline{d(U)}$ olur.

Benzer olarak $Vd(\rho) \subset \overline{d(U)}$ olduğu da gösterilebilir.

$I = \lambda V\rho$ olmak üzere I, R halkasının bir idealidir. V, R halkasının bir Lie ideali λ, $\rho \neq 0$ olduğundan $I \neq 0$ dır. Üstelik $d(I) = d(\lambda V\rho) \subset d(\lambda)V\rho + \lambda d(V)\rho + \lambda Vd(\rho)$ ve $d(\lambda)V$, $Vd(\rho)$, λ, $\rho \in \overline{d(U)}$ olduğundan $d(I)$, $\overline{d(U)}$ tarafından kapsanır. Böylece $\overline{d(I)} \subset \overline{d(U)}$ olur.

R halkasının I idealinin aynı zamanda bir halka ve $d^3(I) \neq 0$ olduğu göz önüne alınır 2.7.Teorem kullanılırsa $\overline{d(I)}$ alt halkasının R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsadığı açıktır. Böylece $\overline{d(I)} \subset \overline{d(U)}$ olduğundan $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

2.20.Lemma: I, R halkasının sıfırdan farklı ideali olmak üzere $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı sol idealini ve sıfırdan farklı sağ ideali kapsamasın Bu durumda $c \in R$ için $[c, I] \subset \overline{d(U)}$ ise $c \in Z$ dir.

İspat: Hipotezden her $t \in d(U)$, her $i \in I$ için $[c, ti]$, $[c, i] \in \overline{d(U)}$ olduğu göz önüne alınır ve $\overline{d(U)}$ nin alt halka olduğu kullanılırsa

$$[c, ti] = [c, t]i + t[c, i] \in \overline{d(U)}$$

ifadesi $[c, t]i \in \overline{d(U)}$ olmasını gerektirir. Böylece $[c,d(U)]I \subset \overline{d(U)}$ olur. I, R halkasının ideali olduğundan $[c,d(U)]I$, R halkasının sağ idealdir. $\overline{d(U)}$ R halkasının sıfırdan farklı sağ idealini içermediğinden $[c,d(U)]I = 0$ veya $I[c,d(U)] = 0$ dır. R halkası asal halka ve $I \neq 0$ olduğundan son ifade $[c,d(U)] = 0$ olmasını gerektirir. Böylece 2.19.Teoremden $c \in Z$ elde edilir.

2.21.Lemma: U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie ideali d, R halkasının sıfırdan farklı türevi ve $W = [[U, U], [U, U]]$ olmak üzere $d^2(U)^2 = 0$ ise $d^3(W) = 0$ dır.

İspat: $U \not\subset Z$ olduğu göz önüne alınır ve 2.5. Lemma kullanılırsa $V = [U,U] \not\subset Z$ ve $W= [V,V] \not\subset Z$ elde edilir. Diğer taraftan $d(V) \subset U$, $d(W) \subset V$ ve $d^2(W) \subset U$ olduğu görülebilir. $d^2(U)^2 = 0$ olduğundan $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ ve $t \in U$ için

$$d^2(u)^2 \, (d^2(d(v)d^2(w)t - d^2(w)td(v)) = 0 \qquad (1)$$

bulunur. (1) ifadesi açılır ve $d(v) \in U$, $d^2(w) \in U$ ve $d^2(u)^2 = 0$ olduğu kullanılırsa

$$d^2(u)d(v)(d^4(w)t + 2d^3(w)d(t)) = 0 \qquad (2)$$

elde edilir.

$d(V) \subset U$ olduğundan (2) eşitliğinde t yerine $d(v'),\ v' \in V$ alınırsa

$$d^2(u)d(v)(d^4(w)t + 2d^3(w)d(v')) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan son ifadede $V \subset U^2$ olduğu göz önüne alınırsa $d^3(w)d(v') = 0$ eşitliği sağlandığından

$$d^2(u)d(v)d^4(w)d(v') = 0 \text{ her } u \in U,\ v, v' \in V,\ w \in W$$

bulunur. Böylece

$$d^2(u)d(v)d^4(w)d(V) = 0 \text{ olur.}$$

2.14.Lemma kullanılırsa son ifade

$$d^2(u)d(v)d^4(w) = 0 \qquad \forall u \in U,\ v \in V,\ w \in W$$

olmasını gerektirir. (2) eşitliğini tekrar düzenlenir ve $d^2(u)d(v)d^4(w) = 0$ olduğu kullanılırsa $t \in U$, $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ için,

$$0 = d^2(u)d(v)d^4(w)t + 2d^2(u)d(v)d^3(w)d(t)$$

$$= d^2(u)d(v)d^3(w)d(t) \qquad \forall t \in U$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$=d^2(u)d(v)d^3(w)d(U) \qquad (3)$$

olduğu görülür. Burada 2.15.Lemma kullanılırsa

$$d^2(u)d(v)d^3(w) = 0, \qquad \forall u \in U,\ v \in V,\ w \in W \tag{4}$$

elde edilir.

$d^2(d(v)d^2(w)t - d^2(w)td(v))d^2(u)^2 = 0$ olduğu kullanılırsa benzer yol izlenerek

$$d^3(w)d(v)d^2(u) = 0, \qquad \forall u \in U,\ v \in V,\ w \in W \tag{5}$$

olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $t,\ w \in W$ ve $v \in V$ için

$$d^2(d(v))d^2(vd(w)-d(w)v) = 0$$

olduğu düşünülerek (5) ifadesi kullanılırsa her $t,\ w \in W$ için,

$$d^3(t)Vd^3(w) = 0$$

elde edilir. 2.11.Lemma kullanılarak her $w,t \in W$ için $d^3(w) = 0$ veya $d^3(t) = 0$ elde edilir. Böylece $d^3(W) = 0$ sonucuna varılır.

2.22.Lemma: U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie ideali d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere $d^3(U) = 0$ ise $d^3 = 0$ dır.

İspat: U, R halkasının bir Lie ideali ve $d^3(U) = 0$ olduğundan her $u \in U$, $r \in R$ için $d^3[u,r] = 0$ olur. $d^3[u,r] = 0$ ifadesi düzenlenir ve $d^3(U) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$0 = d^3[u,r] = d(d(d[u,r]))$$

$$= d(d(d(ur-ru))) = d(d(d(ur)-d(ru)))$$

$$= d(d^2(u)r + d(u)d(r) + d(u)d(r) - ud^2(r) - d^2(r)u - d(r)d(u) - d(r)d(u) - rd^2(u))$$

$$= d^3(u)r + d^2(u)d(r) + d^2(u)d(r) + d(u)d^2(r) + d^2(u)d(r) + d(u)d^2(r) - d(u)d^2(r) - ud^3(r) - d^3(r)u - d^2(r)d(u) - d^2(r)d(u) - d(r)d^2(u) - d^2(r)d(u) - d(r)d^2(u) - d(r)d^2(u) - rd^3(u)$$

$$= 3d^2(u)d(r) - 3d(r)d^2(u) + 3d(u)d^2(r) - 3d^2(r)d(u) + ud^3(r) - d^3(r)u$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$0 = 3[d^2(u),d(r)] + 3[d(u),d^2(r)] + [u,d^3(r)] \qquad \forall u \in U,\ \forall r \in R \tag{1}$$

olur. (1) ifadesinde u yerine $d^2(w)$, $w \in W = [V, V]$ yazılır ve $d^3(w) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0= 3[d^4(w),d(r)] + 3[d^3(w),d^2(r)] + [d^2(w),d^3(r)]$$

$$= [d^2(w),d^3(r)]$$

elde edilir. Yani

$$[d^2(w),d^3(r)] = 0 \qquad \forall u \in U,\ \forall r \in R \tag{2}$$

olur. (1) ifadesinde u elemanı yerine $d(w)$, $w \in W$, r elemanı yerine $d(r)$, $r \in R$ yazılır (2) ifadesi kullanılırsa

$$0 = 3[d^3(w),d^2(r)] + 3[d^2(w),d^3(r)] + [d(w),d^4(r)]$$

$$= [d(w),d^4(r)]$$

elde edilir.

$$[d(w),d^4(r)] = 0 \qquad \forall w \in W,\ \forall r \in R$$

sonucuna varılır. O halde $d^4(R)$, $d(W)$ kümesini merkezler. Böylece $W \not\subset Z$ olduğundan 2.18.Teorem kullanılırsa $d^4(R) \subset Z$ elde edilir.

$d^4(R) \subset Z$ olduğundan her $r \in R$ için $d^4(r) \in Z$ dır. Ayrıca U, R halkasının bir Lie ideali olduğundan her $u \in U$ için $d^4[u,r] = 0$ olduğu açıktır. $d^4[u,r] = 0$ ifadesi düzenlenir ve $d^3(U) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$0 = d^4[u,r]$$

$= d^4(u)r + d^3(u)d(r) + d^3(u)d(r) + d^2(u)d^2(r) + d^3(u)d(r) + d^2(u)d^2(r) + d^2(u)d^2(r) + d(u)d^3(r) + d^3(u)d(r) + d^2(u)d^2(r) + d^2(u)d^2(r) + d(u)d^3(r) + d^2(u)d^2(r) + d(u)d^3(r) + d(u)d^3(r) + ud^4(r) - d^4(r)u - d^3(r)d(u) - d^3(r)d(u) - d^2(r)d^2(u) - d^3(r)d(u) - d^2(r)d^2(u) - d^2(r)d^2(u) - d(r)d^3(u) - d^3(r)d(u) - d^2(r)d^2(u) - d^2(r)d^2(u) - d^2(r)d^3(u) - d^2(r)d^2(u) - d(r)d^3(u) - d(r)d^3(u) - rd^4(u)$

$= 6[d^2(u),d^2(r)] + 4[d(u),d^3(r)]$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak,

$$6[d^2(u),d^2(r)] + 4[d(u),d^3(r)] = 0 \qquad \forall u \in U,\ \forall r \in R \qquad (3)$$

elde edilir. Ayrıca $d^3(U) = 0$ ve $d(R) \subset R$ olduğu göz önüne alınırsa her $u \in U$, her $r \in R$ için $d^3[u,d(r)] = 0$ olduğu görülür. Son ifade düzenlenirse

$$d^3[u,d(r)] = 3[d^2(u),d^2(r)] + 3[d(u),d^3(r)] = 0 \qquad \forall u \in U,\ \forall r \in R \qquad (4)$$

elde edilir. (4) eşitliği 2 ile çarpılıp (3) eşiti ile taraf tarafa çıkarılırsa $2[d(u),d^3(r)] = 0$ bulunur. R halkasının karekteristiği 2 den farklı olduğundan $[d(u),d^3(r)] = 0$ elde edilir. 2.18.Teorem tekrar kullanılırsa $d^3(R) \subset Z$ bulunur. Böylece her $r \in R$, $u \in U$ için $d^3(rd^2(u)) \in Z$ olduğu görülür. $d^3(rd^2(u))$ ifadesi düzenlenir ve $d^3(U) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d^3(rd^2(u)) &= d^2(d(r)d^2(u) + rd^3(u)) \\ &= d(d^2(r)d^2(u) + d(r)d^3(u)) \\ &= d^3(r)d^2(u) + d^2(r)d^3(u) \\ &= d^3(r)d^2(u) \in Z \qquad \forall u \in U,\ \forall r \in R \qquad (5) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d^3(R)d^2(U) \subset Z$ bulunur. Eğer $d^3(R) \neq 0$ ise bu durumda $d^3(R) \subset Z$ olduğu göz önüne alınır ve 1.9.Önerme kullanılırsa (5) ifadesi $d^2(U) \subset Z$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $d^3(R) \neq 0$ olduğunda $d^2(U) \subset Z$ olmak zorundadır.

$d^4(R) \subset Z$ olduğundan $\forall u \in U$, $\forall r \in R$ için $d^4(rd(u)) \in Z$ dir. $d^4(rd(u))$ ifadesini açılır ve $d^3(U) = 0$ olması kullanılırsa,

$$d^4(rd(u)) = d^4(r)d(u) + 4d^3(r)d^2(u) \in Z$$

elde edilir. Burada Z kümesinin alt halka ve $d^4(rd(u)) \in Z$ olduğu kullanılırsa $d^4(rd(u)) \in Z$ elde edilir. O halde $d^4(R)d(U) \subset Z$ olur. 2.13.Lemma ve 1.9.Önerme kullanılırsa son ifade $d^4(R) = 0$ olmasını gerektirir.

$$\begin{aligned} 0 &= d^4(rd(u)) \\ &= d^4(r)d(u) + 4d^3(r)d^2(u) \\ &= 4d^3(r)d^2(u) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Yani

$$4d^3(r)d^2(u) = 0 \qquad \forall u \in U,\ \forall r \in R$$

olur. R halkasının karekteristiği 2 den farklı olduğundan $d^3(R)d^2(U) = 0$ bulunur. Diğer taraftan $U \not\subset Z$ olduğu göz önüne alınırsa 2.15.Teormden $d^2(U) \neq 0$ olduğu görülür. Bu durumda 1.9.Önerme kullanılırsa $d^3(R)d^2(U) = 0$ olması $d^3(R) = 0$ olmasını gerektirir.

2.23.Teorem: U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie ideali ve d, $d^3 \neq 0$ koşulunu sağlayacak şekilde R halkasının bir türevi olsun. Bu durumda $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: $V = [U,U]$ ve $W = [V,V]$ olmak üzere 2.19.Lemmada $\overline{d(V)}$ nin sıfırdan farklı R halkasının sağ ve sol ideallerini içerdiği gösterilirse 2.19.Lemmadan ispat biter. $\overline{d(V)}$ alt halkasının bir sağ ideal kapsamadığını kabul edelim. Bu durumda $d^2([W,W])^2 = 0$ olduğu gösterilirse 2.21.Lemma ve 2.22.Lemma kullanılmak suretiyle $d^3 = 0$ olduğu elde edilerek bir çelişkiye varılacaktır.

$w \in [W,W]$ olmak üzere $a = d(w)$ elemanı ve $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} a(ax - xa) &= a(ax) - (ax)a \\ &= [a, ax] \in W \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d(a(ax - xa)) = d(a)(ax - xa) + ad(ax - xa) \in d(W)$$

elde edilir. $a \in d(W) \subset d(V)$ olduğundan $d(ax - xa) \in d(V)$ ve $d(a(ax - xa)) \in d(W) \subset \overline{d(V)}$ bulunur. Buradan $\overline{d(V)}$ alt halka olduğundan

$$d(a)(ax - xa) \in \overline{d(V)} \qquad a \in d([W, W]),\ x \in R \tag{1}$$

elde edilir. Ayrıca $u \in V$ için $a \in d(W) \subset d(V)$ ve $[a, d(u)] \in \overline{d(V)}$ olduğundan

$$d([a, u]) = [d(a), u] + [a, d(u)] \in d(V) \subset \overline{d(V)}$$

olduğu açıktır. $\overline{d(V)}$ toplamsal olduğundan

$$[d(a), V] \subset \overline{d(V)} \qquad \forall a \in d[W, W] \tag{2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$d(a)d(ar - ra) = d(a)[d(a), r] + d(a)[\, a, d(r)] \in \overline{d(V)}$$

dir. Burada (1) ifadesi kullanılırsa $\overline{d(V)}$ toplamsal olduğundan

$$d(a)[d(a), r] \in \overline{d(V)} \qquad \forall a \in d[W,W],\ r \in R \tag{3}$$

elde edilir. (3) ifadesinde a yerine $a + b$, $b \in d[W,W]$ yazılırsa

$$\begin{aligned} s &= d(a + b)[d(a + b), r] \\ &= (d(a)+d(b))[d(a)+d(b), r] \\ &= (d(a)+d(b))([d(a),r] + [d(b),r]) \\ &= d(a)[d(a), r] + d(a)[d(b), r] + d(b)[d(a), r] + d(b)[d(b), r] \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$s = d(a)[d(b), r] + d(b)[d(a), r] \in \overline{d(V)} \qquad \forall a, b \in d[W, W],\ r \in R \tag{4}$$

elde edilir. Eğer $t = [d(a)d(b), r] = d(a)[d(b), r] + [d(a), r]d(b)$ alınır ve (2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} s - t &= d(a)[d(b), r] + d(b)[d(a), r] - d(a)[d(b), r] - [d(a), r]d(b) \\ &= d(b)[d(a), r] - [d(a), r]d(b) \in \overline{d(V)} \end{aligned}$$

$s \in \overline{d(V)}$ ve $s - t \in \overline{d(V)}$ olduğundan $t \in \overline{d(V)}$ elde edilir. Böylece $[d(a)d(b),R] \subset \overline{d(V)}$ dir. $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı sağ idealini veya sol idealini içermediği göz önüne alınır ve 2.21.Lemma kullanılırsa

$$d(a)d(b) \in Z \qquad \forall a, b \in d[W, W]$$

elde edilir.

$\alpha = d(a)d(b)$ olsun.

(1) ifadesi kullanılırsa $d(b)(bx - xb) \in d(V)$ ve $d(a) \in \overline{d(V)}$ olduğu kullanılırsa,

$\alpha(bx - xb) = d(a)d(b)(bx - xb) \in \overline{d(V)}$ elde edilir. $\alpha \in Z$ olduğundan $I = \alpha R$, R halkasının bir ideali olmak üzere $[b, I] \subset \overline{d(V)}$ dir.

i. $I \neq 0$ olduğu durumda; 2.16.Lemma kullanılırsa her $b \in d[W,W]$ için $b \in Z$ sonucuna varılır. Yani $d[W,W] \subset Z$ olur. Burada 2.13.Lemma kullanılırsa $[W,W] \subset Z$ bulunur. Böylece 2.5.Lemmadan $U \subset Z$ elde edilir.

ii. $I = \alpha R = 0$ olduğu durumda;

$\alpha = 0$ olur. Bir başka deyişle, her a, $b \in d[W,W]$ için $d(a)d(b) = 0$ dır. 2.21.Lemma ve 2.22.Lemma kullanılırsa $d^3 = 0$ çelişkisine varılır. Bu da teoremin ispatını bitirir.

2.24.Teorem: R, karekteristiği ikiden farklı olacak şekilde bir asal halka ve U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie ideali olsun. δ ve d, $\delta d(U) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde R halkasında iki türevi ise $d = 0$ veya $\delta = 0$ dır.

İspat: $d \neq 0$ *ve* $\delta \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $V = [U, U]$ olsun. Her $v \in V$ için $d(v) \in U$ olduğundan

$$\delta(d[u, d(v)]) = 0 \quad \forall u \in U, \forall v \in V$$

olur. Böylece $\delta([d(u), d(v)] + [u, d^2(v)]) = 0$ olur. Bu ifade açılır ve $\delta d(U) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \delta([d(u), d(v)] + [u, d^2(v)]) \\ &= [\delta(d(u)), d(v)] + [d(u), \delta d(v)] + [\delta(u), d^2(v)] + [u, \delta d^2(v)] \\ &= [\delta(u), d^2(v)] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$[\delta(u), d^2(v)] = 0 \ \forall u \in U, \forall v \in V$$

sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle $d^2(V) \subset C_R(\delta(U))$ dur. Diğer taraftan 2.18.Teoremden $C_R(\delta(U)) = Z$ olduğu bilindiğinden $d^2(V) \subset Z$ olur.

Ayrıca $\delta d(U) = 0$ olduğundan $v \in V$ ve $r \in R$ için $\delta(d[d(v), r]) = 0$ dır. Son ifade açılır ve $d^2(v) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(d[d(v), r]) \\ &= \delta([d^2(v), r] + [d(v), d(r)]) \\ &= [\delta d(v), d(r)] + [d(v), \delta d(r)] \\ &= [d(v), \delta(d(r))] \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$[d(v), \delta d(r)] = 0 \ \forall v \in V, \ \forall r \in R$$

olur. Buradan $[d(V), \delta d(R)] = 0$ olduğu görülür. Bir başka deyişle $\delta d(R) \subseteq C_R(d(V))$ dir. 2.18. Teoremden $C_R(d(V)) = Z$ olduğu bilindiğinden son ifade $\delta d(R) \subseteq Z$ olmasını gerektirir. Böylece her $v \in V$, her $u \in U$ için $\delta d(d(v)u) \in Z$ dir. $\delta d(d(v)u)$ ifadesi açılırsa

$$\begin{aligned}\delta d(d(v)u) &= \delta(d^2(v)u + d(v)d(u)) \\ &= \delta d^2(v)u + d^2(v)\delta(u) + \delta(d(v)d(u))\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $d(v) \in U$ olduğundan, 2.13 Lemma kullanılırsa $\delta(U) \not\subset Z$ olduğu görülür. Böylece $\delta(U) \neq 0$ olur. $\delta(U) \neq 0$ olduğundan $d^2(V) \subseteq Z$ ve $d^2(V)\delta(U) \subseteq Z$ ifadesi $d^2(V) = 0$ olmasını gerektirir. Buradan, 2.15 Teorem kullanılırsa $d = 0$ elde edilir. Bu da ispatı bitirir.

$\delta = d$ seçilirse 2.24.Teoremin, 2.15.Teoremin daha genel hali olduğu görülür. 2.18.Teoremde olduğu gibi d, R halkasının sıfırdan farklı türevi ve $a \in C_R(d(U))$ ise δ türevi $\delta(x) = ax - xa$ olarak tanımlansın. Böylece $\delta d(U) = 0$ olduğu görülür. 2.24.Teoremden dolayı $d \neq 0$ olduğundan $\delta = 0$ elde edilir. Böylece her $x \in R$ için $ax = xa$ olduğundan $a \in Z$ elde edilir.

Ram Awtar 1984 yılında yayınladığı “ Lie Structure in Prime Ring with Derivations ” isimli makalesinde yukarıda verilen teoremin daha genel hali olan “R, karekteristiği ikiden farklı olcak şekilde bir asal halka ve U, R halkasının merkez tarafından kapsanmayan bir Lie ideali olsun. δ ve d, $\delta d(U) \subset Z$ koşulunu sağlayacak şekilde R halkasında türevler olsun. O zaman ya $d = 0$ ya da $\delta = 0$ dır’’ teoremini ispatlamıştır.

3. BÖLÜM: ASAL HALKALARIN (σ,τ)-LİE İDEALLERİ

Bu bölümde karakteristiği ikiden farklı olan asal halkaların (σ,τ)-Lie idealleri ve (σ,τ)-türevleri arasındaki ilişkiye yer verilecektir.

Bölüm boyunca R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka ve $\sigma,\tau : R \to R$ iki otomorfizma olarak alınacaktır. Eğer $d{:}R \to R$ toplamsal bir dönüşüm ve her x, $y \in R$ için $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ ise d, R halkasının (σ,τ) - türevi olarak tanımlanır. Ayrıca x, $y \in R$ için $x\sigma(y) - \tau(y)x$ $[x,y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilecektir.

3.1. Lemma: Her x, $y \in R$ için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

i. $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y, z]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(z)]y$

ii. $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y, \sigma(z)] + [x, z]_{\sigma,\tau}\, y$

iii. $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = [[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} + [x, [y, z]]_{\sigma,\tau}$

3.2.Lemma: d_1, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ) - türevi ve d_2, R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun. R halkasının $d_2(U) \subset U$ ve $d_1d_2(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir U ideali varsa R halkası değişmelidir (K.Kaya, 1988)

3.3.Lemma: U, R halkasının (σ,τ) - sağ Lie ideali olsun. R halkasının $[U, a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ koşulunu sağlayan bir a elemanı varsa $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: $a \notin Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman $u \notin C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde en az bir $u \in U$ vardır, hipotez ve 3.1.Lemma iii kullanılırsa, her $x \in R$ için

$$0 = [[u, a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [u, [a, x]]_{\sigma,\tau} + [[u, x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$$

eşitliği sağlanır. Buradan $[[u, x]_{\sigma,\tau}, a] \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $x \in R$ için $[u, [a, x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Böylece $d_u(x) = [u, x]_{\sigma,\tau}$, R halkasının (σ,τ)-türevi ve $d_a(x) = [a, x]$, R halkasının türevi olmak üzere son ifade, her $x \in R$ *için* $d_ud_a(x) \in C_{\sigma,\tau}$ şeklinde ifade edilir. Böylece $d_ud_a(R) \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada $d_u \neq 0$ ve $d_a \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa 3.2.Lemmadan R halkasının değişmeli olduğu elde edilir. Bu $a \in Z$ olmasını gerektirir. Bu da kabulümüzle çelişir. Böylece ispat biter.

3.4.Lemma: $a \in R$ ve $aU = 0$ (veya $Ua = 0$) olsun.

i. U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali ise o zaman $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

ii. U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali ise o zaman $a = 0$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dır.

İspat: i. U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali ve $aU = 0$ olsun. Her $x,y \in R$ ve her $u \in U$ için

$$0 = a[xy, u]_{\sigma,\tau} = ax[y, \sigma(u)] + a[x, u]_{\sigma,\tau}y = ax[y, \sigma(u)]$$

eşitliği sağlanır. Yani

$$ax[y, \sigma(u)] = 0 \qquad \forall\ x,y \in R \text{ ve } \forall\ u \in U$$

olur. Böylece $aR[R, \sigma(U)] = 0$ dur. R asal halka olduğundan son ifade $a = 0$ veya $U \subset Z$ olmasını gerektirir. Benzer olarak U, R halkasının (σ,τ) - sol Lie ideali ve $Ua = 0$ iken de $a = 0$ veya $U \subset Z$ olduğu görülür.

3.5.Teorem: U, R halkasının (σ,τ) - sağ Lie ideali ve a, $[U, a] = 0$ olacak şekilde R halkasının bir elemanı ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ifadeleri sağlanır.

İspat: U, R halkasının (σ,τ) - sağ Lie ideali ve $[U, a] = 0$ olsun. Her $x \in R$ ve her $u \in U$ için

$[[u, x]_{\sigma,\tau}, a] = 0$ dır. Bu eşitlik açılır ve $ua = au$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [[u, x]_{\sigma,\tau}, a] \\ &= [u\sigma(x) - \tau(x)u, a] \\ &= u\sigma(x)a - \tau(x)ua - au\sigma(x) + a\tau(x)u \\ &= u\sigma(x)a - \tau(x)au - ua\sigma(x) + a\tau(x)u \\ &= u[\sigma(x), a] - [a, \tau(x)]u \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece,

$$u[\sigma(x), a] - [\tau(x), a]u = 0 \qquad \forall\ u \in U \text{ ve } \forall\ x \in R \tag{1}$$

sonucuna varılır. (1) ifadesinde x yerine xy, $y \in R$ alınırsa,

$$u[\sigma(xy), a] - [\tau(xy), a]u = 0$$

elde edilir. Son ifade düzenlenir ve (1) ifadesi de kullanılırsa

$$0 = u[\sigma(x)\sigma(y), a] - [\tau(x)\tau(y), a]u$$

$= u\sigma(x)[\sigma(y), a] + u[\sigma(x), a]\sigma(y) - \tau(x)[\tau(y), a]u - [\tau(x), a]\tau(y)u$

$= u\sigma(x)[\sigma(y), a] + [\tau(x), a]u\sigma(y) - \tau(x)u[\sigma(y), a] - [\tau(x), a]\tau(y)u$

$= (u\sigma(x) - \tau(x)u)[\sigma(y), a] + [\tau(x), a](u\sigma(y) - \tau(y)u)$

$= [u, x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y), a] + [\tau(x), a][u, y]_{\sigma,\tau}$

bulunur. Böylece,

$$[u, x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y), a] + [\tau(x), a][u, y]_{\sigma,\tau} = 0, \qquad \forall\, u \in U \text{ ve } \forall\, x \in R \tag{2}$$

elde edilir. (2) ifadesinde y yerine $\sigma^{-1}(a)$ yazılırsa,

$$0 = [u, x]_{\sigma,\tau}[\sigma(\sigma^{-1}(a)), a] + [\tau(x), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = [\tau(x), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Yani

$$[\tau(x), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0, \qquad \forall\, x \in R \text{ ve } \forall\, u \in U$$

olur.

Son ifadede x yerine xy, $y \in R$ yazılır ve bu ifade kullanılırsa,

$0 = [\tau(xy), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$

$= \tau(x)[\tau(y), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} + [\tau(x), a]\tau(y)[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$

$= [\tau(x), a]\tau(y)[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}, \quad \forall\, x,y \in R$

elde edilir. Buradan, τ dönüşümünün R halkasının otomorfizması olduğu da kullanılırsa

$$[\tau(R), a]\, R\, [U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3}$$

elde edilir. R halkasının asal halka olduğu kullanılırsa (3) ifadesi $a \in Z$ veya $[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ olmasını gerektirir. 3.3.Lemma kullanılırsa, son ifade $\sigma^{-1}(a) \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olmasını gerektirir. Burada σ dönüşümünün R halkasının otomorfizması olduğu göz önüne alınırsa $a \in Z$ olduğu görülür. Böylece ispat biter.

3.6.Sonuç: U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. U değişmeli ise o zaman $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

R bir halka U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali olmak üzere $T(U)= \{ a \in R \mid [R, a]_{\sigma,\tau} \subset U \}$ ile tanımlanan küme R halkasının bir alt halkasıdır.

3.7.Lemma: U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-sol Lie ideali ise

$R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ bağıntıları sağlanır.

İspat: $T(U)$, R halkasının hem (σ,τ) - sol Lie ideali hem de alt halkası olduğundan her u, $v \in T(U)$ ve $x \in R$ için $[u, [x, v]_{\sigma,\tau}] \in T(U)$ olur. Böylece,

$$[u, [x, v]_{\sigma,\tau}] \in T(U) \qquad \forall\, u, v \in T(U) \text{ ve } \forall\, x \in R \tag{1}$$

elde edilir.

Diğer taraftan her $x \in R$ ve her u, $v \in T(U)$ için

$$[xu, v]_{\sigma,\tau} \in U \subset T(U) \qquad \forall\, u, v \in T(U) \text{ ve } \forall\, x \in R \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) de verilen ifadeler ve $T(U)$ kümesinin R halkasının alt halkası olduğu

kullanılırsa,

$[u, [x,v]_{\sigma,\tau}] + [xu, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}[u, [x, v]_{\sigma,\tau}] + [xu, v]_{\sigma,\tau} &= ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + \tau(v)xu + xu\sigma(v) - \tau(v)xu \\ &= ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + xu\sigma(v) \\ &= u[x, v]_{\sigma,\tau} - x[\sigma(v), u]\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $u[x, v]_{\sigma,\tau} - x[\sigma(v), u] \in T(U)$ olur. Buradan $u[x, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğu ve $T(U)$ nun alt halka olduğu kullanılırsa $x[\sigma(v), u] \in T(U)$ elde edilir. Sonuç olarak

$$x[\sigma(v), u] \in T(U) \qquad \forall\, u, v \in T(U) \text{ ve } \forall\, x \in R$$

elde edilir. Burada σ dönüşümünün R halkasının otomorfizma olduğu kullanılırsa

$R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$ olduğu görülür.

Diğer taraftan her $u,v \in T(U)$ ve her $x \in R$ için, $[ux, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ ve $u[x, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ oldukları kullanılırsa

$$[ux, v]_{\sigma,\tau} = u[x, v]_{\sigma,\tau} + [u, \tau(v)]x \in T(U)$$

elde edilir. $T(U)$ kümesinin R halkasının alt halkası olduğu kullanılırsa son ifade

$[u, \tau(v)]x \in T(U)$ her $x \in R$ olmasını gerektirir. Buradan $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ elde edilir.

3.8.Lemma: U, R halkasının Z ve $C_{\sigma,\tau}$ tarafından kapsanmayan sıfırdan farklı bir (σ,τ) -Lie ideali olsun. Her a, $b \in R$ için $aT(U)b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: $T(U)$ kümesinin tanımından her $u \in U$, her $v \in T(U)$ ve her $y \in R$ için $[ubv, y]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğu açıktır. $U \subset T(U)$ olduğu ve hipotez kullanılırsa $a[uby, v]_{\sigma,\tau}b = 0$ olur. Bu ifade düzenlenir ve 3.1.Lemma ile $aUb = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = a[uby, v]_{\sigma,\tau}b$$

$$= aub[y, v]_{\sigma,\tau}b + a[ub, \tau(v)]yb$$

$$= a[ub, \tau(v)]yb$$

$$= aub\tau(v)yb - a\tau(v)ubyb$$

$$= - a\tau(v)ubyb$$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak $a\tau(v)ubyb = 0$ $\forall$ u, $v \in T(U)$ ve $\forall$ $x \in R$ olur. Buradan

$a\tau(T(U))UbRb = 0$ bulunur.Burada R halkasının asal olduğu kullanılırsa $a\tau(T(U))Ub = 0$ veya $b = 0$ dır.

$$a\tau(T(U))Ub = 0 \tag{4}$$

olsun. Böylece her $x \in R$, her $u \in U$, her $v \in T(U)$ için

$$0 = a\tau(v)[u, x]_{\sigma,\tau}b$$

$$= a\tau(v)u\sigma(x)b - a\tau(v)\tau(x)ub$$

eşitlikleri sağlanır. Son ifadede x yerine $\sigma^{-1}(bx)$ yazılır ve (4) ifadesi kullanılırsa,

$$0 = a\tau(v)u\sigma(\sigma^{-1}(bx)b - a\tau(v))\tau(\sigma^{-1}(bx))ub$$

$$= a\tau(v)ubxb - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)\tau(\sigma^{-1}(x))ub$$

$$= a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$$

eşitlikleri sağlanır. Burada σ ve τ nun örten olduğu kullanılırsa

$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))Rub = 0$ elde edilir. R halkası asal halka olduğundan, son ifade

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \text{ veya } Ub = 0 \tag{5}$$

olmasını gerektirir.

$Ub = 0$ ise 3.4.Lemmadan dolayı $b = 0$ dır. Bu ispatı bitirir.

O halde

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \qquad \forall\, v \in T(U) \text{ için} \tag{6}$$

olduğunu kabul edelim. 3.7.Lemmadan dolayı $[U, \tau(T(U))]R \subset T(U)$ olduğundan $[R, [U, \tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau} \subset [R, T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T(U)$ elde edilir. Böylece her $x, y \in R$, $u \in U$ ve $v \in T(U)$ için $[\tau(x), [u, \tau(v)]y]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğu göz önüne alınırsa $a[\tau(x), [u, \tau(v)]y]_{\sigma,\tau}b = 0$ olur.

Bu ifade düzenlenirse

$$0 = a[\tau(x), [u, \tau(v)]y]_{\sigma,\tau}b$$

$$= a\tau(x)\sigma([u, \tau(v)]y)b - a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)b$$

olur. Son ifadede x yerine $x\sigma^{-1}(b)z$, $z \in R$, yazılır ve σ, τ dönüşümlerinin otomorfizma olduğu kullanılırsa $\forall x,y \in R$, $\forall u \in U$ ve $\forall v \in T(U)$ için

$$0 = a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u, \tau(v)]y)b - a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b$$

$$= a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u, \tau(v)]y)b - a\tau([u, \tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b \tag{7}$$

elde edilir. Diğer taraftan (6) ifadesi ve $[u, \tau(v)]yx \in T(U)$ olduğu kullanılırsa

$$a\tau([u, \tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b)) \in a\tau(T(U))\tau(\sigma^{-1}(b))\tau = 0$$

olduğu görülür. Böylece (7) den,

$$0 = a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u, \tau(v)]y)b \qquad \forall x,y \in R,\ \forall u \in U \text{ ve } \forall v \in T(U)$$

elde edilir. O halde

$$aR\tau(\sigma^{-1}(b))R\sigma([u, \tau(v)])Rb = 0 \tag{8}$$

bulunur. Böylece R halkasının asal halka olduğu kullanılısa $a = 0$ veya $b = 0$ veya $[U, \tau(U)] = 0$ elde edilir. U, R halkasının Z ve $C_{\sigma,\tau}$ tarafından kapsanmayan bir (σ,τ) - Lie ideali olduğundan 3.5.Teoremden dolayı $[U, \tau(U)] \neq 0$ elde edilir. Böylece $a = 0$ veya $b = 0$ olmak zorundadır.

3.9.Teorem: U, R halkasının Z ve $C_{\sigma,\tau}$ tarafından kapsanmayan bir (σ,τ) - Lie ideali olmak üzere R halkası $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ koşullarını sağlayan en az bir M ideali kapsar.

İspat: U, R halkasının (σ,τ) - Lie ideali ve $T(U)$, R halkasının alt halkası olduğundan 3.7.Lemma kullanılırsa $R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ yazılabilir. O halde her $x, y \in R$, $u, v, w, z \in T(U)$ için, $y[w, \sigma(z)][u, \tau(v)]x \in T(U)$ olur. Böylece $R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ dır.

R halkasının $M = R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R$ alt kümesini göz önüne alalım. M kümesinin teoremdeki koşulları sağlayan R halkasının bir ideali olduğunu göstereceğiz. M kümesinin R halkasının ideali olduğu açıktır. Şimdi $M \neq 0$ olduğunu gösterelim.

$R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R = (0)$ ise $[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))] = (0)$ olur. Böylece,

$$[u, \sigma(v)][w, \tau(z)] = 0 \qquad \forall\, u, v, w, z \in T(U) \tag{9}$$

elde edilir. (9) ifadesinde w yerine wt, $t \in T(U)$ yazılır ve (9) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [u, \sigma(v)]w[t, \tau(z)] + [u, \sigma(v)][w, \tau(z)]t \\ &= [u, \sigma(v)]w[t, \tau(z)] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$[u, \sigma(v)]T(U)[t, \tau(z)] = 0 \tag{10}$$

bulunur. 3.8.Lemmadan $[T(U), \sigma(T(U))] = 0$ veya $[T(U), \tau(T(U))] = 0$ dır. Özel olarak $U \subset T(U)$ olduğundan $[U, \sigma(U)] = 0$ veya $[U, \tau(U)] = 0$ yazılabilinir. Böylece 3.5.Teoremden $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Bu, hipotez ile çelişir. Böylece $T(U)$ sıfırdan farklı, $M = R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R$ idealini içerir.

M idealinin $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ koşulunun sağlandığını gösterelim. M, $T(U)$ tarafından kapsandığından $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset [R, T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. Böylece teoremdeki koşullardan biri sağlanır.

Şimdi M idealinin $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ koşulunu sağladığını gösterelim.

$[R, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. R halkası kendisinin bir (σ,τ) - Lie ideali olduğundan 3.3.Lemma kullanılırsa $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Bu da R halkasının değişmeli veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olmasını gerektirir. Özel olarak $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ sağlanır. Bu da hipotezle çelişir. Böylece $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu görülür.

3.9. Teorem, 2. bölümde vermiş olduğumuz 2.2.1. Lemmanın bir genelleştirmesidir.

R asal halka olmasın. Aynı zamanda σ ve τ homomorfizmaları örten olmasa bile 3.9.Teoremi sağlayan örnekler bulunabilir. Bu örneklerden biri aşağıda sunulmuştur.

Örnek: $R = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid p,q,r \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası $\sigma : R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ ve

$\tau : R \to R$, $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ ile tanımlanan endomorfizmalarını göz önüne alalım.

R halkasının Z ve $C_{\sigma,\tau}$ tarafından kapsanmayan $U = \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid p,r \in \mathbb{Z} \right\}$ (σ,τ)-Lie ideali için $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$

koşulları sağlayan sıfırdan farklı M = $\left\{ \begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix} \mid p,q,r \in \mathbb{Z} \right\}$ ideali vardır.

Çözüm: R halkası yarı asal halka değildir. Çünkü sıfırdan farklı A = B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elemanı için ARB = 0 bulunur. O halde R asal halka da olamaz.

$\sigma : R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ örten olmayan bir endomorfizmadır. Çünkü $\forall \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix} \in R$ için

i) $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{bmatrix} p+x & q+y \\ 0 & r+t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p+x & 0 \\ 0 & r+t \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) + \sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)$$

ii) $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)$ **=** $\sigma\left(\begin{bmatrix} px & py+qt \\ 0 & rt \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} px & 0 \\ 0 & rt \end{bmatrix}$ **=** $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)$

iii) $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ olacak şekilde en az bir tane $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix} \in R$ yoktur. O halde σ dönüşümü örten değildir.

τ : *R* → *R*, $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ örten olmayan bir endomorfizmadır. Çünkü

$\forall \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix} \in R$ için

i) $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix} p+x & q+y \\ 0 & r+t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r+t & 0 \\ 0 & p+x \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) + \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)$$

ii) $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix} px & py+qt \\ 0 & rt \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} rt & 0 \\ 0 & px \end{bmatrix}$ **=** $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)\tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}\right)$

iii) $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olacak şekilde en az bir tane $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} \in R$ yoktur. O halde τ dönüşümü örten değildir.

Şimdi *U* = $\left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid p, r \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesinin *R* halkasının (σ,τ)-Lie ideali olduğunu gösterelim. Her A = $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ ve B = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in$ *U* için,

A + B = $\begin{bmatrix} p+a & 0 \\ 0 & r+b \end{bmatrix} \in U$ olduğundan U, R halkasının toplamsal alt grubudur.

$[U, R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğunu gösterelim. i $\in$ {1,2,….,n} olmak üzere,

$A_i = \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix} \in U$, $B = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & r_i \end{bmatrix} \in R$ için

$$A_i\sigma(B_i) - \tau(B_i)A_i = \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix} \sigma\left(\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & r_i \end{bmatrix}\right) - \tau\left(\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ 0 & r_i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_i & 0 \\ 0 & x_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_i p_i & 0 \\ 0 & x_i r_i \end{bmatrix} \in U$$

elde edilir. U, R halkasının toplamsal alt grubu olduğu için $\sum_{i=1}^{n}(A_i\sigma(B_i) - \tau(B_i)A_i)$ elemanı da U nun elemanıdır. Benzer şekilde $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğu görülebilir.

Şimdi $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu gösterelim. C = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in C_{\sigma,\tau}$ ve

X = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in R$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri sağlandığından $C\sigma(X) \neq \tau(X)C$ bulunur. Böylece $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in U$ ve B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in R$ olmak üzere *AB* – *BA* ≠ 0 olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

olduğundan *AB* ≠ *BA* olduğu görülür. O halde $U \not\subset Z$ olur.

Şimdi sıfırdan farklı bir M ideali tanımlayalım.

M = $\left\{ \begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix} \mid p,q,r \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. Bu *M* kümesinin *R* halkasının bir ideali olduğunu gösterelim.

$\forall$ *A* = $\begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix}$ ve *B* = $\begin{bmatrix} 3a & b \\ 0 & 3c \end{bmatrix} \in M$ olmak üzere

A + *B* = $\begin{bmatrix} 3(p+a) & q+b \\ 0 & 3(r+c) \end{bmatrix} \in M$ olduğundan *R* halkasının toplamsal bir alt grubudur.

Her $A = \begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix} \in M$ ve her $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in R$ için

$$\begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3pa & 3pb+qc \\ 0 & 3rc \end{bmatrix} \in M$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3pa & aq+3br \\ 0 & 3rc \end{bmatrix} \in M$$

elde edilir. O halde *M*, *R* halkasının sıfırdan farklı bir idealidir. Ayrıca $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in M$ olduğundan *M* ≠ 0 dır.

$[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu gösterelim.

$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in R$, $\forall \begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix} \in M$ olmak üzere

$\sigma\left(\begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3p & 0 \\ 0 & 3r \end{bmatrix}, \tau\left(\begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3r & 0 \\ 0 & 3p \end{bmatrix}$ olduğu kullanılrsa

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3p & 0 \\ 0 & 3r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3r & 0 \\ 0 & 3p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(a^2 - ca) & 0 \\ 0 & 3(c^2 - ca) \end{bmatrix} \in U$ olduğundan

$[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ elde edilir. Ayrıca $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in R$ ve $S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \in M$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ olduğundan $X\sigma(S) \neq \tau(S)X$ elde edilir. O halde $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Sonuç olarak asal hatta yarı asal olmayan halkalar için 3.9.Teoremin sağlanıp sağlanmayacağı araştırılabilir. Burada σ ve τ endomorfizmalarının U ya kısıtlanmışlarının otomorfizma olduğu görülebilir.

3.10.Sonuç: U, R halkasının Z ve $C_{\sigma,\tau}$ tarfından kapsanmayan sıfırdan farklı bir (σ,τ)-Lie ideal olsun. $a, b \in R$ için $aUb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: U, R halkasının Z ve $C_{\sigma,\tau}$ tarfından kapsanmayan sıfırdan farklı bir (σ,τ)-Lie ideali olduğundan 3.9.Teorem kullanılırsa R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Böylece her $x \in R$, $u \in U$ ve $m \in M$ için, $[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau} \in [R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau}b \\ &= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b - aub\tau(m)xb \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede tekrar hipotez kullanılırsa ikinci terim sıfır olacağından

$$aR\sigma(\tau^{-1}(u))(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0 \qquad \forall x \in R,\ u \in U \text{ ve } m \in M \tag{11}$$

elde edilir. R halkası asal halka olduğundan (11) ifadesi

$a = 0$ veya $\sigma(\tau^{-1}(u))(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0\ \forall\ u \in U,\ \forall\ m \in M$

olmasını gerektirir. Eğer $\sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m)b = 0\ \ \forall\ u \in U,\ \forall\ m \in M$ ise $\sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(M)b = 0$ dır. Burada R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$b = 0 \text{ veya } \sigma(\tau^{-1}(ub)) = 0 \qquad \forall\ u \in U$$

elde edilir. Burada σ ve τ dönüşümlerinin otomorfizma olduğu göz önüne alınırsa $Ub = 0$ bulunur. Böylece 3.4.Lemmadan $b = 0$ elde edilir. O halde $aUb = 0$ olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ olduğu görülür.

3.10. Sonuç, 2.bölümde vermiş olduğumuz 2.11.Lemmanın bir genellemesidir.

4. BÖLÜM: SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle J. Bergen ve arkadaşlarının 1981 yılında yaptığı çalışmada kanıtladığı lemma ve teoremler incelenmiştir. Bu lemma ve teoremlerden bazılarına örnekler verilmiştir.

U karekteristiği 2 den farklı R asal halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideali olmak üzere, R halkasının halkası $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ koşullarını sağlayan bir M idealini kapsadığı J.Bergen ve arkadaşları tarafından ispatlandı. Bu lemmayla ilgili aşağıdaki örnek verilmiştir.

$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ asal halkası ve R halkasının

$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$ Lie ideali alınırsa R halkasının

$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3r \end{bmatrix} \mid 3x,3y,3z,3r \in \mathbb{Z} \right\}$ ideali $[M,R] \subset U$ ve $[M,R] \not\subset Z$ koşullarını sağlar.

Ayrıca J.Bergen ve arkadaşlarının ispatladığı yukarıda verilen lemma N.Aydın tarafından yarı – asal halkalar için genelleştirilmiştir. Aşağıda bunun uygulaması yer almaktadır.

$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \right\}$ yarı asal halkasının $U \not\subset Z$ olacak şekilde

$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ z & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x,y,z,t \in \mathbb{Z} \right\}$ Lie ideali için R halkasının bir

$M = \left\{ \begin{bmatrix} 2u & 2v & 0 \\ 2w & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid 2u,2v,2w,2t \in \mathbb{Z} \right\}$ ideali $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z$ koşullarını sağlar.

Diğer taraftan J. Bergen ve arkadaşlarının kanıtladığı bazı teoeremlerin bir genelleştirilmesinin yer aldığı N. Aydın ve H.Kandamar tarafından yapılan çalışmada kanıtlanan lemma ve teoremler gözden geçirilmiştir.

σ ve τ, *R* halkasının otomorfizmaları ve *U*, karakteristiği 2 den farklı *R* asal halkasının merkezi ve (σ,τ) merkezi tarafından kapsanmayan bir (σ,τ)-Lie ideali olmak üzere *R* halkasının $[R, M] \subset U$ fakat $[R, M] \not\subset C_{\sigma,\tau}$ koşullarını sağlayan en az bir *M* ideali kapsadığı N.Aydın ve arkadaşı tarafından ispatlandı.

Aşağıda verilen örnek σ ve τ dönüşümlerinin örten olmayan homomorfizmalar olduğunda veya *R* halkasının asal olmadığı durumlarda yukarıda verilen lemmanın ispatının araştırılması gerektiğini ortaya koymaktadır.

3.9.Teoremde verilen koşullardan *R* halkasının asal olmadığı σ ve τ homomorfizmaları örten olmasa bile teoremi sağlayan örnek verilmiştir.

$R = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid p,q,r \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası $\sigma : R \to R$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ ve

$\tau : R \to R$, $\tau\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ ile tanımlanan endomorfizmalarını göz önüne alalım.

R halkasının *Z* ve $C_{\sigma,\tau}$ tarafından kapsanmayan $U = \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid p,r \in \mathbb{Z} \right\}$ (σ,τ)-Lie ideali için $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ koşulları sağlayan sıfırdan farklı M = $\left\{ \begin{bmatrix} 3p & q \\ 0 & 3r \end{bmatrix} \mid p,q,r \in \mathbb{Z} \right\}$ ideali vardır.

Bu örneklerle verilen teorem ve lemmaların hangi koşullarının zayıflatılıp hangi koşullarının değiştirilemiyeceği hakkında araştırmalar yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Aydın, N. and Kandamar, H., 1994. (σ, τ)-Lie Ideals in Prime Rings., **Tr. J. Of Mathematics, 18(2):** 143-148.

Aydın, N. and Soytürk, M., 1995. (σ, τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivation., **Tr. J. Of Mathematics, 19(2):** 239-244.

Bergen, J., Herstein, I. N. & Kerr, J. W., 1981, Lie Ideals and Derivations of Prime Rings, **Journal of Algebra., 71:** 259-267.

Bresar, M., 1993. Centralizing Mappings and Derivations in Prime Ring, **J. Of Algebra., 156:** 385-394.

Herstein, I. N., 1955. On the Lie and Jordan Rings of a Simple, Associative Ring., **Amer. J. Math., 77:** 279 – 285.

Herstein, I. N., 1955. The Lie Ring of a Simple Associative Ring., **Duke Math. J., 22:** 471 – 476.

Herstein, I. N., 1969. Topics in Ring Theory. Univ. of Chicago Pres, Chicago, USA.

Herstein, I. N., 1970. On the Lie structure of an associative ring. **Journal of Algebra., 14**: 561-571.

Herstein, I. N., 1976. Rings with Involutions. Univ. Of Chicago Pres, Chicago, USA.

Herstein, I. N., 1978. A note on derivations. **Canad. Math. Bull., 21**: 369-370.

Herstein, I. N., 1979. A note on derivations II. **Canad. Math. Bull., 22**: 509-511.

Hungerford, Thomas, W., 1974. Algebra, Graduate Text in Mathematics Series, 73., Springer-Verlag New York Inc., USA.

Kaya, K., 1988. On (σ, τ)-Derivations of Prime Rings. **Doğa TU Mat. D., 12:** 2.

Kaya, K., 1991. (σ, τ)-Right Lie Ideals in Prime Rings. **Proc. 4, National Mathematics Symposium**, Antakya.

Martindale III., W. S., 1969. Prime Rings Satisfying a Generalized Polynomial Identity, **J. Algebra, 12:** 576-584.

Posner, E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. **Proc. Amer. Math. Soc., 8:** 1093-1100.

Posner, E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. Univ. of Chicago and Bell Telephone Laboratories, New York.

Aydın, N., 1999. Note On Generalized Lie İdeals. Analele Univ. Of Timişoara. Vol 37,7-12

Lee, P.H., Lee, T.K.,1981. On Derivations of Prime Rings. Chinese Journel of Mathematics. Vol 9,number 2.

Lee, P.H., Lee, T.K.,1982. Lie İdeals of Prime Rings with Derivations. Department of Mathematics, National Taiwan University, Taipki, Taiwan.

Awtar, Ram. 1984. Lie Structure in Prime Rings with Derivations. Publ,Math,Debrecen 31 (1984), 209 - 215

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Nihal Baba GÜNEL
Doğum Yeri ve Tarihi	: Aydın, 19.03.1978

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	: On Dokuz Mayıs Üni., Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	: Adnan Menderes Üni. Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
- -SCI
- -Diğer

b) Bildiriler
- -Uluslararası
- -Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	: Aydın Yorum Dershanesi, Aydın, 2001 – 2004.
	Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın, 2004 –

İLETİŞİM

E-posta Adresi	: nbaba@adu.edu.tr
Tarih	: 17.07.2008