



T.C  
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
MAT-YL-2009-0001

**PARABOLİK VOLTERRA  
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
NÜMERİK ÇÖZÜMLEMELERİ**

**Öznur ÖZTUNÇ**

**DANIŞMAN**  
Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ

**AYDIN-2009**

**T.C**  
**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**MAT-YL-2009-0001**

**PARABOLİK VOLTERRA**  
**İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN**  
**NÜMERİK ÇÖZÜMLEMELERİ**

**Öznur ÖZTUNÇ**

**DANIŞMAN**  
**Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ**

**AYDIN-2009**

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	i
İNTİHAL BEYAN SAYFASI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Genel tanım.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ/KURAMSAL TEMELLER.....	2
2.1 Fizik.....	2
2.2 Tıp.....	3
2.3 Yayılma.....	4
2.4 Halo Olayı.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3.1 Materyal.....	6
3.2 Yöntem.....	6
3.2.1 İntegro-Diferansiyel denklemler.....	6
3.2.2. İntegro-Diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri.....	9
3.2.3 Laplace Dönüşümü ile Çözümün Bulunması.....	9
3.2.4. Theta metodu.....	11
3.2.5. Açık metot.....	12
3.2.6. Kapalı metot.....	13
3.2.7. Yamuklar metodu.....	13
3.2.8. RK2 metodu.....	14
4. PARABOLİK TİPTEKİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	16
4.1 Giriş.....	16
4.2 Parabolik Volterra integro diferansiyel denklem.....	17
4.2.1. Dikdörtgenler metodu.....	18
4.2.2. Nümerik çözümler.....	21
4.3 Geri-Euler metodu.....	23
4.4 Crank-Nicolson metodu.....	28
4.4.1 Crank-Nicolson metodu analizi.....	29
4.5 Uygulama.....	34
5.BULGULAR ve TARTIŞMA.....	37
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	39



## **İntihal (Aşırma) Beyan Sayfası**

**Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.**

Adı Soyadı : Öznur Öztunç

İmza :

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### PARABOLİK VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Öznur Öztunç

Adnan Menderes Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ

İntegro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri konusundaki çalışmaların birleşimi olan bu çalışmada,

I. Bölümde, integro-diferansiyel denklemlerin genel tanımı verilmiş ve bu denklemlerin uygulama alanlarına değinilmiştir. Farklı alanlardaki örnekler incelenmiştir.

II. Bölümde, integro-diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliği üzerinde incelenmiştir. Bu tipteki denklemlerin analitik çözümleri için metotlara değinilmiştir.

III. Bölümde, Parabolik volterra integro diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Volterra integro-diferansiyel denklem ikinci mertebeden yakınsatılmıştır.

**2009, 40 sayfa**

#### **Anahtar Sözcükler**

İntegro-Diferansiyel Denklemler, Açık metot, Kapalı metot, Crank-Nicolson metodu,

$\theta$ -metodu, Yamuklar metodu, Dikdörtgenler metodu, Geri-Euler metodu

**ABSTRACT**

MSc Thesis

**NUMERICAL SOLUTIONS OF PARABOLIC VOLTERRA INTEGRO-DIFERANTIAL EQUATIONS**

Öznur Öztunç

Adnan Menderes University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ

In this study, which is a collection of works with regard to the numerical solutions of integro-differential equations.

Section one refers to the general definition of integro-differential equations and the application areas of these equations, and the patterns in the various fields are examined.

Section two focuses on the existence and unique of integro-differential equations and the methods, essential to the analytical solutions of this kind of equations, are mentioned.

Eventually, section three stresses on the numerical solutions of integro-differential equations.

**2009, 40 sayfa**

**Key Words:** İntegro-Diferantial equations, Explicit method, Implicit method, Crank-Nicolson method, Theta method, Trapeziodal method, Rectangle method, Bacward-Euler method.

## ÖNSÖZ

İntegro-diferansiyel denklemler alanındaki çalışmalar yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmaların uygulama alanları tıp, fizik, radyoaktiflik, biyoloji, üreme fen ve mühendislik gibi dalları içerir. İntegral denklemlerle ilk uğraşlar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir. Abel 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak İntegral Denklem deyimini Du Bois Reymond'un (1888)'de yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır (Bocher M. , 1913).

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler, ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların birleşiminden oluşan integro-diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler. Bu tip diferansiyel denklem sistemleri, özellikle parçalı olanlar, birçok fizik ve mühendislik dalında ortaya çıkmaktadır.

Bu tezin çeşitli aşamalarında yardım ve desteğinden dolayı danışman hocam Yrd. Doç. Ali Filiz'e teşekkürü bir borç bilirim. Öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü imkanı sağlayan aileme sonsuz teşekkürler ediyorum.



# 1. İNTEGRAL DENKLEMLER

## 1.1 İNTEGRAL DENKLEMLERİN TARİHÇESİ

### 1.1.1 Giriş

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır. Bir başka deyişle, bu tanımdan hareket ederek, integral denklemlerin bütün türlerini içine alan teoriyi kurmak olanaksızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı nitelikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekmektedir. Böylece geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı göstermektedir.

Fizik ve mühendislik uygulamalarda zaman zaman bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemlerle karşılaşılır. Bu tür denklemlere integral denklemler denir.

İntegral denklemler bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir.

Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

Bu tez çalışmasında, Bölüm I'de integro-diferansiyel denklemlerin genel tanımı, literatürde genelde nerelerde uygulanmış olduğu üzerinde durulacaktır. Bölüm II'de varlık teklisi, integro-diferansiyel denklemler, analitik çözümleri ve bu çözüm

metotları incelenecektir. Bölüm III'de Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri MATLAB kullanılarak hesaplanacaktır.

En genel haldeki integro-diferansiyel denklem örneğin,

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = f(t) + \int_0^t K(t, \xi)u(\xi) d\xi, \quad t > 0,$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0$$

veya

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t) + \int_0^t K(t, \xi, u(\xi)) d\xi, \quad t > 0,$$

$$u(0) = u_0$$

şeklindedir.  $K(t, s, u(\xi))$  ve  $K(t, s)$  fonksiyonları integro-diferansiyel denklemin çekirdeği,  $u_0$  ve  $u'_0$  başlangıç değeri olarak verilir. Bu denklemin Laplace dönüşümleri ile çözülebilmesi için denklemin çekirdeğinin konvalisyon tipte olması gerekir.

## 2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ/ KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde integro-diferansiyel denklemlerin kullanıldığı alanlar üzerinde durulacaktır. Literatürde farklı alanlarda nasıl çalışmalar yapıldığı hakkında örnekler açıklanacaktır.

### 2.1 Fizik

Matematik bilimi kısaca Fiziğin dilidir. Temel doğa bilimi olan Fizik, evrenin sınırlarını, madde yapısını ve bunların arasındaki etkileşimlerini açıklamaya çalışırken Fiziğin başlıca iki metodu vardır; bunlar gözlem ve deneydir. Doğa olaylarının çeşitli duyu organlarını etkilemeleri sonucu fizikte çeşitli kolların gelişmesi sağlanmıştır. Bu sebeple görme duyusunu uyandıran ışıkla beraber fiziğin bir kolu olan optik

gelişmiştir. Aynı şekilde işitme ile akustik, sıcak soğuk duygusu ile termodinamik v.s. fizik konuları ortaya çıkmıştır. Bunların yanı sıra elektromanyetik gibi doğrudan duyu organlarını etkilemeyen kollarınca gelişmiştir. Fiziğin 19. yüzyılın sonuna kadar geçirdiği aşamalarda her ne kadar mekanik temel ise de, birbirinden bağımsız olarak incelenen fizik konuları klasik fizik altında toplanabilir. 20. yüzyılın başından itibaren klasik fizik kurallarından daha değişik, ancak çok daha mantıklı ve mükemmel sonuçlar elde edilmiştir. Bu tür modellerle olayı açıklayan fizik kolları ise, modern fizik adı altında toplanmıştır. Fizik eğitimi bugünde gerçeğe çok yakın sonuçlar veren klasik fizikle başlamaktadır. Fizik değişimin incelenmesi demektir. Fiziğin çoğu alanı, durağan (statik) olanla değil, devinenle (dinamik olanla) ilgilenir. Fiziğin amacı evrendeki "gözlenebilir" niceliklerin (enerji, momentum, spin vs.) "nasıl" değiştiğini anlamaktır. Fiziğin evinimi anlatmak için, temel fizik kuramlarının formülleştirilmesinde kullandığı temel araçlar diferansiyel denklemler ve integro-diferansiyel denklemler olarak sıralanabilir. Hatta çoğu temel fizik kuramı sadece diferansiyel denklemler kullanarak formüle edilmiştir. (örn. Newton yasaları, Maxwell denklemleri, Einstein denklemleri). Kuantum Fiziği ya da Schrödinger denklemi, Dirac Fizik araştırmaları genellikle Kuramsal fizik ve Deneysel fizik olarak ikiye ayrılır. Bu iki alandaki araştırmalar ise, temel ya da uygulamalı araştırmalar şeklinde ayrılır.

## 2.2 Tıp

Ciltteki ilaç emilimi konusunda birçok modellemeler öne sürülmektedir. İntegro-diferansiyel denklem sistemleri üzerinde yapılan incelemelerde Barbeiro ve Ferreira (2007)'nin ilaç emilimi konusundaki çalışmalarıdır. Bu modellemelerde integro-diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Bu yeni modellemeler bize zaman içinde ve her bir zaman için uzayda ilaç yoğunlaşması tanımlamak için tahsis edilir.

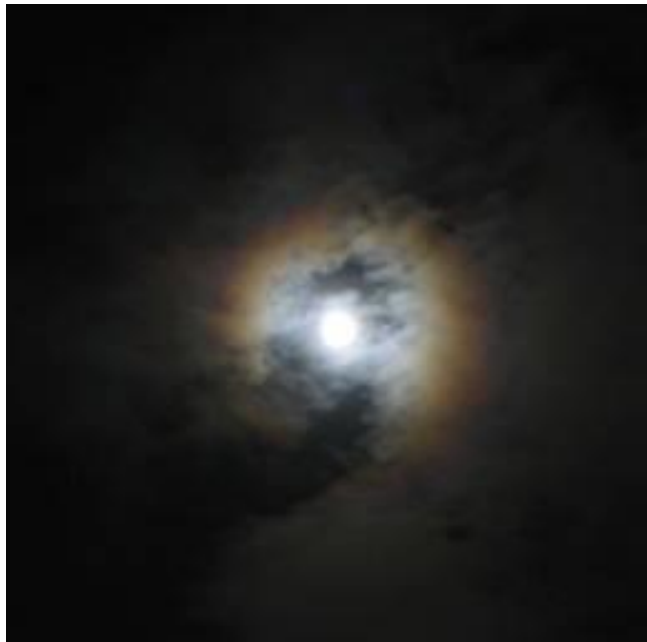
### 2.3 Yayılma

Kısa süreli (geçici, süreksiz), iletken ve ısı yayma iletişimde (taşımada) ortaya çıkan lineer olmayan parçalı integro-diferansiyel denklemler tiplerini çözümü için kullanılmaktadır. Radyasyon problemleri, ısı transferinin integro-diferansiyel denklem ile yönlendirilir. Bu problemlerin mühendislik uygulamalarında çok geniş çalışma alanı vardır. Örneğin, yayılım niteliklerinin kararlılığı, parçacıkların içindeki iç sıcaklıkların dağılımının tahmini, vb.. Son yirmi yıllık süre içinde, ters radyasyon problemleri, tanı ve tespit problemlerinden optimal dizayn problemlerine, geniş kapsamlı pratik uygulamaları sebebiyle, çok fazla ilgi çekmektedir.

### 2.4 Halo Olayı

Kimi zaman gökyüzünde, parlak Ay'ın çevresinde, çember biçiminde bir oluşum görülür. Bu olaya Halo adı verilir. Bu oluşum, hemen hemen tüm gökyüzünü kaplayan ve çok küçük (çapları 20.5 mikrometre kadar) buz kristalleri içeren oldukça yüksekte bulunan ince bulutlar olduğunda görülür.

Farklı integro-radiative transfer denklem çözümlerinin farklı metotlarını kullanan, halo parlaklığının ve renk uyumunun sayısal hesapları, 22 ve 46 derecede "Halo" sergileyen kristal bulutları için uygulanmıştır. Halo parlaklığının ve kontrastının bulutlarının görsel sıklığına olan bağımlılığını A. Kokhanovsky (2007) tarafından incelenmiştir. A. Kokhanovsky Halo kontrast ölçümlerinden bulut görsel sıklığını saptamak amacıyla basit bir teknik öne sürülüyor.



Bu bölümde integro-diferansiyel denklemlerin kullanım alanlarına örnekler verildi. Bu tip sistemlerin uygulama alanları tarandığında integro-diferansiyel denklem sistemleri Elektromanyetik teori (Bloom, F., 1980), Termoelastikiyet (Kopeikin, I.D. & Shiskin, V.P., 1984), Biyoloji (Holmaker, K., 1993), Mekanik (Yue, Z.Q. & Selvadurai, A.P.S., 1995, Abadzadeh, F. & Pak, R.Y.S., 1995), Dalgaların kırınımı (Büyükaksoy, A. & Alkumru, A., 1995) gibi alanlarda da ortaya çıkmaktadır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1 Materyal

Bu bölümün temel materyalini MATLAB programı oluşturmaktadır. Öncelikle, İntegro-diferansiyel denklemlerin birinci mertebeden yakınsadığını bu program kullanılarak görülmüştür. Bu denklemlerin analitik çözümleri için, MATHEMATICA programından faydalanılmıştır.

#### 3.2 Yöntem

Yöntem olarak ise; Volterra integro-diferansiyel denklemlerin ikinci mertebeden yakınsadığını görebilmek için öncelikle analitik çözümlere ardından nümerik çözümlere yer verilmiştir.

##### 3.2.1. İntegro-Diferansiyel denklemler

Bir integro-diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\frac{du}{dt} = F(t, u(t), \int_0^t K(t, \tau, u(\tau))d\tau), t \geq 0, \quad (3.2.1)$$

$$u(t_0) = u_0.$$

Bu bölümde integro-diferansiyel denklemin nümerik çözümünü farklı metotlar ile çözülecektir. Öncelikle (4.1.1) tipindeki sistemlerin analitik ve nümerik çözümlerinin incelenmesinden önce bu tip denklemlerin varlığı ve tekliği üzerinde durulacaktır.

##### 3.2.1.1. Varlık ve Teklik

(3.2.1) şeklindeki başlangıç değer problemlerinin varlık ve tekliği  $F$  fonksiyonun sürekliliğine ve Lipschitz şartlarının sağlanmasına bağlı olarak değişir.

$D \subset \mathbb{R}^2$  üzerinde  $L > 0$  değişkeni için  $f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) < L|y_1 - y_2|$  şartını sağlıyorsa,  $f(x, y)$  fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar. Burada  $(x_1, y_1) \in D$ ,  $L$   $f(x, y)$  için Lipschitz sabiti denir.

### 3.2.1. Örnek

$D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$  bölgesi,  $f(x, y) = x|y|$  olmak üzere ve her bir

$(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in D$  çifti için,

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| &= |x|y_1| - x|y_2|| \\ &= |x(|y_1| - |y_2|)| \\ &\leq |x||y_1 - y_2| \\ &\leq 2|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Buradan hareketle Lipschitz sabitinin 2 olduğu görülür.

### 3.2.2. Teorem

$f(x, y)$  fonksiyonu  $D \subset \mathbb{R}^2$  kümesi üzerinde konveks olsun.  $L > 0$  için,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L \quad \forall (x, y) \in D \text{ varsa, } L \text{ Lipschitz sabiti ile } D \text{ üzerindeki, } y \text{ için}$$

$f(x, y)$  Lipschitz sağlar.

### 3.2.3. Teorem

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$  ve  $f(x, y)$  fonksiyonu  $D$  üzerinde sürekli olsun.  $f$

fonksiyonu  $y$  değişkenine göre  $D$  üzerinde Lipschitz şartını sağlıyorsa, başlangıç

değerli problem  $y' = f(x, y)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $y(a) = \alpha$  için,  $y(x)$  tek çözüme sahiptir.

### 3.2.4. Örnek

$y' = 1 + x \sin(xy)$  ,  $0 \leq x \leq 2$  ,  $y(0)=0$  başlangıç değer problemini göz önüne alalım.  $x$ 'i sabit alalım.  $f(x,y)=1 + x \sin(xy)$  fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygularsak,

$y_1 < y_2$  için  $\varepsilon \in (y_1, y_2)$  olursa,

$$\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f(x, \varepsilon)}{\partial y} = x^2 \cos(x\varepsilon) \text{ ve } f, L=4 \text{ Lipschitz sabiti için } y$$

değişkenine göre, Lipschitz şartını sağlar.

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| &= |y_1 - y_2| |x^2 \cos(x\varepsilon)| \\ &\leq 4 |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Ek olarak  $f(x, y)$  ,  $0 \leq x \leq 2$  ve  $y \in (-\infty, +\infty)$  iken (3.2.3) teoremi sağlar. Burada  $y' = 1 + x \sin(xy)$  tek bir çözüme sahiptir.

### 3.2.5. Tanım

$y'(x) = f(x, y)$  başlangıç değer problemi  $a \leq x \leq b$  ,  $y(a) = \alpha$  için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, iyi tanımlıdır.

i) Problemin  $y(x)$  tek çözümü mevcuttur.

ii)  $\forall \varepsilon > 0$  ,  $\exists k > 0$  ,  $k(\varepsilon) \delta(x), [a, b]$  için  $|\varepsilon_0| < \varepsilon$  ve  $\delta(x), [a, b]$  üzerinde  $|\delta(x)| < \varepsilon$  için sürekli ve problemin  $\eta(t)$  çözümü için ,

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = f(x, \eta) + \delta(x) , a \leq x \leq b \quad \eta(a) = \alpha + \xi_0 \text{ için } , |\eta(x) - y(x)| < k(\varepsilon) \varepsilon ,$$

$\forall a \leq x \leq b$  mevcuttur.

### 3.2.6. Teorem

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$  olsun.  $f$  sürekli ve  $y$  değişkenine göre  $D$  üzerinde

Lipschitz şartını sağlıyorsa,  $\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$  ,  $a \leq x \leq b$  ,  $y(a) = \alpha$  başlangıç değer

şartı iyi tanımlıdır.



### 3.2.7. Örnek

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial (y - x^2 + 1)}{\partial y} \right| = |1| = 1 \quad y' = y - x^2 + 1,$$

$0 \leq x \leq 2$ ,  $y(0) = 1/2$  başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial (y - x^2 + 1)}{\partial y} \right| = |1| = 1 \quad f(x, y) = y - x^2 + 1 \quad D \text{ üzerinde Lipschitz şartını}$$

sağlayan  $L=1$ 'dir.

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta - x^2 + 1 + \delta, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad \eta(0) = \frac{1}{2} + \xi_0 \quad \text{burada } \delta \text{ ve } \xi_0 \text{ sabitler olmak üzere}$$

denklemin çözümü,  $y(x) = (x+1)^2 - \frac{e^x}{2}$  şeklindedir.

$$\eta(x) = (x+1)^2 + \left( \delta + \xi_0 - \frac{1}{2} \right) e^x - \delta$$

$$|\delta| < \varepsilon \text{ ve } |\varepsilon_0| < \varepsilon \text{ ise ;}$$

$$\begin{aligned} |y(x) - \eta(x)| &= |(\delta + \varepsilon_0)e^x - \delta| \quad \forall x \text{ için sağlanır.} \\ &\leq |\delta + \varepsilon_0|e^2 + |\delta| \\ &\leq (2e^2 + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

### 3.2.2. İntegro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri

Bu bölümde öncelikle Laplace dönüşümü ile çözümün nasıl yapıldığı verilir, ardından analitik çözümlere geçilecektir. Bunlardan birincisi Theta metodu olarak tanımlanacak. Theta metodunda  $\theta$ 'ya farklı değerler verilerek üç farklı yöntem elde edilip, bu yöntemden çıkan nümerik hataların tabloları verilecektir.

### 3.2.3. Laplace Dönüşümü ile Çözümün Bulunması

$f(t)$  fonksiyonu  $t \geq 0$  için tanımlanmış fonksiyon olsun. Eğer bir  $s$  sayısı verildiğinde,

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-st} dt.$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise,  $F(s)$  fonksiyonuna  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

$$L\{f\} = F(s).$$

### 3.2.8 Örnek

$f(t) = 1$  fonksiyonun Laplace dönüşümü,

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-1}{s} (e^{-sR} - e^0) = \frac{-1}{s} \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{-sR} - 1) = \frac{1}{s}$$

Buradan hareketle  $L\{1\} = \frac{1}{s}$  olduğu görülür.

$$3.2.9. \text{ Örnek } y' = 1 - \int_0^t y(s) ds \quad (3.2.1)$$

integro-diferansiyel denklemi  $y(0) = 0$  başlangıç şartı ile verilsin. Öncelikle bu denklemin gerçek çözümünü elde edelim. (4.2.3) denklemin her iki tarafının Laplace'ını alırsak,

$$s \mathcal{L}\{y\} - y(0) = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(s) ds\right\} \quad (\text{konvolüsyon tipinde } \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(s)g(s) ds\right\} = F \cdot G \text{ başlangıç}$$

şartı ve  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$  olduğu kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıлып,

$$\mathcal{L}\{y\} \left(s + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (3.2.2)$$

elde edilir.

(3.2.2) denklemin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alındığında,  $y(t) = \sin(t)$  gerçek çözümü elde edilir. Gerçek çözüm farklı bir yolla da elde edilebilir.

(3.2.1) denklemin her iki tarafının türevi alındığında,  $y'' = 0 + \left(\int_0^t y(s) ds\right)'$  işleme

devam edildiğinde,

$$y'' = -y(t)$$

$$y'' + y = 0 \quad r = \pm i$$

sonucuna varılır.

$$y = c_1 e^{-it} + c_2 e^{it} \quad (e^{it} = \cos t + i \sin t \text{ ve } e^{-it} = \cos t - i \sin t) \text{ ise,}$$

$$y = (c_1 + c_2) \cos t + (-c_1 i + c_2 i) \sin t,$$

$$(c_1 + c_2) = A, \quad (-c_1 i + c_2 i) = B \text{ denilirse,}$$

$$y = A \cos t + B \sin t \quad (3.2.3)$$

(3.2.3) denklemin her iki tarafının türevi alındığında,

$$y' = -A \sin t + B \cos t, \quad y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad y'(0) = 1 \quad \text{başlangıç şartları uygulanıp}$$

$$0 = A \cos 0 + B \sin 0 \quad \text{kullanıldığında, } y(t) = \sin(t) \text{ tekrardan elde edilir.}$$

### 3.2.4. Theta metodu

$u'(t) = f(t, u(t)), u(t_0) = u_0$  başlangıç değer problemini  $\theta$ -metodu ile nümerik olarak,

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h \left[ (1-\theta) \tilde{u}_n' + \theta \tilde{u}_{n+1}' \right] \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\tilde{u}_0 = u(t_0)$$

ile çözülür.

Burada,  $\theta=0$  alınırsa, İleri-Euler yöntemi elde edilir.  $\theta=1$  ile Geri-Euler yöntemi elde edilir.  $\theta=1/2$  olduğunda ise, Yamuklar yöntemi elde edilir.  $\theta$ -metodunu (3.2.1) denklemine dayandırdığımızda,

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h \left[ F(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n) (1-\theta) + \theta F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}) \right] \text{ elde edilir}$$

Burada,  $z_n = h \sum_{j=0}^n w_{nj} K(t_n, t_j, u(t_j))$  olur. (3.2.1) integro-diferansiyel denklemini ele

alalım. En genel haldeki Theta metodu;

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ (1-\theta) \left( 1 - \int_0^{t_n} y(s) ds \right) + \theta \left( 1 - \int_0^{t_{n+1}} y(s) ds \right) \right] \text{ yazıldığında,}$$

$$\int_a^b f(t) dt = h \left[ \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right] = h \sum_{j=0}^n w_j f(t_j) \text{ olduğu kullanılarak,}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ (1-\theta) \left( 1 - h \sum_{j=0}^n w_j f_j \right) + \theta \left( 1 - h \sum_{j=0}^{n+1} w_j f_j \right) \right]$$

$$+ \theta(1-h \sum_{j=0}^n w_j y_j + h \sum_{j=n}^{n+1} w_j y_j) \text{ eşitliği elde edilir.}$$

$h \sum_{j=0}^n w_j f_j = I(n)$  olmasından faydalanarak,

$$y_{n+1} \left(1 + \theta \frac{h^2}{2}\right) = y_n + h[(1-\theta)(1-I(n)) + \theta(1-I(n) - \frac{h}{2} y_n)] \text{ elde edilir. Buradan } y_{n+1}$$

yalnız bırakıldığında,

$$y_{n+1} = \frac{y_n + h \left[ (1-\theta)(1-I(n)) + \theta(1-I(n) - \frac{h}{2} y_n) \right]}{\left(1 + \theta \frac{h^2}{2}\right)} \quad (3.2.4)$$

şeklindedir.

Eşitliğin en son hali, yukarıda belirtildiği gibi **Theta metodu** dur.

### 3.2.5. Açık Metot

Theta metodunda (4.2.4) denkleminde  $\theta = 0$  verilerek, aşağıdaki forma dönüştürülür.

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-I(n))] \quad (3.2.5)$$

Benzer şekilde  $\theta = 0$  alındığında metodun birinci mertebeden yakınsadığı görülür.

Nümerik hata tablosu oluşturulduğunda,

**Örnek (3.2.9)'un  $\theta = 0$  için hata tablosu** ,

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.1	1.67e-004	1.04e-004	5.72e-005
0.2	8.31e-004	4.56e-004	2.38e-004
0.3	1.98e-003	1.05e-003	5.40e-004
0.4	3.60e-003	1.88e-003	9.56e-004
0.5	5.66e-003	2.92e-003	1.48e-003
0.6	8.12e-003	4.15e-003	2.10e-003
0.7	1.09e-002	5.55e-003	2.80e-003
0.8	1.40e-002	7.10e-003	3.57e-003
0.9	1.74e-002	8.76e-003	4.39e-003
1.0	2.09e-002	1.05e-002	5.25e-003

### 3.2.6. Kapalı Metot

Son olarak (3.2.4) denkleminde  $\theta=1$  alınarak, kapalı metot elde edilir ki, bu denklem

$$y_{n+1} = \frac{y_n + h(1 - I(n)) - \frac{h}{2} y_n}{\left(1 + \frac{h^2}{2}\right)} \quad (3.2.6)$$

şeklindedir. Bu metotta açık metot gibi birinci mertebeden yakınsar. Nümerik hata tablosu aşağıdaki gibi verilebilir.

**Örnek (3.2.9)'un  $\theta=1$  için hata tablosu ,**

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.1	3.31e-004	1.45e-004	6.75e-005
0.2	1.15e-003	5.36e-004	2.58e-004
0.3	2.44e-003	1.16e-003	5.68e-004
0.4	4.16e-003	2.02e-003	9.91e-004
0.5	6.29e-003	3.07e-003	1.52e-003
0.6	8.77e-003	4.31e-003	2.14e-003
0.7	1.16e-002	5.71e-003	2.84e-003
0.8	1.46e-002	7.24e-003	3.60e-003
0.9	1.78e-002	8.86e-003	4.42e-003
1.0	2.11e-002	1.05e-002	5.26e-003

### 3.2.7. Yamuklar metodu

(3.2.4) denkleminde  $\theta=0.5$  verildiğinde theta metodu aşağıdaki gibi olur ki,

$$y_{n+1} = \frac{y_n + \frac{h}{2} \left[ (1 - I(n)) + \left(1 - I(n) - \frac{h}{2} y_n\right) \right]}{\left(1 + \frac{h^2}{4}\right)} \quad (3.2.7)$$

(3.2.5) yamuklar metodudur.  $\theta$  yukarıdaki gibi alındığında, yöntem ikinci mertebeden yakınsama sağlar. Nümerik hata tablosu da aşağıdaki gibidir.

**Örnek (3.2.9)' un  $\theta=0.5$  için hata tablosu,**

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.1	8.28e-005	2.07e-005	5.18e-006
0.2	1.63e-004	4.08e-005	1.02e-005
0.3	2.38e-004	5.97e-005	1.49e-005
0.4	3.07e-004	7.67e-005	1.92e-005
0.5	3.65e-004	9.14e-005	2.29e-005
0.6	4.12e-004	1.03e-004	2.58e-005
0.7	4.46e-004	1.12e-004	2.79e-005
0.8	4.64e-004	1.16e-004	2.90e-005
0.9	4.66e-004	1.17e-004	2.91e-005
1.0	4.50e-004	1.13e-004	2.81e-005

Bir integro-diferansiyel denklemi Runge-Kutta yöntemi ile ikinci mertebeden yakınsatabilmek için, aşağıdaki işlemler düzenlenebilir. Bunun için diferansiyel kısmı için ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi uygulayalım. Bununla birlikte, integral kısmı için dikdörtgenler yöntemi kullanırsak, birinci mertebeden yakınsar. Bunun nedeni, dikdörtgenler yönteminin birinci mertebeden yakınsamasıdır. Eğer, integral kısmını yamuklar metoduyla yakınsatırsak, integro-diferansiyel denklem ikinci mertebeden yakınsar.

**3.2.8. İkinci mertebeden Runge-Kutta metodu (RK2 )**

$$\text{Örnek 3.2.3. } y' = -\int_0^t y(s)ds \quad t \geq 0, \quad y(1) = 0 \quad (3.2.8)$$

(3.2.8) integro-diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Gerçek çözüm,  $y = \cos t$  olur.

Bu İntegro-diferansiyel denklemi, ikinci mertebeden Runge-Kutta metodu (RK2) ile çözebiliriz. Adi diferansiyel denklemlerde RK2 metodu aşağıdaki gibi verilir.

$$k_1 = h f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(t_n + h, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[k_1 + k_2].$$

Şimdi Runge-Kutta metodunu integro-diferansiyel denklemlere uygulayalım.

$$k_1 = h f(t_n, y_n, \int_0^{t_n} y(s) ds)$$

$$k_1 = h f(t_n, y_n, h \sum_{j=0}^n w_{nj} y_j)$$

$$k_2 = h f(t_n + h, y_n + k_1, \int_0^{t_{n+1}} y(s) ds)$$

$$k_2 = h f(t_n + h, y_n + k_1, h \sum_{j=0}^{n+1} y_j)$$

$$k_1 = -h I(i)$$

Böylece,

$$k_2 = -h [I(i) + \frac{h}{2} (y(i) + y(i+1))]$$

olduğu görülür.

$$y(i+1) = y(i) + \frac{1}{2} [ -hI(i) - hI(i) - \frac{h^2}{2} (y(i) + y(i+1)) ]$$

Gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$y(i+1) \left[ 1 + \frac{h^2}{4} \right] = y(i) + \left[ -hI(i) - \frac{h^2}{4} y(i) \right] \text{ ve}$$

$$y(i+1) = \frac{\left( 1 - \frac{h^2}{4} \right) y(i) - hI(i)}{\left( 1 + \frac{h^2}{4} \right)}$$

elde edilir. (3.2.7)

Örnek (3.2.2) için  $h=0.1$  ,  $h=0.05$  ,  $h=0.025$  verilerek nümerik hata tablosu aşağıdaki gibidir.

**Örnek (3.2.9)' un RK2 hata tablosu,**

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.1	8.30e-006	2.08e-006	5.20e-007
0.2	3.30e-005	8.27e-006	2.07e-006
0.3	7.37e-005	1.85e-005	4.62e-006
0.4	1.30e-004	3.24e-005	8.11e-006
0.5	1.99e-004	4.99e-005	1.25e-005
0.6	2.82e-004	7.05e-005	1.76e-005
0.7	3.75e-004	9.39e-005	2.35e-005
0.8	4.77e-004	1.20e-004	2.99e-005
0.9	5.86e-004	1.47e-004	3.67e-005
1.0	7.00e-004	1.75e-004	4.38e-005

## 4. PARABOLİK TİPTEKİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde amaç öncelikle Volterra integro-diferansiyel denklemlerin genel tanımı verilecek. Bu tipteki integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlenmeleri üzerinde durulacaktır.

Parabolik tipteki integro-diferansiyel denklemlerin iki zaman aralığında yakınsaklık ve kararlılığı verilecek. Eğer integral terim yok ise bu metotlar, Crank-Nicolson ve Geri-Euler metotlarına indirgenir. Daha yüksek mertebeden kesme hataları veren dikdörtgenler metodu tarafından her bir durumda integral terimine yaklaşılar, böylece metodun daha kullanışlı olması amacıyla dikdörtgenler metodu için geniş zaman adımları kullanıldı.

### 4.1. Giriş

$$u_t + Au = \int_0^t K(t,s)Bu(s)ds + f(t), \quad t \geq 0 \quad (4.1.1)$$

A sınırlı olmayan pozitif  $H$  Hilbert uzayı içinde  $D(A)$  üzerindeki bitişik operatördür.  $B, D(B) \supset D(A)$  Hilbert uzayı üzerinde bir operatördür. Bu eşitlik  $u(0)=v$  başlangıç şartı verilsin.  $K(t,s), 0 \leq s \leq t$  arasında her ikisinde değişebilen gerçek değerli düzgün sürekli bir fonksiyondur.  $u(x,t) \Omega \times R^+$  üzerinde tanımlanan tipik durumdur.

Eliptik form,

$$Au = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (4.1.2)$$

biçiminde verilir.

Bu diğer diferansiyel operatör iki veya daha az mertebededir.  $H=L_2(\Omega)$ ,

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$



Bu çalışmada, Geri-Euler ve Crank-Nicolson metotlarını sırasıyla (4.1.1) denkleminde dayandırarak iki farklı zaman ayırımının yakınsaklık sonuçları ve kararlılığını elde edeceğiz.

Pratikte  $x$ -uzay ve  $t$ -zaman değişkenleri olduğundan  $A$  ve  $B$  operatörleri gerçek diferansiyel operatörler değildir. Bu operatörler  $h$  parametresine bazı noktalarda bağlı olduğu gösterilecektir. Eğer, elde ettiğimiz tüm hesaplamalar  $h$  içinde aynı ise, sonuçlarımız kullanışlı olacaktır.

Zaman aralığının bu niteliği bu çalışmada incelenen integral teriminin ele alınış biçiminde yatıyor.  $k$  zaman adımı sıfıra yakınsadığında, Geri-Euler veya Crank-Nicolson geçerliken, gittikçe seyrek olan integral teriminin zaman aralıklarını kullanacağız. Özellikle Crank-Nicolson metodu için bazı farklı nitelikleri analizin içine kullanmak amacıyla integral teriminin bu ekonomik davranışı görülecektir.

## 4.2 PARABOLİK VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM

### 4.2.0. Tanım

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = Au(x,t) + \lambda \int_0^t K(t,s)Bu(x,s)ds + f(x,t) \quad D = B \times L \quad (4.2.1)$$

$D = \{(x,t) \mid 0 < x \leq \pi, 0 < t \leq T\}$   $u$  başlangıç ve sınır-değer şartlarına sahip ve

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi \quad u(x,0) &= f(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

olsun. Burada  $D$ 'nin kapanışı  $\bar{D}$  şeklindedir.  $A$ , ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel operatör ve  $B$ , ikinci mertebeden kısmi diferansiyel operatördür. Burada, her ikisi de sürekli fonksiyonlar olsun. (4.2.1) eşitliğine (4.2.2) başlangıç ve sınır değer şartlarını uygulanarak çözülecektir. Çekirdek  $K(s,t)$  sürekli,  $0 \leq s \leq t$  için her değer için gerçel değerli bir fonksiyon,  $f(x,t)$   $x$  ve  $t$ 'nin sürekli bir fonksiyonu olsun. Bu tipteki integro-diferansiyel denkleme parabolik tipteki integro-diferansiyel denklemler denir.

#### 4.2.1. Dikdörtgenler Metodu

Nümerik metotlar  $k$  zaman adımıyla dikdörtgenler metodunun bir bileşimi olacaktır.  $\bar{D}$ 'nin tanımını düşündüğümüzde, biz  $m$  ve  $n$ 'yi pozitif tamsayılar için tanımlansın.

$$h = \frac{\pi}{m} \quad k = \frac{T}{n}$$

$$\bar{D}_{i,j} = \{(ih, jk) \mid i = 0, 1, 2, \dots, m \ ; j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

$\bar{D}_{i,j}$  üzerinde tanımlanmış herhangi bir  $U$  fonksiyonu için,  $U_{i,j} = U(ih, jk)$  olsun. Biz (4.2.1) içindeki farklı ayrışımı ile zaman türevini yer değiştirilip, integral terime  $U_{i,j} = U(ih, jk)$  ve  $\alpha_{nj}$  dikdörtgen noktalarının olduğu  $u(x,s)$ 'ye yaklaştığı yerlerde dikdörtgenler metodu kullanıldığında,

$$\int_0^{nk} K(t, s) u(x, s) ds \approx k \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj} K(t_n, jk) U(ih, jk) \quad (4.2.3)$$

şeklindedir. Böyle bir metottaki en büyük sorunlardan biri eğer  $j \leq n$  için  $\alpha_{nj} \neq 0$  olmasıdır. Daha sonra  $U(ih, jk)$ 'nin tüm değerleri korumak zorundadır. Sloan ve Thomee (1986) birkaç nokta üzerine dayandığı verilerin saklanmaya ihtiyaç olduğu zaman seviye sayısı azaltılarak dikdörtgenler metodu öne sürüldü.

Dikdörtgenler metodunun en genel formu

$$\sigma^n(g) = k \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj} g(t_j) \approx \int_0^{t_n} g(s) ds, \quad t_j = jk \quad (4.2.2)$$

şeklindedir.

$$\frac{U_n - U_{n-1}}{k} = AU_n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj} K(t_n, t_j) U(ih, jk) \quad (4.2.3)$$

Geri-Euler metodunun doğruluk mertebesiyle oluşan en basit dikdörtgensel metot,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj} = nk = t_n = T$$

olsun diye  $0 \leq j \leq n-1$  için  $\alpha_{nj} = k$  seçilerek

$$\sigma^n(g) = k \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j), \quad t_j = jk \quad \text{metottur.}$$

#### 4.2.1. Örnek

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda \int_0^t \exp(-(t-\tau))u(x,\tau)d\tau \quad (4.2.4)$$

$0 \leq t$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  için,  $u(x,0) = \sin x$ ,  $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$  başlangıç şartlarıyla verilsin. Bu denklemin gerçek çözümünün (3.2.4) eşitliğinin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\} = L\left\{\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda \int_0^t \exp(-(t-\tau))u(x,\tau)d\tau\right\}$$

$$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right\} = \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} \text{ ve } L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\} = sL\{u(x,t)\} - u(x,0) = sU(x,s) - u(x,0)$$

olmasından faydalanarak,

$$L\{u(x,t)\} = U(x,s) = U \text{ olduğu yerlerde}$$

$$sU(x,s) - u(x,0) = \kappa \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} + \lambda \frac{U(x,s)}{s+1} \quad (4.2.5)$$

$$L\{\exp(at)\} = \left\{ \frac{1}{s-a} \text{ } s > a \text{ olduğunda (4.2.5) bulunur.} \right.$$

(4.2.5) denklemini yeniden düzenlenerek ve  $u(x,0) = \sin x$  başlangıç şartı kullanılarak biz

$$\kappa \frac{d^2 U}{dx^2} + U(x,s) \left( \frac{\lambda - s^2 - s}{s+1} \right) = -\sin x \quad (4.2.6)$$

veya  $\kappa$  tarafından her iki taraf bölünerek,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + U(x,s) \left( \frac{\lambda - s^2 - s}{\kappa(s+1)} \right) = -\frac{\sin x}{\kappa} \quad (4.2.7)$$

özel çözüm için,

$$V(x,s) = A \sin x + B \cos x \text{ her iki tarafın türevi alınarak,} \quad (4.2.8)$$

$$V''(x,s) = -A \sin x - B \cos x \text{ elde edilir.} \quad (4.2.9)$$

$U''(x,s)$  ve  $U(x,s)$  yerine (4.2.7) eşitliği içindeki  $V(x,s)$  ve  $V''(x,s)$  koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$-A \sin x - B \cos x + (A \sin x + B \cos x) \left( \frac{\lambda - s^2 - s}{K(s+1)} \right) = -\frac{\sin x}{K} \quad (4.2.10)$$

(4.2.10) eşitliğinden  $B=0$  olduğu görülür. (4.2.10) tekrar düzenlenip ve  $B=0$  konulduktan sonra biz

$$-\sin x \left( A - A \left( \frac{\lambda - s^2 - s}{K(s+1)} \right) \right) = -\frac{\sin x}{K} \text{ ve}$$

$$A = \frac{s+1}{s^2 + s(K+1) + K - \lambda} \quad (4.2.11)$$

olduğunu görürüz.

(4.2.11) ' in çözümü

$$\alpha, \beta \in C \quad (4.2.12)$$

$t$  ' yi içeren sınır şartlarının Laplace dönüşümü alınarak biz,

$$L\{u(0,t)\} = U(0,s) \quad L\{u(\pi,s)\} = U(\pi,s) \quad (4.2.13)$$

elde ederiz.

$$(4.2.12) \text{ içindeki (4.2.13) 'ün ilk şartı kullanılarak, } C_1 + C_2 = 0 \quad (4.2.14)$$

İkinci başlangıç şartı  $[U(\pi,s) = 0]$  kullanıldığında,

$$C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda - s^2 - s}{K(s+1)}}\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda - s^2 - s}{K(s+1)}}\right) = 0 \quad (4.2.15)$$

(4.2.14) ve (4.2.15)'den  $C_1 = C_2 = 0$  elde ederiz ve böylece (4.2.7) çözümü

$U(x,s) = V(x,s)$  halini alır.

Eğer (4.2.8) eşitliğini (4.2.11) denkleminde kullanırsak,

$$V(x,s) = \left( \frac{s+1}{s^2 + s(K+1) + K - \lambda} \right) \sin x$$

$$\alpha = \frac{K+1}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\sqrt{-K^2 + 2K - 1 - 4\lambda}}{2} \text{ koyalım.}$$

Eşitliği tekrar yazdığımızda

$$V(x, s) = \left( \frac{(s + \alpha) + (1 - \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right) \sin x$$

$\alpha, \beta \in C$  olduğu yerde

$$V(x, s) = \left( \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{(1 - \alpha)}{\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right) \sin x \quad (4.2.16)$$

(4.2.14) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$L^{-1} \{V(x, s)\} = L^{-1} \left\{ \left( \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{(1 - \alpha)}{\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right) \sin x \right\} \quad (4.2.17)$$

$a > 0$  olduğu zaman  $s + \alpha > 0$  için,

$$L^{-1} \left\{ \frac{(s + a)}{(s + a)^2 + a^2} \right\} = \exp(-at) \cos at \text{ ve } L^{-1} \left\{ \frac{a}{(s + a)^2 + a^2} \right\} = \exp(-at) \sin at \text{ olur.}$$

Bu nedenle biz,

$$v(x, t) = \exp(-\alpha t) \left( \cos \beta t + \frac{1 - \alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \sin x \text{ olduğunu görmüş oluruz.}$$

Bu yüzden,

(4.2.4) bizim ana problemimizin gerçek çözümü böylece,

$$u(x, t) = \exp(-\alpha t) \left( \cos \beta t + \frac{1 - \alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \sin x \quad (4.2.18)$$

Gerçek çözüm böylece tamamlanmış olur.

#### 4.2.2. Nümerik Çözüm

Eğer  $u_i$  için Geri-Farklar uygularsak, (4.2.4) içindeki  $u_{xx}$  merkezi farklar ve integral terimi için dikdörtgenler metodu uygularsak,

$$\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} = K \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \lambda \sum_{v=0}^{j-1} \exp(-(t-\tau)) u(x, \tau) \quad j \geq 1$$

$$\alpha = \frac{K+1}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{\sqrt{-K^2 + 2K - 1 - 4\lambda}}{2} \quad \text{olduğu yerde}$$

$$u(x,t) = \exp(-\alpha t) \left( \cos \beta t + \frac{1-\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \sin x \quad (4.2.19)$$

elde edilir.

$$\lambda > 0 \quad \text{için} \quad u(x,t) = \exp(-t) \cosh \sqrt{\lambda} t \sin x$$

(4.2.18) eşitliğinde  $K = 1$  alınarak,

$$\lambda > 0 \quad \text{için} \quad u(x,t) = \exp(-t) \cosh \sqrt{\lambda} t \sin x \quad (4.2.20)$$

(4.2.18) eşitliğinde benzer şekilde  $K = 1$  ve  $\lambda = -1$  konularak,

$$u(x,t) = \exp(-t) \cos t \sin x \quad (4.2.21)$$

(4.2.21), (4.1.20)'deki problemin en basit formuna benzetilmiştir. Şimdi (4.2.18)'deki örneği Crank-Nicolson ve Geri-Euler metoduyla çözeceğiz. Öncelikle (4.2.18) eşitliğinde integral terimi boyunca dikdörtgenler metodu kullanırız.

Eğer  $u_t$  için Geri-Farklar uygularsak, (4.2.18) içindeki  $u_{xx}$  merkezi farklar ve integral terimi için dikdörtgenler metodu ile,

$$\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} = K \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \lambda \sum_{v=0}^{j-1} \exp(-(t-\tau)) u(x,\tau) \quad j \geq 1$$

ifadesini elde ederiz.

**Örnek (4.2.1)'in dikdörtgenler metodu hata tablosu**

$$h = \frac{\pi}{100}$$

$T=0.5$		$k=0.005$	$k=0.0025$	$k=0.00125$
$x$	GERÇEK	HATA 1	HATA 2	HATA 3
0.31	0.16448	0.109841e-03	0.584606e-04	0.274675e-04
0.63	0.31287	0.208929e-03	0.111199e-03	0.522463e-04
0.94	0.43062	0.287567e-03	0.153052e-03	0.719108e-04
1.26	0.50623	0.338055e-03	0.179923e-03	0.845362e-04
1.57	0.53228	0.355452e-03	0.189182e-03	0.888866e-04

### 4.3 GERİ-EULER METODU

$k$  zaman adımı ise, Geri-Euler yaklaşık metoduyla,

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{k} + Au_n = k \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} K_{nj} B u_j + f_n, n \geq 1, \quad (4.3.1)$$

$u_n \in D(A)$ ,  $u(n, k)$ 'ya yaklaşık olduğu ve  $f_n = f(nk)$ ,  $k_{nj} = k(nk, jk)$ , başlangıç şartı  $u_0 = u(0) = v$ , sağ taraftaki toplam  $t_n = nk$ 'ya eşit olan  $t$  ile (4.2.1)'in integral teriminin dikdörtgensel yaklaşımıdır. Bu nedenle  $w_{nj}$  dikdörtgensel metodunun ağırlık noktalarıdır.

$$\int_0^{nk} g(s) ds \approx k \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} g(jk) \quad (4.3.2)$$

Bu özel dikdörtgensel formül özel durumlarda da devam eder.

Geri-Euler metodunun tam  $O(k)$  ile tutarlı olan en basit metot dikdörtgensel metottur, yani  $0 \leq j \leq n-1$  için  $w_{nj} = k$  olduğu noktalar içindeki kuraldır. Bununla beraber girişte açıklandığı gibi özellikle  $k$  küçük olduğunda oldukça fazla seyrek olan bir dikdörtgensel metodu kullanmanın pek çok sebebi vardır. Bu nedenle, bunun yerine biz mümkün olduğu kadar daha geniş  $k_1 = mk$  zaman adımlarına sahip dikdörtgensel bir metot bulmaya çalışıyoruz. ( $m$ 'nin  $k$ 'ye bağımlı olduğu bir pozitif tamsayı olduğu ve örneğin  $m = \lceil k^{-1/2} \rceil$   $k_1 = O(k^{1/2})$  olduğu yerde).

$l = l(n)$  en büyük sıfır olmayan tamsayı ki,  $lk_1 < nk$  'yı biz  $[0, lk_1] \cup [lk_1, nk]$  alalım. İntegral aralığı ve  $k_1$  adım aralığı ile dikdörtgensel kuralı tarafından ilk önce alt aralıklar üzerinde integral yaklaşımı ve  $k$  adım aralığı ile dikdörtgensel metodu yazarız. İkinci parça için dikdörtgenler metodu yeterlidir ancak ilk kısım için daha yüksek mertebeden kurala ihtiyaç duyulur.  $j, k$ 'dan dan daha yavaş sifira yaklaştığı için  $k_1$  telafi edilebilirdir. İlk terim için yamuklar metodu öne sürüyoruz.

$$\int_0^{nk} g(s) ds \approx k_1 \left[ \frac{1}{2} g(0) + g(k_1) + \dots + g((l-1)k_1) \right]$$

$$+\left(\frac{1}{2}k_1+k\right)g(lk_1)+k\left[g(lk_1+k)+\dots\dots\dots+g((n-1)k)\right], \quad (4.3.3)$$

Yukarıdaki gibidir ki eğer  $l=0$  ise, yamuklar metodu yok sayılacaktır.

Açıkçası bu çok sayıda değeri sıfır yapan ağırlık noktaları ile (4.3.2) denkleminin bir formülüdür. Eğer biz  $nk$ 'yi sabit tarafından yukarıdaki gibi sınırlandırıldığını varsayarsak, yeterli düzenli fonksiyon olan  $g$  için kesme hatası  $O(k_1^2+k_1k)$  mertebededir. Bu nedenle, eğer  $k_1=O(k^{1/2})$  ise, Geri-Euler metoduyla tutarlılık başarılıdır. Eğer  $k_1=mk$  ile  $m=\lceil k^{-1/2} \rceil$  için bu durumu gösterir.  $j>0$  için,  $w_{nj}$  (4.3.3) dikdörtgensel kuralın noktaları, yeterince büyük için, yalnızca  $k_1$  adım uzunluğunun yamuklar kuralı içindekilerdir ve bu yüzden  $n$ 'den bağımsızdırlar.

$$w_{nj} = \begin{cases} w_j^1, n > i(j), \\ w_j^2, j < n \leq i(j), \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Daha kesin biçimde  $w_j^1$  ve  $w_j^2$  her ikisi de  $n$ 'den bağımsız olduğu yerlerde ve  $j$ 'den daha büyük ise,  $k_1/k=m$ 'nin en küçük çarpanıdır.  $w_j^1$  noktaları  $k_1$  adım uzunluğu için yamuklar metodunun noktalarıdır.  $j$ , sıfır,  $m$ 'nin sıfır olmayan çarpanı,  $m$ 'nin çarpanı olup olmadığına göre sıfır veya  $k_1, 1/2k_1$  değerlerine sahiptir.  $w_j^2$  noktaları  $n$ ,  $j$ 'nin yakınında olduğu zaman uygulanabilir.  $1/2k_1+k$  değeri  $m$ 'nin sıfır olmayan çarpanı  $j$  olmadıkça  $k$  dikdörtgensel değerine sahiptir.

$n$ 'nin bağımsız ve  $j < n$  için elde edilebilir toplama sahip niceliği tarafından  $w_{nj}$  sınırlandırılır ki, bu bize daha sonra yardımcı olacaktır. Özellikle, (4.3.4)'dan elde ettiğimiz

$$w_{nj} \leq \max(w_j^1, w_j^2) = w_j, \quad (4.3.5)$$

olduğu yerlerde ( $k \leq 1$  farz edilerek) kolayca görülür.



$$\sum_{j=0}^{n-1} w_j \leq 2nk + 1 \quad (4.3.6)$$

Şimdi (4.3.1) eşitliğinin kararlılığını düşünelim.

$$u_n = E_k u_{n-1} + k E_k h_n, \quad (4.3.7)$$

olarak (4.3.1)'ün sağ taraftaki toplamı yazıldığında ve  $u_n$  için (4.3.1) açıkça çözüldüğünde, biz  $E_k = (I + kA)^{-1}$  olduğu yerlerde,  $A$ 'nın özdeğerleri 0'dan uzakta sınırlandırıldığı için  $A$  gerçekte pozitif tanımlılığı sayesinde  $H$  üzerinde sınırlı bir operatördür, biz  $\|E_k\| < 1$  elde ederiz.  $r$ 'nin  $r(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}$  rasyonel fonksiyon olduğu yerlerde,  $E_k = r(kA)$  yazmak kullanışlıdır.

$u(0) = v$  başlangıç şartı kullanılarak ve tekrarlanılarak biz

$$u_n = E_k^n v + k E_k^{n-j+1} (q_j + f_j), \quad \text{elde ederiz.}$$

bu nedenle

$$\|u_n\| \leq \|v\| + k \left\| \sum_{j=1}^n E_k^{n-j+1} q_j \right\| + k \sum_{j=1}^n \| \tilde{f}_j \|, \quad (4.3.8)$$

Şuanda ikinci terim

$$\sum_{j=1}^n E_k^{n-j+1} q_j = \sum_{j=1}^n E_k^{n-j+1} \sum_{s=0}^{j-1} w_{js} k_{js} B u_s = \sum_{s=0}^{n-1} \left( \sum_{j=s+1}^n w_{js} k_{js} E_k^{n-j+1} \right) B u_s,$$

ve bu nedenle,

$$k \left\| \sum_{j=1}^n E_k^{n-j+1} q_j \right\| \leq \left\| \sum_{s=0}^{n-1} w_{js} k_{js} E_k^{n-j+1} kA \right\| \|A^{-1} B u_s\|$$

$K_0$  ve  $c$  bazı sabitleri için

$$\|A^{-1} B g\| \leq c \|g\| \quad g \in D(A) \quad (4.3.9)$$

ve

$$|K(t, s)| \leq K_0 \quad (4.3.10)$$

uygun olarak kabul edilir. Sonrakinden ve (4.3.5)'den takip edildiğinde,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=s+1}^n w_{js} K_{js} E_k^{n-j+1} \right\| &\leq \sup_{\lambda \in R} \left| \sum_{j=s+1}^n w_{js} K_{js} r(\lambda)^{n-j+1} \lambda \right| \\ &\leq K_0 w_s \sup_{\lambda \in R} \sum_{j=s+1}^n r(\lambda)^{n-j+1} \lambda \leq K_0 w_s \sup_{\lambda \in R} \frac{\lambda r(\lambda)}{1-r(\lambda)} = K_0 w_s \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Bu nedenle, (4.3.8) denkleminde aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\|u_n\| \leq \|v\| + k \sum_{j=1}^n \|f_j\| + K_0 c \sum_{s=0}^{n-1} w_s \|u_s\|$$

Aşağıda, ispatlarımızda kullanacağımız Gronwall Lemmasını verelim.

**Lemma 4.3.1.**  $\{w_n\}$  negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olsun.

$$w_n \leq \alpha_n + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s w_s, n \geq 0,$$

$\beta_s \geq 0$  ve negatif olmayan azalmayan dizi  $\{\alpha_n\}$  olduğu yerlerde belirtilir. Daha sonra,

$$w_n \leq \alpha_n \exp\left(\sum_{s=0}^{n-1} \beta_s\right), n \geq 0$$

Lemma 4.3.1 yardımıyla (4.3.6) sınırının son adımda kullanıldığı yerlerde,

$$\|u_n\| \leq \left( \|v\| + k \sum_{j=1}^{n-1} \|f_j\| \right) \exp\left(K_0 c \sum_{s=0}^{n-1} w_s\right) \leq \left( \|v\| + k \sum_{j=1}^n \|f_j\| \right) \exp(K_0 c (2nk + 1))$$

elde ederiz.

**Teorem 4.3.2.** (4.3.8) eşitliği farz edilsin. Daha sonra eğer  $nk \leq T$  ise, (4.3.3) dikdörtgensel metodu ile Geri-Euler metodu (4.3.1) üretir.

$$\|u_n\| \leq C(T) \left( \|v\| + k \sum_{j=1}^n \|f_j\| \right) \leq C_1(T) \left( \|v\| + \max_j \|f_j\| \right)$$

Daha sonra ki adımda zaman ayırımından sonuçlanan hata için bir hesap elde edilir.  $\xi_n = u_n - u(nk)$  alınıp, (4.3.1) ve (4.2.1) den takip edilebilir ki,  $\xi_n$  bu eşitliği belirtir.

$$\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{k} + A\xi_n = \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} K_{nj} B\xi_j + \Gamma_n, n \geq 1 \quad (4.3.11)$$

Gerçek çözümün,

$$\Gamma_n = u_t(nk) - \frac{u(nk) - u((n-1)k)}{k} - \int_0^{nk} k(nk, s)Bu(s)ds + \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj}k_{nj}Bu(jk)$$

$\|u_{tt}\| \leq \|v\| + c_1$  sağladığı varsayılırsa, ilk iki terimin farkı normu içinde  $c_1k/2$  ile sınırlanır. Dikdörtgensel yaklaşımdan kesme hatasına yapılan katkı, ilki  $k_1$  adım uzunluğuna sahip yamuk metodundan, ikincisi ise dikdörtgen kuralından kaynaklanan iki kısımdan meydana gelir.

Eğer biz  $\left\| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) (K(s, t)Bu(t)) \right\| \leq c_2$  ve  $\left\| \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (K(s, t)Bu(t)) \right\| \leq c_3$  olduğunu

varsayarsak, daha sonra  $\frac{1}{12}nkc_3k_1^2 + \frac{1}{2}k_1c_2k$  dikdörtgensel hata ile sınırlandırılır. Bu yüzden, ek olarak  $k_1 = O(k)$  varsayarsak, sonradan toplam kesme hatası bazı sabit  $c_4$ 'ler için,

$$\|\Gamma_n\| \leq nkc_4k, \quad (4.3.12)$$

sağlar.

Yukarıda,  $K$  her yerde yeterince düzgün sürekli farz edildiği için,  $kBu$  üzerindeki yukarıdaki koşullar,  $Bu$ 'da ki uygun koşullarla değiştirilebilir.

(4.3.11) (4.3.1) ile aynı ama  $\xi_n$  tarafından  $u_n$  ve  $\Gamma_n$  kesme hatası tarafından  $f_n$  Teorem 1 den hemen takip edilir ( $v = \xi_0 = 0$ ).

**Teorem 4.3.3.** (4.3.8) denklemini elde ettiğimizi ve  $\|u_{tt}\|$ ,  $\|Bu\|$ ,  $\|Bu_{tt}\|$   $[0, T]$  sınırlandırıldığını varsayalım. Hatta  $k_1 = O(k^{1/2})$  olduğunu farz edelim. Daha sonra, the Geri-Euler metodundaki hata

$$\|u_n - u(nk)\| \leq C_2(T)k, nk \leq T \text{ 'yı sağlar.}$$

Bu yüzden, eğer çözüm  $u$  yeteri kadar düzenli sürekli ise,  $[0, T]$  sınırlı bir zaman aralığında, Geri-Euler metodu  $O(k)$  mertebesi ile yakınsar. (Girişte belirtildiği gibi,  $h$ 'nin içinde, çeşitli sınırlar benzer olmalıdır.

Teorem 4.3.3'deki düzenlilik koşulları oldukça katıdır. Problemin parabolik karakterinden kaynaklanan düzgün süreklilik niteliği sayesinde, bunun biraz hafifletilebileceği beklenir. Ayrıca,  $\|Bu_{tt}\|$  sınırlı olmasa da,  $k_1 = O(k^{1/2})$  yi kümeleyerek,  $O(k)$ 'nin yakınsama oranının yinede devam ettirebileceğine dikkat edilmelidir. Eğer integral in ilk türevleri ile sınırlanırsa, bu yamuklar kuralının  $O(k)$  mertebesinde bir kesme hatasına sahip olmasından dolayıdır. Tabi ki bu durumda, yamuk kuralı  $k$  adım uzunluğunun dikdörtgen kuralı üzerinde herhangi bir önemli avantaj ortaya çıkarmaz.

#### 4.4 CRANK-NICOLSON METODU

(4.2.1)'in zaman ayrımlı versiyonu,

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{k} + A \frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} \tilde{K}_{nj} Bu_j + \tilde{f}_n \quad (4.4.1)$$

Sağ taraf üzerindeki toplam ve  $\tilde{f}_n = f((n-1)k)$ ,  $\tilde{K} = ((n-1)k, jk)$

$O\left[(n-1)k, \left(n - \frac{1}{2}\right)k\right]$  olduğu yerlerde  $t = \left(n - \frac{1}{2}\right)k$  ile (4.2.1)'in integral terimine dikdörtgensel bir yakınsamadır. Bu nedenle bu  $w_{nj}$  noktaları dikdörtgensel formun noktalarıdır.

$$\int_0^{(n-1/2)k} g(s) ds \approx \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} g(jk)$$

Dikdörtgensel kuralı açık bir şekilde belirtmek için  $2lk_1 < nk$  öyle ki, en büyük negatif olmayan tamsayı  $l = l(n)$  olsun. İntegral aralığını  $\left[(n-1)k, \left(n - \frac{1}{2}\right)k\right]$  olarak yazalım. İlk aralıkta  $k_1$  adım uzunluğuyla Simpson kuralını, ikinci kısımda yamuklar  $k$  adım aralığıyla yamuklar kuralı ve son adımda  $k/2$  adım aralığıyla tek bir dikdörtgenler kuralı kullanılır. Bu nedenle bu yaklaşım,

$$\int_0^{(n-1/2)k} g(s) d_s \approx \frac{1}{3} k_1 \left[ g(0) + 4g(k_1) + 2g(2k_1) + \dots + 4g((2l-1)k_1) \right] \\ + \left( \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{2} k \right) g(2lk_1) + k \left[ g(2lk_1 + k) + \dots + g((n-1)k) \right], \quad (4.4.2)$$

eğer  $l=0$  veya  $n=2lm+1$  ise uygun değişimlerle sağlanır. (Birinci durumda Simpson kuralının katkısı yoktur. İkincisinde, yamuklar metodunun katkısı yoktur, böylece kare parantezinin ikinci dizisi içindeki terimler ihmal edilecektir. Eğer  $nk$  yukarıda  $T$  ile sınırlandırılırsa daha sonra kesme hatası  $O(k^4 k_1 k^2 + k^2)$  mertebededir. Bu nedenle kesme hatası  $O(k^2)$  mertebededir. Bu nedenle eğer,  $k_1 = O(k^{1/2})$  ise, Crank-Nicolson yöntemi ile tutarlılık sağlanır.

#### 4.4.1. Crank-Nicolson metodu analizi

Crank-Nicolson metodu bize (4.2.4) denkleminin  $O(k^2)$  yerel kesme hatası verir. Öncelikle bu problemi, integral terim için dikdörtgenler metodu ile kapalı metot ile çözüp bu metot için kesme hatasının  $O(k)$  olduğunu gördük. İkinci olarak, bizim asıl amacımız kesme hatasının  $O(k^2)$  olduğunu, parabolik kısım için Crank-Nicolson, integral terim boyunca Simpson + yamuklar + dikdörtgenler uygulayarak göstermektir. Bu hesaplamalar benzer durumlarda da devam eder. Bu metot için nümerik çözümler Crank-Nicolson metodu için hata tablosunda verilmiştir. Tablodan anlaşılacağı üzere integral terimi için uygulanan metotlar (4.2.4) denklemini ikinci mertebeden yakınsatır.

Bu nedenle, istenilen  $O(k^2)$  sağlanmış olur.

Hata analizi tablosunu elde etmede MATLAB programı kullanıldı. Program sırasıyla theta yerine 1 ve 0.5 alındığında iki yöntemin (Geri Euler ve Crank-Nicolson metodu) de hata analizi sonucunu elde edebiliriz.

```

% solve parabolic volterra eqn, file parvol.m
% k=time-step, q=no of time-steps, th=theta, la=coeff
% (x1,x2)= space interval, 2*n1=no of steps in x
% u(1:n1+2) gives initial values of u (symmetrical)
%      u(i) = u at x1+(i-1)*h, u(1)=0
% b=0 gives u in integral, b=1 gives uxx
% it=0 gives rect rule, it=1 gives mixed rule
q=400;k=0.5/q;th=0.5;la=-1;x1=0;x2=pi;n1=50;b=0;it=1;
h=(x2-x1)/(2*n1); r=k/h^2;
%
for i=1:51;s=h*(i-1);for j=1:q+1;t=k*(j-1);
uexa(j,i)=exp(-t)*cos(t)*sin(s);
end
end
for j=1:q+1;uexa(j,52)=uexa(j,50);end
for i=1:51;u(i)=uexa(1,i);end
m=fix(1/sqrt(k)); k1=m*k;
% set up and factorize matrix in A
for i=1:n1
A(i,1)=-r*th; A(i,3)=A(i,1);
A(i,2)=1+2*r*th; end
A(n1,1)=-2*r*th;
for i=2:n1
A(i,1)=A(i,1)/A(i-1,2);
A(i,2)=A(i,2)-A(i,1)*A(i-1,3); end
% time-loop, solutions stored in US
il=round(q/m)+m+1; % no of time steps to be stored
u(n1+2)=u(n1); US=zeros(il,n1+2); US(1,:)=u;
ct=0; time(1)=0;
for j=1:q; t=j*k; j1=j-ct*m;
% calculate rhs of eqns, including integral
for i=1:n1
d(i)=r*(1-th)*(u(i+2)+u(i))+(1-2*r*(1-th))*u(i+1);
%integration simp/ trapezium/rec
sum=0; for c=1:ct+j1; st=time(c);
f=US(c,it+1); if b>0
f=(US(c,i+2)-2*US(c,i+1)+US(c,i))/h^2; end
if c<ct+1 if c==1 cf = k1/3; end
if c==2 cf = (4/3)*k1; end
if c>2 cf = 2*k1-cf; end; end
if c==ct+1 if ct==0 cf = k/2;
else cf = k1/3 + k/2; end; end
if c>ct+1 cf = k; end
sum=sum+cf*exp(st-t)*f; end
d(i)= d(i)+la*k*sum; end
% solve equations
for i=2:n1
d(i)=d(i)-A(i,1)*d(i-1); end
u(n1+1)=d(n1)/A(n1,2);
for i=n1-1:-1:1
u(i+1)=(d(i)-A(i,3)*u(i+2))/A(i,2); end
u(n1+2)=u(n1); cend=ct+j1+1;
% test j for multiplies of 2*m, reduce storage
if j1==2*m ct=ct+2;
US(ct,:)=US(ct+m-1,:); time(ct)=time(ct+m-1);
cend=ct+1;end
US(cend,:)=u; time(cend)=t;
end; % of time-loop

```

**Örnek (4.2.1)'in CN metodu hata tablosu**

$$h = \frac{\pi}{200}$$

$t=2.0$		$k=0.005$	$k=0.0025$
$x$	GERÇEK	HATA 1	HATA 2
0.31	-0.017403636	0.201115e-04	0.500248e-05
0.63	-0.33103683	0.382544e-04	0.951528e-05
0.94	-0.045563311	0.526527e-04	0.130967e-04
1.26	-0.053562885	0.650823e-04	0.161884e-04
1.57	-0.056319350	0.650823e-04	0.161884e-04

(4.4.2) kuralı için  $w_{nj}$  dikdörtgensel noktaları  $j$ 'den daha büyük olan  $2k_1/k = 2m$  'nin en küçük katı olan  $i(j)$  ve  $n$  'den her ikisi de bağımsız olan  $w_j^1$  ve  $w_j^2$  ile (4.2.6)'nın formları açıklanabilir.  $w_j^1, n > i(j)$  için, 0 veya  $\frac{1}{3}k_1, \frac{4}{3}k_1, \frac{2}{3}k_1$  bu değerlere sahip olan,  $j$  'nin 0,  $m$  'nin tek katı  $2m$  'nin 0 olmayan bir kat veya  $m$  'nin bir kat olup olmadığına göre Simpson kuralının noktalarıdır.  $w_j^2$  noktaları  $n$  j ye yakın ve  $j = 0$  için  $\frac{1}{2}k$  ve  $j \neq 0$  için  $\frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{2}k$  değerine sahip olan  $j$   $m$  'nin çift katı olmadıkça  $k$  değerine sahiptir.

(4.3.6) eşitliğinden kolayca takip edilebilir ki,  $w_j = \max(w_j^1, w_j^2)$  tarafından  $w^j$  verilirse, Crank-Nicolson metodu için belirtilir.

$$r(\lambda) = \left(I + \frac{1}{2}\lambda\right)^{-1} \left(I - \frac{1}{2}\lambda\right), \quad g(\lambda) = \left(I + \frac{1}{2}\lambda\right)^{-1}$$

ile

$$E_k = \left(I + \frac{1}{2}kA\right)^{-1} \left(I - \frac{1}{2}kA\right)^{-1} = r(kA),$$

$$G_k = \left(I + \frac{1}{2}kA\right)^{-1} = g(kA),$$

olduğu yerlerde,  $u_n = E_k u_{n-1} + kG_k \tilde{h}_j$ ,  $n \geq 1$ ,  $u_n$  için çözüm üzerinde, (4.3.1)'in sağ tarafındaki Crank Nicolson eşitliği tarafından

$$\tilde{h}_n = \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} \tilde{K}_{nj} B u_j + \tilde{f}_n = \tilde{q}_n + \tilde{f}_n, \text{ gösterilir.}$$

Kolayca görülebilir ki,  $\|E_k\| \leq 1, \|G_k\| < 1$ .

Tekrarlanırsa ve  $u(0)=v$  başlangıç şartı kullanılarak

$$u_n = E_k^n v + k \sum_{j=1}^n E_k^{n-j} G_k \tilde{h}_j, \quad (4.4.3)$$

elde ederiz.

Bu nedenle

$$\|u_n\| \leq \|v\| + k \left\| \sum_{j=1}^n E_k^{n-j} G_k \tilde{q}_j \right\| + k \sum_{j=1}^n \|\tilde{f}_j\| \quad (4.4.4)$$

olur. İkinci terimi üretir, toplamın mertebesi değiştikten sonra

$$\sum_{j=1}^n E_k^{n-j} G_k \tilde{q}_j \cong \sum_{s=0}^{n-1} \left( w_{js} \tilde{K}_{js} E_k^{n-j} G_k \right) B u_s,$$

Ve bu nedenle,

$$(4.3.8) \text{ düşünülürse, } k \left\| \sum_{j=1}^n E_k^{n-j} G_k \tilde{q}_j \right\| \leq c \sum_{s=0}^{n-1} \left\| \left( \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} E_k^{n-j} G_k k A \right) \right\| \|u_s\|$$

Geri-Euler metodu tartışıldığında, biz

$$\left\| \left( \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} E_k^{n-j} G_k k A \right) \right\| \leq \sup_{\lambda \in R} \left| \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} r(\lambda)^{n-j} g(\lambda) \lambda \right| \text{ yazarız. Bu noktada}$$

Geri-Euler durumundan ilginç bir fark vardır. Çünkü,  $\lambda > 2$  için  $r(\lambda)$  negatif değer aldığından dolayı bu toplam büyük  $\lambda$  için toplam alterne serileri olur ve

böylece  $w_{js}$  ve  $\tilde{K}_{js}$ 'nin üst sınırları tarafından yerine geçerek elde edilen hesaplamalar artık kullanışlı değildir, sonuç olarak  $\lambda$  büyük olduğunda toplam büyük ihmallere içerir.

Çekirdek  $K$  için varsayılan süreklilik ve dikdörtgenler metodunun 'süreklilik' niteliği sebebiyle daha ileriye gidebiliriz. (Sabit  $j$  için  $w_{nj}$  katsayısı  $n$ 'nin iki aralığının her biri içinde  $n$ 'den bağımsızdır). (4.2.4) denklemi yardımıyla, bu

$$\left\| \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} E_k^{n-j} G_k k A \right\| \leq \sup_{\lambda \in R} \left[ w_s^1 \left| \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} r(\lambda)^{n-j} g(\lambda) \lambda \right| \right]$$



$$+w_s^2 \left| \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} r(\lambda)^{n-j} g(\lambda) \lambda \right|$$

$i(s) \leq n$  sağlanır (eğer  $i(s) > n$  ise, benzer ve kolay bir tartışma elde edilir). Sağ taraftaki toplamı değerlendirmek ve  $|r| < 1$  eşitsizliğini elde etmek için parçalarla toplamı elde ederiz.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^q a_j r^{n-j} \right| &= \left| a_q \sum_{j=1}^q r^{n-j} - \sum_{p=l+1}^q (a_p - a_{p-1}) \sum_{j=1}^{p-1} r^{n-j} \right| \\ &\leq \frac{2}{1-r} \left[ |a_q| + \sum_{p=l+1}^q |a_p - a_{p-1}| \right] \end{aligned}$$

$(1-r(\lambda))^{-1} g(\lambda) \lambda = 1$  olduğu için, (4.3.10) tarafından belirtilir ki

$$\left\| \sum_{j=s+1}^n w_{js} \tilde{K}_{js} E_k^{n-j} G_k k A \right\| \leq 4w_s k_0 + 2w_s \sum_{p=s+2}^n \left| \tilde{K}_{ps} - \tilde{K}_{p-1,s} \right| \quad (4.4.5)$$

$K$  her iki değişkenin sürekli fonksiyonu farz edildiğinden dolayı,

$$\int_0^t \left| \frac{\delta}{\delta t} k(t,s) \right| dt \leq C_3(T) \quad \text{olduğunu varsayabiliriz}$$

Daha sonra (4.4.5) denklemindeki toplam  $nk \leq T$  için  $C_3(T)$  tarafından sınırlandırılır. Bu durumda (3.4.3) kullanılarak aşağıdaki durumu elde ederiz.

$$\|u_n\| \leq \|v\| + k \sum_{j=1}^n \|\tilde{f}_j\| + c(4K_0 + 2C_3(T)) \sum_{s=0}^{n-1} w_s \|u_s\|$$

Yukarıda verilmiş olduğumuz Gronwall Lemması, (4.3.6) ile birleştirildiği zaman teorem 3.4.2'i elde ederiz.

**Teorem 4.4.2.** (4.3.8) denklemini göz önüne aldığımızda daha sonra eğer  $nk \leq T$  ise (4.4.2) dikdörtgenel formülü ile (4.4.1) Crank-Nicolson metodu üretir.

$$\|u_n\| \leq C_4(T) \left( \|v\| + k \sum_{j=1}^n \|\tilde{f}_j\| \right) \leq C_5(T) \left( \|v\| + \max \|\tilde{f}_j\| \right)$$

**Teorem 4.4.3.** (4.3.8) ele alındığında ve  $\|u_{uu}\|, \|Au_{uu}\|, \|Bu\|, \|Bu_t\|, \|Bu_u\|, \|Bu_{uu}\|, \|Bu_{uuu}\|, \|Bu_{uuu}\|$   $[0, T]$  üzerinde sınırlandırıldığını ve  $k_1 = O(k^{1/2})$  olduğunu farz

edelim. Daha sonra (4.4.2) dikdörtgensel formülü ile (4.4.1) Crank-Nicolson metodu için hata,

$$\|u_n - u(nk)\| \leq C_6(T)k^2, \quad nk \leq T$$

için karşılanır.

Geri-Euler metoduna benzer bir yolla, daha az düzenlilik halinde bile,  $k$ 'yı  $k^{1/2}$  den daha hızlı olan  $0$ 'a yaklaşması için zorlayarak yakınsama mertebesi korunabilir. Örneğin, tüm koşullar sağlanırsa,  $\|Bu_{tttt}\|$  dışında, yakınsama mertebesi devam ettirilir, eğer  $k_1 = O(k^{2/3})$  ise, (Bu Simpson kuralının  $O(k_1^3)$  kesme hatasına sahip olmasından kaynaklanır.)

#### 4.5 UYGULAMA

Bu kısımda ikinci paragrafta gösterilen  $A$ 'nın ikinci mertebeden bir eliptik,  $B$  nin iki veya daha az mertebeli bir diferansiyel operatör olduğu durumu ele alacağız. Başlıca amacımız koşul (4.3.8)'i ve teorem (4.3.2) ve (4.3.3)'deki düzenliliği neyin sağladığını görmektir

(4.3.8) durumun tam diferansiyel operatörü karşıladığına dikkat ederek başlıyoruz. Gerçekte,

$$\|Bv\| \leq c\|v\|_{H^2} \leq c\|Av\|, \quad v \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

elde ederiz. (Bu kısımda  $c$  farklı olaylarda, farklı değerler alan bir sabittir. Böylece,  $v = A^{-1}g$  yazdığımızda,  $\|BA^{-1}g\| \leq c\|g\|$ ,  $g \in L_2$

elde ederiz. Aynı sonuç, (4.3.8) 'de gösterilen  $B^*$  yerine konan  $B$  ile elde edilir.

Yinede, pratikte  $A$  ve  $B$ 'nin uzay ayırımı bazı şekillerden elde edilen operatörleri temsil ettiğini ve  $h$ 'ye göre hesapların benzerlerini sağlamak için daha sonra gerekli olduğunu hatırlarız.

Özel olarak, sonlu-elemanlar metodunu ele alırız ve bir standart üçgenselleştirme tarafından  $S_h H_0^1(\Omega)$  parçalı-lineer yaklaşımı ile birlikte yeniden bölünen bir dışbükey bölge varsayarız. Eğer  $A$  ve  $B$  operatörleri ile ilgili bi-lineer şekiller, her biri

ayrı ayrı  $a(\psi, \mathbf{X})$  ve  $b(\psi, \mathbf{X})$  ile belirtilirse  $A_h$  ve  $B_h$  yaklaşık operatörlerini  $S_h$  içinde

$$(A_h \psi, \cdot) = a(\psi, \mathbf{X}), \quad (B_h \psi, \mathbf{X}) = b(\psi, \mathbf{X}) \quad \psi, \mathbf{X} \in S_h$$

şekillendirerek tanımlayabiliriz

Böylece, bu durum için  $\mathbf{D}(A_h) = \mathbf{D}(B_h) = H = S_h$

Şimdi,  $A_h$  ve  $B_h$  ile yer değiştiren, A ve B ile (4.2.8)'i ispat etmeye çalışacağız. Burada,  $\alpha$  bir sabit olduğunda,  $B = \alpha A$  düşük mertebeli terim olduğu ek bir varsayımda bulunacağız. Bu yüzden, sadece B'nin sıfıncı mertebeden veya birinci diferansiyel operatör olduğu durumu ele alamız gerekir. Bu durumda, tüm türevleri ilk değişkendeki  $b(\Psi, X)$  nin içine yerleştirebiliriz ve  $(B_h \psi, \mathbf{X}) \leq c \|\psi\|_{H_1(\Omega)} \|\mathbf{X}\|$  elde ederiz.

Böylece,

$$\|B_h \psi\|^{-1} = |B_h \psi, B_h \psi| \leq c \|\psi\|_{H_1(\Omega)} \|B_h \psi\|$$

ve

$$\|B_h \psi\| \leq c \|\psi\|_{H_1(\Omega)} \leq c a(\psi, \psi)^{1/2} = c(A_h \psi, \psi) A^{1/2} \leq c \|A_h \psi\| \text{ olur.}$$

$\Psi = A_h^{-1} g$  yı kullanarak incelediğimizde,  $g \in S_h$  olduğu sonucuna varırız.

Yukarıda verildiği gibi, bu h' nin bağımsız bir sabit olan (4.3.8)'i belirtir. Sonuç olarak, çok kısa bir biçimde teoremdeki düzenlilik koşullarını ele alırız, 3.3.3 teoremdeki  $f(t) = 0$  durumunda, Geri-Euler durumu için en az zor olanlara odaklanarak. (4.2.1) 'in çözümü

$$\begin{aligned} u(t) &= E(t)v + \int_0^t E(t-s) \left( \int_0^s K(s, \sigma) B u(\sigma) d\sigma \right) ds ; \\ &= E(t)v + \int_0^t \left( \int_0^s A E(t-s) K(s, \sigma) ds \right) A^{-1} B u(\sigma) d\sigma ; \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

yi karşılar,  $\{E(t); t \geq 0\}$  nin A tarafından üretilen bir semi grup olduğu yerde.

$$\left\| \int_0^t AE(t-s)K(s,\sigma)ds \right\| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \left| \int_0^t \lambda e^{-(t-s)\lambda} K(s,\sigma)ds \right| \leq K_0 ; \text{ olduğu}$$

için, (4.3.8)'i ve Gronwall Lemması kullanılarak, (4.4.5) 'den

$t \leq T$  için  $\|u(t)\| \leq C(T)\|v\|$  sonucunu çıkartırız.

A'yı (4.2.1)'e veya (4.4.5) ye uygulayarak ve ayrıca

$$\|BA^{-1}g\| \leq c\|g\|, \quad g \in H, \quad (4.5.2)$$

varsayarak,  $Au(t)$  ile sınırlanan bir tartışma buluruz,  $v \in D(A)$  ise, t ye göre farklılaştırıldığında, elde ederiz

Yukarıdaki diferansiyel operatör durumuna dönersek, (4.4.6)'in bu durumda sağlandığını hatırlarız. Önceden ele alınan sonlu elemanlar yaklaşık operatörleri için, benzer koşulun sağlanıp sağlanmadığı, ilk baştaki  $v_h \in s_h$  değerinin seçildiği yola bağlıdır.

Benzer hususlar daha yüksek düzenleme gereksinimlerine kadar uzanır. Önceden belirtildiği gibi, bu düzenlilik gereksinimlerini zayıflatan oldukça büyük teşvikler vardır.

#### **4. BULGULAR VE TARTIŞMA**

Bu çalışmada amaç, Volterra tipindeki integro-diferansiyel denklemleri ikinci mertebeden yakınsatabilmektir. Bunun için öncelikle, integro-diferansiyel denklemlerin tanımı yapıp, literatürde hangi alanda ne çalışmalar yapıldığına ve integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine yer verilmiştir. Volterra tipindeki integro- diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için farklı metotlara değinilmiştir. En son Crank-Nicolson metodu kullanılarak, bu tip denklemlerin ikinci mertebeden yakınsak olduğu görülür.

## KAYNAKLAR

Brunner, H. 1982. A survey of recent advances in the numerical treatment of Volterra integral and integro-differential equations. **J. Comp. Appl. Math.** , 8s. , Manchester.

Douglas, J. JR. and Jones, B.F.R. 1962. Numerical methods for integro-differential equations of parabolic and hyperbolic types. **Springer Numer. Math.** , 4s. , Berlin.

Gurtin, M. E. Pipkin, A.G. 1968. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. **Springer Arch. Rational Mech. Anal.** , 31s. , Pittsburgh.

Londen, S. and Staffans, J. 1979. Volterra Equations. **Lecture Notes in Mathematics 737. Springer-Verlag**, 14s. ,Berlin.

Malec, M. 1978. Sue une méthode des différences finies pour une équation non linéaire intégro-différentielle a "argument retardé. **Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.Astronom. Phys.** , 40s. , France.

Miller, R. K. 1978. An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory. **J. Math. Anal.Appl.** , 66s. ,Japan.

Nunziato, J. W. 1971. On heat conduction in materials with memory. **Quart. Appl. Math.** , 29s. ,USA.

Pavlov, A. P. 1968. Stability and convergence of the method of nets for an integro-differential equation of parabolic type, **Trudy Irkutsk. Gos. Univ.** , 26s. , Rusya

Retorys, K. 1963. Die Losung der gemischten Randwertaufgabe und des Problems mit einer Integralbedingung "im Ganzen" fiir eine nichtlineareparabolische Gleichung mit der Netzmethode. **Czechoslovak Math.J.** , 88s. ,189-208. France.

Tavernini. T. 1977. Finite difference approximations for a class of semilinear Volterra evolution problems. **SIAM J. Numer. Anal.** , 14s. ,Amsterdam.

Thompson. R. J. 1973. Difference approximations for some functional differential equations. Numerische, Springer-Verlag, insbesondere approximations theoretische Behandlung von Funktionalgleichungen, **Lecture Notes in Mathematics 333s.** , Berlin.

Volterra, V. 1959. Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations, **Dover**, 38s. ,New York.

**ÖZGEÇMİŞ****KİŞİSEL BİLGİLER**

:

Adı Soyadı : Öznur ÖZTUNÇ  
Doğum Yeri : Aydın

**EĞİTİM DURUMU**

:

Lisans Öğrenimi : Uludağ Üniversitesi  
Yüksek Lisans Öğrenimi :  
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

**İŞ DENEYİMİ**

:

Çalıştığı Kurumlar veYıl : Özel eğitim kurumları

**İLETİŞİM**

:

E-posta Adresi : [oznr83@hotmail.com](mailto:oznr83@hotmail.com)  
Tarih :