



**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2009-0002**

DÖRTGENSEL NEC GRUPLARI

Mustafa DURMAZ

**DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN-2009

**T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2009-0002**

DÖRTGENSEL NEC GRUPLARI

Mustafa DURMAZ

**DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN-2009

Kabul ve Onay Sayfası

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Mustafa DURMAZ tarafından hazırlanan “Dörtgensel NEC Grupları” başlıklı tez, tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ	Celal Bayar Üniversitesi	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ali Filiz	Adnan Menderes Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

İntihal Beyan Sayfası

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Mustafa DURMAZ
İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÖRTGENSEL NEC GRUPLARI

Mustafa DURMAZ

Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU

\mathbb{H} ve \mathbb{D} hiperbolik düzlemin üst yarı düzlem modeli ve birim daire modeli olarak adlandırılan iki farklı modelidir. Hiperbolik düzlemin izometrilere ötelemeler, dönmeler, yansımalar, ötelemeli yansımalar ve limit rotasyonlar olarak adlandırılan homeomorfizmalardan oluşur. Bunlardan yansımalar ve ötelemeli yansımalar yönlenmeyi korumayan izometrilere, diğerleri ise yönlenmeyi koruyan izometrilere dir. Yönlenmeyi koruyan izometrilere çift sayıda yansımanın, yönlenmeyi korumayan izometrilere tek sayıda yansımanın bileşkesi olarak yazılabilirler. Hiperbolik düzlemin bütün izometrilere fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun bölüm uzayı kompakt olan herhangi bir ayrık alt grubu bir NEC grubudur.

İç açıları; $k, l, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $k, l, m \geq 2$ olmak üzere $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}$ ve $\frac{\pi}{m}$ olan bir hiperbolik üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar bir NEC grubu üretir. Bu şekilde elde edilen NEC grubuna bir üçgensel NEC grubu denir. Benzer şekilde iç açıları; $s, t, u, v \in \mathbb{Z}^+$ ve $s, t, u, v \geq 2$ olmak üzere $\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{u}$ ve $\frac{\pi}{v}$ olan hiperbolik dörtgenin kenarları üzerindeki yansımalar da bir NEC grubu üretir. Bu şekilde elde edilen bir grup dörtgensel NEC grubu olarak adlandırılır.

Yukarıdaki özelliklere sahip bir hiperbolik dörtgeni ele alalım. Bu dörtgenin kenarları üzerindeki yansımalar tarafından üretilen dörtgensel NEC grubunun elemanları altında bu dörtgenin görüntüleri ele alınırsa hiperbolik düzlem dörtgenlere ayrılmış olur. Bu özellikteki dörtgenlerin kümesine hiperbolik düzlemin bir kaplaması denir. Benzer şekilde bir üçgensel NEC grubu yardımıyla da hiperbolik düzlemin bir kaplaması elde edilebilir.

Γ ve Γ' grupları sırasıyla dörtgensel ve üçgensel NEC grupları olsunlar. Eğer Γ grubu Γ' grubunun k indeksli bir alt grubu ise hiperbolik düzlemin dörtgenler ile elde edilen kaplamasının herbir hücresi k tane üçgene bölünebilir ve hiperbolik düzlemin bu özellikteki iki kaplamasına bölünebilir kaplama ikilisi denir.

Bu tezde dörtgensel NEC grupları tanımlanmış, üçgensel ve dörtgensel NEC grupları arasındaki bazı cebirsel ve geometrik ilişkiler incelenmiştir.

2009, 57 sayfa

Anahtar Sözcükler

Hiperbolik düzlem, İzometri, NEC(Non-Euclidean Crystallographic) grubu, Ayrık alt grup, üçgensel grup, Dörtgensel grup, Kaplama.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

QUADRILATERAL NEC GROUPS

Mustafa DURMAZ

Adnan Menderes University
 Graduate School of Natural and Applied Sciences
 Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

\mathbb{H} , \mathbb{D} are two model of the hyperbolic plane they are called the upper-half plane model and the unit disc model. The isometries of the hyperbolic plane consist of homeomorphisms which are translations, rotations, reflections, glide reflections and limit rotations. Reflections and glide reflections are orientation preserving isometries while the others not. Orientation reversing isometries can be written as the composition of even number of reflections. Orientation preserving isometries can be written as the composition of the odd number of reflections. All isometries of the hyperbolic plane form a group under composition of functions and this group is denoted by $PGL(2, \mathbb{R})$. Any discrete subgroup of the group $PGL(2, \mathbb{R})$ with compact quotient space is an NEC group.

The reflections in the sides of a hyperbolic triangle with angles $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ ve $\frac{\pi}{m}$ generate a NEC group where $k, l, m \in \mathbb{Z}^+$ and $k, l, m \geq 2$, and a NEC group obtained in this way is called a triangle NEC group. Similarly, the reflections in the sides of a hyperbolic quadrilateral with angles $\frac{\pi}{s}$, $\frac{\pi}{t}$, $\frac{\pi}{u}$ ve $\frac{\pi}{v}$ generate an NEC group where $s, t, u, v \in \mathbb{Z}^+$ and $s, t, u, v \geq 2$. Such a group is called a quadrilateral NEC group. Consider a hyperbolic quadrilateral with the above properties. If we consider the images of this quadrilateral under the elements of the quadrilateral NEC group generated by the reflections in the sides of the quadrilateral, we obtain a tessellation of the hyperbolic plane by quadrilaterals. The set of quadrilaterals with this property is called a tiling of the hyperbolic plane. Similarly, a tiling of the hyperbolic plane can be obtained by means of a triangle NEC group.

Let Γ and Γ' be quadrilateral and triangle NEC groups, respectively. If the group Γ is a subgroup of the group Γ' with index k , then any cell of the tiling of the hyperbolic plane by quadrilaterals can be divided into k triangles and two tilings of the hyperbolic plane with this property are called a divisible tiling pair.

In this thesis quadrilateral NEC groups have defined, some algebraic and geometrical relations between triangle and quadrilateral NEC groups have been investigated.

2009, 57 sayfa

Key Words

Hyperbolic space, Isometry, NEC(Non-Euclidean Crystallographic) group, Discrete subgroup, Triangle group, Quadrangle group, Tiling

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca hiçbir fedakarlıktan kaçınmayarak tüm bilgi birikimi ve tecrübesiyle bana destek olan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na, bu tezin yazımında teknik bilgisi ve birikimiyle her zaman yanımda olan sevgili iş ve ev arkadaşım Okan ARSLAN'a, tezin düzeltme aşamasında yapıcı eleştirileri ve önerileri ile bana destek olan hocalarım Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ ve Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ'e yürekten teşekkür ederim.

Ayrıca, beni bu günlere taşıyan yolda, hep yanımda olan aile bireylerime, nişanlıma ve saygı değer hocalarıma samimi duygularla teşekkür eder, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Mustafa DURMAZ

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	i
İNTİHAL BEYAN SAYFASI	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
ÖNSÖZ	vii
SİMGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	2
2.1. Grup Etkisi	2
2.2. Bölüm (Yörünge) Uzayları	3
2.3. Topolojik Gruplar	5
2.4. Möbius Dönüşümleri	6
2.5. Bir Çember Üzerindeki Yansıma (İnversiyon)	8
3. HİPERBOLİK GEOMETRİ	9
3.1. Hiperbolik Düzlem	9
3.2. Hiperbolik Metrik	10
3.3. Hiperbolik Doğrular	14
3.4. Hiperbolik Düzlemde İzometrilere:	15
3.5. Hiperbolik Alan ve Gauss-Bonnet Formülü	18
4. NEC (NON-EUCLIDEAN CRYSTALLOGRAPHIC) GRUPLARI	21
4.1. NEC Gruplarının Simgeleri	21
4.2. NEC Gruplarının Temel Bölgeleri	23
4.3. Üçgensel Gruplar	25
4.4. Dörtgensel Gruplar	27
4.5. Öklid Düzleminde Üçgensel ve Dörtgensel Gruplar	28
5. HİPERBOLİK DÜZLEMİN KAPLAMALARI	30
5.1. Giriş	30
5.2. Kaplamalar ve Kaplama Grupları	31

	ix
5.3. Bölünebilir Kaplamalar	35
6. SONUÇ	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{H}	:	Hiperbolik düzlem için üst yarı düzlem modeli
\mathbb{D}	:	Hiperbolik düzlem için birim daire modeli
\mathbb{R}	:	Reel sayılar
\mathbb{Z}	:	Tam sayılar
\mathbb{C}	:	Kompleks sayılar
\mathbf{C}	:	Birim çember
$PSL(2, \mathbb{R})$:	Hiperbolik düzlemin konform izometrilerinin grubu
$PGL(2, \mathbb{R})$:	Hiperbolik düzlemin anti-konform izometrilerinin grubu
Γ	:	Fuchs grubu
Γ^*	:	NEC grubu
Δ	:	Hiperbolik düzlemin üçgenlerle elde edilen kaplaması
Ω	:	Hiperbolik düzlemin dörtgenlerle elde edilen kaplaması

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : G grubunun bölüm uzayı olan tor yüzeyi	4
Şekil 2.2 : NEC grubunun temel bölgesi ve bölüm uzayı	5
Şekil 2.3 : Bir çember üzerinde yansıma (inversiyon)	8
Şekil 3.1 : Yalancı küre	9
Şekil 3.2 : Üst yarı düzlem modelinde doğrular	10
Şekil 3.3 : Birim daire modelinde doğrular	10
Şekil 3.4 : Hiperbolik doğru parçası	11
Şekil 3.5 : İki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçası	14
Şekil 3.6 : Hiperbolik doğrular	14
Şekil 3.7 : Kesişen, paralel ve ayrık paralel hiperbolik doğrular	15
Şekil 3.8 : Hiperbolik düzlemde öteleme	16
Şekil 3.9 : Hiperbolik düzlemde rotasyon	17
Şekil 3.10 : Hiperbolik düzlemde limit rotasyon	17
Şekil 3.11 : Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma	18
Şekil 3.12 : Hiperbolik üçgen	19
Şekil 3.13 : Hiperbolik üçgen	20
Şekil 4.1 : Hiperbolik bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar	25
Şekil 4.2 : Hiperbolik düzlemin iç açıları $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ olan üçgenler ile kaplanması	26
Şekil 4.3 : Hiperbolik bir dörtgenin kenarları üzerindeki yansımalar	27
Şekil 4.4 : A eşkenar üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar	28
Şekil 5.1 : Öklid düzlemin üçgenlerle kaplanması	30
Şekil 5.2 : Öklid düzlemin altıgenlerle kaplanması	31
Şekil 5.3 : Başlangıç hücresi ve T, T^* gruplarının üreteçleri	33
Şekil 5.4 : $K = 2, (d, 2e, 2f) \subset (d, e, d, f)$	37
Şekil 5.5 : $K = 3, (2, 2d, 3e) \subset (2, d, 2d, e)$	38
Şekil 5.6 : $K = 3, (2d, 3, 2e) \subset (2d, 2e, d, e)$	38

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 5.1 Hiperbolik düzlemin bölünebilir kaplamaları	39
--	----

1. GİRİŞ

$\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ kümesi, üzerinde tanımlı $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$ uzaklık fonksiyonu ile hiperbolik düzlem için bir modeldir ve *üst yarı düzlem modeli* olarak adlandırılır. Aynı zamanda, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kümesi de hiperbolik düzlem için bir modeldir ve *birim daire modeli* olarak adlandırılır. $J(z) = \frac{iz+1}{z+i}$ dönüşümü yardımıyla bu iki model arasında geçiş daima mümkündür.

Hiperbolik düzlemin yönlenmeyi koruyan izometrieleri (Öteleme, Rotasyon, Limit Rotasyon) bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $PSL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun herhangi bir ayrık alt grubuna bir Fuchs grubu denir. Fuchs grupları ile ilgili ilk çalışma Poincaré (1882) tarafından yapılmıştır. Poincaré, L. Fuchs'un bir makalesini okuduktan sonra bu grupları Fuchs grupları olarak adlandırmıştır.

Hiperbolik düzlemin yönlenmeyi koruyan ve korumayan izometrieleri (Yansıma, Ötelemeli yansıma) bir grup oluşturur ve bu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir. $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun herhangi bir ayrık alt grubuna bir NEC grubu denir. NEC grupları, yönlenmeyi korumayan izometrieler de içerdikleri için Fuchs gruplarından daha genişler ve bu grupların bölüm uzayları kompakttır. Bir Fuchs grubunun bölüm uzayı kompakt olmak zorunda olmadığından her Fuchs grubu bir NEC grubu değildir. Bununla birlikte, bir NEC grubunun yönlenmeyi koruyan tüm elemanları bu grubun bir veya iki indeksli alt grubudur ve bu alt grup bir Fuchs grubudur.

S , iç açıları $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ ($k, l, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $k, l, m \geq 2$) olan bir hiperbolik üçgen olmak üzere, bu üçgenin kenarları üzerindeki α, β, γ yansımaları bir NEC grubu üretirler. Bu grup *üçgensel NEC grubu* olarak adlandırılır. Benzer şekilde iç açıları $\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{u}, \frac{\pi}{v}$ ($s, t, u, v \in \mathbb{Z}^+$) olan bir hiperbolik dörtgenin kenarları üzerindeki yansımalar bir NEC grubu üretirler. Bu gruba bir *dörtgensel NEC grubu* denir. Bu çalışmada dörtgensel NEC grupları tanımlanmış, üçgensel ve dörtgensel NEC grupları arasındaki bazı cebirsel ve geometrik ilişkiler incelenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde sıkça karşılaşılabilecek olan bazı temel bilgiler verilecektir.

2.1 Grup Etkisi

Tanım 2.1.1 X boş kümeden farklı bir küme ve G bir grup olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerine bir *etkisi* denir.

- (i) $\phi(e, x) = x$ ($\forall x \in X$)
- (ii) $\phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$ ($\forall x \in X$ ve $\forall g_1, g_2 \in G$).

Burada e , G grubunun birim elemanıdır.

Örnek 2.1.2 X bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda her $x \in X$ ve her $g \in G$ için;

$$\phi : G \times X \rightarrow X, \phi(g, x) = g(x)$$

şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine etkisidir. Grup etkisi özelliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.1.3 X bir küme, $a \in X$ ve $\phi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Bu durumda, $G(a) = \{\phi(g, a) \mid g \in G\}$ kümesine a noktasının *yörüngesi* ve $S(a) = \{g \in G \mid \phi(g, a) = a\}$ kümesine de a noktasının *sabitleyeni* denir.

Tanım 2.1.4 X bir küme, G bir grup ve $\phi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\phi(g, x) = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesi üzerine etkisi *geçişlidir* denir.

Tanım 2.1.5 X bir küme, G bir grup ve $\phi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Eğer, $x \neq y$ ve $u \neq v$ özelliğindeki her $x, y, u, v \in X$ elemanları için $\phi(g, x) = u$, $\phi(g, y) = v$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesi üzerine etkisi *çift geçişlidir* denir.

Tanım 2.1.6 X bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda, her $x \in X$ ve her $g \in G$ için;

$$\phi : G \times X \rightarrow X, \phi(g, x) = g(x)$$

şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümünün G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olduğunu biliyoruz. Bu şartlar altında, X uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı bir K alt kümesine G grubu için bir *temel bölge* denir:

$$(i) \bigcup_{g \in G} g(K) = X$$

$$(ii) \text{ Her } g \in G - \{I\} \text{ için } \overset{\circ}{K} \cap g(\overset{\circ}{K}) = \emptyset$$

2.2 Bölüm (Yörünge) Uzayları

X bir topolojik uzay ve G bu uzaya etki eden bir grup olmak üzere G_x , $x \in X$ noktasının yörüngesi olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$x\beta y \Leftrightarrow y \in G_x$$

olarak tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir x elemanının denklik sınıfı x in yörüngesidir ve denklik sınıflarının kümesi $X/\beta = \{G_x \mid x \in X\}$ olarak gösterilir. X/β , X kümesinin bu bağıntıya göre bölüm

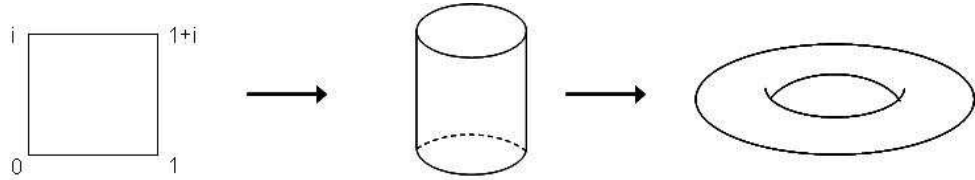
kümesidir.

$\pi : X \rightarrow X/\beta$, $\pi(x) = G_x$ bölüm fonksiyonu olmak üzere;

$$"A \subset X/\beta \text{ açıktır} \Leftrightarrow \pi^{-1}(A), X \text{ uzayında açıktır}"$$

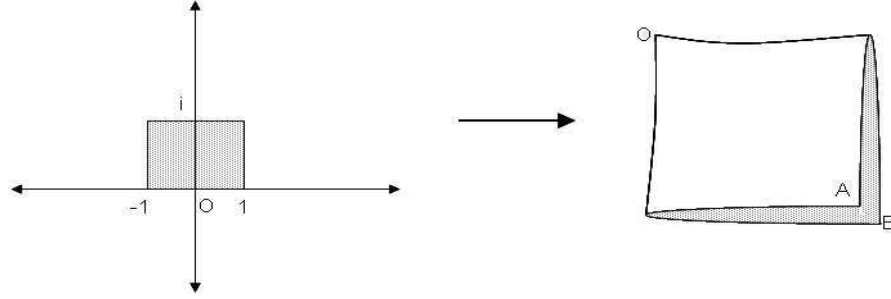
şeklinde tanımlanan A açık kümeleri X/β kümesi üzerindeki bölüm topolojisini oluşturur. Bölüm topolojisi ile birlikte ele alındığında X/β bir topolojik uzaydır ve bu topolojik uzaya *bölüm uzayı* veya *yörünge uzayı* denir. X/β bölüm uzayının elemanları G grubuna göre yörüngeler olduğundan X/β yerine X/G gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 2.2.1 f, g karmaşık sayılar kümesi üzerinde $f(z) = z + 1$, $g(z) = z + i$ şeklinde tanımlı dönüşümler olsunlar. Bu dönüşümler \mathbb{C} üzerine etki eden bir G grubu üretirler. Bu grubun \mathbb{C} üzerine etkisi düşünülürse, köşeleri $0, 1, i, 1 + i$ olan kare bu grup için bir temel bölgedir. Bu bölgenin kenarları üzerinde bulunan aynı yörüngeli noktalar birleştirilirse grup için bölüm uzayı olarak bir tor yüzeyi elde edilir.



Şekil 2.1: G grubunun bölüm uzayı olan tor yüzeyi

Örnek 2.2.2 f, g, h, k dönüşümleri \mathbb{C} üzerinde $f(z) = -z$, $h(z) = -\bar{z} + 2$, $g(z) = -\bar{z} - 2$, $k(z) = \bar{z} + 2i$ şeklinde tanımlansınlar. Bu dönüşümler tarafından üretilen grup için bir temel bölge Şekil 2.2'de gösterilmiştir. Temel bölge üzerindeki aynı yörüngeli noktalar birleştirilirse grubun bölüm uzayı elde edilir. Bölüm uzayı topolojik olarak bir diske homeomorftur.



Şekil 2.2: NEC grubunun temel bölgesi ve bölüm uzayı

2.3 Topolojik Gruplar

Tanım 2.3.1 $(G, *)$ bir grup ve τ , G üzerinde bir topoloji olsun. Her $g, h \in G$ için,

$$\alpha : G \times G \rightarrow G, \alpha(g, h) = g * h$$

$$\beta : G \rightarrow G, \beta(g) = g^{-1}$$

şeklinde tanımlanan α ve β dönüşümleri sürekli ise G grubuna bir *topolojik grup* denir.

Örnek 2.3.2 Reel sayılar kümesinin toplama işlemi ile bir grup olduğu biliniyor. Öklid topolojisi ile ele alındığında, \mathbb{R} bir topolojik gruptur. α, β dönüşümleri bu örnek için;

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x, y) = x + y$$

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \beta(y) = -y$$

şeklindedir. Şimdi α, β dönüşümlerinin sürekli olduklarını gösterelim. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere (a, b) aralığı reel sayılar kümesinin açık bir alt kümesidir. $\beta^{-1}[(a, b)] = (-b, -a)$ ve $\alpha^{-1}[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < x + y < b\}$ alt kümeleri de sırasıyla \mathbb{R} ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ çarpım uzayında açıktır. (a, b) biçimindeki açık aralıklar Öklid topolojisi için bir taban oluşturduğundan diğer açık alt kümelerin de α ve β dönüşümleri altında ön görüntüleri açıktır. O halde, α ve β dönüşümleri süreklidir ve reel sayılar kümesi, Öklid topolojisi ve toplama işlemi ile ele alındığında bir topolojik grup olur.

G bir topolojik grup olmak üzere bu grubun bütün tek noktalı alt kümeleri açık ise G topolojik grubuna bir *ayrık grup* denir. Bu durumda, ayrık topoloji ile birlikte düşünüldüğünde her grup bir ayrık grup olur.

Tanım 2.3.3 X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall a \in A$ noktasının $U \cap A = \{a\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa A kümesine X topolojik uzayının bir *ayrık alt uzayıdır* denir.

Tanım 2.3.4 G bir topolojik grup ve H, G topolojik grubunun bir alt grubu olsun. H, G topolojik uzayının ayrık bir alt uzayı ise H grubuna G grubunun bir *ayrık alt grubu* denir.

Örnek 2.3.5 $(\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{R}, +)$ grubunun bir ayrık alt grubudur.

2.4 Möbius Dönüşümleri

Tanım 2.4.1 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklindeki dönüşümlere *Möbius dönüşümleri* denir. Bu dönüşümlerin kümesi $PGL(2, \mathbb{C})$ notasyonu ile gösterilir ve $ad - bc$ sayısına T dönüşümünün *determinantı* denir.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1) \quad (2.4.1)$$

şeklindeki dönüşümlerin kümesi de özel olarak $PSL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir. $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesinin dönüşümleri ile birlikte,

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1) \quad (2.4.2)$$

şeklindeki Möbius dönüşümleri bir grup oluşturur. $PSL(2, \mathbb{R})$ bu grubun iki indeksli bir alt grubudur ve bu grup $PGL(2, \mathbb{R})$ notasyonu ile gösterilir.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } \Delta = ad - bc > 0) \quad (2.4.3)$$

olsun. $T(z)$ dönüşümünde pay ve paydayı $\sqrt{\Delta}$ ya bölersek $T(z) = \frac{(\frac{a}{\sqrt{\Delta}})z + (\frac{b}{\sqrt{\Delta}})}{(\frac{c}{\sqrt{\Delta}})z + (\frac{d}{\sqrt{\Delta}})}$ dönüşümünü elde ederiz. Buradan $(\frac{a}{\sqrt{\Delta}})(\frac{d}{\sqrt{\Delta}}) - (\frac{b}{\sqrt{\Delta}})(\frac{c}{\sqrt{\Delta}}) = 1$ olduğu ve (2.4.3) dönüşümünün $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesinin elemanı olduğu görülür. $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesi,

$$z \rightarrow az + b \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a > 0) \quad (2.4.4)$$

şeklindeki dönüşümleri de içerir. Çünkü, $az + b = \frac{\sqrt{a}z + \frac{b}{\sqrt{a}}}{0z + \frac{1}{\sqrt{a}}}$ ve $\Delta = (\sqrt{a})(\frac{1}{\sqrt{a}}) = 1$ dir. (2.4.3) dönüşümü

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{(acz\bar{z}+bd) + (adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2} \quad (2.4.5)$$

biçiminde yazılabilir. $z = x + iy$ olmak üzere $T(z) = u + iv$ karmaşık sayısının sanal kısmı

$$v = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} \quad (2.4.6)$$

olarak bulunur. $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ kümesi üst yarı düzlem olmak üzere, $ad - bc > 0$ olduğundan T dönüşümünün \mathbb{H} kümesini kendi üzerine resmettiği açıktır.

Teorem 2.4.1 $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: [3]. □

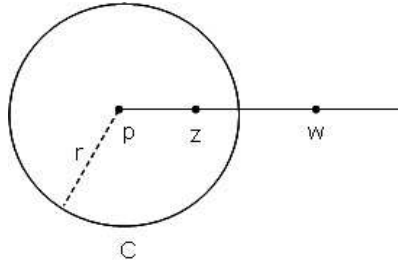
Teorem 2.4.2 $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu \mathbb{H} üzerinde geçişlidir, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde çift geçişlidir.

İspat: [4]. □

Teorem 2.4.3 Möbius dönüşümleri çemberler ve doğruları, çemberler ve doğrulara resmederler.

İspat: [3]. □

2.5 Bir Çember Üzerindeki Yansıma (İnversiyon)



Şekil 2.3: Bir çember üzerinde yansıma (inversiyon)

\mathbb{C} karmaşık düzlemde merkezi p , yarıçapı r olan bir çember ve $z \in \mathbb{C} - \{p\}$ olsun. (Şekil 2.1) p noktasından başlayıp z noktasından geçen yarı doğru üzerinde,

$$|z - p| \cdot |w - p| = r^2 \quad (2.5.7)$$

olacak şekilde bir tek w noktası vardır. Böylece, z noktası \mathbb{C} çemberi üzerinde yansıtıldığında görüntüsü (2.5.7) denklemindeki kuralı sağlayan w noktası olur. \mathbb{C} çemberi üzerinde bu şekilde elde edilen yansımaya bu çember üzerindeki yansıma (inversiyon) denir ve I_c notasyonu ile gösterilir. $I_c : \mathbb{C} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C} - \{p\}$ bir fonksiyondur ve çemberin merkezi hariç, içindeki noktaları dışındaki noktalara, dışındaki noktaları içindeki noktalara resmeder. Bu durumda, $z \rightarrow p$ iken $w \rightarrow \infty$ ve $w \rightarrow p$ iken $z \rightarrow \infty$ olur. I_c dönüşümü çember üzerindeki noktaları sabit tutar. $z \neq p$ olması durumunda,

$$|(\bar{z} - \bar{p})(w - p)| = |\bar{z} - \bar{p}| |w - p| = |z - p| |w - p| = r^2$$

dir. Bu eşitlikte $\arg(z - p) = \arg(w - p)$ olduğundan $\arg(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = 0$ dır. Böylece, $(\bar{z} - \bar{p})(w - p) = r^2$ olur ve sonuç olarak $I_c(z)$ dönüşümünün denklemi,

$$w = I_c(z) = p + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{p}} \quad (2.5.8)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $p = 0$, $r = 1$ olarak alınırsa birim çember üzerindeki yansıma elde edilir ve dönüşümün denklemi;

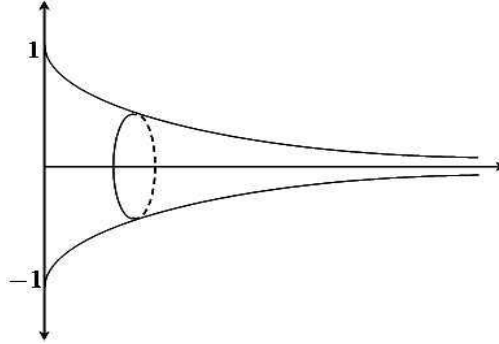
$$I_c(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (2.5.9)$$

dir.

3. HİPERBOLİK GEOMETRİ

3.1 Hiperbolik Düzlem

Öklid düzleminde bir L doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir p noktası verildiğinde, bu noktadan geçen ve doğruyu kesmeyen bir ve yalnız bir doğrunun var olduğu biliniyor. Üzerinde bir L doğrusu ve doğru dışında bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve doğruyu kesmeyen birden fazla doğruyu üzerinde bulunduran düzlem arayışları sonucunda hiperbolik düzlem ve hiperbolik geometri ortaya çıkmıştır. Bu konudaki ilk çalışmalar, birbirlerinden bağımsız olarak *Fredrich GAUSS*, *Nicolai Ivanovich LOBACHEVSKY* ve *Janos BOLYAI* tarafından yapılmıştır.



Şekil 3.1: Yalancı küre

Hiperbolik düzleme bir örnek olarak yalancı küre (pseudosphere) verilebilir.

Yalancı küre;

$$x = \theta - \tan \theta, y = \operatorname{sech}(\theta), \theta \in [0, +\infty) \quad (3.1.1)$$

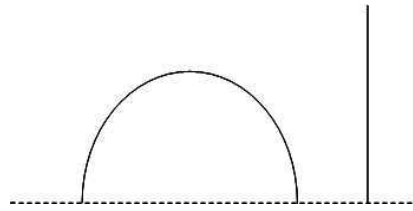
parametrik denklemi ile verilen ve çekme eğrisi (tractrix) olarak bilinen eğrinin x eksenine etrafında döndürülmesi ile elde edilen yüzeydir. Bu yüzeyin her noktası bir eyer noktasıdır ve her noktasındaki Gauss eğriliği -1 dir.

Hiperbolik düzlem için değişik modeller geliştirilmiştir. Bunlardan en çok kullanılan iki model üst yarı düzlem modeli ve birim daire modelidir. Üst yarı düzlem modeline göre

hiperbolik düzlem;

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

kümesidir. Bu modele göre hiperbolik düzlemdeki doğrular, reel eksene dik olan Öklid doğru ve çemberlerinin \mathbb{H} kümesi içinde kalan kısımlarıdır. Birim daire modeline göre

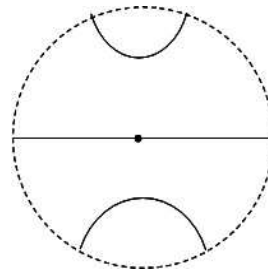


Şekil 3.2: Üst yarı düzlem modelinde doğrular

hiperbolik düzlem;

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

kümesidir. Bu modele göre hiperbolik düzlemin doğruları, karmaşık düzlemde \mathbb{D}



Şekil 3.3: Birim daire modelinde doğrular

kümesinin sınırını dik kesen Öklid doğruları ve çemberlerinin \mathbb{D} kümesinde kalan kısımlarıdır.

Bu tezin genelinde üst yarı düzlem modeli kullanılacak ve açıklamalar bu model temel alınarak yapılacaktır.

3.2 Hiperbolik Metrik

$I = [0, 1]$ ve $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şeklinde verilsin. γ eğrisinin Öklid uzunluğu, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ formülü

yardımla

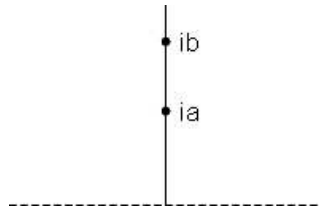
$$|\gamma|_E = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

olarak verilir. $\beta : I \rightarrow \mathbb{H}$ ve $\beta(t) = (x(t), y(t))$ olmak üzere β eğrisinin hiperbolik uzunluğu, $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ formülü yardımla

$$|\beta|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \left| \frac{dz}{y(t)} \right| dt$$

olarak verilir.

Örnek 3.2.1 $b > a > 0$ olmak üzere, sanal eksen üzerindeki ia ve ib noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasının Öklid uzunluğunun $b - a$ birim olduğunu biliyoruz.



Şekil 3.4: Hiperbolik doğru parçası

$I = [0, 1]$ için $\beta : I \rightarrow \mathbb{H}$ eğrisi yukarıdaki noktaları birleştiren doğru parçası olmak üzere, bu eğri $\beta(t) = (0, (b - a)t + a)$ parametrik denklemine sahiptir. Bu eğrinin hiperbolik uzunluğu;

$$\begin{aligned} |\beta|_H &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{0 + (b - a)^2}}{(b - a)t + a} dt \\ &= \int_0^1 \frac{b - a}{(b - a)t + a} dt = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.1 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ bir eğri ve $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ ise $|T \circ \gamma|_H = |\gamma|_H$ dir.

İspat: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$) olsun. O halde,

$$\frac{dT}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

dır. $z = x + iy$, $T(z) = u + iv$ olarak alınırsa (2.4.6) denklemi gereğince

$$v = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

elde edilir ve buradan

$$\left| \frac{dT}{dz} \right| = \frac{v}{y}$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned} |T \circ \gamma|_H &= \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dt} \right| dt}{v} = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dz} \frac{dz}{dt} \right| dt}{v} \\ &= \int_0^1 \frac{v \left| \frac{dz}{dt} \right| dt}{yv} = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right| dt}{y} = |\gamma|_H \end{aligned}$$

bulunur. □

Şimdi, z_1 ve z_2 hiperbolik düzlemde iki farklı nokta olmak üzere bu iki noktayı birleştiren ve hiperbolik uzunluğu en küçük olan eğrinin tek olduğunu göstereceğiz. Bu özellikteki bir eğriye z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren *hiperbolik doğru parçası* denir.

Teorem 3.2.2 *Hiperbolik düzlemde iki farklı noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçası vardır.*

İspat:

1. Durum: $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ve bu noktaların reel kısımları sıfır olsun. O halde noktalar $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_1 = ia$, $z_2 = ib$ şeklindedirler. Genellik bozulmayacağından $b > a$ kabul edebiliriz. Sanal eksenin z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasına γ diyelim. Bu doğru parçasının hiperbolik uzunluğunun $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ olduğunu biliyoruz.

γ^* eğrisi z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren γ dan farklı bir başka eğri olsun. Bu durumda,

$$\gamma^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, \quad \gamma^*(t) = (x(t), y(t)), \quad (t \in [0, 1])$$

şeklindedir ve en az bir $t_0 \in [0, 1]$ için $x(t_0) \neq 0$ dir. O halde;

$$\begin{aligned} |\gamma^*|_H &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt > \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a} = |\gamma|_H \end{aligned}$$

bulunur ve $|\gamma^*|_H > |\gamma|_H$ olduğu görülür. O halde, z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası bu iki noktayı birleştiren Öklid doğru parçasıdır.

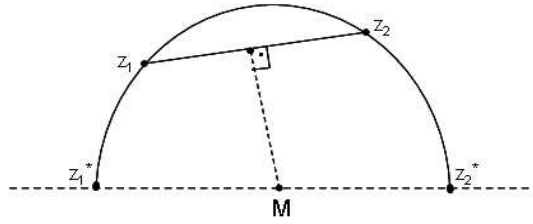
Eğer z_1 ve z_2 noktaları hiperbolik düzlemde reel kısımları aynı fakat sıfırdan farklı olan noktalar ise bu noktalar $T(z) = z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şeklinde bir dönüşüm ile sanal eksen üzerine taşınabilirler. $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ olduğundan yukarıdaki açıklamalar ve Teorem 3.2.1 gereğince, z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçası olduğu görülür.

2. Durum z_1 ve z_2 noktaları hiperbolik düzlemde reel kısımları farklı olan iki nokta olsun. Bu durumda, merkezi reel eksen üzerinde bulunan ve bu noktalardan geçen bir tek C çemberi vardır. Bu çemberin reel eksenini kestiği noktalar z_1^* ve z_2^* olsun. Teorem 2.4.2 gereğince $T(z_1^*) = 0$ ve $T(z_2^*) = \infty$ olacak şekilde bir $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşümü vardır. Ayrıca, Möbius dönüşümleri çemberler ve doğruları, çemberler ve doğrulara resmettikleri için $T(C)$ sanal eksenin hiperbolik düzlemde kalan kısmıdır ve $T(z_1)$ ile $T(z_2)$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçasıdır. T , hiperbolik doğru parçalarını hiperbolik doğru parçalarına resmettiği için z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası C çemberinin bu iki noktayı birleştiren yayıdır.

Yani, her iki durumda da bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçası vardır.

□

Sonuç 3.2.1 *Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğru parçaları, reel eksene dik olan Öklid doğru parçaları ve reel eksenine dik kesen Öklid çemberlerinin yaylarıdır.*



Şekil 3.5: İki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçası

z ve w hiperbolik düzlemde iki nokta olmak üzere bu iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık bu noktaları birleştiren hiperbolik doğru parçasının uzunluğu olarak tanımlanır ve $\rho(z, w)$ ile gösterilir. Bu şekilde elde edilen $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu \mathbb{H} üzerinde bir metriktir ve *hiperbolik metrik* olarak adlandırılır.

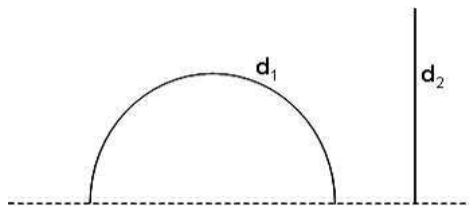
Teorem 3.2.3 \mathbb{H} üzerinde hiperbolik metrik ile Öklid metriği aynı topolojiyi üretirler.

İspat: [5].

□

3.3 Hiperbolik Doğrular

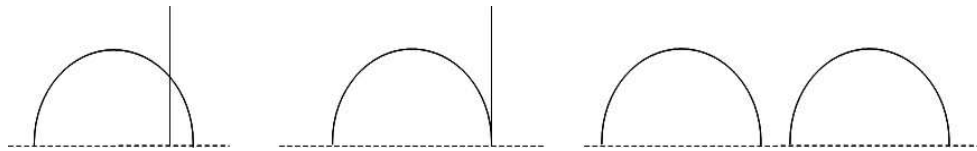
Reel ekseni dik kesen çemberler ve Öklid doğrularının hiperbolik düzlemde kalan kısımlarına hiperbolik doğrular denir. Şekil 3.6'da gösterilen d_2 doğrusunun bir ucu reel eksen üzerindedir, diğer ucunun ise sonsuzda olduğunu kabul edilir.



Şekil 3.6: Hiperbolik doğrular

Tanım 3.3.1 d_1 ve d_2 iki farklı hiperbolik doğru olsun. Bu durumda;

- (i) d_1 ve d_2 doğrularının hiperbolik düzlemde bir tek ortak noktaları varsa doğrular kesişirler. (Şekil 3.7)
- (ii) d_1 ve d_2 doğrularının $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bir tek ortak noktaları varsa doğrular paraleldirler. (Şekil 3.7)
- (iii) d_1 ve d_2 doğrularının \mathbb{H} ve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ da hiçbir ortak noktaları yoksa bu doğrular ayrık paraleldirler. (Şekil 3.7)



Şekil 3.7: Kesişen, paralel ve ayrık paralel hiperbolik doğrular

3.4 Hiperbolik Düzlemde İzometriler:

$\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ hiperbolik düzlemin üst yarı düzlem modeli olmak üzere bu küme üzerinde tanımlı ρ fonksiyonunun bir metrik olduğunu biliyoruz.

Tanım 3.4.1 $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ fonksiyonu her $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ için $\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$ eşitliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna hiperbolik düzlem üzerinde bir *izometri* denir.

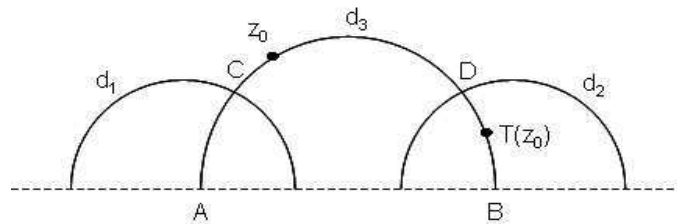
Hiperbolik düzlemin izometrileri yansımalar, ötelemeler, dönmeler, ötelemeli yansımalar ve limit rotasyonlardır. Bunlardan yansımalar ve ötelemeli yansımalar yönlenmeyi korumayan izometriler, ötelemeler, dönmeler ve limit rotasyonlar yönlenmeyi koruyan izometriler olarak adlandırılırlar.

Teorem 3.4.1 *Hiperbolik düzlemin yönlenmeyi koruyan izometrileri çift sayıda yansımının, yönlenmeyi korumayan izometrileri tek sayıda yansımının bileşkesi olarak ifade edilebilirler.*

İspat: [8]. □

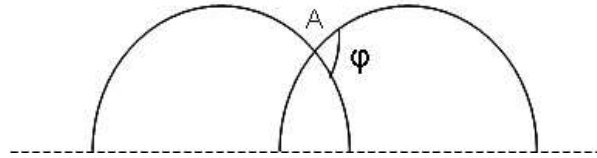
Yansıma: d hiperbolik düzlemde bir doğru olsun. d reel eksenine dik kesen bir yarı doğru veya bir yarım çemberdir. d bir yarı doğru ise bunun üzerindeki yansıma Öklid düzlemindeki yansıma ile aynıdır. d bir yarım çember ise bunun üzerindeki yansıma d üzerindeki inversiyondur.

Öteleme: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde ayrık paralel iki doğru olsun. Bu durumda d_1 ile d_2 doğrularının birtek ortak dikmesi vardır, buna d_3 diyelim. d_1 , d_2 ve d_3 doğrularının konumları Şekil 3.8'de görüldüğü gibi olsun ve C , D noktaları arasındaki uzaklığa α diyelim. T_1 , T_2 dönüşümleri sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olsunlar. $T = T_2 \circ T_1$ dönüşümü d_3 ortak dikmesi boyunca bir ötelemedir. T hiperbolik düzlemde A ve B noktaları dışındaki hiçbir noktayı sabit tutmaz. z_0 , d üzerinde bir nokta olmak üzere T , z_0 noktasını d_3 doğrusu üzerinde 2α kadar öteler. T dönüşümü d_3 ortak dikmesini küme olarak sabit tutar. T dönüşümünün tersi olan $T^{-1} = T_1 \circ T_2$ dönüşümü de d ortak dikmesi boyunca bir ötelemedir ve T ile benzer özelliklere sahiptir. Ancak T ötelemesi d_3 doğrusu üzerindeki noktaları A noktasından B noktasına doğru ötelerken T^{-1} ötelemesi tam tersi yönde öteler. Her iki ötelemede de öteleme mesafesi 2α dır.



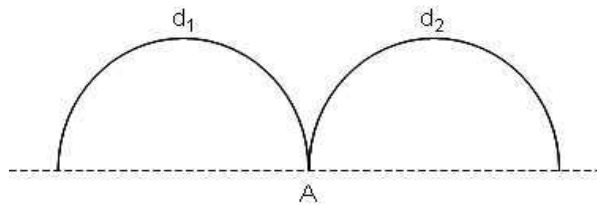
Şekil 3.8: Hiperbolik düzlemde öteleme

Rotasyon: d_1 ve d_2 doğruları hiperbolik düzlemde aralarındaki açı φ olacak şekilde bir A noktasında kesişsinler. T_1 ve T_2 sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutan bir rotasyondur. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü bu dönüşümün tersidir ve T rotasyonu ile benzer özelliklere sahiptir. Bu rotasyonlar hiperbolik düzlemde A noktası haricindeki noktaları bu nokta etrafında birbirinin tersi yönde, 2φ kadar döndürürler.



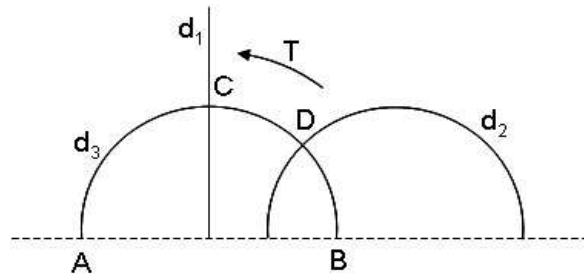
Şekil 3.9: Hiperbolik düzlemde rotasyon

Limit Rotasyon: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde paralel iki doğru olsun. Bu doğruların sonsuzda kesiştikleri nokta A noktası olsun. d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla T_1 ve T_2 olmak üzere, $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutar ve bu dönüşüm A noktasını sabit tutan bir limit rotasyon olarak adlandırılır. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü T dönüşümünün tersidir ve yine A noktasını sabit tutan bir limit rotasyondur. Bu dönüşümler A noktasından geçen hiperbolik doğruları yine bu noktadan geçen hiperbolik doğrulara resmederler ve hiçbir hiperbolik doğruyu sabit tutmazlar.



Şekil 3.10: Hiperbolik düzlemde limit rotasyon

Ötelemeli Yansıma: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde ayrıık paralel iki doğru ve d_3 , bu iki doğruyu sırasıyla C ve D noktalarında dik kesen başka bir hiperbolik doğru olsun. Ayrıca d_3 doğrusunun uç noktaları A ve B olsun. T_1, T_2 ve T_3 dönüşümleri sırasıyla d_1, d_2 ve d_3 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ dönüşümü d_3 doğrusu boyunca bir ötelemeli yansımadır. Bu dönüşüm, d_3 doğrusunu kendi üzerine resmeder ve bu doğrunun uç noktalarını sabit tutar. z_0, d_3 doğrusu üzerinde bir nokta ise $T(z_0)$ noktası da d_3 doğrusu üzerindedir ve bu iki nokta arasındaki uzaklık C ve D noktaları arasındaki uzaklığın iki katı kadardır. T dönüşümü hiperbolik düzlemde d_3 doğrusu haricinde hiçbir doğruyu sabit tutmaz. T^{-1} dönüşümü T dönüşümü ile benzer özelliklere sahiptir fakat öteleme yönleri birbirlerinin tersidir.



Şekil 3.11: Hiperbolik düzlemde ötelemeli yansıma

3.5 Hiperbolik Alan ve Gauss-Bonnet Formülü

$A \subset \mathbb{H}$ olsun. A kümesinin hiperbolik alanı;

$$\mu(A) = \int \int_A \frac{dx dy}{y^2}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.5.1 $A \subset \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda, $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ için $\mu(T(A)) = \mu(A)$ dir.

İspat: [5]. □

n kenarlı bir hiperbolik çokgen, n tane hiperbolik doğru parçasıyla sınırlanan ve $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi içinde kalan kapalı bir kümedir. Bir hiperbolik çokgenin hiçbir kenarı \mathbb{R} üzerinde bulunamaz. Köşeleri ise hiperbolik düzlemde veya $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde bulunabilir.

Bir hiperbolik üçgenin $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde kalan köşesine karşılık gelen iç açının ölçüsü sıfırdır.

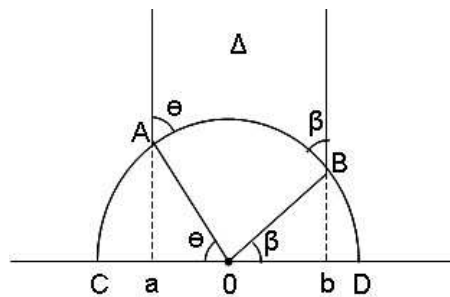
Teorem 3.5.2 Δ , iç açılarının ölçüleri α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. Bu durumda, Δ üçgeninin hiperbolik alanı,

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

formülü ile bellidir.

İspat: 1. Durum:

Δ , iki kenarı reel eksene dik yarı doğrular ve üçüncü kenarı reel eksene dik bir yarı çember üzerinde bulunan bir hiperbolik üçgen olsun. Bu yarı çembere, gerektiğinde $z \mapsto z + \kappa$ ($\kappa \in \mathbb{R}$) ve $z \mapsto \lambda z$ ($\lambda > 0$) dönüşümleri uygulanarak yarıçapı bir birim, merkezi orijin olan yarı çember elde edilebilir. Teorem 3.5.1 gereğince bu dönüşümler altında Δ üçgeninin alanı değişmez. Şekil 3.12’de gösterilen A ve B noktalarından geçen



Şekil 3.12: Hiperbolik üçgen

hiperbolik doğrular sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ doğruları olmak üzere,

$$\mu(\Delta) = \int \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

elde edilir.

$0 \leq \phi \leq \pi$ için $x = \cos \phi$ değişken değiştirmesi yapılırsa Δ üçgeninin alanı,

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\theta}^{\beta} \frac{-\sin \phi d\phi}{\sin \phi} = \pi - \theta - \beta$$

olarak bulunur.

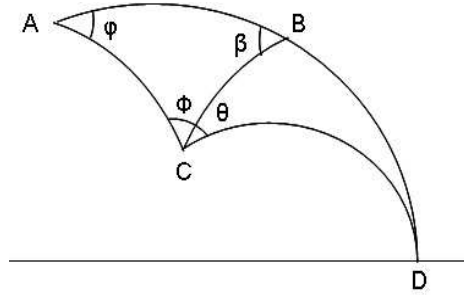
2. Durum:

Δ hiperbolik üçgeni, bir köşesi reel eksen üzerinde bulunan bir üçgen olsun. Bir izometri dönüşümü ile üçgenin bu köşesi sonsuza taşınabilir. Teorem 3.5.1 gereğince üçgenin alanı ve iç açılarında bu dönüşüm altında bir değişiklik olmaz. Üçgenin sıfırdan farklı olan iç açıları θ ve β olmak üzere, üçgenin alanı birinci durum gereğince $\mu(\Delta) = \pi - \theta - \beta$ şeklinde bulunur.

3. Durum:

Δ hiperbolik üçgeninin $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde hiçbir köşesi bulunmasın. Bu üçgen,

Şekil 3.13'te gösterilen köşeleri A, B, C olan üçgen olmak üzere, üçgenin AB kenarını içeren hiperbolik doğrunun $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi ile arkesiti D noktası olsun. O halde, Δ_1 köşeleri A, C, D olan hiperbolik üçgen, Δ_2 , köşeleri B, C, D olan hiperbolik üçgen olmak üzere Δ hiperbolik üçgeni $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ olarak ifade edilebilir. Birinci durum gereğince bu



Şekil 3.13: Hiperbolik üçgen

hiperbolik üçgenin alanı,

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) \\ &= \pi - \varphi - (\theta + \phi) - [\pi - \theta - (\pi - \beta)] \\ &= \pi - \varphi - \beta - \phi \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Yukarıdaki teorem Gauss-Bonnet formülü olarak ta bilinir.

Tanım 3.5.1 $Y \subset \mathbb{H}$ ve $y_0 \in Y$ olsun. Y kümesinin herhangi bir noktasını bu noktaya birleştiren hiperbolik bir doğru parçası tamamen kümenin içinde kalıyorsa bu Y kümesine *yıldızıldır* denir.

Sonuç 3.5.1 F , iç açtı ölçüleri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ olan n kenarlı bir hiperbolik yıldızıldır çokgen olsun. F çokgeninin hiperbolik alanı,

$$\mu(F) = (n - 2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n$$

dır.

İspat: Teorem 3.5.2'nin ispatının genelleştirilmesi ile elde edilir. □

4. NEC (NON-EUCLIDEAN CRYSTALLOGRAPHIC) GRUPLARI

Daha önce belirtildiği gibi, $PGL(2, \mathbb{R})$ hiperbolik düzlemin tüm izometrilerinin fonksiyonların bileşke işlemine göre oluşturduğu gruptur. Şimdi $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir topolojik grup olduğunu gösterelim. \mathbb{R}^4 , Öklid topolojisi ile birlikte ele alındığında,

$$X = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = \pm 1\}$$

kümesi \mathbb{R}^4 topolojik uzayının bir alt uzayıdır. $\phi: X \rightarrow X$, $\phi(a, b, c, d) = (-a, -b, -c, -d)$ şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü bir homeomorfizmadır. Birim elman ile birlikte ϕ dönüşümü X kümesine etki eden bir G grubu oluşturur.

$PGL(2, \mathbb{R})$ grubunda $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ ve $z \rightarrow \frac{(-a)z+(-b)}{(-c)z+(-d)}$ elemanları aynıdır. Bu nedenle $PGL(2, \mathbb{R})$ ile X kümesi arasında birebir bir eşleme kurulamaz. Eğer X/G bölüm uzayını ele alıp, $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ elemanı X/G bölüm uzayının $\overline{(a, b, c, d)} = \{(a, b, c, d), (-a, -b, -c, -d)\}$ elemanına karşılık getirilirse, $PGL(2, \mathbb{R})$ ile X/G arasında birebir bir eşleme elde edilir. Böylece $PGL(2, \mathbb{R})$ bir topolojik uzay olur. Ayrıca,

$$g: PGL(2, \mathbb{R}) \times PGL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PGL(2, \mathbb{R}), \quad g(\alpha, \beta) = \alpha \circ \beta$$

$$h: PGL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PGL(2, \mathbb{R}), \quad h(\alpha) = \alpha^{-1}$$

dönüşümleri süreklidir. O halde $PGL(2, \mathbb{R})$ bir topolojik gruptur.

Tanım 4.0.1 Γ , $PGL(2, \mathbb{R})$ grubunun ayrık bir alt grubu ve \mathbb{H}/Γ bölüm uzayı kompakt ise Γ grubuna bir *NEC grubu* denir.

4.1 NEC Gruplarının Simgeleri

Herhangi bir Γ NEC grubu,

$$(g, \pm, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad (4.1.1)$$

şeklinde bir simgeye sahiptir. [6].

Yukarıdaki (4.1.1) simgesinde g , negatif olmayan bir tamsayıdır ve \mathbb{H}/Γ bölüm uzayının

cinsini verir. Grubun bölüm uzayı yönlendirilebilir ise simgede +, yönlendirilemez ise – işareti kullanılır. Simgedeki m_1, \dots, m_r sayıları birden büyük tamsayılar olup gruptaki üretici durumundaki dönmelerin mertebelerini gösterirler. Benzer şekilde, n_{11}, \dots, n_{ks_k} sayıları da birden büyük tamsayılardır ve grupta üretici durumunda olmayan dönmelerin mertebelerini gösterirler.

Simgesi,

$$(g, +, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad (4.1.2)$$

biçiminde olan bir NEC grubunun ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Üreticiler:

x_1, x_2, \dots, x_r (Dönmeler)

e_1, e_2, \dots, e_k (Ötelemeler)

$c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1s_1}, \dots, c_{k0}, c_{k1}, \dots, c_{ks_k}$ (Yansımalar)

$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (Ötelemeler)

Bağıntılar:

$$x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \dots = x_r^{m_r} = 1$$

$$c_{1s_1} = e_1^{-1} c_{10} e_1, \dots, c_{ks_k} = e_k^{-1} c_{k0} e_k$$

$$c_{10}^2 = c_{11}^2 = \dots = c_{ks_k}^2 = (c_{10} c_{11})^{n_{11}} = (c_{11} c_{12})^{n_{12}} = \dots = (c_{ks_{k-1}} c_{ks_k})^{n_{ks_k}} = 1$$

$$x_1 x_2 \dots x_r e_1 \dots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

Eğer NEC grubunun simgesi,

$$(g, -, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad (4.1.3)$$

şeklinde ise grubun ifadesi şu şekilde verilir.

Üreticiler:

x_1, x_2, \dots, x_r (Dönmeler)

e_1, e_2, \dots, e_k (Ötelemeler)

$c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1s_1}, \dots, c_{k0}, c_{k1}, \dots, c_{ks_k}$ (Yansımalar)

a_1, \dots, a_g (Ötelemeli Yansımalar)

Bağıntılar:

$$x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \dots = x_r^{m_r} = 1$$

$$c_{1s_1} = e_1^{-1} c_{10} e_1, \dots, c_{ks_k} = e_k^{-1} c_{k0} e_k$$

$$c_{10}^2 = c_{11}^2 = \dots = c_{ks_k}^2 = (c_{10} c_{11})^{n_{11}} = (c_{11} c_{12})^{n_{12}} = \dots = (c_{ks_{k-1}} c_{ks_k})^{n_{ks_k}} = 1$$

$$\underline{x_1 x_2 \dots x_r e_1 \dots e_k a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1}$$

4.2 NEC Gruplarının Temel Bölgeleri

Γ bir NEC grubu ve F bu grup için bir temel bölge olsun. F , kompakt bir hiperbolik çokgendir. Eğer Γ grubunun bir elemanı F çokgeninin bir köşesini (kenarını), başka bir köşesine (kenarına) götürüyorsa bu iki köşe (kenar) *denktir* denir.

Grup elemanları tarafından temel bölgenin bazı kenarları noktasal olarak sabit tutulur, bazı kenarları yönlenmeyi koruyacak, bazı kenarları ise yönlenmeyi korumayacak şekilde başka kenarlara eşlenirler. Bu eşleme ile temel bölge üzerindeki denk olan kenarlar ve köşeler uygun şekilde birleştirilirse grubun F/Γ bölüm uzayı elde edilir. Temel bölgenin yönlenme korunacak şekilde eşlenen kenarları γ, γ' ve yönlenme korunmayacak şekilde eşlenen kenarları α, α^* şeklinde adlandırılırsa bu bölgeye bir yüzey sembolü karşılık getirilebilir.

(4.1.2) simgesine sahip bir NEC grubunun temel bölgesi olan çokgen aşağıdaki şekilde bir yüzey sembolüne sahiptir.

$$\xi_1 \xi_1' \xi_2 \xi_2' \dots \xi_r \xi_r' \varepsilon_1 \gamma_{10} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon_1' \varepsilon_2 \gamma_{20} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon_2' \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon_k' \alpha_1 \beta_1' \alpha_1' \beta_1 \dots \alpha_g \beta_g' \alpha_g' \beta_g.$$

Bu sembol ile gösterilen temel bölgenin, ξ_i kenarı ξ_i' kenarına x_i ($i = 1, \dots, r$) dönmesi ile, ε_j kenarı ε_j' kenarına e_j ($j=1, \dots, k$) ötelemesi ile, α_t, β_t kenarları α_t', β_t' kenarlarına a_t, b_t ($t = 1, \dots, g$) ötelemeleri ile eşlenir. Aynı zamanda $\gamma_{10}, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{20}, \dots, \gamma_{ks_k}$ kenarları da $c_{10}, c_{11}, \dots, c_{20}, \dots, c_{ks_k}$ yansımaları tarafından sabit tutulur.

Simgesi (4.1.3) şeklinde olan bir NEC grubunun temel bölgesi,

$$\xi_1 \xi_1' \xi_2 \xi_2' \dots \xi_r \xi_r' \varepsilon_1 \gamma_{10} \dots \gamma_{1s_1} \varepsilon_1' \varepsilon_2 \gamma_{20} \dots \gamma_{2s_2} \varepsilon_2' \dots \varepsilon_k \gamma_{k0} \dots \gamma_{ks_k} \varepsilon_k' \alpha_1 \alpha_1^* \dots \alpha_g \alpha_g^*$$

şeklinde bir yüzey sembolüne sahiptir. Bu çokgen için de yukarıdaki özellikler geçerlidir, ancak yukarıdaki çokgenden farklı olarak bu çokgenin α_i kenarı α_i^* kenarına a_i ($i = 1, \dots, g$) ötelemeli yansıması ile eşlenir.

Tanım 4.2.1 Γ bir NEC grubu olmak üzere bu grubun herhangi bir temel bölgesinin hiperbolik alanı;

$$\mu(\Gamma) = 2\pi \left(\alpha g - 2 + k + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}} \right) \right),$$

formülü ile bulunur. Grup simgesinde $+$ işareti kullanılıyorsa $\alpha = 2$, $-$ işareti kullanılıyorsa $\alpha = 1$ olarak alınır. Ω , Γ grubunun N indeksli bir alt grubu olmak üzere,

$$\mu(\Omega) = N\mu(\Gamma)$$

dır ve bu eşitlik *Riemann-Hurwitz Formülü* olarak bilinir.

Tanım 4.2.2 Yukarıda $PGL(2, \mathbb{R})$ kümesinin bir topolojik grup olduğunu göstermiştik. Benzer şekilde, $PSL(2, \mathbb{R})$ kümesi de bir topolojik gruptur. Bu grubun ayırık bir alt grubuna bir *Fuchs Grubu* denir.

$g \geq 0$ ve $m_1, m_2, \dots, m_r \geq 2$ tamsayılar olmak üzere bir Fuchs grubu,

$$(g; m_1, m_2, \dots, m_r)$$

şeklinde bir simge ile gösterilir. x_1, x_2, \dots, x_r dönmeler ve $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ ötelemeler olmak üzere, grup,

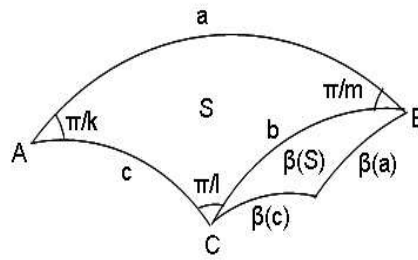
$$x_1^{m_1} = \dots = x_r^{m_r} = x_1 x_2 \dots x_r a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir Fuchs grubunun bölüm uzayının her zaman kompakt olması gerekmez. Bu nedenle her Fuchs grubu bir NEC grubu değildir. Bununla birlikte, bir NEC grubunun yönlenmeyi koruyan bütün elemanları bu grubun bir veya iki indeksli bir alt grubunu oluşturur. Bu alt grup özel olarak bir Fuchs grubudur.

4.3 Üçgensel Gruplar

S , Şekil 4.1'de gösterilen köşeleri A, B, C , kenarları a, b, c ve iç açıları k, l, m birden büyük ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$ özelliğini sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ olan hiperbolik bir üçgen ve bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar sırasıyla α, β ve γ olsun. S hiperbolik üçgeninin b kenarı üzerindeki β yansıması altında



Şekil 4.1: Hiperbolik bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar

görüntüsü $\beta(S)$ hiperbolik üçgenidir. Aynı şekilde S üçgeninin diğer kenarları üzerindeki yansımalar altında da görüntüleri hiperbolik üçgenlerdir. Bu üçgenler kenarları üzerinde tekrar yansıtılır ve bu şekilde devam edilirse hiperbolik düzlem iç açıları $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ olan üçgenlerle kaplanır. S hiperbolik üçgeninin bu yansımalar altında hareketleri düşünüldüğünde $\alpha\beta$ dönüşümü B köşesini sabit tutan m mertebeli, $\gamma\alpha$ dönüşümü A köşesini sabit tutan k mertebeli, $\beta\gamma$ dönüşümü de C köşesini sabit tutan l mertebeli bir dönmedir.

S üçgeninin kenarları üzerindeki bu yansımalar sonlu olmayan bir Γ^* grubu üretir. Bu grubun üreticileri olan dönüşümler yönlenmeyi korumayan dönüşümler oldukları için bu grup bir Fuchs grubu değildir. p hiperbolik düzlemde herhangi bir nokta olmak üzere,

$$\Gamma^*(p) = \{f(p) \mid f \in \Gamma^*\}$$

kümesi p noktasının yörüngesidir. Bu kümenin elemanı olan noktalardan herbiri yukarıdaki üçgenlerden biri üzerinde yer alır. Bu nedenle $\Gamma^*(p)$ kümesi hiperbolik düzlemin ayırık bir alt kümesidir. Yukarıdaki üçgenlerden herbiri Γ^* grubu için bir temel bölgedir ve bu grubun bölüm uzayı topolojik olarak bir diskdir. O halde Γ^* grubu bir

NEC grubudur. Özel olarak bu grup bir *üçgensel NEC grubu* olarak adlandırılır ve grubun simgesi,

$$(0, +, [], \{(k, l, m)\})$$

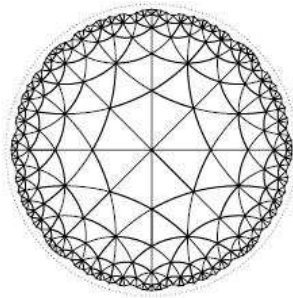
şeklindedir.

$\Gamma = \Gamma^* \cap PSL(2, \mathbb{R})$ alınarak elde edilen Γ grubu sadece yönlenmeyi koruyan elemanlardan oluşur ve Γ^* grubunun iki indeksli bir alt grubudur. Bu grup yukarıda söz edilen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ve $\gamma\alpha$ dönmeleri tarafından üretilen grup ile aynıdır ve bir *üçgensel Fuchs grubu* olarak adlandırılır. Γ grubu için yukarıdaki üçgenlerden ortak kenara sahip olan herhangi ikisi veya bazı özel durumlar için herbiri bir temel bölge olarak alınabilir ve grubun bölüm uzayı topolojik olarak bir küredir. Bu grubun simgesi,

$$(0; k, l, m)$$

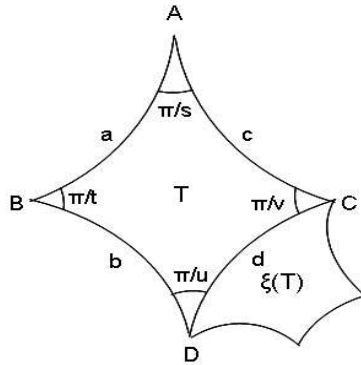
şeklindedir.

Örnek 4.3.1 İç açıları $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ olan hiperbolik bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar, simgesi $(0, +, [], \{(3, 3, 4)\})$ olan bir üçgensel NEC grubu üretir. Şekil 5.1'de gösterilen üçgenlerden herhangi birisi bu grup için bir temel bölgedir.



Şekil 4.2: Hiperbolik düzlemin iç açıları $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ olan üçgenler ile kaplanması

4.4 Dörtgensel Gruplar



Şekil 4.3: Hiperbolik bir dörtgenin kenarları üzerindeki yansımalar

T , Şekil 4.3'de gösterilen köşeleri A, B, C, D ; kenarları a, b, c, d ve iç açıları s, t, u, v birden büyük ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} < 2$ özelliğini sağlayan tamsayılar olmak üzere $\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{u}, \frac{\pi}{v}$ olan bir hiperbolik dörtgen ve bu dörtgenin kenarları üzerindeki tanımlı yansımalar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ olsun. T dörtgeninin ξ yansıması altındaki görüntüsü Şekil 4.3'te görüldüğü gibi $\xi(T)$ hiperbolik dörtgenidir. Aynı şekilde, bu hiperbolik dörtgenin diğer kenarları üzerinde tanımlı yansımalar altında da görüntüleri hiperbolik dörtgenlerdir. Bu işlem yeni dörtgenler ile tekrarlı olarak yapılırsa, hiperbolik düzlem iç açıları $\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{u}, \frac{\pi}{v}$ olan dörtgenlerle kaplanabilir.

T hiperbolik dörtgeninin kenarları üzerinde tanımlı bu yansımalar sonlu olmayan bir Q^* grubu üretir. Yukarıdaki dörtgenlerden herhangi biri bu grup için bir temel bölgedir ve bu grubun bölüm uzayı topolojik olarak bir disklerdir. Bu durumda, Q^* grubu bir NEC grubudur ve özel olarak bir *dörtgensel NEC grubu* olarak adlandırılır. Bu grubun simgesi,

$$(0, +, [], (s, t, u, v))$$

şeklindedir.

Bu dörtgenin hareketleri ele alındığında $\alpha\beta$, B köşesini sabit tutan t mertebeli; $\beta\xi$, D köşesini sabit tutan u mertebeli; $\xi\gamma$, C köşesini sabit tutan v mertebeli ve $\gamma\alpha$, A köşesini sabit tutan s mertebeli bir dönmelerdir. Bu dönmelerin ürettiği grup Q grubu olmak

üzere bu grup sadece yönlenmeyi koruyan elemanları içerdiğinden, $Q = Q^* \cap PSL(2, \mathbb{R})$ şeklinde ifade edilebilir. Q grubu Q^* grubunun iki indeksli bir alt grubudur ve bu grup bir *dörtgensel Fuchs grubu* olarak adlandırılır. Q grubunun simgesi,

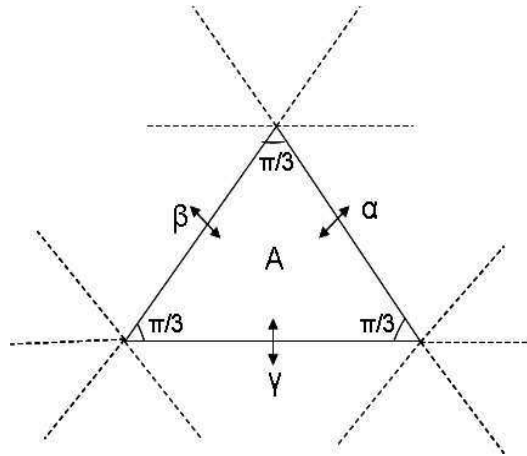
$$(0; s, t, u, v)$$

şeklindedir.

4.5 Öklid Düzleminde Üçgensel ve Dörtgensel Gruplar

Öklid düzleminde de üçgensel ve dörtgensel gruplar tanımlanabilir. Bu düzlemde üçgensel grupların temel bölgeleri olacak olan üçgenlerin iç açıları; k, l, m birden büyük pozitif tamsayılar ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1$ olmak üzere $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ olarak seçilmelidir. Bu nedenle Öklid düzleminde sonlu sayıda üçgensel grup tanımlıdır.

Örneğin, Öklid düzleminde iç açıları $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ olan bir eşkenar üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar bir üçgensel grup üretirler. Bu grubun elemanları altında Şekil 4.4'te gösterilen A üçgeninin görüntüleri olan üçgenler Öklid düzlemini kaplarlar. Grup için bu üçgenlerden herbiri bir temel bölgedir ve grubun simgesi; $(0, +, [], \{(3, 3, 3)\})$



Şekil 4.4: A eşkenar üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar

şeklindedir.

Benzer şekilde Öklid düzleminde iç açıları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ ve $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ olan üçgenlerin kenarları üzerindeki yansımalar da birer üçgensel grup üretirler ve bu grupların simgeleri

sırasıyla $(0, +, [], \{(2, 4, 4)\})$, $(0, +, [], \{(2, 3, 6)\})$ şeklindedirler. Öklid düzleminde bu grupların dışında üçgensel grup yoktur.

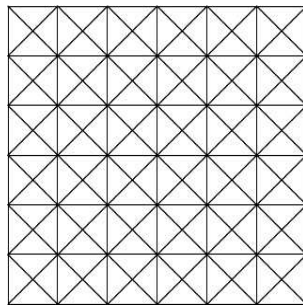
Öklid düzleminde üçgensel gruplar için geçerli olan koşullar, dörtgensel gruplar için de geçerlidir. Bu nedenle Öklid düzleminde iç açıları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ olan dörtgenin kenarları üzerindeki yansımalar tarafından üretilen ve simgesi $(0, +, [], \{(2, 2, 2, 2)\})$ şeklinde olan grubun dışında dörtgensel grup yoktur.

5. HİPERBOLİK DÜZLEMİN KAPLAMALARI

5.1 Giriş

Δ , küre yüzeyinde, Öklid düzleminde veya hiperbolik düzlemde bir çokgen ve bu çokgenin bütün köşelerindeki iç açılar s_i herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $\frac{\pi}{s_i}$ olsun. Bu çokgenin kenarları üzerinde tanımlı yansımalar tekrarlı olarak yapılırsa, çokgenin üzerinde bulunduğu düzlem için bir kaplama elde edilir.

Örneğin, Öklid düzlemi Şekil 5.1'deki iç açıları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ olan üçgenler ile kaplanabilir. Küre yüzeyi iç açıları $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ olan üçgenler ile kaplanabilir. Bu kaplama özel olarak kürenin icosahedral kaplaması olarak adlandırılır. Şekil 5.1 de yapılan kaplamaya benzer



Şekil 5.1: Öklid düzlemin üçgenlerle kaplanması

olarak düzlem farklı şekillerde de kaplanabilir. Merkezinde birleşen dört dik üçgenden veya hipotenüslerinden yapılandırılmış iki dik üçgenden oluşan bir kare ile düzlemin farklı bir kaplaması oluşturulabilir. Bu iki durumda da kaplamada kullanılan kareler bir biri üzerine binmeyen üçgenlerden oluştuğundan kareler ile elde edilen bir kaplama üçgenler ile elde edilen bir kaplamaya bölünebilir. Bu durumda kareler ile elde edilen kaplama *bölünebilirdir* denir ve Δ, Ω söz edilen özellikte üçgen ve kare kaplamalar olmak üzere (Δ, Ω) ikilisi *bölünebilir kaplama ikilisi* olarak adlandırılır. Küre yüzeyinin bölünebilir bir dörtgensel kaplaması yoktur. Öklid düzleminde sonlu sayıda, hiperbolik düzlemde ise sonsuz sayıda bölünebilir dörtgensel kaplama vardır. Bu bölümde bölünebilir dörtgensel

kaplamalar yönünden zengin olan hiperbolik düzlem üzerinde çalışmalar yapılacak ve açıklayıcı olması için öklid düzleminden de örnekler verilecektir.

5.2 Kaplamalar ve Kaplama Grupları

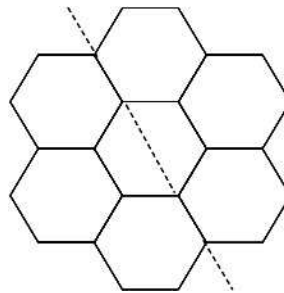
Tanım 5.2.1 Düzlemi birbirleri üzerine binmeden ve hiç boşluk bırakmadan kaplayan çokgenlerin kümesine bu düzlem için bir *kaplama* denir. Kaplamayı oluşturan çokgenlerden herbiri *kaplamanın bir hücresi* olarak adlandırılır.

Hücrelerin köşeleri ve kenarları aynı zamanda kaplamanın da köşeleri ve kenarlarıdır. Genellikle, kaplamanın köşeleri kümesi \mathcal{E} , kenarları kümesi \mathcal{V} ile gösterilir.

Tanım 5.2.2 \mathcal{T} düzlemin bir kaplaması olsun. Her $e \in \mathcal{E}$ için e kenarı üzerinde tanımlı r_e yansıması ortak kenarları e olan iki hücreyi birbirine götürüyor ise \mathcal{T} kaplamasına *simetrik kaplama* denir.

Bir \mathcal{T} simetrik kaplamasının e kenarındaki r_e yansımasının sabit bıraktığı doğru $\{x \mid r_e(x) = x\}$ özelliğindeki noktaların kümesidir. Bu doğru, kaplamanın kenarlarının birleşimi şeklinde bir doğru ise \mathcal{T} kaplamasına *geodesik kaplama* denir.

Simetrik bir kaplama her zaman geodesik bir kaplama olmak zorunda değildir. Örneğin, Şekil 5.2'de gösterilen Öklid düzleminin altıgenler yardımıyla elde edilen kaplaması geodesik olmayan bir simetrik kaplamadır.



Şekil 5.2: Öklid düzleminin altıgenlerle kaplanması

Önerme 5.2.3 $\Delta = P_1P_2\dots P_n$ bir çokgen olmak üzere bu çokgenin iç açıları n_i pozitif tamsayı olmak üzere $\frac{2\pi}{n_i}$ şeklinde ise düzlemin bu çokgen ile elde edilen kaplaması simetrik bir kaplamadır. Bununla birlikte, eğer n_i tamsayısı $n_i = 2m_i$ şeklinde bir çift tamsayı ise çokgenin iç açıları $\frac{\pi}{m_i}$ olur ve düzlemin bu çokgenler ile elde edilen kaplaması geodesik bir kaplamadır.

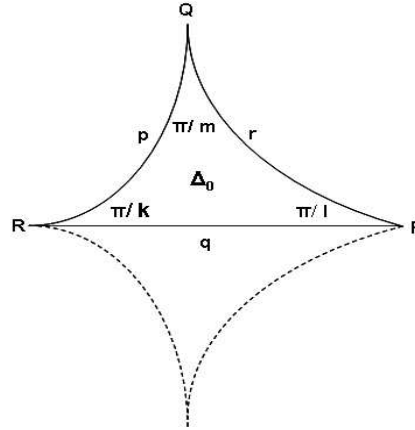
Bir $P_1P_2\dots P_n$ çokgeninin P_i köşesindeki iç açısı $\frac{\pi}{m_i}$ ise bu çokgen kısaca (m_1, m_2, \dots, m_n) -çokgeni olarak adlandırılır ve bu çokgenin P_i köşesinde kaplamayı oluşturan $2m_i$ tane hücre birleşir.

Tanım 5.2.4 \mathcal{T} düzlemin bir kaplaması olsun. Bu kaplamayı oluşturan hücrelerin kenarları üzerindeki yansımalar hücrelerin izometrilерinin bir grubunu oluşturur bu grup düzlemin bir *kaplama grubu* olarak adlandırılır.

Bir kaplama grubu, temel bölgesi hücrelerden herhangi biri ve bölüm yüzeyi topolojik olarak bir disk olan bir NEC grubudur.

Bu grubu üçgensel bir hücre ile tanımlayalım. Daha sonra genel bir çokgen için benzer yoldan tanımlama yapılabilir.

Üçgensel hücrelerden oluşan bir kaplama için tanımlanan kaplama grubu başlangıç hücresi (bakınız Şekil 5.3) olarak adlandırılan üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar tarafından üretildiği için düzlem üzerindeki herhangi bir hücre, grup elemanları altında başlangıç hücresinin bir görüntüsüdür. Şekil 5.3'de gösterilen Δ_0 başlangıç hücresinin kenarları ve bu kenarlar üzerinde tanımlı yansımalar p, q, r olmak üzere bu kenarların karşısındaki köşeler sırasıyla P, Q, R olarak verilsin. Başlangıç hücresi $k, l, m \geq 2$ olmak üzere bir (k, l, m) -üçgenidir. Bu üçgenin kenarları üzerinde tanımlı p, q yansımalarının çarpımı olan $a = p.q$ dönüşümü R noktası etrafında saat yönü tersinde $\frac{2\pi}{k}$ radyanlık bir dönmedir. Benzer şekilde $b = q.r$ ve $c = r.p$ dönüşümleride P, Q noktaları etrafında a dönmesi ile aynı yönlü ve sırasıyla $\frac{2\pi}{l}, \frac{2\pi}{m}$ radyanlık dönmelerdir. Δ_0 başlangıç hücresinin hareketleri incelendiğinde grup elemanları arasındaki ilişkiler ve grubun ifadesi kolayca bulunabilir.



Şekil 5.3: Başlangıç hücresi ve T, T^* gruplarının üreteçleri

p, q, r yansıma dönüşümleri olduklarından,

$$p^2 = q^2 = r^2 = 1$$

dir. Dönme dönüşümlerinin yukarıda ifade edilen özellikleri gereğince,

$$d(a) = k, d(b) = l, d(c) = m$$

ve

$$abc = pqqrrp = 1$$

dir.

Yukarıda tanımı verilen kaplama grubunu T^* ile gösterelim. Bu grup yansımalar tarafından üretilen ve $T^* = (0, +, [], \{(k, l, m)\})$ şeklinde bir simgeye sahip olan bir üçgensel NEC grubudur. a, b, c dönmeleri tarafından üretilen grup $T = (0; k, l, m)$ şeklinde bir simgeye sahip olan üçgensel bir fuchs grubudur ve T grubu T^* grubunun iki indeksli alt grubudur.

Önerme 5.2.5 T^* ve T grupları yukarıdaki \mathcal{F} kaplamasından elde edilen gruplar olsunlar.

i) T^* ve T grupları,

$$T^* = \langle p, q, r \mid p^2 = q^2 = r^2 = (pq)^k = (qr)^l = (rp)^m = 1 \rangle$$

ve

$$T = \langle a, b, c \mid a^k = b^l = c^m = abc = 1 \rangle$$

şeklinde ifade edilebilirler.

ii) T^* grubu, \mathcal{T} kaplamasının hücreleri kümesi üzerinde geçişlidir.

İspat: [2]. □

Geçişlilik özelliğinden dolayı \mathcal{T} kaplamasının herhangi bir Δ hücresi için $g(\Delta_0) = \Delta$ olacak şekilde bir $g \in T^*$ izometrisi vardır. Bu nedenle hücreleri düzgün olan bir kaplamasının herhangi bir hücresinin kenarları ve köşelerinin başlangıç hücresinin hangi kenarı ve köşesinin görüntüsü olduğu kolaylıkla belirlenebilir.

Benzer özellikler (s, t, u, v) dörtgensel başlangıç hücresi ile elde edilen \mathbb{Q} ve \mathbb{Q}^* kaplama grupları için de geçerlidir. Bu gruplar, sırasıyla

$$\mathbb{Q}^* = (0, +, [], \{(s, t, u, v)\})$$

ve

$$\mathbb{Q} = (0; s, t, u, v)$$

simgelerine sahiptirler ve \mathbb{Q}^* grubu dörtgensel NEC grubu, \mathbb{Q} grubu dörtgensel Fuchs grubu olarak adlandırılır. Ayrıca bu gruplar, dörtgensel hücrenin kenarları üzerinde tanımlı x, y, z, w yansımaları için,

$$\mathbb{Q}^* = \langle w, x, y, z \mid w^2 = x^2 = y^2 = z^2 = (wx)^s = (xy)^t = (yz)^u = (zw)^v = 1 \rangle$$

ve $d = wx, e = xy, f = yz, g = zw$ olmak üzere,

$$\mathbb{Q} = \langle d, e, f, g \mid d^s = e^t = f^u = g^v = defg = 1 \rangle$$

şeklinde ifade edilebilirler.

5.3 Bölünebilir Kaplamalar

Tanım 5.3.1 Ω düzlemin simetrik bir kaplaması olsun. Bu kaplamanın hücreleri daha küçük hücrelere bölünerek düzlemin yeni bir simetrik kaplaması oluşturulabiliyorsa Ω kaplamasına *bölünebilir* kaplama denir. Bu durumda, Ω kaplamasının bölünmesiyle elde edilen kaplama Δ olmak üzere (Δ, Ω) ikilisine *bölünebilir kaplama ikilisi* denir.

Yardımcı Teorem 5.3.2 Ω düzlemin simetrik bir kaplaması ve Δ , bu kaplamanın hücrelerinin bölünmesiyle elde edilen düzlemin başka bir simetrik bir kaplaması olsun. Bu durumda Ω nun herbir hücresinin iç açıları $m_i \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\frac{\pi}{m_i}$ şeklindedir ve (Δ, Ω) bölünebilir kaplama ikilisidir.

Uyarı 5.3.1 Ω , düzlemin (s, t, u, v) -dörtgenleri ile oluşturulan bir kaplaması ve Δ , düzlemin (k, l, m) -üçgenleri ile oluşturulan kaplaması olmak üzere (Δ, Ω) ikilisinin bölünebilir kaplama ikilisi olabilmesi için s, t, u, v sayılarından herbiri k, l, m sayılarından birini bölmelidir.

Ω ve Δ düzlemin yukarıdaki özellikte iki kaplaması olmak üzere kaplamayı oluşturan A_t üçgenleri ve A_q dörtgenlerinin alanları Sonuç 3.5 gereğince,

$$\mu(A_t) = \pi \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} \right) = \pi(v(k, l, m))$$

ve

$$\mu(A_q) = \pi \left(2 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) = \pi(v(s, t, u, v))$$

formülleri ile bulunabilir.

Ω kaplamasını oluşturan herbir dörtgenin, Δ kaplamasını oluşturan K tane üçgenin birleşimi şeklinde olduğunu kabul edelim. O halde bir dörtgenin alanı, üçgenin alanının K katıdır. Bu nedenle,

$$2 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = K \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} \right)$$

ve

$$K = \frac{2 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m}} = \frac{\mathfrak{v}(s, t, u, v)}{\mathfrak{v}(k, l, m)}$$

yazabiliriz.

Önerme 5.3.3 Ω , düzlemin (s, t, u, v) -dörtgeleri ile oluşturulan kaplaması ve Δ , düzlemin (k, l, m) üçgenleri ile oluşturulan kaplaması olmak üzere (Δ, Ω) bölünebilir kaplama ikilisi olsun. Bu durumda,

$$K = \frac{\mathfrak{v}(s, t, u, v)}{\mathfrak{v}(k, l, m)} = \frac{2 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m}} \leq 60$$

dır.

İspat: k, l, m sayılarını sabitleyelim. K sayısının en büyük olabilmesi için dörtgenin alanı en büyük değerini almalı yani s, t, u, v sayıları mümkün olduğunca büyük olarak seçilmelidir. s, t, u, v sayılarından herbiri k, l, m sayılarından birini bölmek zorunda olduğundan b sayısı k, l, m sayılarının en büyüğü olmak üzere seçilebilecek en büyük alana sahip dörtgen (b, b, b, b) -dörtgenidir. Hiperbolik düzlemde en küçük alanlı üçgenin $(2, 3, 7)$ -üçgeni olduğunu biliyoruz. [2, Ek A] O halde yukarıdaki şartlar altında dörtgen $(7, 7, 7, 7)$ -dörtgeni olarak alınır, $K = \frac{10}{7/42} = 60$ olarak bulunur. Hesaplamadaki üçgen $(2, 3, 8)$ üçgeni olarak alınır,

$$K = \frac{2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8}} < \frac{2}{1/24} = 48$$

olarak bulunur. □

Şimdi K sayısının bazı değerleri için hangi şartlar altında (Δ, Ω) şeklinde bir bölünebilir kaplama ikilisinin elde edilebileceğini ve bu ikilinin oluşturulabilmesi için hücre elemanlarının iç açılarının nasıl seçilmesi gerektiğini inceleyelim.

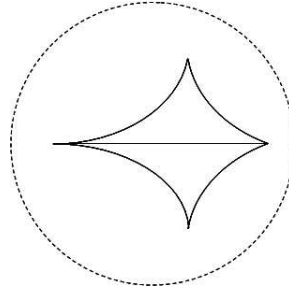
$K = 2$ olsun. Bu durumda,

$$2 \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} \right) = \left(2 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right)$$

ve buna bağılı olarak

$$-\frac{2}{k} - \frac{2}{l} - \frac{2}{m} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$$

olmalıdır. Elde edilen bu şart ve yukarıda verilen şartlar altında kaplamayı oluşturan dörtgenlerin iç açıları d, e, f pozitif tamsayılar olmak üzere $\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{e}, \frac{\pi}{f}$; alt kaplamayı oluşturan üçgenlerin iç açıları $\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{2e}, \frac{\pi}{2f}$ şeklinde seçilebilir. Bu durumda düzlemin (d, d, e, f) -dörtgenleri ve $(d, 2e, 2f)$ -üçgenleri ile oluşturulan kaplamaları için elde edilen (Δ, Ω) ikilisi bir bölünebilir kaplama ikilisi ve kaplamalar için $K = 2$ dir. (Şekil 5.4). Düzlemin bölünebilir bir kaplamasını, $K = 2$ için oluşturan dörtgen ve üçgenlerin iç açıları $\frac{2}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} < 2$ şartını sağlamalıdır. Düzlemin $(d, e, e, f) \subset (2d, e, 2f)$ ve $(d, e, f, f) \subset (2d, 2e, f)$ özelliğindeki dörtgen



Şekil 5.4: $K = 2, (d, 2e, 2f) \subset (d, e, d, f)$

ve üçgenlerle oluşturulan Ω ve Δ kaplamaları için elde edilen (Δ, Ω) kaplama ikilisi için de aynı sonuçlar geçerlidir.

$K = 3$ olsun. Bu durumda, düzlemin kaplamaları için iki farklı dörtgensel hücre ve buna bağılı olarak iki farklı üçgensel hücre seçilebilir. $K = 3$ olması durumunda,

$$3\left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{l} - \frac{1}{m}\right) = \left(2 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)$$

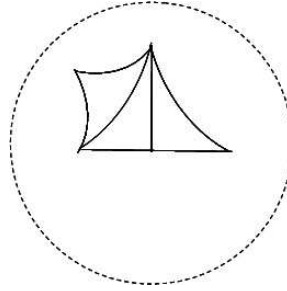
ve buna bağılı olarak

$$1 - \frac{3}{k} - \frac{3}{l} - \frac{3}{m} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$$

dir.

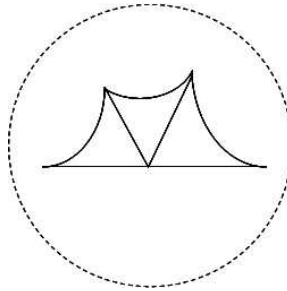
Bu şartlar altında kaplamayı oluşturan dörtgenlerin iç açıları $d \geq 2, e \geq 2$ özelliğinde pozitif tamsayılar olmak üzere $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{2d}, \frac{\pi}{e}$; alt kaplamayı oluşturan üçgenlerin iç açıları

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2d}, \frac{\pi}{3e}$ şeklinde seçilebilir. Bu özellikteki dörtgenler ve üçgenler için oluşturulan kaplamalar için elde edilen (Δ, Ω) ikilisi bölünebilir kaplama ikilisidir ve bu kaplama için $K = 3$ tür. (Şekil 5.5).



Şekil 5.5: $K = 3, (2, 2d, 3e) \subset (2, d, 2d, e)$

Aynı K değeri için düzlemin kaplamasını oluşturan dörtgenlerin iç açıları $\frac{\pi}{2d}, \frac{\pi}{2e}, \frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{e}$ şeklinde ve alt kaplamasını oluşturan üçgenlerin iç açıları $\frac{\pi}{2d}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2e}$ şeklinde seçilebilir. İlk durum ile benzer olarak bu kaplamalar için elde edilen (Δ, Ω) sıralı ikilisi bir bölünebilir kaplama ikilisidir. (Şekil 5.6).



Şekil 5.6: $K = 3, (2d, 3, 2e) \subset (2d, 2e, d, e)$

Benzer işlemler tekrar edilir ise hiperbolik düzlemin farklı K değerleri için bölünebilir kaplama ikilileri elde edilebilir. Tablo 5.1'de bu kaplamalar ve bazı ek özellikler verilmiştir. [2].

Çizelge 5.1: Hiperbolik düzlemin bölünebilir kaplamaları

Δ	Ω	Kısıtlama	K
$(d, 2e, 2f)$	(d, e, d, f)	$\frac{2}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} < 2$	2
$(2, 2d, 3e)$	$(2, d, 2d, e)$	$d \geq 2, e \geq 2$	3
$(3, 2d, 3e)$	$(d, e, 2d, 2e)$	$\frac{1}{d} + \frac{1}{e} < \frac{4}{3}$	3
$(2, 2d, 2e)$	(d, e, d, e)	$d \geq 2, e \geq 2$	4
$(2, 2d, 4e)$	$(d, 2d, e, 2d)$	$d \geq 2, e \geq 2$	4
$(2, 3d, 3e)$	$(d, 3d, e, 3e)$	$\frac{1}{d} + \frac{1}{e} < \frac{3}{2}$	4
$(2, 4, 2d)$	$(2, 2, d, d)$	$d \geq 3$	4
$(3, 3, 2d)$	$(3, d, 3, d)$	$d \geq 2$	4
$(3, 3, 3d)$	$(3, d, 3, 3d)$	$d \geq 2$	4
$(2, 4, 6d)$	$(2, 4, 2d, 3d)$	$d \geq 1$	5
$(2, 5, 2d)$	$(2, d, d, 2d)$	$d \geq 2$	5
$(2, 3, 3d)$	$(2, d, 2, d)$	$d \geq 2$	6
$(2, 3, 4d)$	$(2, 2d, 2, d)$	$d \geq 2$	6
$(2, 4, 3d)$	$(4, 4, d, d)$	$d \geq 2$	6
$(2, 4, 6d)$	$(2, 3d, 6d, 2d)$	$d \geq 1$	6
$(2, 6, 2d)$	$(d, d, 2d, 2d)$	$d \geq 2$	6
$(2, 3, 10d)$	$(2, 5d, 3, 2d)$	$d \geq 1$	7
$(2, 3, 12d)$	$(2, 3d, 3, 4d)$	$d \geq 1$	7
$(2, 3, 4d)$	$(3, d, 3, d)$	$d \geq 2$	8
$(2, 3, 6d)$	$(3, d, 3, 3d)$	$d \geq 2$	8
$(2, 4, 2d)$	(d, d, d, d)	$d \geq 3$	8
$(2, 4, 2d)$	$(2, 2, d, d)$	$d \geq 3$	8
$(2, 4, 3d)$	$(d, 3d, d, 3d)$	$d \geq 1$	8
$(2, 4, 4d)$	$(d, 4d, 2d, 4d)$	$d \geq 2$	8
$(2, 3, 12d)$	$(2, 4d, 6d, 3d)$	$d \geq 1$	9
$(2, 3, 15d)$	$(2, 3d, 15d, 5d)$	$d \geq 1$	9
$(2, 3, 6d)$	$(2, d, 6d, 3d)$	$d \geq 2$	9
$(2, 3, 14d)$	$(3, d, 14d, 7d)$	$d \geq 1$	10
$(2, 3, 20d)$	$(3, 4d, 20d, 5d)$	$d \geq 1$	10
$(2, 3, 30d)$	$(3, 10d, 15d, 6d)$	$d \geq 1$	10
$(2, 3, 4d)$	$(d, 2d, d, 2d)$	$d \geq 2$	12
$(2, 3, 5d)$	$(d, 5d, d, 5d)$	$d \geq 2$	12
$(2, 3, 6d)$	$(d, 6d, 2d, 3d)$	$d \geq 2$	12
$(2, 3, 8d)$	$(d, 8d, 2d, 8d)$	$d \geq 1$	12

6. SONUÇ

Hiperbolik düzlemi birbiri üzerine binmeden ve hiç boşluk bırakmadan kaplayan çokgenlerin kümesine bu düzlem için bir kaplama denir. Kaplamaya oluşturan çokgenlerden herbirine kaplamanın bir hücresi denir.

Kaplamanın hücrelerinin kenarları üzerindeki tekrarlı yansımalar temel bölgesi hücrelerden birisi ve bölüm uzayı topolojik olarak bir disk olan bir NEC grubu üretirler.

Bu grup üçgensel bir başlangıç hücresi ile oluşturulursa grup üçgensel NEC grubu olarak adlandırılır.

Ancak grup $s, t, u, v \geq 2$ olmak üzere iç açıları $\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{u}, \frac{\pi}{v}$ olan bir dörtgensel başlangıç hücresi ile oluşturulursa grup *dörtgensel NEC grubu* olarak adlandırılır ve

$$(0, +, [], (s, t, u, v))$$

simgesi ile gösterilir.

KAYNAKLAR

- [1] Beardon, A. F. 1983. The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag, xii+337 pp., Newyork, Heidelberg, Berlin.
- [2] Broughton, S. A., Haney, D. M., McKeough, L. T., Myfield, B. S. 2000. Divisible Tilings in the Hyperbolic Plane. **Newyork Journal of Mathematics**, 6:237-283.
- [3] Churchill, R.V., Brown J.W. 1990. Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, xvi+362 pp., Newyork.
- [4] Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, xiv+342 pp., Cambridge.
- [5] Katok, S. 1992. Fuchsian Groups. The University of Chicago Press, 186 p., London.
- [6] Macbeath, A. M. 1967. The Classification of non-Euclidean Plane Crystallographic Groups. **Coad. J. Math**, 19:1192-1205.
- [7] Singerman, D. 1974. On the Structure of non-Euclidean Crystallagraphic Groups. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, 76:233-240.
- [8] Stillwell, J. 1992. Geometry of Surfaces. Springer-Verlag, 216 p., New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest.

ÖZ GEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Mustafa DURMAZ
Doğum Yeri ve Tarihi : Aydın, 09.04.1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Eskişehir Osmangazi Ün.
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
 - SCI
 - Diğer
- b) Bildiriler
 - Uluslararası
 - Ulusal
- c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Adnan Menderes Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. 2005 -

İLETİŞİM

E-posta Adresi : m.durmaz@mynet.com
Tarih : 05.03.2009