ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2012-YL-017

ASAL HALKALAR VE 3 LÜ LİE SİSTEMLER ÜZERİNDE TÜREVLER

Azime TARHAN

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Azime TARHAN tarafından hazırlanan Asal Halkalar ve 3 lü Lie Sistemler Üzerinde Türevler başlıklı tez, 21.06.2012 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	Adnan Menderes Üniv.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Hülya İnceboz GÜNAYDIN	Adnan Menderes Üniv.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Bekir TANAY	Muğla Üniv.	
Üye :			
Üye :			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

21.06.2012

Azime TARHAN

ÖZET

ASAL HALKALAR VE 3 LÜ LİE SİSTEMLER ÜZERİNDE TÜREVLER

Azime TARHAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN
2012, 133 sayfa

Bu tezde, asal ve yarı asal halkalar ile 3 lü Lie sistemler üzerinde tanımlı Jordan türevler üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalarda elde edilen bazı özelliklere yer verilmiştir.

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tez konusu tanıtılmış ve bu konuyla ilgili yapılmış çalışmalar hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezi anlamada ve okumada kolaylık sağlayacak bazı genel bilgilere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Herstein'ın [13] 1956'daki çalışması esas olarak ele alınmış ve karakteristiği 2 ve 3'ten farklı olan asal halkaların Jordan homomorfizmaları incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk iki kısmında herhangi bir halka üzerinde tanımlı her türevin Jordan türev olduğu ve tersinin ne zaman doğru olduğuna ilişkin teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümün üçüncü kısmında genelleştirilmiş Jordan türevin hangi koşullar altında genelleştirilmiş türev olduğuna ilişkin çalışmaya yer verilmiş, dördüncü kısmında ise benzer çalışma genelleştirilmiş Jordan 3'lü türevler için yapılmıştır. Yine bu bölümün son iki kısmında, bir asal halka üzerindeki Jordan (θ, φ)-türev ile yarı asal halkalar üzerindeki genelleştirilmiş Jordan 3 lü (θ, φ)-türevlerin özelliklerine değinilmiştir.

Beşinci bölümde, A. Najati'nin 2009 ve 2010 yıllarında yaptığı çalışmalar incelenmiştir. Jordan türev ve Jordan 3 lü türev kavramları, 3 lü Lie sistemler üzerinde tanımlanmış ve bunların dördüncü bölüme paralel olarak bu sistemler üzerinde sağladıkları özelliklere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler
Asal halka, adi türev, Jordan türev, yarı asal halka, genelleştirilmiş türev, 3 lü Lie sistem.

ABSTRACT

Derivations on Prime Rings and Lie Triple Systems

Azime TARHAN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Asist. Prof. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN
2012, 133 pages

In this thesis, some properties from works which have been done up till now about Jordan derivations of prime and semiprime rings and Lie triple systems are given.

This thesis essentially consists of five chapters.

In the first chapter, subject of the thesis is introduced and a short information about the works, done so far related to this subject, is given. In the second chapter, the general background and results which may help to make the understanding and the reading of this thesis easier is fixed.

In the third chapter , the work of Herstein [13] which is published in 1956 is considered essentially and the Jordan homomorphisms of prime rings whose characteristics are different from 2 ve 3 are studied.

In the first and second section of the fourth chapter, some studies which show that every derivation in rings is a Jordan derivation but each Jordan derivation in rings is a derivation only under some conditions are studied. In the third section of the same chapter, the properties of the ring and conditions for that generalized Jordan derivations in this ring are generalized derivations are given. And in the fourth section of this chapter, a similar work is obtained for the generalized Jordan triple derivations. Again in the last two sections of the same chapter, the properties of the Jordan (θ,φ)-derivation on a prime ring and generalized Jordan triple (θ,φ)-derivations of semiprime rings are mentioned.

In the fifth chapter, A. Najati's 2009 and 2010 papers are studied. Jordan derivation and Jordan triple derivation are defined on the Lie triple systems and in the framework of the fourth chapter, the properties that they satisfy in these systems are given.

Key Words
Prime ring, derivation, Jordan derivation, semiprime ring, generalized derivation, Lie triple system.

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca bana her zaman her konuda yardımcı olup, yol gösteren ayrıca bu çalışmanın oluşmasında değerli bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN'a; tezin yazımı ve biçimlendirilmesinde çokça emeği bulunan hocam sayın Araş. Gör. Berna ARSLAN'a tüm katkılarından dolayı yürekten teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca desteklerini her zaman, her şartta yanımda hissettiğim anneme ve babama göstermiş olduğu sabır ve anlayıştan dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Azime TARHAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$Z(R) = Z$	R halkasının merkezi
char$R$	R halkasının karakteristiği
$[x, y]$	$= xy - yx$ (kommütatör çarpım)
$[x, y, z]$	$= [[x, y], z]$ (üçlü kommütatör çarpım)
$x \circ y$	$= xy + yx$ (Jordan çarpım)
$l(S)$	S kümesinin sol sıfırlayanı
$r(S)$	S kümesinin sağ sıfırlayanı
$ann_l(I)$	I idealinin sol sıfırlayanı
$ann_r(I)$	I idealinin sağ sıfırlayanı
$\sim$	denklik bağıntısı
$\forall$	her
$\exists$	bazı

1. GİRİŞ

Asal halkalarda Jordan homomorfizma kavramı ilk kez 1940-1950'li yıllarda ortaya atılmıştır. I. N. Herstein [13]'daki çalışmasında karakteristiği 2 ve 3'ten farklı olan asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan homomorfizmasının ya bir homomorfizma ya da bir anti-homomorfizma olduğunu göstermiştir.

Asal halkaların türevleri üzerinde ilk çalışma 1957'de E. C. Posner [26] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmasında Posner, herhangi bir halkada türev tanımını; "R bir halka ve d, R halkasının toplamsal bir dönüşümü olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise o zaman d, R halkasının bir adi türevidir." şeklinde vermiş; asal halkaların yapısını, özellikle halkanın değişmeliliğini türev koşulu altında incelemiştir.

Cusack, 1975 yılında yapmış olduğu çalışmada [10] 2-burulmasız olan herhangi bir halka, sıfır bölensiz kommütatöre sahip veya yarı asal halkalar üzerinde tanımlanan her Jordan türevin bir türev olduğunu göstermiştir.

Ayrıca M. Brešar, 1988 yılında yazdığı Jordan Derivations on Semiprime Rings [7] adlı makalesinde 2-burulmasız ve sıfır bölensiz kommütatöre sahip halkalardaki her Jordan türevin bir türev olduğunu göstermiştir.

M. Brešar ve J. Vukman'ın 1991 yılında yapmış oldukları ortak çalışmada [6] karakteristiği 2'den farklı asal halkalardaki her Jordan (θ, φ) türevin aynı zamanda bir (θ, φ) türev olduğu gösterilmiştir. C. K. Liu ve W. K. Shiue, 2007'de [21] asal halkalardaki Jordan (θ, φ) türev çalışmasının ardından bir sonuç niteliğinde "Generalized Jordan triple (θ, ϕ)-derivations on Semiprime Rings" adında bir makale yayınlamışlar ve bu çalışmalarında 2-burulmasız bir yarı asal halkalarda tanımlı her Jordan 3'lü (θ, ϕ)-türevin bir (θ, ϕ) türev olduğunu göstermişlerdir.

Wu Jing ve Shije Lu 2003'teki "Generalized Jordan Derivations on Semiprime Rings and Standard Operator Algebras" [19] adlı çalışmasında öncelikle 2-burulmasız asal halkalar üzerinde tanımlanan her genelleştirilmiş Jordan türevin ve her Jordan 3'lü türevin bir genelleştirilmiş türev olduğunu; ardından 2-burulmasız yarı asal halkalar üzerinde tanımlanan her genelleştirilmiş Jordan türevin bir genelleştirilmiş türev olduğunu göstermiştir.

3'lü Lie sistem kavramı ilk kez N. Jacobson [16] tarafından ortaya atılmıştır. Abbas Najati'nin 2009 yılında yayınlamış olduğu "Jordan θ-Derivations on Lie Triple Systems" [25] adlı çalışmasında L, bir 3'lü Lie sistem olmak üzere L üzerindeki her Jordan θ türevin bir θ-türev olduğu gösterilmiştir.

3'lü Lie sistemler üzerinde bir başka çalışması da 2010 yılında yayınlanan "On Generalized Jordan Derivations of Lie Triple Systems" [24] adlı makalesidir. Abbas Najati bu çalışmasında 3-burulmasız halkalarda her Jordan 3'lü türevin bir θ-türev ve her Jordan 3'lü türevin bir türev olduğunu belirtmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE BAZI TEOREMLER

2.1. Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1 A boş olmayan bir küme olmak üzere $A \times A$'dan A'ya bir fonksiyona A'da bir *ikili işlem* denir.

Tanım 2.1.2 G boş olmayan bir küme olmak üzere $*$, G'de bir ikili işlem olsun.

1. Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$'dir.

2. Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

3. Her $a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır.

Aksiyomları sağlanıyorsa $(G, *)$ cebirsel yapısına bir *grup* denir.

Tanım 2.1.3 $(G, *)$ bir grup olmak üzere her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa $(G, *)$'a *değişmeli grup* denir.

Tanım 2.1.4 $S = \{1, 2, ..., n\}$, n elemanlı bir küme olmak üzere $f : S \to S$ fonksiyonu $1-1$ ve örten ise f'ye *permütasyon* denir. Bir küme üzerindeki permütastonlar, fonksiyonların birleşme işlemine göre bir grup yapısı oluştururlar. Bu şekildeki gruplara *simetrik grup* denir. Kümenin eleman sayısına bağlı olarak S_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 R boş olmayan bir küme olmak üzere $+$ ve $*$ bu küme üzerinde tanımlanmış ikili işlemler olsun.

1. $(R, +)$ değişmeli gruptur.

2. Her $a, b, c \in R$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$'dir.

3. Her $a, b, c \in R$ için $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ ve $(b + c) * a = (b * a) + (c * a)$'dir.

Aksiyomları sağlanıyorsa $(R,+,*)$ cebirsel yapısına *halka* denir.

Tanım 2.1.6 R bir halka olmak üzere $m \in \mathbb{Z}$ ve $x \in R$ olsun. Eğer $mx = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa R 'ye *m-burulmasız halka* denir.

Örnek 2.1.7 R bir halka olsun. Her $x \in R$ için $2x = 0$ iken $x = 0$ ise R, 2-burulmasız bir halkadır.

Tanım 2.1.8 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R'ye *asal halka* denir.

Tanım 2.1.9 R bir halka ve S, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olmak üzere

- $l(S) = \{x \in R \mid xS = (0)\}$ kümesine S kümesinin *sol sıfırlayanı;*
- $r(S) = \{x \in R \mid Sx = (0)\}$ kümesine S kümesinin *sağ sıfırlayanı*

denir.

Tanım 2.1.10 R bir asal halka olsun. I, R 'nin sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. Bu durumda $\mathrm{ann}_l(I) = 0$'dır. Benzer şekilde R'nin sıfırdan farklı bir J sağ ideali için $\mathrm{ann}_r(J) = 0$'dır.

Önerme 2.1.11 [20, Önerme 10.2] R bir halka olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i . R bir asal halkadır.

ii . $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$'dır.

iii . R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

iv . R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 2.1.12 R bir halka ve $a \in R$ olsun. $aRa = (0)$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R'ye bir *yarı asal halka* denir.
Her asal halka bir yarı asal halkadır.

Önerme 2.1.13 R bir yarı asal halka olsun. $a \in Z$ ve $a^2 = 0$ ise $a = 0$'dır.

Tanım 2.1.14 [20] R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olsun. R halkasının herhangi bir I ideali için $I^2 \subseteq Q$ iken $I \subseteq Q$ oluyorsa Q idealine R halkasının bir *yarı asal ideali* denir.
Asal ideal her zaman bir yarı asal idealdir.

Tanım 2.1.15 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^n = 0$ şartını sağlayan bir n pozitif tamsayısı varsa n'ye R'nin *nilpotent elemanı* denir. I, R halkasının bir ideali olsun. B idealinin tüm elemanları nilpotent ise B'ye R halkasının *nil ideali* denir. J, R halkasının bir ideali olsun. Bir n pozitif tamsayısı için $J^n = 0$ eşitliği sağlanıyorsa J idealine R halkasının *nilpotent ideali* denir.
Her nilpotent ideal nil idealdir.

Tanım 2.1.16 [14, Teorem 8.2.5] R, değişmeli bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. R'nin I'yı içeren bütün asal ideallerinin arakesiti, R halkasının bir idealidir. Bu ideale I'nın *radikali* denir. (0) idealinin radikaline, R halkasının *nil radikali* veya *asal radikali* denir.

Tanım 2.1.17 [14] A, bir sol R-modül olsun. $Ann_l(A) = (0)$ ise A'ya *sol faithful modül* denir. Basit bir (sol) faithful modülü varsa R halkasına *(sol) primitif halka* denir. Birimli basit bir halka primitiftir. Primitif bir halka asaldır.

Tanım 2.1.18 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa a elemanına *sol sıfır bölen* ; $ca = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c \in R$ varsa a elemanına *sağ sıfır bölen* denir. Eğer a hem sol sıfır bölen hem de sağ sıfır bölen ise a elemanına *sıfır bölen* denir.

Sıfırdan farklı sıfır bölen bulundurmayan halkaya *sıfır bölensiz halka* denir.

Tanım 2.1.19 R bir halka olsun. Eğer R, birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz ise R'ye *tamlık bölgesi* denir.

Tanım 2.1.20 R bir halka ve M, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$Z(M) \quad = \quad \{r \in R \quad | \, rm = mr, \quad \forall m \in M\}$$

kümesine M'nin R'deki *merkezleyeni* denir. Özel olarak $M = R$ alınırsa

$$Z(R) \quad = \quad \{z \in R \quad | \, xz = zx, \quad \forall x \in R\}$$

kümesine de R halkasının *merkezi* denir ve kısaca Z ile gösterilir. Z, R halkasının bir althalkasıdır.

Önerme 2.1.21 R bir asal halka, a ve b R halkasının herhangi iki elemanı olsun. $a \in Z$ ve $ab \in Z$ ise o zaman $b \in Z$ veya $a = 0$ dır.

Tanım 2.1.22 R herhangi bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere

$$a \circ b \quad = \quad ab + ba$$

ile tanımlanan ifadeye a ile b elemanlarının *Jordan çarpımı* ;

$$[a, b] \quad = \quad ab - ba$$

ifadesine de a ile b elemanlarının *Lie çarpımı* denir.

Tanım 2.1.23 R bir halka ve $T : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(x)y$ ise T dönüşümüne R'nin bir *sol merkezleyeni* denir. Eğer her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x$ ise T dönüşümüne R'nin bir *Jordan sol merkezleyeni* denir.

Benzer şekilde eğer her $x, y \in R$ için $T(xy) = xT(y)$ ise T dönüşümüne R'nin bir *sağ merkezleyeni* denir. Eğer her $x \in R$ için $T(x^2) = xT(x)$ ise T dönüşümüne R'nin bir *Jordan sağ merkezleyeni* denir.

Uyarı 2.1.24 Her sol (sağ) merkezleyen aynı zamanda bir Jordan sol (sağ) merkezleyendir.

Tanım 2.1.25 R bir halka ve $T : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $T(xyx) = T(x)yx$ ise T dönüşümüne R'nin bir *Jordan* 3*'lü sol merkezleyeni* denir.
Benzer şekilde eğer her $x, y \in R$ için $T(xyx) = xT(y)x$ ise T dönüşümüne R'nin bir *Jordan* 3*'lü sağ merkezleyeni* denir.

Uyarı 2.1.26 Her Jordan sol (sağ) merkezleyen aynı zamanda bir Jordan 3'lü sol (sağ) merkezleyendir.

Lemma 2.1.27 R herhangi bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ şeklinde tanımlı kommütatör (Lie) çarpımı her $a, b, c \in R$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

i. [a+b, c]=[a, c]+ [b, c]

ii. [a, b+c]=[a, b]+[a, c]

iii. [ab, c]=a[b, c]+[a, c]b

iv. [a, bc]=[a, b]c+b[a, c]

v. [[a, b], c]+ [[b, c], a]+[[c, a], b]=0

Özel olarak (v)'deki özdeşliğe *Jacobi özdeşliği* denir.

Tanım 2.1.28 R ve R' herhangi iki halka ve $f : R \to R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ise f dönüşümüne bir *halka homomorfizması* ; özel olarak $R = R'$ ise f'ye R'nin bir *endomorfizması* denir. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(y)f(x)$$

ise f dönüşümüne bir *anti-homomorfizma* denir.

Tanım 2.1.29 R ve S herhangi iki halka ve $f : R \to S$ bire-bir ve örten bir halka homomorfizması ise f dönüşümüne bir *izomorfizma* denir ve $R \simeq S$ ile gösterilir. Özel olarak $S = R$ ise f dönüşümüne *otomorfizma* denir. Benzer şekilde $f : R \to S$ bire-bir ve örten bir anti-homomorfizma ise f dönüşümüne bir *anti-izomorfizma* denir. Özel olarak $S = R$ ise f dönüşümü *anti-otomorfizma* denir.

Tanım 2.1.30 R ve R' herhangi iki halka ve $f : R \to R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$f(xy+yx) = f(x)f(y)+f(y)f(x)$$

ise f dönüşümüne bir *Jordan homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.31 K boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\begin{array}{cccccc} + & : & K \times K & \to & K \\ & & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{cccccc} * & : & K \times K & \to & K \\ & & (a,b) & \mapsto & a*b \end{array}$$

işlemleri verilsin.Eğer "$+$" ve "$*$" işlemleri;

1. Her $a, b \in K$ için $a+b \in K$

2. Her $a, b, c \in K$ için $(a+b)+c = a+(b+c)$

3. Her $a \in K$ için $a+0_K = 0_K + a = a$ olacak şekilde $0_K \in K$ vardır.

4. Her $a \in K$ için $a+b = b+a = 0_K$ olacak şekilde $b \in K$ vardır.

5. Her $a, b \in K$ için $a + b = b + a$

6. Her $a, b \in K$ için $a * b \in K$

7. Her $a, b, c \in K$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$

8. Her $a, b, c \in K$ için $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ ve $(b + c) * a = (b * a) + (c * a)$

9. Her $a \in K$ için $a * 1_K = 1_K * a = a$ olacak şekilde $1_K \in K$ vardır.

10. Her $a, b \in K$ için $a * b = b * a$

11. Her $0 \neq a \in K$ için $a * b = b * a = 1_K$ olacak şekilde $b \in K$ vardır.

koşullarını sağlıyorsa $(K, +, *)$ üçlüsüne bir *cisim* denir.

Tanım 2.1.32 R bir halka ve A toplamsal değişmeli grup olsun. Her $r, s \in R$ ve her $a, b \in A$ için

1. $r * (a + b) = (r * a) + (r * b)$

2. $(r + s) * a = (r * a) + (s * a)$

3. $r * (s * a) = (r * s) * a$

olacak şekilde $(r, a) \to r * a$ ile tanımlı $R \times A \to A$ fonksiyonu varsa A'ya bir *sol R-modül* denir. Ayrıca R'nin 1_R birim elemanı var ve her $a \in A$ için $1_R * a = a$ ise A'ya *birimsel sol R-modül* denir.

R bir bölüm halkası ise o zaman bir birimsel sol R-modül bir *(sol) vektör uzayı* olarak adlandırılır.

Benzer şekilde *sağ R-modül* tanımlanabilir. A hem sağ hem de sol R-modül ise A'ya kısaca *R-modül* denir.

Tanım 2.1.33 K bir cisim ve V, K üzerinde n- boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{array}{rcccc} f & : & V \times V \times \ldots \times V & \to & V \\ & & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Her $x_i \in V(i=1,2,...,n)$ ve $c_1,c_2 \in K$ için

$$f(x_1,x_2,...,c_1x_i+c_2x_{i'},...,x_n) \quad = \quad c_1f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)+c_2f(x_1,x_2,...,x_{i'},...,x_n)$$

eşitliği sağlanıyorsa f'ye bir *n-lineer dönüşüm* denir.

Tanım 2.1.34 K bir cisim ve L, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde $[x,y]$ şeklinde yazılacak bir ikili işlem tanımlansın. Bu ikili işlem aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. Her $x,y,z \in L$ ve her $a,b \in K$ için $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$

2. Her $x \in L$ için $[x,x]=0$

3. Her $x,y,z \in L$ için $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

Bu durumda L vektör uzayı $[.,.]$ ikili işlemi ile birlikte bir *Lie cebiri*dir.

Tanım 2.1.35 L bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rccc} [.,.,.]: & L\times L\times L & \to & L \\ & (x,y,z) & \mapsto & [x,y,z] \end{array}$$

dönüşümü her $x,y,z,u,v \in L$ için

1. $[x,x,y]=0$

2. $[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$

3. $[u,v,[x,y,z]]=[[u,v,x],y,z]+[x,[u,v,y],z]+[x,y,[u,v,z]]$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşümle birlikte L'ye bir *3'lü Lie Sistem* denir.
3 'lü Lie sistem kavramı ilk kez N. Jacobson [16] tarafından ortaya atılmıştır .

Uyarı 2.1.36 Her Lie cebiri $[.,.]$ kommütatör çarpımı ile bir 3'lü Lie sistemdir.

Eğer A bir cebir ise $[x,y] = xy - yx$ işlemi A üzerinde bir Lie cebiri yapısı tanımlar. Tersine L herhangi bir 3'lü Lie sistem olmak üzere L, bir Lie cebirinin alt uzayı olur.

Tanım 2.1.37 [2] R bir halka ve J, R'nin bir sağ ideali olsun. Her $r_1, r_2 \in R$, $r_1 \neq 0$ için $r_1 r \neq 0$ ve $r_2 r \in J$ olacak şekilde $r \in R$ varsa J'ye bir *yoğun sağ ideal* denir. R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi $D(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.38 [9] R yarı asal bir halka olsun.
$\mathscr{M} = \{(f,J) | J \in D(R)$ ve $f : J_R \to R_R$ bir sağ R-modül homomorfizması $\}$
kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

$$(f;J) \sim (g;K) \quad :\Leftrightarrow \quad L \subseteq J \cap K$$

olacak şekilde bir $L \in D(R)$ vardır ve L üzerinde $f = g$'dir.
Bir $(f;J) \in \mathscr{M}$ elemanının denklik sınıfı $[f;J]$ ile gösterilsin. Bu denklik sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$[f;J] + [g;K] \quad = \quad [f+g; J \cap K]$$

$$[f;J][g;K] \quad = \quad [fg; g^{-1}(J)]$$

Bu şekilde tanımlanan işlemlerle $\mathscr{M}$'nin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka belirtir. Bu halkaya R'nin *maksimal sağ kesirler halkası (sağ Utumi kesirler halkası)* denir ve $U(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.39 R yarı asal bir halka olsun.
$\mathscr{N} = \{I, R$'nin bir ideali ve $Ann_l(I) = (0)\}$
kümesi çarpım ve sonlu arakesit altında kapalıdır.
$\mathscr{T} = \{(f;J) : J \in \mathscr{N}, f : J_R \to R_R$ sağ R-modül homomorfizması $\}$
kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

$$(f;J) \approx (g;K) \quad :\Leftrightarrow \quad L \subseteq I \cap K$$

olacak şekilde bir $L \in D(R)$ vardır ve L üzerinde $f = g$'dir.

$\{f;J\}, (f;J) \in \mathscr{T}$ elemanının denklik sınıfını göstersin. Denklik sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} \{f;J\} + \{g;K\} &= \{f+g; J \cap K\} \\ \{f;J\}\{g;K\} &= \{fg; KJ\} \end{aligned}$$

Bu şekilde tanımlanan işlemlerle $\mathscr{T}$'nin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka oluşturur. Bu halkaya R'nin *iki yanlı sağ (Martindale) kesirler halkası* denir ve $Q_r(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.40 *$Q_r(R)$'nin $Q(R) = Q_s(R) = \{q \in U(R) | \exists J \in \mathscr{T}$ için $qJ \cup Jq \subseteq R\}$* alt halkasına R'nin *simetrik (Martindale) kesirler halkası* denir. $Q_r(R)$ halkasının merkezine R'nin *genişletilmiş merkezi* denir ve C ile gösterilir. Eğer R bir yarı asal halka ise,
$C = Z(Q_s(R)) = Z(Q_r(R)) = \{q \in U(R) \quad | \quad \forall r \in R \text{ için } qr = rq\}$
biçimindedir. Eğer R asal bir halka ise bu durumda C bir cisimdir.

Eğer bir $\varepsilon \in C$ için $\varepsilon^2 = \varepsilon$ şartı sağlanıyorsa ε elemanına *merkezi idempotent* denir.

2.2. Adi Türevli Halkalar

Asal halkalarda türevler üzerinde ilk çalışma E. C. Posner tarafından [26] 1957 yılında başlatılmıştır. Posner bu çalışmasında aşağıda verilen türev tanımını vererek türevli asal halkaların değişmeliliğini incelemiştir. Son otuz yılı aşkın süredir, bu konu üzerine pek çok çalışma yapılmıştır.

Tanım 2.2.1 $D : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $a, b \in R$ için

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

sağlanıyorsa D'ye *türev* denir.

Tanım 2.2.2 $D : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere eğer her $a \in R$ için

$$D(a^2) = D(a)a + aD(a)$$

eşitliği sağlanıyorsa D'ye *Jordan türev* denir.

Tanım 2.2.3 $D : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $a, b \in R$ için

$$D(aba) = D(a)ba + aD(b)a + abD(a)$$

eşitliği sağlanıyorsa D'ye *Jordan* 3*'lü türev* denir.

Tanım 2.2.4 R bir halka ve D', R üzerinde bir dönüşüm olsun. Her $a, b \in R$ için $D'(a+b) = D'(a) + D'(b)$ ve $D'(ab) = D'(b)a + bD'(a)$ eşitlikleri sağlanıyorsa D' dönüşümüne R nin bir *ters türevi* denir. Ters türev daima bir Jordan türev tanımlar. Fakat genellikle bir türev değildir.

2.3. (θ, φ)- Türevli Halkalar

Tanım 2.3.1 R bir halka ve $\theta, \varphi : R \to R$ birer otomorfizma olsun. $\delta : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$\delta(xy) = \delta(x)\theta(y) + \varphi(x)\delta(y)$$

şeklinde tanımlı δ'ya (θ, φ)*-türev* denir.

Tanım 2.3.2 R bir halka ve $\theta, \varphi : R \to R$ birer otomorfizma olsun. $\delta : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x \in R$ için

$$\delta(x^2) = \delta(x)\theta(x) + \varphi(x)\delta(x)$$

ise δ'ya *Jordan* (θ, φ)*-türev* denir.

Her (θ, φ)-türev aynı zamanda bir Jordan (θ, φ)-türevdir.

Tanım 2.3.3 R bir halka ve $\theta, \varphi : R \to R$ birer otomorfizma olsun. $\delta : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$\delta(xyx) = \delta(x)\theta(y)\theta(x) + \varphi(x)\delta(y)\theta(x) + \varphi(x)\varphi(y)\delta(x)$$

ise δ'ya *Jordan* 3*'lü* (θ, φ)*-türev* denir.

M. Brešar ve J. Vukman [6] her Jordan (θ,φ)-türevin bir Jordan üçlü (θ,φ)-türev olduğunu göstermiştir. Liu ve Shine [21] 2-burulmasız yarı asal halkalarda her Jordan (3'lü) (θ,φ)-türevin bir (θ,φ)-türev olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca genelleştirilmiş Jordan (θ,φ)-türev ve genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev kavramlarını ortaya atmışlardır.

2.4. Genelleştirilmiş Türevli Halkalar

Genelleştirilmiş türev kavramı ilk kez 1991 yılında M. Brešar [8] tarfafından verilmiştir. B. Hvala 1998 yılında yayınladığı çalışmasında [15] genelleştirilmiş türevleri cebirsel açıdan incelemiştir.

Tanım 2.4.1 R bir halka ve $D : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x,y \in R$ için

$$D(xy) \quad = \quad D(x)y + x\alpha(y)$$

olacak şekilde R halkasının bir α türevi varsa D'ye R halkasının bir *genelleştirilmiş türevi* denir ve (D,α) ile gösterilir.

Tanım 2.4.2 R bir halka ve $F : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm ve $D : R \to R$ bir Jordan türev olmak üzere her $x \in R$ için

$$F(x^2) \quad = \quad F(x)x + xD(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa F'ye *genelleştirilmiş Jordan türev* denir.

Tanım 2.4.3 R bir halka, $F : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm ve $D : R \to R$ bir Jordan 3'lü türev olmak üzere her $x,y \in R$ için

$$F(xyx) \quad = \quad F(x)yx + xD(y)x + xyD(x)$$

ise F'ye *genelleştirilmiş Jordan* 3*'lü türev* denir.

Tanım 2.4.4 R bir halka ve $\xi : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$\xi(xy) = \xi(x)\theta(y) + \varphi(x)\delta(y)$$

olacak şekilde bir $\delta : R \to R$ (θ,φ)-türevi varsa ξ'ye *genelleştirilmiş* (θ,φ)*-türev* denir.

Tanım 2.4.5 R bir halka ve $\xi : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. $\delta : R \to R$ bir Jordan (θ,φ) olmak üzere her $x \in R$ için

$$\xi(x^2) = \xi(x)\theta(x) + \varphi(x)\delta(x)$$

ise ξ'ye *genelleştirilmiş Jordan* (θ,φ)*-türev* denir.

Tanım 2.4.6 R bir halka, $\xi : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm ve $\delta : R \to R$ bir Jordan 3'lü (θ,φ) olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$\xi(xyx) = \xi(x)\theta(y)\theta(x) + \varphi(x)\delta(y)\theta(x) + \varphi(x)\varphi(y)\delta(x)$$

ise ξ'ye *genelleştirilmiş Jordan* 3*'lü* (θ,φ)*-türev* denir.

M. Ashraf ve Wafa S. M. Al-Shammakh [1] her genelleştirilmiş Jordan (θ,φ)-türevin bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olduğunu göstermiştir. Liu ve Shiue [21] 2-burunmasız yarı asal halkalarda her genelleştirilmiş Jordan (3'lü) (θ,φ)-türevin bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türev olduğunu ispatlamıştır.

2.5. 3'lü Lie Sistemler Üzerinde Türevler

Tanım 2.5.1 L bir 3'lü Lie sistem ve $\theta : L \to L$ bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olsun. $D : L \to L$ de bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y, z \in L$ için

$$D([x,y,z]) = [D(x),\theta(y),\theta(z)] + [\theta(x),D(y),\theta(z)] + [\theta(x),\theta(y),D(z)]$$

eşitliği sağlanıyorsa D'ye L üzerinde bir θ*-türev* denir.
Eğer $\theta = I_L$ ise D'ye, L bir *türev* denir.

Tanım 2.5.2 L bir 3'lü Lie sistem ve $\theta : L \to L$ bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olsun.
$D : L \to L$ $\mathbb{C}$-lineer dönüşümü her $x, y \in L$ için

$$D([x,y,x]) = [D(x),\theta(y),\theta(x)] + [\theta(x),D(y),\theta(x)] + [\theta(x),\theta(y),D(x)]$$

eşitliğini sağlıyorsa D'ye L üzerinde bir *Jordan θ-türev* denir.
Eğer $\theta = I_L$ ise

$$D([x,y,x]) = [D(x),y,x] + [x,D(y),x] + [x,y,D(x)]$$

olur. Bu durumda D'ye L üzerinde bir *Jordan türev* denir.

Tanım 2.5.3 L bir 3'lü Lie sistem ve $\varphi, \psi : L \to L$ R-lineer dönüşümler olsun.
$D : L \to L$ de bir R-lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y, z \in L$ için

$$D([x,y,z]) = [D(x),\varphi(y),\psi(z)] + [\varphi(x),D(y),\psi(z)] + [\varphi(x),\psi(y),D(z)]$$

ise D'ye L üzerinde bir *(φ,ψ)-türev* denir. Eğer $\varphi = \psi = \theta$ ise (φ,ψ)-türeve *θ-türev* denir. Eger $\varphi = \psi = I_L$ ise (φ,ψ)-türeve *türev* denir.

Tanım 2.5.4 L bir 3'lü Lie sistem ve $D : L \to L$ bir R-lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y \in L$ için

$$D([x,y,x]) = [D(x),\theta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),D(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\varphi(y),D(x)]$$

ise D'ye *Jordan 3'lü (θ,φ)-türev* denir. Eğer $\varphi = \theta$ ise

$$D([x,y,x]) = [D(x),\theta(y),\theta(x)] + [\theta(x),D(y),\theta(x)] + [\theta(x),\theta(y),D(x)]$$

olur ve D'ye *Jordan 3'lü θ-türev* denir. Eğer $\theta = \varphi = I_L$ ise

$$D([x,y,x]) = [D(x),y,x] + [x,D(y),x] + [x,y,D(x)]$$

olur ve D'ye *Jordan 3'lü türev* denir.

Tanım 2.5.5 L bir 3'lü Lie sistem ve $\delta : L \to L$ bir (θ, φ)-türev olsun. $D : L \to L$ bir R-lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y, z \in L$ için

$$D([x,y,z]) \quad = \quad [\delta(x), \theta(y), \theta(z)] + [\varphi(x), \delta(y), \theta(z)] + [\varphi(x), \varphi(y), D(z)]$$

ise D'ye *genelleştirilmiş* (θ, φ)*-türev* denir.

Tanım 2.5.6 L bir 3'lü Lie sistem ve $\delta : L \to L$ bir Jordan 3'lü (θ, φ)-türev ve $D : L \to L$ bir R-lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y \in L$ için

$$D([x,y,x]) \quad = \quad [\delta(x), \theta(y), \theta(x)] + [\varphi(x), \delta(y), \theta(x)] + [\varphi(x), \varphi(y), D(x)]$$

ise D'ye *genelleştirilmiş Jordan* 3*'lü* (θ, φ)*-türev* denir.

3. ASAL HALKALARDA JORDAN HOMOMORFİZMALARI

Bu bölümde I. N. Herstein'ın [13] 1956 yılında yayınlanmış olan "Jordan Homomorphisms" adlı makalesi incelenmiştir. Burada ϕ, R halkasından R' halkasına bir Jordan homomorfizması ve R', karakteristiği 2'den farklı bir halka olarak alınacaktır ve eğer her $x' \in R'$ için $n!x' = 0$ olduğunda $x' = 0$ ise R' halkasının karakteristiği n'den büyüktür şeklinde adlandırılacaktır.

Lemma 3.0.7 *$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ multilineer (çoklu-doğrusal) dönüşümü R halkasından R' halkasına bir dönüşüm ve her $a \in R$ için $f(a, a, ..., a) = 0$ olsun. O zaman*
π, derecesi n olan simetrik grubu taradığında

$$\sum_{\pi}(f_{\pi(1)}, f_{\pi(2)}, ..., f_{\pi(n)}) = 0,$$

her $a, b \in R$ için R''nün karakteristiği $n-1$'den büyük olduğunda

$$f(b, a, ..., a) + f(a, b, ..., a) + ... + f(a, a, ..., b) = 0$$

dır.

Lemma 3.0.8 *Her $a, b \in R$ için $\phi(bab) = \phi(b)\phi(a)\phi(b)$ dir.*

İspat. ϕ bir Jordan homomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned}
\phi\{(ab+ba)b + b(ab+ba)\} &= \phi(ab+ba)\phi(b) + \phi(b)\phi(ab+ba) \\
&= [\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)]\phi(b) + \phi(b)[\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)]
\end{aligned}$$

olup aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\phi\{(ab+ba)b + b(ab+ba)\} &= \phi(ab^2 + bab + bab + b^2a) \\
&= \phi(ab^2 + 2bab + b^2a) \\
&= \phi(ab^2 + b^2a) + 2\phi(bab) \\
&= \phi(a)\phi(b^2) + \phi(b^2)\phi(a) + 2\phi(bab) \\
&= \phi(a)\phi(b)^2 + \phi(b)^2\phi(a) + 2\phi(bab)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu iki eşitlik karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} 2\phi(bab) &= 2(\phi(b)\phi(a)\phi(a)) \\ \Rightarrow 2\phi(bab) - 2(\phi(b)\phi(a)\phi(a)) &= 0 \\ \Rightarrow 2(\phi(bab) - (\phi(b)\phi(a)\phi(a)) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. R, 2-burulmasız bir halka olduğundan

$$\phi(bab) - (\phi(b)\phi(a)\phi(a)) = 0 \Rightarrow \phi(bab) = \phi(b)\phi(a)\phi(a)$$

olur. □

Lemma 3.0.8'de b yerine $b+c$ alınarak bu ifade lineerleştirilirse aşağıdaki sonuca varılır:

Lemma 3.0.9 *Her* $a,b,c \in R$ *için* $\phi(abc+cba) = \phi(a)\phi(b)\phi(c) + \phi(c)\phi(b)\phi(a)$ *dır.*

İspat.

$$\begin{aligned} \phi((b+c)a(b+c)) &= \phi((ba+ca)(b+c)) \\ &= \phi(bab+bac+cab+cac) \\ &= \phi(bab+cac)+\phi(bac+cab) \\ &= \phi(bab)+\phi(cac)+\phi(bac+cab) \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

Diğer taraftan Lemma 3.0.8'den

$$\begin{aligned} \phi((b+c)a(b+c)) &= \phi(b+c)\phi(a)\phi(b+c) \\ &= (\phi(b)+\phi(c))\phi(a)(\phi(b)+\phi(c)) \\ &= (\phi(b)\phi(a)+\phi(c)\phi(a))(\phi(b)+\phi(c)) \\ &= \phi(b)\phi(a)\phi(b)+\phi(b)\phi(a)\phi(c)+\phi(c)\phi(a)\phi(b)+\phi(c)\phi(a)\phi(c) \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

(3.0.1) ve (3.0.2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\phi(bab)+\phi(cac)+\phi(bac+cab) &= \phi(b)\phi(a)\phi(b)+\phi(b)\phi(a)\phi(c)+\phi(c)\phi(a)\phi(b)\\ &\quad +\phi(c)\phi(a)\phi(c)\end{aligned}$$

dir. Bu durumda her $a,b,c\in R$ için

$$\phi(bac+cab) = \phi(b)\phi(a)\phi(c)+\phi(c)\phi(a)\phi(b)$$

elde edilir. □

Lemma 3.0.10 *Her $a,b\in R$ için*

1. $[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]=0$

2. $[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)][\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]=0$

İspat.

1.
$$\begin{aligned} & [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]\\ = \ & \phi(ab)\phi(ab)-\phi(ab)\phi(b)\phi(a)-\phi(a)\phi(b)\phi(ab)+\phi(a)\phi(b)\phi(b)\phi(a)\\ = \ & \phi(ab)^2-\phi(ab)\phi(b)\phi(a)-\phi(a)\phi(b)\phi(ab)+\phi(a)\phi(b)^2\phi(a)\\ = \ & \phi((ab)^2)+\phi(ab^2a)-\phi((ab)ba+ab(ab))\\ = \ & \phi((ab)^2+ab^2a-ab^2a-(ab)^2)\\ = \ & \phi(0)\\ = \ & 0\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & [\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)][\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\\ = \ & \phi(ab)\phi(ab)-\phi(ab)\phi(a)\phi(b)-\phi(b)\phi(a)\phi(ab)+\phi(b)\phi(a)\phi(a)\phi(b)\\ = \ & \phi(ab)^2-\phi(ab)\phi(a)\phi(b)-\phi(b)\phi(a)\phi(ab)+\phi(b)\phi(a)^2\phi(b)\\ = \ & \phi((ab)^2)+\phi(ba^2b)-\phi((ab)ab+ba(ab))\\ = \ & \phi((ab)^2+ba^2b-(ab)^2-ba^2b)\\ = \ & 0\end{aligned}$$

□

Lemma 3.0.11 *Her* $a,b,r \in R$ *için*

$$[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(r)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] \quad = \quad [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi\{(ab-ba)r\}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\phi(r)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] &= \phi(r)\phi(ab)-\phi(r)\phi(a)\phi(b) \\
&= \phi(r)\phi(ab)+\phi(b)\phi(a)\phi(r)-\phi(rab+bar) \\
&= \phi(r)\phi(ab)+\phi(b)\phi(a)\phi(r)-\phi(r(ab)+(ab)r)+\phi((ab-ba)r) \\
&= \phi(r)\phi(ab)+\phi(b)\phi(a)\phi(r)-\phi(r)\phi(ab)-\phi(ab)\phi(r)+\phi((ab-ba)r) \\
&= [\phi(b)\phi(a)-\phi(ab)]\phi(r)+\phi((ab-ba)r)
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(r)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(b)\phi(a)-\phi(ab)]\phi(r) \\
&\quad +[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi((ab-ba)r)
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 3.0.10(1)'den $[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)] = 0$'dır.
Dolayısıyla

$$[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(r)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] \quad = \quad [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]+\phi((ab-ba)r)$$

elde edilir. □ Lemma 3.0.11'de elde edilen eşitlik sağdan $[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]$ ile çarpılıp Lemma 3.0.10(2) kullanılırsa aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 3.0.12 *Her* $a,b,r \in R$ *için*

$$[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba)\phi(r)\phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)] \quad = \quad 0$$

dır.

Lemma 3.0.12'da r yerine $r(ab-ba)$ yazılırsa Lemma 3.0.8'den,

$$\phi(ab-ba)\phi(r)\phi(ab-ba) \quad = \quad \phi((ab-ba)r(ab-ba))$$

elde edilir. Bu durumda Lemma 3.0.12'nın bir sonucu olarak aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 3.0.13 *Her $a,b,r \in R$ için*

$$[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba)\phi(r)\phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] \quad = \quad 0$$

dır.

Teorem 3.0.14 *R bir halka ve R' bir asal halka olmak üzere $\phi : R \to R'$ bir örten Jordan homomorfizması olsun. O halde her $a,b \in R$ için*

$$[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba) \quad = \quad 0$$

veya

$$\phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] \quad = \quad 0$$

dır.

İspat. Her $r' \in R'$ için $\phi(r) = r^{'}$ olacak şekilde $\exists\, r \in R$ vardır.
Buna göre Lemma 3.0.13'den

$$\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba)R'\phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)] \quad = \quad 0$$

dır. O halde $R^{'}$ bir asal halka olduğundan

$$\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba)=0 \quad veya \quad \phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]=0$$

olur. Öncelikle

$$[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba) \quad = \quad 0$$

olma durumu ele alınırsa;

$$\begin{aligned}\phi(ab-ba) &= \phi(ab-ba+ab-ab)\\ &= 2\phi(ab)-\phi(ab-ba)\\ &= 2\phi(ab)-[\phi(a)\phi(b)+\phi(b)\phi(a)]\\ &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]+[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]\phi(ab-ba) &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]+[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]\\ &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]^2+[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]\\ &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]^2+0 \quad (Lemma3.0.10'ten)\\ &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]^2\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)] \quad = \quad 0$$

durumu incelenirse,

$$\begin{aligned}\phi(ab-ba) &= 2\phi(ab)-\phi(ab-ba)\\ &= 2\phi(ab)-[\phi(a)\phi(b)+\phi(b)\phi(a)]\\ &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]+[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]\end{aligned}$$

bulunur ve eşitliğin her iki tarafı sağdan $[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\phi(ab-ba)[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)] &= [\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)][\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]+[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]\\ &= [\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)][\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]+[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]^2\\ &= [\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]^2\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Elde edilen bu sonuçlardan yararlanılarak aşağıdaki teorem verilir :

Teorem 3.0.15 *R bir halka ve R' bir asal halka olmak üzere $\phi : R \to R'$ bir örten Jordan homomorfizması olsun. Bu durumda her $a,b \in R$ için $[\phi(ab)-\phi(a)\phi(b)]^2 = 0$ veya $[\phi(ab)-\phi(b)\phi(a)]^2 = 0$ dır.*

Lemma 3.0.16 *Her $a,b \in R$ için $a^b = \phi(ab)-\phi(a)\phi(b)$ ve $a_b = \phi(ab)-\phi(b)\phi(a)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:*

1. $a^{b+c} = a^b + a^c$ *ve* $a_{b+c} = a_b + a_c$
2. $(a+b)^c = a^c + b^c$ *ve* $(a+b)_c = a_c + b_c$
3. $a^b = -b^a$ *ve* $a_b = -b_a$
4. $a^{2b} = 2a^b$ *ve* $a_{2b} = 2a_b$
5. $a^{-b} = -a^b$ *ve* $a_{-b} = -a_b$

Bundan sonraki kısımda R' bir asal halka ve $\phi : R \to R'$ bir örten Jordan homomorfizması olarak kabul edilecektir. Yukarıda verilen notasyonlar kullanılarak Lemma 3.0.10 yeniden yazılırsa, her $a,b \in R$ için

$$a_b a^b = a^b a_b \quad = \quad 0$$

olur. Ayrıca Teorem 3.0.15 in ifadesi "Her $a,b \in R$ için

$$(a^b)^2 = 0 \quad \text{veya} \quad (a_b)^2 \quad = \quad 0$$

eşitliklerinden biri sağlanır." şeklini alır.

Lemma 3.0.17 *Her $a,b,r \in R$ için $(a_b)^2\phi(r)(a^b)^2 = 0$ dır, yani $(a_b)^2R^{'}(a^b)^2 = 0$ dır.*

$f : R \to R'$ çoklu doğrusal fonksiyonu her $x,y,z,u \in R$ için

$$f(x,y,u,z) \quad = \quad a_x a_y \phi(r) a^u a^z$$

eşitliğiyle tanımlansın. O zaman Lemma 3.0.17'e göre her $b \in R$ için

$$f(b,b,b,b) = a_b a_b \phi(r) a^b a^b = (a_b)^2 \phi(r) (a^b)^2 = 0$$

olur. O halde $f(b,b,b,b) = 0$'dır. Bu durumda Lemma 3.0.7 uygulanabilir. f, dört değişkenli çoklu doğrusal dönüşüm olduğundan Lemma 3.0.7'in ikinci kısmının uygulanması için $\mathrm{char}R' > 3$ kabul edilmelidir. Lemma 3.0.7'de $x = y = b$ ve $u = z = c$ alınırsa;

$$\begin{aligned} S_4 \quad = \quad & \{1,(1234),(1432),(13)(24),(1423),(1324),(12)(34), \\ & (1342),(14)(23),(1243),(123),(132),(124),(142), \\ & (12),(13),(14),(23),(34),(234),(243) \quad \textit{ve} \end{aligned}$$

$$\sum_{\pi} f(x_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, u_{\pi(3)}, z_{\pi(4)}) = 0$$

olduğundan

$$4\{f(b,b,c,c)+f(b,c,c,b)+f(c,c,b,b)+f(c,b,b,c)+f(b,c,b,c)+f(c,b,c,b)\} = 0$$

dır. Burada

$$\{f(b,b,c,c)+f(b,c,c,b)+f(c,c,b,b)+f(c,b,b,c)+f(b,c,b,c)+f(c,b,c,b)\} = A$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} 4A &= 0 \\ \Rightarrow 4A+4A+4A &= 0 \\ \Rightarrow 3.4A = 12A &= 0 \\ \Rightarrow 2A.3! &= 0 \end{aligned}$$

olur. $\mathrm{char}R' > 3$ olduğundan $2A = 0$ dır. Ayrıca $\mathrm{char}R' \neq 2$ olduğundan $A = 0$ bulunur. Buradan

$$f(b,b,c,c)+f(b,c,c,b)+f(c,c,b,b)+f(c,b,b,c)+f(b,c,b,c)+f(c,b,c,b) = 0$$

olur. Böylece

i. $(a_b)^2\phi(r)(a^c)^2 + (a_c)^2\phi(r)(a^b)^2 + (a_b a_c + a_c a_b)\phi(r)(a^b a^c + a^c a^b) = 0$

elde edilir. Lemma 3.0.7'de $x=y=u=b$ ve $z=c$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& f(b,b,b,c)+f(b,b,c,f)+f(c,b,b,b)+f(b,c,b,b) \\
& +f(c,b,b,b)+f(b,c,b,b)+f(b,b,c,f)+f(b,b,c,b) \\
& +f(c,b,b,b)+f(b,c,b,b)+f(b,b,b,c)+f(b,b,b,c) \\
& +f(b,b,c,b)+f(c,b,b,b)+f(b,c,b,b)+f(c,b,b,b) \\
& +f(b,b,b,c)+f(b,b,b,c)+f(c,b,b,b)+f(b,b,b,c) \\
& +f(b,c,b,b)+f(b,b,c,b)+f(b,b,c,b)+f(b,c,b,b) \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
6f(b,b,b,c)+6f(b,b,c,b)+6f(b,c,b,b)+6f(c,b,b,b) &= 0 \\
\Rightarrow 6(f(b,b,b,c)+f(b,b,c,b)+f(b,c,b,b)+f(c,b,b,b)) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. char$R^{'} > 3$ olduğundan her $x^{'} \in R^{'}$ için $3!x^{'} = 0 \Rightarrow x^{'} = 0$'dır. O halde

$$f(b,b,b,c)+f(b,b,c,b)+f(b,c,b,b)+f(c,b,b,b) = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$(a_b)^2\phi(r)a^b a^c + (a_b)^2\phi(r)(a^c a^b + a_c a_b \phi(r)(a^b)^2 + a_b a_c a\phi(r)(a^b)^2 = 0$$

dir ve böylece

ii. $(a_b)^2\phi(r)(a^b a^c + a^c a^b) + (a^b a^c + a^c a^b)\phi(r)(a_b)^2 = 0$

elde edilir. $(a_b)^2 \neq 0$ olsun. Teorem 3.0.15'dan $(a^b)^2 = 0$ olur. Bu durumda (ii) denklemi aşağıdaki gibi indirgenebilir:

$$(a_b)^2\phi(r)(a^b a^c + a^c a^b) = 0$$

$\phi : R \to R^{'}$ örten dönüşüm, $R^{'}$ asal halka ve $(a_b)^2 \neq 0$ olduğundan her $c \in R$ için

$$a^b a^c + a^c a^b = 0$$

dır. Elde edilen bu son denklem ile $(a^b)^2 = 0$ eşitliği (i) denkleminde kullanılırsa ;

$$(a_b)^2\phi(r)(a^c)^2 \quad = \quad 0$$

bulunur. R' asal halka ve $(a_b)^2 \neq 0$ olduğundan her $c \in R$ için $(a^c)^2 = 0$ bulunur. Bu sonuçlarla aşağıdaki denklem oluşturulur:

Teorem 3.0.18 *R' karakteristiği 3'ten büyük bir asal halka olmak üzere bazı $b \in R$ için $(a_b)^2 \neq 0$ ise her $c \in R$ için*

$$(a^c)^2 \quad = \quad 0$$

dır. Benzer şekilde bazı $b \in R$ için $(a^b)^2 \neq 0$ ise her $c \in R$ için

$$(a_c)^2 \quad = \quad 0$$

İlk olarak her $c \in R$ için $(a^c)^2 = 0$ iken $a_c = 0$ olduğu gösterilecektir:

$(a_b)^2 \neq 0$ olacak şekilde $\exists a, b \in R$ olsun. Sıradaki teorem ile her $x, y \in R$ için $(x^y)^2 = 0$ olduğu ve bunun sonrasındaki teoremlerde $x^y = 0$ olduğu ispatlanacaktır.

Benzer ispat, "$(a^b)^2 \neq 0$ olacak şekilde $\exists \ a, b \in R$ varsa her $c \in R$ için $(a_c)^2 = 0$." ifadesi için de yapılabilir.

Burada her $b \in R$ için $(a_b)^2 = 0$ iken $a_b = 0$ olduğu gösterilecektir. Eğer her $a, b \in R$ için $(a_b)^2 = 0$ ve $(a^b) = 0$ ise $a_b = 0$ (ya da $a^b = 0$) olduğu daha kolay bir şekilde bulunacaktır.

Bundan sonraki bölümde R' asal halkasının karakteristiği 3'den büyük alınacaktır.

Teorem 3.0.19 *$(a_b)^2 \neq 0$ olacak şekilde $\exists \ a, b \in R$ varsa her $x, y \in R$ için $(x^y)^2 = 0$'dır.*

İspat. $(a_b)^2 \neq 0$ olsun. O zaman Teorem 3.0.18'den her $x \in R$ için $(a^x)^2 = 0$ olur. İspatta olmayana ergi yöntemi kullanılacaktır. Bunun için bazı $c, d \in R$ için $(c^d)^2 \neq 0$ olduğunu kabul edilsin. Teorem 3.0.18'ye göre her $x \in R$ için $(c_x)^2 = 0$

olur.

Şimdi $a+c$ alınırsa her $x \in R$ için $[(a+c)^x]^2 = 0$ veya $[(a+c)_x]^2 = 0$'dır. Her $x \in R$ için $[(a+c)^x]^2 = 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda Lemma 3.0.16'dan

$$\begin{aligned} (a^x + c^x)^2 &= (a^x + c^x)(a^x + c^x) \\ &= (a^x)^2 + a^x c^x + c^x a^x + (c^x)^2 = 0 \end{aligned}$$

$(a^x)^2 = 0$ olduğundan

$$a^x c^x + c^x a^x = 0 \tag{3.0.3}$$

olur.

Şimdi ise her $x \in R$ için $[(a-c)^x]^2 = 0$ olamayacağı gösterilecektir. Eğer her $x \in R$ için $[(a-c)^x]^2 = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 &= (a^x - a^x)(a^x - a^x) \\ &= (a^x)^2 - a^x c^x - c^x a^x - (c^x)^2 \end{aligned}$$

$$-a^x c^x - c^x a^x + (c^x)^2 = 0 \tag{3.0.4}$$

olur. (3.0.3) ve (3.0.4) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$2(c^x)^2 = 0$$

bulunur. char$R' > 3$ olduğundan char$R' \neq 2$'dir ve her $x \in R$ için
$(c^x)^2 = 0$ elde edilir. Bu ise $(c^d)^2 \neq 0$ olacak şekilde $c, d \in R$ kabulü ile çelişir. Böylece Teorem 3.0.18 gereği $[(a+c)^x]^2 = 0$ ise her $x \in R$ için $[(a-c)^x]^2 = 0$ olur. Diğer taraftan eğer her $x \in R$ için $[(a+c)_x]^2 = 0$ ise $(c_x)^2 = 0$ olduğundan

$$(a_x)^2 + a_x c_x + c_x a_x = 0 \tag{3.0.5}$$

olur. Her $x \in R$ için $[(a-c)_x]^2 = 0$ olamayacağı gösterilsin. Eğer her $x \in R$ için $[(a-c)_x]^2 = 0$ ise

$$\begin{aligned} [(a-c)_x]^2 &= [(a-c)_x][(a-c)_x] \\ &= (a_x)^2 - a_x c_x - c_x a_x - (c_x)^2 \end{aligned}$$

$$(a_x)^2 - a_x c_x - c_x a_x = 0 \tag{3.0.6}$$

olur. (3.0.5) ve (3.0.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$2(a_x)^2 = 0$$

elde edilir. R''nün karakteristiği 2'den farklı olduğundan her $x \in R$ için $(a_x)^2 = 0$ olur. Bu da her $x \in R$ için $(a_b)^2 \neq 0$ olmasıyla çelişir. Ayrıca $(-c)^d = -(c)^d$ olduğundan $((-c)^d) \neq 0$ olur. Dolayısıyla genel olarak her $x \in R$ için $[(a+c)^x]^2 = 0$ veya $[(a-c)_x]^2 = 0$ dır. Buradan her $x \in R$ için

$$a^x c^x + c^x a^x + (c^x)^2 = (a_x)^2 - a_x c_x - c_x a_x = 0$$

olur. Şimdi $a+2c$ elemanı ele alınırsa:
Eğer her $x \in R$ için $[(a+2c)^x]^2 = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 = [(a+2c)^x]^2 &= [(a+2c)^x][(a+2c)^x] \\ &= (a^x)^2 + 2a^x c^x + 2c^x a^x + 4(c^x)^2 \\ &= 0 + 2a^x c^x + 2c^x a^x + 4(c^x)^2 \\ &= 2(a^x c^x + c^x a^x) + 4(c^x)^2 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} a^x c^x + c^x a^x + (c^x)^2 &= 0 \\ \Rightarrow a^x c^x + c^x a^x &= -(c^x)^2 \end{aligned}$$

idi. Buradan $-2(c^x)^2 + 4(c^x)^2 = 0$ olur. Yani $x \in R$ için $2(c^x)^2 = 0$'dır. Burada R''nün karakteristiği 2'den farklı olduğundan her $x \in R$ için $(c^x)^2 = 0$ olur. Bu ise yine kabül ile çelişir.
Diğer taraftan her $x \in R$ için $[(a+2c)_x]^2 = 0$ ise

$$\begin{aligned} [(a+2c)_x]^2 &= [(a+2c)_x][(a+2c)_x] \\ &= (a_x)^2 + 2a_x c_x + 2c_x a_x + 4(c_x)^2 \\ &= (a_x)^2 + 2a_x c_x + 2c_x a_x + 0 \\ &= (a_x)^2 + 2(a_x c_x + c_x a_x) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik $(a_x)^2 - a_x c_x - c_x a_x = 0$ ile kullanılırsa ;

$3(a_x)^2 = 0$ olur. Buradan $(a_x)^2 = 0$ elde edilir. Bu da $(a_b) \neq 0$ olması ile çelişir.

O halde Teorem 3.0.18 gereği

$$[(a+2c)^x]^2 = 0 \quad veya \quad [(a+2c)_x]^2 = 0$$

eşitliklerinden en az birinin mutlaka gerçeklenmesi gerekir. Fakat her iki iddiada da çelişki elde edildi. Dolayısıyla $(c^d)^2 \neq 0$ olacak şekilde $c, d \in R$ yoktur. Yani her $c, d \in R$ için $(c^d)^2 = 0$'dır. □

Teorem 3.0.20 *Her $x, y \in R$ için, $(x^y)^2 = 0$ veya $(x_y)^2 = 0$ dır.*

Teorem 3.0.20 gereği $(x^y)^2 = 0$ veya $(x_y)^2 = 0$ eşitliklerinden en az biri sağlanır. Her $x, y \in R$ için $(x^y)^2 = 0$ olsun.

$(a^b)^2 = 0$ eşitliğinde b yerine $b + c$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} (a^{b+c})^2 &= (a^b)^2 + a^b a^c + a^c a^b + (a^c)^2 \\ &= 0 + a^b a^c + a^c a^b + 0 \\ &= 0 \\ \Rightarrow a^b a^c + a^c a^b &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.0.21 *Her $a, b, c \in R$ için $a^b a^c + a^c a^b = 0$ dır.*

Lemma 3.0.22 *Her $a, x \in R$ için $a^{x^2} = a^x \phi(x) + \phi(x) a^x$ dır.*

İspat. Her $a, x \in R$ için $(a^x)^2 = \phi(ax^2) - \phi(a)\phi(x^2) = \phi(ax^2) - \phi(a)\phi(x)^2$ dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \phi(ax^2 + xax) &= \phi(axx + xax) \\ &= \phi(ax)\phi(x) + \phi(x)\phi(ax) \\ \Rightarrow \phi(ax^2) + \phi(xax) &= \phi(ax)\phi(x) + \phi(x)\phi(ax) \\ \Rightarrow \phi(ax^2) &= \phi(ax)\phi(x) + \phi(x)\phi(ax) - \phi(xax) \end{aligned}$$

Lemma 3.0.8'den $\phi(xax) = \phi(x)\phi(a)\phi(x)$'dir. Buradan

$$\phi(ax^2) = \phi(ax)\phi(x) + \phi(x)\phi(ax) - \phi(x)\phi(a)\phi(x) \qquad (3.0.7)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} a^{x^2} = \phi(ax^2) - \phi(a)\phi(x)^2 &= \phi(ax)\phi(x) + \phi(x)\phi(ax) - \phi(x)\phi(a)\phi(x) - \phi(a)\phi(x)\phi(x) \\ &= \phi(x)[\phi(ax) - \phi(a)\phi(x)] + [\phi(ax) - \phi(a)\phi(x)]\phi(x) \\ &= \phi(x)a^x + a^x\phi(x) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.0.23 *Her $x, y \in R$ için $a^{x+y+yx} = a^x\phi(y) + \phi(y)a^x + a^y\phi(x) + \phi(x)a^y$ dır.*

İspat. Lemma 3.0.22'de x yeine $x+y$ yazılıp benzer işlemlerle ispat yapılır. □

Lemma 3.0.21'in özel bir formu ele alınsın. Lemma 3.0.21'den her $a, y, z \in R$ için $a^y a^z + a^z a^y = 0$ dır. Burada z yerine y^2 alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a^y a^{(y^2)} + a^{(y^2)} a^y \\ &= a^y(a^y\phi(y) + \phi(y)a^y) + (a^y\phi(y) + \phi(y)a^y)a^y \end{aligned}$$

olup $(a^y)^2 = 0$ olduğundan

$$0 = a^y\phi(y)a^y + a^y\phi(y)a^y = 2a^y\phi(y)a^y$$

bulunur. char$R' > 3$ olduğundan char$R' \neq 2$'dir ve buradan $a^y\phi(y)a^y = 0$ elde edilir.

Lemma 3.0.24 *Her $a, y \in R$ için $a^y\phi(y)a^y = 0$ dır.*

Lemma 3.0.24'de y yerine $x+y$ yazılırsa aşağıdaki Lemma elde edilir:

Lemma 3.0.25 *Her $a, x, y \in R$ için*

$$a^y\phi(x)a^x + a^x\phi(y)a^x + a^x\phi(x)a^y = 0$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
a^{x+y}\phi(x+y)a^{x+y} &= (a^x+a^y)(\phi(x)+\phi(y))(a^x+a^y) \\
&= (a^x\phi(x)+a^x\phi(y)+a^y\phi(x)+a^y\phi(y))(a^x+a^y) \\
&= a^x\phi(x)a^x+a^x\phi(y)a^x+a^y\phi(x)a^x+a^y\phi(y)a^x \\
&\quad +a^x\phi(x)a^y+a^x\phi(y)a^y+a^y\phi(x)a^y+a^y\phi(y)a^y \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Lemma 3.0.7'den istenilen elde edilir. □

Burada asıl amaç her $b, x \in R$ için $b^x = 0$ olduğunun gösterilmesidir. Bunun için her hangi $b, g \in R$ için $b^g \neq 0$ olduğu varsayılsın ve $V^\sharp, V, W$ kümeleri

$$
\begin{aligned}
V^\sharp &= \{u' \in R' \mid u'b^x = b^x u'; \quad her x \in R\} \\
V &= \{u \in R \mid \phi(u) \in V^\sharp\} \\
W &= \{x \in R \mid b^x = 0\}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.0.26 *$V \subset W$ dur.*

İspat. $x \in V$ olsun. Lemma 3.0.25'dann her $y \in R$ için

$$
b^x\phi(x)b^y + b^x\phi(y)b^x + b^y\phi(x)b^x = 0
$$

dır. $x \in V$ olduğu için $\phi(x) \in V^\sharp$'dir. Dolayısıyla $b^x\phi(y) = \phi(y)b^x$ olur. R' asal halka olduğundan $b^x = 0$ olmalıdır. Buradan $x \in W$ olur. Böylece $V \subset W$ elde edilir. □

Lemma 3.0.27 *V, R'nin toplamsal altgrubudur ve $2x \in W$ ise $x \in W$'dur.*

İspat. $x, y \in W$ olsun. Bu durumda $b^x = b^y = 0$'dır. Lemma 3.0.16'dan

$$
b^{x-y} = b^{x+(-y)} = b^x + b^{-y} = b^x - b^y = 0
$$

bulunur. Buradan $x - y \in W$ olur. Dolayısıyla W, R'nin toplamsal altgrubudur.

Şimdi $2x \in W$ olduğunda $x \in W$ olduğu gösterilsin. $2x \in W$ ise $b^{2x} = 0$'dır. Lemma 3.0.16'e göre $b^{2x} = 2b^x = 0$ olur. R''nün karakteristiği 2'den farklı olduğundan $b^x = 0$ olur. Buradan $x \in W$'dir. □

Lemma 3.0.28 *Eğer $u' \in V^{\sharp}$ ise, her $x, y \in R$ için*

1. $u^{'}\phi(x)b^{x} = b^{x}\phi(x)u^{'} = 0$

2. $u^{'}\phi(x)b^{y} + u^{'}\phi(y)b^{x} = 0$

3. $b^{y}\phi(x)u^{'} + b^{x}\phi(y)u^{'} = 0$

İspat. 1. $z = x^2$ olsun. Bu durumda $u^{'} \in V^{\sharp}$ olduğundan

$$u^{'}b^{z} = b^{z}u^{'} \Rightarrow u^{'}b^{z} - b^{z}u^{'} = 0$$

olur. Lemma 3.0.22'den

$$b^{z} = \phi(x)b^{x} + b^{x}\phi(x)$$

olur. Bu ifade soldan $u^{'}$ ile çarpılırsa;

$$u^{'}b^{z} = u^{'}\phi(x)b^{x} + u^{'}b^{x}\phi(x)$$

elde edilir. Hipotezden $u^{'} \in V^{\sharp}$ idi. Buradan $u^{'}b^{x} = b^{x}u^{'} = 0$ dır. O halde $u^{'}b^{z} = 0$ ve $u^{'}b^{x}\phi(x) = 0$ olduğundan $u^{'}\phi(x)b^{x} = 0$ olur.

Benzer şekilde b^{z} sağdan $u^{'}$ ile çarpıldığında,

$$b^{z}u^{'} = \phi(x)b^{x}u^{'} + b^{x}\phi(x)u^{'}$$

olur. Hipotezden $u^{'} \in V^{\sharp}$ idi. Buradan $u^{'}b^{x} = b^{x}u^{'} = 0$ dır. Bu durumda $b^{z}u^{'} = 0$ ve $\phi(x)b^{x}u^{'} =$ olduğundan $b^{x}\phi(x)u^{'} = 0$ elde edilir.

2. $u^{'}\phi(x)b^{x} = 0$ eşitliğinde x yerine $x + y$ alınarak lineerleştirme işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned}
u^{'}\phi(x+y)b^{x+y} &= 0 \\
\Rightarrow u^{'}(\phi(x)+\phi(y))(b^{x}+b^{y}) &= 0 \\
\Rightarrow (u^{'}\phi(x)+u^{'}\phi(y))(b^{x}+b^{y}) &= 0 \\
\Rightarrow u^{'}\phi(x)b^{x}+u^{'}\phi(x)b^{y}+u^{'}\phi(y)b^{x}+u^{'}\phi(y)b^{y} &= 0 \\
\Rightarrow u^{'}\phi(x)b^{y}+u^{'}\phi(y)b^{x} &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $b^x\phi(x)u' = 0$ eşitliğinde x yerine $x+y$ alınsın. O zaman

$$\begin{aligned}
b^{x+y}\phi(x+y)u' &= 0 \\
\Rightarrow (b^x+b^y)(\phi(x)+\phi(y))u' &= 0 \\
\Rightarrow (b^x\phi(x)+b^x\phi(x)+b^y\phi(x)+b^y\phi(y))u' &= 0 \\
\Rightarrow b^x\phi(x)u'+b^x\phi(y)u'+b^y\phi(x)u'+b^y\phi(y)u' &= 0 \\
\Rightarrow b^x\phi(y)u'+b^y\phi(x)u' &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 3.0.29 *$v \in V$, $r \in R$ olmak üzere $vr+rv \in W$ dur.*

İspat. $v \in V$ ise $v \in R$ ve $\phi(v) \in V^\sharp$ dir. Lemma 3.0.22'dan

$$b^{rv+vr} = \phi(r)b^v + b^v\phi(r) + \phi(v)b^r + b^r\phi(v)$$

olur. Diğer taraftan Lemma 3.0.26'den $V \subset W$; dolayısıyla $v \in V$ ise $v \in W$'dir. O halde

$$\phi(v)b^r + b^r\phi(v) = b^{rv+vr}$$

olur. Ayrıca $v \in V$ olduğundan $\phi(v) \in V^\sharp$. Böylece $b^r\phi(v) = \phi(v)b^r = 0$ olur. O halde $b^{rv+vr} = 0$'dır. W kümesinin tanımına göre $rv+vr = vr+rv \in W$ olduğu görülür. □

Lemma 3.0.30 *Eğer $v \in V$ ise her $r \in R$ için $b^{rvr} = 0$; yani $rvr \in W$'dir.*

İspat. $r \in R$ için $v \in V$ olsun. Lemma 3.0.22 dan,

$$\begin{aligned}
b^{2rvr} &= b^{r(rv+vr)+(rv+vr)r} - b^{zv+vz} \qquad ; z = r^2 \\
&= b^r\phi(rv+vr) + \phi(rv+vr)b^r + \phi(r)b^{rv+vr} + b^{rv+vr}\phi(r) - b^{zv-vz}
\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan Lemma 3.0.29'den $\phi(r)b^{rv+vr}+b^{rv+vr}\phi(r)-b^{zv-vz}=0$ dır. O zaman

$$
\begin{aligned}
b^{2rvr} &= b^{r}\phi(rv+vr)+\phi(rv+vr)b^{r} \\
&= b^{r}\phi(r)\phi(v)+b^{r}\phi(v)\phi(r)+\phi(r)\phi(v)b^{r}+\phi(v)\phi(r)b^{r}
\end{aligned}
$$

olur. Burada $v\in V$ olduğundan $b^{r}\phi(v)=\phi(v)b^{r}=0$ bulunur.

$$
b^{2rvr} = b^{r}\phi(r)\phi(v)+\phi(v)\phi(r)b^{r}
$$

olup Lemma 3.0.28(1)'den $b^{2rvr}=0$ olur. Lemma 3.0.16'e göre $b^{2rvr}=2b^{rvr}=0$ elde edilir.

R''nün karakteristiği 2'den farklı olduğundan $b^{rvr}=0$ dır. Böylece W'nin tanımına göre $rvr\in W$ olur. □

Lemma 3.0.31 *$v\in V$, $w\in W$ ise her $x\in R$ için $\phi(v)\phi(w)b^{x}=0$ dır.*

İspat. $v\in V$ ise $\phi(v)\in V^{\sharp}$'dir. Lemma 3.0.28(2)'den

$$
\phi(v)\phi(w)b^{x} = -\phi(v)\phi(x)b^{w}
$$

olur. $w\in W$ olduğundan $b^{w}=0$'dır. O zaman her $x\in R$ için $\phi(v)\phi(w)b^{x}=0$ olur. □

Lemma 3.0.32 *$u^{'}\in V^{\sharp}$ ise her $r\in R$ için $u^{'}\phi(r)u^{'}\phi(r)\in V^{\sharp}$ dır.*

İspat. $u\in V$ olmak üzere $u^{'}=\phi(u)$ olsun. Lemma 3.0.30'den her $r\in R$ için $rur\in W$'dir. Lemma 3.0.31'dan her $x\in R$ için

$$
\phi(u)\phi(rur)b^{x} = 0
$$

dır. Lemma 3.0.10'ten $\phi(u)\phi(r)\phi(u)\phi(r)b^{x}=0$ olur. $V^{\sharp}$'nin tanımından $u^{'}\phi(r)u^{'}\phi(r)\in V^{\sharp}$ elde edilir. □

$u^{'}\in V^{\sharp}$ olsun. O halde her $r,x\in R$ için $u^{'}\phi(r)u^{'}b^{x}=0$'dır. Burada r yerine $r+s$ alınırsa aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.0.33 *$u^{'} \in V^{\sharp}$ ise her $r,s,x \in R$ için*

$$u^{'}\phi(r)u^{'}\phi(s)b^{x} + u^{'}\phi(s)u^{'}\phi(r)b^{x} = 0$$

'dır.

Lemma 3.0.34 *$u^{'} \in V^{\sharp}$ ve $b^{s} \neq 0$ (yani; $b \notin W$) ise $u^{'}\phi(s)u^{'} = 0$ dır.*

İspat. Lemma 3.0.33'de x yerine s alınsın. Bu durumda her $r,s \in R$ için;

$$u^{'}\phi(r)u^{'}\phi(s)b^{s} + u^{'}\phi(s)u^{'}\phi(r)b^{s} = 0$$

olur. Lemma 3.0.28(1)'den

$$u^{'}\phi(s)u^{'}\phi(r)b^{s} = 0$$

dır. Böylece her $r \in R$ için $u^{'}\phi(s)u^{'}\phi(r)b^{s} = 0$ elde edilir. $b^{s} \neq 0$ ve R' asal halka olduğundan $u^{'}\phi(s)u^{'} = 0$ olmalıdır. □

Teorem 3.0.35 *Her $x \in R$ için $u^{'}b^{x} = b^{x}u^{'} = 0$ ise $u^{'} = 0$'dır. Yani $V^{\sharp} = (0)$ dır.*

İspat. Lemma 3.0.34'den $s \notin W$ ise $u^{'}\phi(s)u^{'} = 0$'dır. $w \in W$ ve $s \notin W$ olsun. W,R'nin toplamsal altgrubu olduğundan $s+w \notin W$'dir. Lemma 3.0.34'den

$$\begin{aligned} u^{'}\phi(s+w)u^{'} &= 0 \\ u^{'}\phi(s)u^{'} + u^{'}\phi(w)u^{'} &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her $w \in W$ için $u^{'}\phi(w)u^{'} = 0$'dır. Bu Lemma 3.0.34'de kullanılırsa; her $r \in R$ için $u^{'}\phi(r)u^{'} = 0$ olur. $R^{'}$ asal halka olduğundan $u^{'} = 0$ olmalıdır.
$V^{\sharp} = \{u^{'} \in R^{'} \mid u^{'}b^{x} = b^{x}u^{'};\ \forall x \in R\}$ idi. Dolayısıyla $V^{\sharp} = (0)$'dır. □

Bu teorem ile eğer $b^{g} \neq 0$ olacak şekilde $b,g \in R$ elemanları varsa her $x \in R$ için $u^{'}b^{x} = b^{x}u^{'} = 0$ şartını sağlayan $u^{'} = 0$'dan başka $u^{'} \in R$ elemanı olmadığı gösterilmiştir.

Teorem 3.0.36 *Her $b,y \in R$ için $b^{y}\phi(y) = \phi(y)b^{y}$ dir.*

İspat. Her $a \in R$ için $b^y = 0$ olsun. Bu durumda eşitliğin sağlandığı açıktır. Herhangi bir $g \in R$ için $b^g \neq 0$ olsun. Lemma 3.0.21'ten her $y, z \in R$ için

$$b^y b^z + b^z b^y = 0 \tag{3.0.8}$$

eşitiliği vardır. Bu eşitlikte b yerine bz alınırsa;

$$\begin{aligned} b^z = b^{bz} &= \phi(b.bz) - \phi(b)\phi(bz) \\ &= \phi(b^2 z) - \phi(b)\phi(bz) \\ &= \phi(b)\phi(bz) + \phi(bz)\phi(b) - \phi(bzb) - \phi(b)\phi(bz) \\ &= \phi(bz)\phi(b) - \phi(bzb) \\ &= \phi(bz)\phi(b) - \phi(b)\phi(z)\phi(b) \\ &= [\phi(bz) - \phi(b)\phi(z)]\phi(b) \\ &= b^z \phi(b) \end{aligned} \tag{3.0.9}$$

elde edilir. $(3.0.9)$ eşitliğinde $b^{bz} = b^z$ olduğu kullanılırsa;

$$b^y b^z \phi(b) + b^z \phi(b) b^y = 0$$

olur. Burada $(3.0.8)$ eşitliği kullanılırsa

$$-b^z b^y \phi(b) + b^z \phi(b) b^y = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda her $z \in R$ için

$$b^z (b^y \phi(b) - \phi(b) b^y) = 0$$

olur. $(3.0.8)$ eşitliğinde z yerine zb alınırsa $b^y b^{zb} + b^{zb} b^y = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
b^{bz} &= \phi(bzb) - \phi(b)\phi(zb) \\
&= \phi(b)\phi(z)\phi(b) - \phi(b)\phi(zb) \\
&= \phi(b)[\phi(z)\phi(b) - \phi(zb)] \\
&= -\phi(b)[\phi(zb) - \phi(z)\phi(b)] \\
&= -\phi(b)z^b \\
&= \phi(b)b^z
\end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned}
b^y\phi(b)b^z + \phi(b)b^z b^y &= 0 \\
b^y\phi(b)b^z - \phi(b)b^y b^z &= 0 \\
(b^y\phi(b) - \phi(b)b^y)b^z &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.0.35'dan her $b, y \in R$ için $b^y\phi(b) - \phi(b)b^y = 0$ 'dır Ayrıca Lemma 3.0.16'den $b^y = -y^b$ olduğundan her $b, y \in R$ için $-y^b\phi(b) = -\phi(b)y^b$ olur. Dolayısıyla her $b, y \in R$ için $b^y\phi(y) = \phi(y)b^y$ elde edilir. □

Teorem 3.0.37 *Her $b, z \in R$ için $b^z = 0$'dır.*

İspat. $t = b^z$ alınsın. O zaman Lemma 3.0.22'dan

$$b^t = \phi(z)b^z + b^z\phi(z)$$

eşitliği yazılabilir. Teorem 3.0.35'dan

$$b^t = 2\phi(z)b^z = 2b^z\phi(z)$$

dir. Burada eşitliklerin her iki tarafı sağdan b^y ile çarpılırsa;

$$b^t b^y = 2\phi(z)b^z b^y$$

ve

$$b^t b^y = 2b^z\phi(z)b^y$$

elde edilir. Lemma 3.0.21'ten $b^t b^y + b^y b^t = 0$ olduğu biliniyor. O halde her $b, z \in R$ için

$$2b^z \phi(z) b^y + 2b^y \phi(z) b^z = 0$$

olur. Buradan

$$2(b^z \phi(z) b^y + b^y \phi(z) b^z) = 0$$

olur. Dolayısıyla $R^{'}$'nün karakteristiği 2'den farklı olduğundan her $b, y, z \in R$ için

$$b^z \phi(z) b^y + b^y \phi(z) b^z = 0$$

Diğer taraftan Lemma 3.0.25'dan her $b, y, z \in R$ için

$$b^y \phi(z) b^z + b^z \phi(y) b^z + b^y \phi(z) b^z = 0$$

eşitliği vardır. O halde her $y, z \in R$ için

$$b^z \phi(y) b^z = 0$$

dır. $R^{'}$ asal halka ve her $y \in R$ için bu eşitlik geçerli olduğundan $b^z = 0$ olmalıdır. $\square$

Böylece bu teoremlerle birlikte her $x, y \in R$ için $(x^y)^2 = 0$ olduğu gösterilmiş oldu. Buradan da $x^y = 0$ elde edilir. Benzer yöntemlerle eğer $(x_y)^2 = 0$ ise $x_y = 0$ olduğu gösterilebilir.

Bu durumda x^y ve x_y'nin tanımlarına göre ϕ Jordan homomorfizması ya homomorfizmadır ya da anti-homomorfizmadır:

i. Eğer $x^y = 0$ ise ;

$$\begin{aligned} x^y = \phi(xy) - \phi(x)\phi(y) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) & \end{aligned}$$

O halde ϕ bir homomorfizmadır.

ii. Eğer $x_y = 0$ ise ;

$$\begin{aligned} x_y = \phi(xy) - \phi(y)\phi(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \phi(xy) = \phi(y)\phi(x) & \end{aligned}$$

Bu durumda ϕ bir anti-homomorfizmadır.

Teorem 3.0.38 *R bir halka , $R^{'}$ karakteristiği 2 ve 3'ten farklı bir asal halka olmak üzere eğer $\phi : R \rightarrow R^{'}$ örten dönüşümü bir Jordan homomorfizması ise ϕ ya homomorfizmadır ya da anti-homomorfizmadır.*

Teorem 3.0.39 *R karakteristiği 2 ve 3'ten farklı bir basit halka olmak üzere eğer $\phi : R \rightarrow R$ bir Jordan otomorfizması ise ϕ ya otomorfizmadır ya da anti-otomorfizmadır.*

Teorem 3.0.40 *Karakteristiği 2 ve 3'ten farklı bir primitif halkanın bir Jordan otomorfizması ya otomorfizmadır ya da anti-otomorfizmadır.*

Bir basit halka ya bir radikaldir ya da bir primitif halkadır. Verilen halka, basit radikal halka değilse basit halka primitiftir. Dolayısıyla basit radikal halkaların dışındaki halkalar için Teorem 3.0.40, Teorem 3.0.39'yi gerektirir. Çünkü Teorem 3.0.39 sağlanıyor ve halka basit radikal halka değil ise halka primitif olacağından Teorem 3.0.39'deki hipotezin şartları sağlanır.

Aşağıdaki şartları sağlayan bir $\phi : R \rightarrow R'$ dönüşümü verilsin. n>2 sabit bir tamsayı olmak üzere;

1. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

2. $\phi(a^n) = \phi(a)^n$

ise bu durumda ϕ'ye *n-Jordan dönüşüm* denir.

Teorem 3.0.41 *R bir halka ve $R^{'}$ karakteristiği n'den büyük bir asal halka olmak üzere $\phi : R \rightarrow R^{'}$ örten dönüşümü bir n-Jordan dönüşümü olsun. Ayrıca R'nin birimli olduğu kabul edilsin. O zaman τ homomorfizma ya da anti-homomorfizma ve ε da R''nün merkezindeki $(n-1)$. kök olduğunda $\phi = \varepsilon\tau$'dir.*

İspat. ϕ bir n Jordan dönüşüm olduğundan her $x \in R$ için $\phi(x)^n = \phi(x^n)$'dır. Bu eşitlik x yerine $x+y$ yazılarak lineerleştirilirse ilk olarak $n=2$ için

$$\begin{aligned} \phi(x+y)^2 &= \phi(x+y)\phi(x+y) \\ &= (\phi(x)+\phi(y))(\phi(x)+\phi(y)) \end{aligned}$$

$$\phi(x+y)^2 = \phi(x)^2 + \phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x) + \phi(y)^2 \tag{3.0.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \phi((x+y)^2) &= \phi((x+y)(x+y)) \\ &= \phi(x^2+xy+yx+y^2) \\ &= \phi((x^2+y^2)+(xy+yx)) \\ &= \phi(x^2)+\phi(y^2)+\phi(xy)+\phi(yx) \end{aligned}$$

$$\phi((x+y)^2) = \phi(x)^2 + \phi(y)^2 + \phi(xy) + \phi(yx) \tag{3.0.11}$$

bulunur. (3.0.10)=(3.0.11) olduğundan;

$$\begin{aligned} \phi(x)^2 + \phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x) + \phi(y)^2 &= \phi(x)^2 + \phi(y^2) + \phi(xy) + \phi(y)^2 \\ \phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x) &= \phi(y^2) + \phi(xy) \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.0.7 gereği π, 2. dereceden simetrik grubu taradığında ;

$$\sum_{\pi} \phi(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}) = \sum_{\pi} \phi(x_{\pi(1)})\phi(x_{\pi(2)})) \tag{3.0.12}$$

olur. Bu durum n. derece için genelleştirilirse;

$$\sum_{\pi} \phi(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ..., x_{\pi(n)}) \equiv \sum_{\pi} \phi(x_{\pi(1)})\phi(x_{\pi(2)})..., \phi(x_{\pi(n)}) \tag{3.0.13}$$

$\phi(1) = \alpha$ olsun. 1, R'nin birim elemanı olmak üzere
$\phi(1) = \phi(1^n) = \phi(1)^n$'dir. Buna göre $\alpha^n = \alpha$ olur.

İlk olarak (3.0.12)'de $x_1 = x$ ve $x_2 = 1$ alınırsa;

$$\begin{aligned} \pi_1 = (1), \pi_2 = (12) \quad \Rightarrow \quad & x_{\pi_1(1)} = x_1 = x \qquad x_{\pi_2(1)} = x_2 = 1 \\ & x_{\pi_1(2)} = x_2 = 1 \qquad x_{\pi_2(2)} = x_1 = x \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \phi(x_{\pi_1(1)},x_{\pi_1(2)})+\phi(x_{\pi_2(1)},x_{\pi_2(2)}) &= \phi(x_{\pi_1(1)})\phi(x_{\pi_1(2)})+\phi(x_{\pi_2(1)})\phi(x_{\pi_2(2)}) \\ \phi(x,1)+\phi(1,x) &= \phi(x)\phi(1)+\phi(1)\phi(x) \\ 2!\phi(x) &= 1!(\alpha\phi(x)+\phi(x)\alpha) \end{aligned}$$

Şimdi $x_1 = x$, $x_2 = x_3 =, ..., x_n = 1$ alınıp (3.0.13) denkliğinde yazılırsa;

$$n!\phi(x) = (n-1)!(\alpha^{n-1}\phi(x)+\alpha^{n-2}\phi(x)\alpha+...+\phi(x)\alpha^{n-1} \tag{3.0.14}$$

elde edilir. char $R' > n$ olduğundan ;

$$n\phi(x) = \alpha^{n-1}\phi(x)+\alpha^{n-2}\phi(x)\alpha+...+\phi(x)\alpha^{n-1} \tag{3.0.15}$$

yazılabilir. (3.0.15) sağdan α ile çarpılır ve $\alpha^n = \alpha$ eşitliği kullanılırsa;

$$n\phi(x)\alpha = \alpha^{n-1}\phi(x)\alpha+\alpha^{n-2}\phi(x)\alpha^2+...+\phi(x)\alpha^n \tag{3.0.16}$$

elde edilir. Eğer (3.0.15) soldan α ile çarpılırsa;

$$\alpha n\phi(x) = \alpha^n\phi(x)+\alpha^{n-1}\phi(x)\alpha+...+\alpha\phi(x)\alpha^{n-1} \tag{3.0.17}$$

elde edilir. (3.0.16) eşitliğinden (3.0.17) eşitliği çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} n\phi(x)\alpha - n\alpha\phi(x) &= \phi(x)\alpha-\alpha\phi(x) \\ \Rightarrow n(\phi(x)\alpha-\alpha\phi(x)) &= (n-1)\alpha\phi(x) \\ \Rightarrow (n-1)(\phi(x)\alpha-\alpha\phi(x)) &= 0 \end{aligned}$$

dır. char $R' > n$ olduğundan char$R' \neq n-1$'dir. Dolayısıyla $(\phi(x)\alpha - \alpha\phi(x)) = 0$ olur. O halde $\phi(x)\alpha = \alpha\phi(x)$'tir. Buradan α'nın R''nün merkezinde olduğu görülür. Yani $\alpha \in Z(R')$'dir. Bu durumda (3.0.15) eşitliği

$$n\phi(x) = n\alpha^{n-1}\phi(x)$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Ayrıca char $R' > n$ olduğundan

$$\phi(x) = \alpha^{n-1}\phi(x)$$

yazılabilir. Buradan α^{n-1}, $R^{'}$'nün birim elemanı ve α, $R^{'}$'nün merkezindeki $(n-1)$. birim kökü olur.

Özel olarak (1)'de $x_1 = x, x_2 = y, x_3 =, ..., x_n = 1$ alınsın. $R^{'}$'nün karakteristiği n'den büyük olduğundan her $x, y \in R$ için

$$\phi(xy+yx) = \alpha^{n-2}[\phi(x)\phi(y)+\phi(y)\phi(x)]$$

elde edilir. $\tau = \alpha^{n-2}\phi$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau(xy+yx) &= \alpha^{n-2}\phi(xy+yx) \\
&= \alpha^{n-2}\alpha^{n-2}[\phi(x)\phi(y)+\phi(y)\phi(x)] \\
&= (\alpha^{n-2}\phi(x))(\alpha^{n-2}\phi(y)+(\alpha^{n-2}\phi(y)(\alpha^{n-2}\phi(x)) \\
&= \tau(x)\tau(y)+\tau(y)\tau(x)
\end{aligned}$$

olduğundan τ bir Jordan homomorfizmasıdır. O zaman Teorem 3.0.36 gereği τ ya homomorfizmadır ya da anti-homomorfizmadır.

Ayrıca $\phi = (\alpha^{n-2})^{-1}\tau$ oldğundan α^{n-2}, $R^{'}$'nün merkezindeki $(n-1)$. birim köktür.

□

4. ASAL VE YARI ASAL HALKALARDA JORDAN TÜREVLER

4.1. Asal Halkalar Üzerinde Jordan Türevleri

Bu bölümde I. N. Herstein'in [12] çalışması incelenerek karakteristiği 2'den farklı asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan türevin bir türev olduğu gösterilmiştir.

Lemma 4.1.1 *R bir halka olsun. $a \in R$ için $T(a) = \{r \in R \mid r(ax - xa) = 0, \ \forall x \in R\}$ kümesi tanımlansın. Bu durumda $T(a)$, R'nin iki yanlı idealidir.*

İspat. $0 \in R$ için $0(ax - xa) = 0$ sağlandığından $0 \in T(a)$ ve $T(a) \neq \emptyset$'dır.

$r, s \in T(a)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (r-s)(ax-xa) &= r(ax-xa) - s(ax-xa) = 0 \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \\ \Rightarrow \quad & r - s \in T(a) \end{aligned}$$

olur. O halde $T(a)$, R'nin bir alt halkasıdır. Şimdi $r \in T(a)$ ve $u \in R$ olsun. $r \in T(a)$ olduğundan $r(ax - xa) = 0$ eşitliği vardır ve $ur(ax - xa) = 0$ olduğundan $ur \in T(a)$ olur. Dolayısıyla $T(a)$, R'nin bir sol idealidir.

$T(a)$'nın iki yanlı ideal olabilmesi için $T(a)$'nın R'nin bir sağ ideali de olması gerekir. Bunun için $u \in T(a)$ ve $x \in R$ için $ux \in T(a)$ olmalıdır. $u \in T(a)$ olduğundan her $x \in A$ için $u(ax - xa) = 0$'dır. Her $r \in R$ için x yerine xr yazılırsa $u(axr - rxa) = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte parantezin içine xar terimi eklenip çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} u(axr - rxa + xar - xar) &= 0 \\ u((ax - xa)r + x(ar - ra)) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $u \in T(a)$ olduğundan $u(ax - xa) = 0$ vardır ve $u(ax - xa)r = 0$ bulunur. Dolayısıyla $u(x(ar - ra)) = 0$ olmalıdır. Bu da $ux \in T(a)$ olduğunu gösterir. O halde $T(a)$, R'nin bir sağ idealidir. $T(a)$, R'nin hem sol hem de sağ ideali olduğundan $T(a)$, R'nin iki yanlı idealidir. $\square$

Lemma 4.1.2 *R bir asal halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a \neq Z(R)$ ise $T(a) = (0)$'dır.*

İspat. $b \in R$, $a \neq Z(R)$ için $T(a) \neq (0)$ olsun. $a \neq Z(A)$ olduğundan $ab - ba \neq 0$'dır. $T(a)$'nın tanımından

$$T(a)(ab - ba) = 0$$

dır. R bir asal halka olduğundan $(0) \neq T(a)$ sağ idealinin sağ sıfırlayanı (0) olur. O halde $ab - ba = 0$ olmalıdır. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla $T(a) = (0)$ elde edilir. □

Teorem 4.1.3 *R bir asal halka ve $*$, R halkasının sıfırdan farklı bir ters türevi olsun. Bu durumda R değişmeli bir tamlık bölgesidir ve $*$, R'nın bir adi türevidir.*

İspat. Ters türev bir Jordan türevdir fakat her zaman türev olmayabilir. Bu teoremin ispatında ters türevin bir türev olduğu durum gösterilmektedir.
$a, b, c \in R$ olsun. $*$ ters türev olduğundan ;

$$(a(bc))^* = (bc)^* a + (bc)a^* = c^* ba + cb^* a + bca^* \tag{4.1.1}$$

Ayrıca;

$$((ab)c)^* = c^*(ab) + c(ab)^* = c^* ab + cb^* a + cba^* \tag{4.1.2}$$

$(a(bc))^* = ((ab)c)^*$ olduğundan $(4.1.1) = (4.1.2)$ olmalıdır. O halde

$$c^* ba + cb^* a + bca^* \quad = \quad c^* ab + cb^* a + cba^*$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda her $a, b, c \in R$ için

$$c^* ba + bca^* \quad = \quad c^* ab + cba^*$$

$$c^*(ab - ba) = (bc - cb)a^* \tag{4.1.3}$$

bulunur. Her $a, b, c \in R$ için bu eşitlik sağlandığından (4.1.3)'de c yerine b alınırsa;

$$b^*(ab - ba) = (bb - bb)a^* = 0 \tag{4.1.4}$$

olur. Buradan $b^* \in T(b)$ elde edilir.

Öncelikle $b^* \neq 0$ olsun. Bu durumda $T(b) \neq (0)$'dır. Lemma 4.1.2'den $b \in Z(R)$ olur.

Şimdi $b^* = 0$ olacak şekilde $b \in R$ olsun. $*$, R halkasının sıfırdan farklı bir ters türevi olduğundan $a^* \neq 0$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. Yine Lemma 4.1.2'ye göre $a \in Z(R)$'dir. Ayrıca

$$(a+b)^* \quad = \quad a^* + b^* = a^* \neq 0$$

olduğundan Lemma 4.1.2'ye göre $a+b \in Z(R)$ olur. Buradan her $x \in R$ için

$$(a+b)x \quad = \quad x(a+b) \Rightarrow ax + bx = xa + xb$$

olur. $a \in Z(R)$ olduğundan $ax = xa$'dır. Dolayısıyla her $x \in R$ için $bx = xb$'dir. Yani $b \in Z(R)$'dir.

Sonuç olarak $b^* \neq 0$ ve $b^* = 0$ durumlarının her ikisinde de $b \in Z(R)$ elde edilir. Buradan $R = Z(R)$ bulunur. O halde R değişmelidir. Ayrıca R asal halka olduğundan R değişmeli tamlık bölgesidir.

Diğer taraftan R değişmeli olduğundan

$$(ab)^* \quad = \quad b^*a + ba^* = ab^* + a^*b$$

yazılabilir. Dolayısıyla $*$, R halkasının bir adi türevidir. □

Bu bölümde karakteristiği 2'den farklı olan asal halkalarda her Jordan türevin bir türev olduğu ispatlanacaktır.

Lemma 4.1.4 *D, R halkasının bir Jordan türevi ise her $a, b \in R$ için*

$$D(aba) \quad = \quad D(a)ba + aD(b)a + abD(a)$$

dır.

İspat. char$R \neq 2$ ve D, R halkasının bir Jordan türevi olduğundan her $a \in R$ için

$$D(a^2) = aD(a) + D(a)a$$

eşitliği vardır. Burada a yerine $a+b$ yazılarak lineerleştirilirse her $a, b \in R$ için;

$$\begin{aligned}
D((a+b)^2) &= (a+b)D(a+b) + D(a+b)(a+b) \\
D(a^2+ab+ba+b^2) &= (a+b)(D(a)+D(b)) + (D(a)+D(b))(a+b) \\
D(a^2+b^2) + D(ab+ba) &= aD(a) + aD(b) + bD(a) + bD(b) + D(a)a \\
&\quad + D(a)b + D(b)a + D(b)b \\
D(a^2) + D(ab+ba) + D(b^2) &= (aD(a) + D(a)a) + (bD(b) + D(b)b) \\
&\quad + aD(b) + bD(a) + D(a)b + D(b)a
\end{aligned}$$

$$D(ab+ba) = aD(b) + bD(a) + D(a)b + D(b)a \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Burada b yerine $ab+ba$ yazılarak;

$$w = D(a(ab+ba) + ((ab+ba)a)$$

tanımlansın. Bu ifade (4.1.1) eşitliğine göre açılırsa;

$$\begin{aligned}
w &= aD(ab+ba) + (ab+ba)D(a) + D(a)(ab+ba) + D(ab+ba)a \\
&= aaD(b) + abD(a) + aD(a)b + aD(b)a + abD(a) + baD(a) + D(a)ab + D(a)ba \\
&\quad + aD(b)a + bD(a)a + D(a)ba + D(b)aa \\
&= aaD(b) + 2D(a)ba + aD(a)b + a^2D(b) + 2abD(a) + 2aD(b)a \\
&\quad + baD(a) + D(b)a^2 + bD(a)a
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
w &= D(\{(a^2b + ba^2) + 2aba\}) \\
&= D(a^2b + ba^2) + D(2aba) \\
&= a^2D(b) + bD(a^2) + D(a^2)b + D(b)a^2 + 2D(aba) \\
&= a^2D(b) + baD(a) + bD(a)a + aD(a)b + D(a)ab + D(b)a^2 + 2D(aba)
\end{aligned}$$

$$(4.1.7)$$

bulunur. Burada $(4.1.6) = (4.1.7)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
2D(aba) = 2(D(a)ba + aD(b)a + abD(a)) \\
2D(aba) - 2(D(a)ba + aD(b)a + abD(a)) &= 0 \\
2(D(aba) - (D(a)ba + aD(b)a + abD(a))) &= 0
\end{aligned}$$

olur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
D(aba) - (D(a)ba + aD(b)a + abD(a)) &= 0 \\
D(aba) = D(a)ba + aD(b)a + abD(a)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $a, b \in R$ için

$$D(aba) = D(a)ba + aD(b)a + abD(a)$$

bulunur. □

Lemma 4.1.5 *R, karakteristiği 2'den farklı bir asal halka olmak üzere her $a, b, c \in R$ için*

$$D(abc + cba) = D(a)bc + D(c)ba + abD(c)D(c)ba + cD(b)a + cbD(a)$$

dır.

İspat. Lemma 4.1.4'te a yerine $a + c$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
D((a+c)b(a+c)) = {} & D(a)ba + D(a)bc + D(c)ba + D(c)bc + aD(b)a + aD(b)c \\
& + cD(b)a + cD(b)c + abD(a) + abD(c) + cbD(a) + cbD(c)
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan bu eşitlik ;

$$D((a+c)b(a+c)) = D((ab+cb)(a+c)) = D(aba + abc + cba + cbc)$$

biçiminde de ifade edilebilir. D, toplamsal dönüşüm olduğundan ;

$$\begin{aligned} D((a+c)b(a+c)) &= D(aba)+D(abc+cba)+D(cbc) \\ D((a+c)b(a+c)) &= D(a)ba+aD(b)a+abD(a)+D(abc+cba) \\ &\quad +D(c)bc+cD(b)c+cbD(c) \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

bulunur. (4.1.8)=(4.1.9) olduğundan

$$D(abc+cba) = D(a)bc+D(c)ba+aD(b)c+cD(b)a+abD(c)+cbD(a)$$

elde edilir. $\square$

Lemma 4.1.6 *R karakteristiği 2'den farklı bir asal halka olmak üzere her $a,b \in R$ için*

$$(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ab-ba) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Lemma 4.1.5'te elde edilen eşitlikte c yerine ab yazılırsa;

$$\begin{aligned} D(ab(ab)+(ab)ba) &= D(a)b(ab)+D(ab)ba+aD(b)ab+abD(b)a \\ &\quad +abD(ab)+(ab)bD(a) \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} D((ab)^2+ab^2a) &= abD(ab)+aD(b)ab+D(a)b^2a \\ &\quad +aD(b^2)a+ab^2D(a) \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olur. $(4.1.10) = (4.1.11)$ olduğundan

$$\begin{aligned} D(a)b(ab)+aD(b)ab+D(ab)ba &= D(ab)ab+D(a)b^2a+aD(b)ba \\ 0 &= D(ab)(ab-ba)+D(a)b(ab-ba) \\ &\quad +aD(b)(ab-ba) \\ 0 &= (D(ab)-D(a)b-aD(b))(ab-ba) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 4.1.7 *R karakteristiği 2'den farklı bir asal halka olmak üzere her $a,b,c \in R$ için*

1) $(D(ab)-D(a)b-aD(b))(cb-bc)+(D(cb)-D(c)b-cD(b))(ab-ba) = 0$

2) $(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ca-ac)+(D(ca)-D(c)a-cD(a))(ba-ab) = 0$

İspat. 1) Lemma 4.1.6'de elde edilen eşitlikte a yerine $a+c$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} (D((a+c)b)-D(a+c)b-(aa+c)D(b))((a+c)b-b(a+c)) &= 0 \\ (D(ab+cb)-(D(a)+D(c))b-aD(b)-cD(b))(ab+cb-ba-bc) &= 0 \\ (D(ab)+D(cb)-D(a)b-D(c)b-aD(b)-cD(b))(cb-bc+ab-ba) &= 0 \\ (D(ab)-D(a)b-aD(b)+D(cb)-D(c)b-cD(b))(cb-bc+ab-ba) &= 0 \\ (D(ab)-D(a)b-aD(b))(cb-bc)+(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ab-ba) & \\ +(D(cb)-D(c)b-cD(b))(cb-bc)+(D(cb)-D(c)b-cD(b))(ab-ba) &= 0 \\ (D(ab)-D(a)b-aD(b))(cb-bc)+(D(cb)-D(c)b-cD(b))(ab-ba) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

2)'nin ispatı için Lemma 4.1.6'de b yerine $b+c$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
(D(a(b+c))-D(a)(b+c)-aD(b+c))(a(b+c)-(b+c)a) &= 0\\
(D(ab+ac)-D(a)b-D(a)c-aD(b)-aD(c))(ab+ac-ba-ca) &= 0\\
(D(ab)+D(ac)-D(a)b-D(a)c-aD(b)-aD(c))(ab-ba+ac-ca) &= 0\\
(D(ab)-D(a)b-aD(b)+D(ac)-D(a)c-aD(c))(ab-ba+ac-ca) &= 0\\
(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ab-ba)+(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ac-ca) &\\
+(D(ac)-D(a)c-aD(c))(ab-ba)+(D(ac)-D(a)c-aD(c))(ac-ca) &= 0\\
(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ca-ac)+(D(ca)-D(c)a-cD(a))(ba-ab) &= 0
\end{aligned}$$

olur. □

Lemma 4.1.8 *R karakteristiği 2'den farklı bir asal halka olmak üzere her $a,b \in R$ için $ab = ba$ ise*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

dir.

İspat. $a,b \in R$ için $ab = ba$ olsun. Bu durumda Lemma 4.1.7(1)'den her $c \in R$ için

$$(D(ab)-D(a)b-aD(b))(cb-bc) = 0$$

dır. O halde $D(ab)-D(a)b-aD(b) \in T(b)$'dir. Lemma 4.1.2'den

$$b \neq Z(R) \;\; ise \;\; T(b) = (0)$$

dır. Bu durumda $D(ab)-D(a)b-aD(b) = 0$ olur. Benzer şekilde Lemma 4.1.7(2)'den her $c \in R$ için

$$(D(ab)-D(a)b-aD(b))(ca-ac) = 0$$

dır. Buradan $D(ab)-D(a)b-aD(b) \in T(a)$'dır.

Yine eğer $a \neq Z(R)$ ise $T(a) = (0)$ olup $D(ab) - D(a)b - aD(b) = 0$ bulunur. O halde $b \neq Z(R)$ veya $a \neq Z(R)$ ise

$$D(ab) = D(a)b - aD(b)$$

dir. Şimdi her $a,b \in R$ için R değişmeli yani $R = Z(R)$ olsun. Bu durumda

$$D(ab+ba) = D(a)b - aD(b) + D(b)a + bD(a)$$

olduğundan her $a,b \in R$ için

$$\begin{aligned} 2D(ab) &= 2(D(a)b + aD(b)) \\ \Rightarrow 2D(ab) - 2(D(a)b + aD(b)) &= 0 \\ \Rightarrow 2(D(ab) - D(a)b - aD(b)) &= 0 \end{aligned}$$

char$R \neq 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} (D(ab) - D(a)b - aD(b)) &= 0 \\ \Rightarrow D(ab) &= D(a)b + aD(b) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $R \neq Z(R)$ durumu incelenecek olursa; $c \notin Z(R)$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Bu durumda $a + c \notin Z(R)$'dır. Fakat $b \in Z(R)$ olduğundan $bc = cb \in R$ ve $b(a+c) = (a+c)b$'dir. Buradan

$$D((a+c)b) = D(a+c)b + (a+c)D(b)$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} D(ab+cb) &= D(a)b + D(c)b + aD(b) + cD(b) \\ D(ab) + D(cb) &= D(a)b + D(c)b + aD(b) + cD(b) \\ D(cb) &= D(c)b + cD(b) \end{aligned}$$

olduğundan

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

olur. □

Lemma 4.1.9 *R karakteristiği 2'den farklı bir asal halka olmak üzere her $a,b \in R$ için $ab = 0$ ise $0 = D(ab) = D(a)b + aD(b)$ dir.*

İspat. Eğer $ba = 0$ ise $ab = ba = 0$ olur. Bir önceki Lemma 4.1.8'den

$$0 = D(ab) \quad = \quad D(a)b + aD(b)$$

elde edilir. Eğer $ba \neq 0$ ise Lemma 4.1.5'ten her $a,b,c \in R$ için

$$\begin{aligned} &(D(ab) - D(a)b - aD(b))(ca - ac) \\ &+((D(ca) - D(c)a - aD(c))(ba - ab) = 0 \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olur. $(4.1.12)$ eşitliği sağdan b ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} &(D(ab) - D(a)b - aD(b))(ca - ac)b \\ &+((D(ca) - D(c)a - aD(c))(ba - ab)b = 0 \\ &\Rightarrow (D(ab) - D(a)b - aD(b))(cab - acb) \\ &+((D(ca) - D(c)a - aD(c))(bab - abb) = 0 \end{aligned}$$

dır. O zaman her $c \in R$ için

$$(D(ab) - D(a)b - aD(b))acb = 0 \tag{4.1.13}$$

olur. $ba \neq 0$ olduğundan $b \neq 0$'dır. R bir asal halka olduğundan $(4.1.13)$ eşitliğinden $(D(ab) - D(a)b - aD(b))a = 0$ elde edilir. $ab = 0$ olduğundan $D(ab) = 0$'dır. Dolayısıyla her $b \in A$ için

$$(D(a)b - aD(b))a = 0 \tag{4.1.14}$$

olmalıdır. $ab = 0$ ise her $r \in R$ için $a(brb) = 0$'dır. $(4.1.14)$ eşitliğinde b yerine brb yazılırsa;

$$(D(a)(brb) + aD(brb))a = 0 \tag{4.1.15}$$

elde edilir. Lemma 4.1.1'den

$$D(brb) \quad = \quad D(b)rb + bD(r)b + brD(b)$$

dir. Bu (4.1.15)'te yerine yazılırsa;

$$(D(a)(brb)+a(D(b)rb+bD(r)b+brD(b)) \quad = \quad 0$$

O halde her $r \in R$ için

$$(D(a)brb+aD(b)rb)a \quad = \quad 0$$

dır. Yani her $r \in R$ için

$$(D(a)b+aD(b))rba \quad = \quad 0$$

R bir asal halka olduğundan $ba=0$ veya $D(a)b+aD(b)=0$ olmalıdır. Ancak $ba \neq 0$ olduğundan $D(a)b+aD(b)=0$ olur. $\square$

Sonuç 4.1.10 *A karakteristiği 2'den farklı bir asal halka $a,b \in A$ olmak üzere $ab=0$ ise $D(ba)=D(b)a+bD(a)$ dır.*

İspat. Lemma 4.1.9'dan $ab=0$ ise $D(ab)=D(a)b+aD(b)$ eşitliği vardır. Diğer taraftan

$$D(ba)=D(ab+ba) \quad = \quad D(a)b+aD(b)+D(b)a+bD(a)=D(b)a+bD(a)$$

elde edilir. Dolayısıyla $ab=0$ ise $D(ba)=D(b)a+bD(a)$ bulunur. $\square$

Lemma 4.1.11 *A karakteristiği 2'den farklı bir asal halka $a,b \in A$ ve $ab=0$ ise her $c \in A$ için*

$$D((ba)c) \quad = \quad D(ba)c+(ba)D(c)$$

dir.

İspat. Lemma 4.1.2'den her $a,b,c \in A$ için

$$D(cab+bac) \quad = \quad D(c)ab+cD(a)b+caD(b)+D(b)ac+bD(a)c+baD(c)$$

eşitliği vardır. $ab=0$ olduğundan;

$$\begin{aligned} D((ba)c) &= cD(a)b+caD(b)+D(b)ac+bD(a)c+baD(c) \\ &= D(b)ac+bD(a)c+baD(c)+c(D(a)b+aD(b)) \\ &= D(b)ac+bD(a)c+baD(c) \\ &= D(ba)c+baD(c) \end{aligned}$$

$\square$

Tanım 4.1.12 *$V=\{a\in A \;\mid\; D(ax)=D(a)x+aD(x)$, her $x\in A$ için $\}$ olmak üzere $ab=0$ ise Lemma 4.1.11'den $ba\in V$ 'dir. $a,b\in A$ için*

$$a^b \;=\; D(ab)-D(a)b-aD(b)$$

olarak tanımlansın. O halde $a^{b+c}=a^b+a^c$ dır ve ayrıca $a^b=-b^a$ dır.

Eğer her $a,b\in A$ için $a^b=0$ şeklinde yazılabilirse D Jordan türevinin aynı zamanda bir türev olduğu gösterilmiş olacaktır.

$a,b\in A$ olmak üzere tanım gereği

$$a^b=D(ab)-D(a)b-aD(b) \tag{4.1.16}$$

$$b^a=D(ba)-D(b)a-bD(a) \tag{4.1.17}$$

dır. $(4.1.16)$ ve $(4.1.17)$ taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} a^b+b^a &= D(ab)-D(a)b-aD(b)+D(ba)-D(b)a-bD(a) \\ &= D(ab)+D(ba)-D(ab+ba) \\ &= D(ab)+D(ba)-D(ab)-D(ba) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $a,b,c \in A$ için

$$\begin{aligned} a^{b+c} &= D(a(b+c)) - D(a)(b+c) - aD(b+c) \\ &= D(ab+ac) - D(a)b - D(a)c - aD(b) - aD(c) \\ &= D(ab) - D(a)b - aD(b) + D(ac) - D(a)c - aD(c) \\ &= a^b + a^c \end{aligned}$$

dir. Bu bölümde her $a,b \in A$ için $a^b = 0$ olduğu gösterilecektir.

Lemma 4.1.13 *$t \in V$, $tZ(A)$ ve $tu = ut$ ise $u \in V$'dir.*

İspat. Lemma 4.1.7 gereği

$$a^b(cb - bc) + c^b(ab - ba) = 0 \qquad (4.1.18)$$

dır. Burada t yerine $c \in V$ alınırsa her $b \in A$ için

$$\begin{aligned} t^b &= D(tb) - D(t)b - tD(b) \\ &= D(t)b + tD(b) - D(t)b - tD(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $t^b = -b^t$ bulunur. Böylece (4.1.18) eşitliğinden her $a \in A$ için

$$a^b(tb - bt) = 0 \qquad (4.1.19)$$

bulunur. (4.1.19) eşitliğinde b yerine $b+c$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} a^{b+c}(t(b+c) - (b+c)t) &= 0 \\ (a^b + a^c)(tb + tc - bt - ct) &= 0 \\ a^b(tb - bt) + a^b(tc - ct) + a^c(tb - bt) + a^c(tc - ct) &= 0 \end{aligned}$$

$$a^b(tc - ct) + a^c(tb - bt) = 0 \qquad (4.1.20)$$

elde edilir. $ut = tu$ ise (4.1.20) eşitliğinde b yerine u yazılırsa her $a,c \in A$ için

$$a^u(tc - ct) + a^c(tu - ut) = 0$$

olur. Bu durumda $a^u(tc-ct)=0$ olmalıdır. O halde $a^u \in T(t)$'dir. $tZ(A)$ olduğundan $T(t)=(0)$'dır. Yani her $a \in A$ için
$a^u = 0$ olur. Ayrıca $a^u = -u^a$ olduğundan $-u^a = 0$; buradan her $a \in A$ için $u^a = 0$ elde edilir. Tanıma göre

$$\begin{aligned} u^a &= D(ua)-D(u)a-uD(a)=0 \\ D(ua) &= D(u)a+uD(a) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $u \in V$'dir. □

Lemma 4.1.14 *A karakteristiği 2'den farklı bir asal halka, $a \in A$ ve $a^2 = 0$ ise $a \in V$'dir.*

İspat. $a^2 = 0$ ise her $r \in A$ için $a(ar) = 0$'dır. Lemma 4.1.13 gereği her $c \in A$ için

$$D(((ar)a)c) = D((ar)a)c+((ar)a)D(c)$$

dir ve $(ar)a \in V$'dir.
Eğer $a = 0$ ise $D(ar) = D(a)r+aD(r)$ olup $a \in V$'dir. Eğer $a \neq 0$ ise A asal halka olduğundan $\exists\ r \in A$ vardır öyle ki $ara \neq 0$ dır. Aksi halde her $r \in A$ için $ara = 0$ olsa, A asal halka olduğundan $a = 0$ olurdu bu ise $a \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece $a(ara) = (ara)a = 0$ olup $(ara)^2 = (ara)(ara) = 0$ bulunur ve A asal halka olduğundan $ara \notin Z(A)$ elde edilir. Lemma 4.1.13'da t yerine ara ve u yerine a yazılırsa; $(ara)a = a(ara)$ ve $a \in V$ olur. □

Lemma 4.1.15 *Her $a,b \in A$ için $c,d \in V$ ise $b^a(cd-dc) = 0$ dır.*

İspat. Lemma 4.1.13'deki $a^b(tc-ct)+a^c(tb-bt) = 0$ eşitliğine göre

$$b^a(cd-dc)+b^d(ac-ca) = 0$$

yazılabilir. Her $a,b \in A$ için $d \in V$ olduğundan

$$b^a(cd-dc) = 0$$

olur. □

Teorem 4.1.16 *A, karakteristiği 2'den farklı bir asal halka olmak üzere A'nın her Jordan türevi bir türevdir.*

İspat. $u \in A$ ve $u^2 = 0$ olsun. O halde $u \in V$'dir. $x \in A$ için $x^2 = 0$ kabul edilirse $x \in V$'dir. Lemma 4.1.15'ten her $a, b \in A$ için $b^a(ux - xu) = 0$'dır. Bu eşitlik sağdan u ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} b^a(ux - xu)u &= 0 \\ b^a uxu - b^a xuu &= 0 \\ b^a uxu - b^a xu^2 &= 0 \end{aligned}$$

dır. $u^2 = 0$ olduğundan

$$b^a uxu = 0$$

elde edilir.

Lemma 4.1.8'den her $c, d \in A$ için $c^d(cd - dc) = 0$'dır. Buradan her $r \in A$ için

$$((cd - dc)rc^d)^2 = (cd - dc)rc^d(cd - dc)rc^d = 0$$

olur.

Her $r, s \in A$ için $(cd - dc)rc^d = u$ ve $(ab - ba)sb^a = x$ olsun. Bunlar, $b^a uxu = 0$ eşitliğinde yazılırsa her $r, s \in A$ için

$$b^a(cd - dc)rc^d(ab - ba)sb^a(cd - dc)rc^d = 0$$

olur. O halde her $r, s \in A$ için

$$\{b^a(cd - dc)rc^d(ab - ba)\}s\{b^a(cd - dc)rc^d(ab - ba)\} = 0$$

olur. A asal halka olduğundan her $r \in A$ için

$$b^a(cd - dc)rc^d(ab - ba) = 0$$

olur. Yine A asal halka olduğundan her $a, b, c, d \in A$ için $b^a(cd - dc) = 0$ veya $c^d(ab - ba) = 0$ olmalıdır. Özel olarak $d = b$ alınırsa her $a, b, c \in A$ için

$b^a(cb-bc)=0$ veya $c^b(ab-ba)=0$ olmalıdır. Lemma 4.1.9'dan $b^a(bc-cb)+c^b(ab-ba)=0$'dır. Bu durumda $b^a(bc-cb)=0$ olur. Böylece her $a \in A$ için $b^a \in T(b)$'dir. $b \notin Z(A)$ ise $T(b)=0$ olup $b^a=0$'dır. Eğer $b \in Z(A)$ ise her $a \in A$ için $ba=ab$ olacağından Lemma 4.1.11'den her $a,b \in A$ için $b^a=0$'dır. Yani her $a,b \in A$ için

$$D(ab)-D(a)b-aD(b) = 0$$

olur. Sonuç olarak karakteristiği 2'den farklı asal halkalarda tanımlanan her Jordan türev aynı zamanda bir türev belirtir. □

4.2. Yarı Asal Halkalarda Jordan Türev

Bu bölümde J. M. Cusack'ın [10] çalışmasından yararlanılarak 2-burulmasız yarı asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan türevin bir türev olduğu gösterilecektir. Ayrıca 2-burulmasız ve sıfır bölensiz kommütatöre sahip halkalardaki her Jordan türevin bir türev olduğu gösterilecektir. Burada R bir halka, $D : R \to R$ bir Jordan türev olup $d : R \times R \to R$,
$d(a,b) = D(ab) - aD(b) - D(a)b$ $(a,b \in R)$ şeklinde alınacaktır.

Lemma 4.2.1 *R ve S, 2-burulmasız iki halka olmak üzere $J : R \to S$ tanımlı bir Jordan homomorfizması osun. Bu durumda her $a,b,r \in R$ için*

$$\begin{aligned} 1)(J(ab)-J(a)-J(b))(J(ba)-J(a)-J(b)) &= 0 \\ 2)[J(ab)-J(b)J(a), J(r), J(ab)-J(a)J(b)] &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} 1. \quad (J(ab)-J(a)-J(b))^2 &= (J(ab)-J(a)-J(b))(J(ab)-J(a)-J(b)) \\ &= (J(ab))^2 + J(a)(J(b))^2 J(a) - J(ab)J(b)J(a) \\ &\quad -J(a)J(b)J(ab) \\ &= J((ab)^2 + ab^2a - abba - (ab)^2) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. R, 2-burulmasız halka olduğundan

$$(J(ab)-J(a)-J(b)) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$(J(ab)-J(a)-J(b))(J(ba)-J(a)-J(b)) = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 2. \quad & [J(ab)-J(b)J(a),J(r),J(ab)-J(a)J(b)] \\ = \quad & (J(ab)-J(b)J(a))J(r)(J(ab)-J(a)J(b))+(J(ab)-J(a)J(b))J(r) \\ & (J(ab)-J(b)J(a)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(J(ab)-J(a)-J(b)) = 0$ olduğundan

$$[J(ab)-J(b)J(a),J(r),J(ab)-J(a)J(b)] = 0$$

olur. □

Lemma 4.2.2 *R bir halka olmak üzere her $a,b,r \in R$ için*

$$\begin{array}{lll} 1) & D(a,b)[a,b] & = 0 = [a,b]D(a,b) \\ 2) & [[a,b],r,D(a,b)] & = 0 \end{array}$$

dır.

İspat. 1. S, (a,b) ve $(s,t) \in R^2$ için (a,b) ve (s,t) elemanlarının çarpımını $(as, at+bs)$ şeklinde tanımlanan bir halka olsun.

$$\begin{array}{rcl} J: R & \to & S \\ a & \mapsto & (a,D(a)) \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir Jordan homomorfizması olsun. Bu durumda her $a,b \in R$ için

$$\begin{aligned} J(ab) &= (ab,D(ab)) \\ J(ba) &= (ba,D(ba)) \\ J(b) &= (b,D(b)) \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.2.1'in 1.kısmından

$$\begin{aligned}
(J(ab)-J(a)J(b))(J(ba)-J(a)J(b)) &= 0\\
((ab,D(ab))-(a,D(a))(b,D(b)))(ba,D(ba))(a,D(a))(b,D(b))) &= 0\\
((ab,D(ab))-(ab,D(b)+D(a)b))((ba,D(ba))-(ab,aD(b)+D(a)b) &= 0\\
(ab-ba,D(ab)-aD(b)-D(a)b)(ba-ab,D(ba)-aD(b)-D(a)b) &= 0\\
(0,d(a,b)([b,a],D(ba)-aD(b)-D(a)b) &= 0
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$(0,0+d(a,b)([b,a]) \;=\; 0 \Rightarrow \quad d(a,b)[b,a]=0$$

elde edilir. Benzer şekilde Lemma 4.2.1'nin 1.kısmından

$$[a,b]d(a,b) \;=\; 0$$

olduğu görülür.

2. Lemma 4.2.1'in 2.kısmından

$$[(J(ab)-J(b)J(a)),J(r),(J(ab)-J(a)J(b)) \;=\; 0$$

olur. O halde $[0,[a,b]rd(a,b)+0]=0 \Rightarrow [a,b]rd(a,b)=0$'dır.
Benzer şekilde $d(a,b)r[a,b]=0$ olduğundan

$$[[a,b],r,d(a,b)] \;=\; 0$$

bulunur. □

Lemma 4.2.3 *R bir halka ve R,P'nin bir asal ideali olsun. $a,b\in R$ olmak üzere her $r\in R$ için $[a,r,b]=0$ ise $a\in P$ veya $b\in P$'dir.*

İspat. $h,k\in R$ olsun. $a\in R$ için $r=hak$ alınsın. O zaman

$$\begin{aligned}
a(hak)b+b(hak)a &= 0\\
akb+bka &= 0\\
bha+ahb &= 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. $akb+bka=0$ eşitliği soldan ah ile çarpılırsa;

$$ahakb+ahbka=0 \tag{4.2.21}$$

olur. Diğer taraftan $bha+ahb=0$ eşitliği sağdan ka ile çarpılırsa;

$$bhaka+ahbka=0 \tag{4.2.22}$$

elde edilir.

(4.2.21) ile (4.2.22) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned} 0 &= ahakb+ahbka+bhaka+ahbka \\ &= (ahakb+bhaka)+ahbka+ahbka \\ &= 0+2(ahbka) \\ &\Rightarrow 2(ahbka)=0 \end{aligned}$$

olur. O zaman her $b\in R$ için $ahbka=0$'dır. Bu durumda P asal ideal olduğundan $ahbRa\subseteq P$ olduğunda $ahb\in P$ veya $a\in P$'dir. Öncelikle $a\notin P$ olsun. Bu durumda $ahb\in P$ olmalıdır. Bu da $b\in P$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $[a,r,b]=0$ ise $a\in P$ veya $b\in P$'dir. □

Teorem 4.2.4 *R, 2-burulmasız bir halka ve D, R üzerinde tanımlı bir Jordan türev olmak üzere L, R'nin tüm asal ideallerinin arakesiti (Baer Lower Radical) olsun [18, 23]. Her $a,b\in R$ için*

$$D(ab)-aD(b)-D(a)b\in L$$

dir.

İspat. P, R'nin bir asal ideali olsun. R/P değişmeli olmasın. Lemma 4.2.2'den

$$[[a,b],r,d(a,b)] = 0$$

dır. Lemma 4.2.3'dan $[a,b]\notin P$ ise $d(a,b)\in P$'dir.

Şimdi $[a,b]\in P$ ve $\exists r\in R$ için $[a,r]\notin P$ olsun. O zaman $[a,b+r]\notin P$ ve $d(a,r),d(a,b+r)\in P$ olur.

$$a(b+r)-(b+r)a = ab+ar-ba-ra\notin P$$

olur. Burada $ab-ba \in P$ olduğundan $ar-ra \notin P$'dir. Yani $[a,r] \notin P$'dir. Dolayısıyla $d(a,r) \in P$ olur.

$$d(a,b) = d(a,b+r)-d(a,r)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $[a,b] \in P$ ve her $r \in R$ için $[a,r] \in P$ ve $[s,r] \notin P$ olsun. Eğer $[a+s,r] \notin P$ ise $d(a+s,r) \in P$'dir. Eğer $[a,r] \in P$ ise $ar-ra \in P$ ve $sr-rs \notin P$ olur.

$$\begin{aligned} [a+s,r] &= (a+s)r-r(a+s) \\ &= ar+sr-ra-rs \notin P \end{aligned}$$

dir. Buradan $d(a+s,b) \in P$ olur. Ancak $[s,r] \notin P$ ise $d(s,b) \in P$ ve

$$d(a,b) = d(a+s,b)-d(s,b) \in P$$

dir. Sonuç olarak $d(a+s,b) \in P$ ve $d(s,b) \in P$ olduğundan

$$d(a,b) = d(a+s,b)-d(s,b) \in P$$

olur. Şimdi Q, R/Q'nun tamlık bölgesi olmasını sağlayan bir asal ideal olsun. Lemma 4.2.2'den

$$d(a,b) \circ [b,a] = 0$$

yazılabilir. D, bir Jordan türev olduğundan

$$d(a,b) \circ D([a,b]) + D(d(a,b)) \circ [a,b] = 0$$

olur. Buradan $2d(a,b)D([a,b]) \in Q$ olur. O halde $2d(a,b) \in Q$ veya $D([a,b]) \in Q$'dur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 2d(a,b)-D([a,b]) &= 2(D(ab)-aD(b)-D(a)b)-D(ab-ba) \\ &= 2D(ab)-2aD(b)-2D(a)b-D(ab)+D(ba) \\ &= D(ab)+D(ba)-2(aD(b)+D(a)b) \\ &= D(a \circ b)-2(aD(b)+D(a)b) \in Q \end{aligned}$$

olduğundan sonuç olarak $2d(a,b) \in Q$ olur. Ayrıca L, R'nin tüm asal ideallerinin arakesiti olduğundan $2d(a,b) \in L$ olmalıdır.

L, aynı zamanda bir nil idealdir ve

$$\exists\, n \in Z^{+} \ni 2^{n}(d(a,b))^{n} = 0$$

dır. R, 2-burulmasız halka olduğundan $d(a,b)$ nilpotent elemandır. Buradan Q, asal ideali için $d(a,b) \in Q$'dur. Dolayısıyla her $a,b \in R$ için $d(a,b) \in L$'dir. □

Sonuç 4.2.5 *R, yarı-asal bir halka olmak üzere R üzerinde tanımlı her Jordan türev bir (adi) türev belirtir.*

Teorem 4.2.6 *R, 2-burulmasız ve sıfır bölensiz kommütatöre sahip bir halka olmak üzere R üzerinde tanımlı her Jordan türev bir (adi) türevdir.*

İspat. $a,r,s,t \in R$ olmak üzere Lemma 4.2.2'dan

$$[[s+a,t],r,d(s+a,t)] = 0$$

dır. Bu ifade açılırsa;

$$[[s,t],r,d(s+a,t)] + [[a,t],r,d(s+a,t)] = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $[[s,t],r,d(s,t)] = 0$ ve $[[a,t],r,d(a,t)] = 0$ olduğundan

$$[[s,t],r,d(a,t)] + [[a,t],r,d(s,t)] = 0 \tag{4.2.23}$$

olmalıdır. (4.2.23) eşitliği t yerine $b+t$ yazılarak lineerleştirilirse;

$$[[s,b+t],r,d(a,b+t)] + [[a,b+t],r,d(s,b+t)] = 0$$

$$\begin{aligned}
&[[s,b],r,d(a,b+t)] + [[s,t],r,d(a,b+t)] \\
&+[[a,b],r,d(s,b+t)] + [[a,t],r,d(s,b+t)] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[[s,b],r,d(a,b)] + [[s,b],r,d(a,t)] + [[s,t],r,d(a,b)] + [[s,t],r,d(a,t)] \\
&+[[a,b],r,d(s,b)] + [[a,b],r,d(s,t)] + [[a,t],r,d(s,b)] + [[a,t],r,d(s,t)] = 0
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$[[s,t],r,d(a,t)]+[[a,t],r,d(s,t)] = 0$$

ve

$$[[s,b],r,d(a,b)]+[[a,b],r,d(s,b)] = 0$$

olduğundan her $a,b,r,s,t \in R$ için

$$[[s,t],r,d(a,b)]+[[s,b],r,d(a,t)]+[[a,t],r,d(s,b)]+[[a,b],r,d(s,t)] = 0 \tag{4.2.24}$$

olur. $s,t \in R$ elemanları $[s,t]z = 0$ ve $z[s,t] = 0$ olacak şekilde seçilecek olursa $z = 0$ olur. Lemma 4.2.2'den $d(s,t) = 0$'dır. $(**)$ eşitliğinde a yerine s yazılırsa;

$$[[s,t],r,d(s,b)]+[[s,b],r,d(s,t)]+[s,t],r,d(s,b)]+[[s,b],r,d(s,t)] = 0$$

olur. $d(s,t) = 0$ olduğundan $2[[s,t],r,d(s,b)] = 0$'dır. Buradan her $a,b \in R$ için $[s,t]^2 d(s,b)[s,t]^2 = 0$ ise $d(s,b) = 0$ ve $[s,t]^2 d(a,t)[s,t]^2 = 0$ ise $d(a,t) = 0$'dır. Son olarak $[[s,t],r,d(a,b)] = 0$ ve bu nedenle benzer şekilde her $a,b \in R$ için $d(a,b) = 0$ olur. d'nin tanımından

$$\begin{aligned} d(a,b) &= D(ab) - D(a)b - aD(b) = 0 \\ \Rightarrow D(ab) &= D(a)b + aD(b) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla d bir türevdir. $\square$

Uyarı 4.2.7 *R, bir halka olmak üzere R üzerinde tanımlı her türev bir Jordan türev olmasına rağmen her Jordan türev bir türev olmayabilir. Bu duruma örnek aşağıdaki şekilde verilebilr:*

Örnek 4.2.8 *R,* 2*-burulmasız bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $x \in R$, $axa = 0$ fakat $a,b \in R$ için $axb \neq 0$ olsun. D, toplamsal dönüşümü $D(a) = ax$ şeklinde tanımlansın.*

$$(a \circ b)x - a \circ (bx) - ax \circ b = -(bxa + axb) = -(a+b)x(a+b) = 0$$

olduğundan D bir Jordan türevdir fakat;

$$(ab)x - a(bx) - ax(b) = -axb \neq 0$$

olduğundan D bir türev değildir.

4.3. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Jordan Türevi

1989 yılında M. Brešar [6], 2-burulmasız yarı asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan 3'lü türevin bir türev olduğunu ispatlamıştır. Bu bölümde W. Jing ve S. Lu'nun [19] çalışması incelenerek 2-burulmasız asal halkalar üzerinde tanımlı her genelleştirilmiş Jordan türevin ayrıca her genelleştirilmiş Jordan 3'lü türevin bir genelleştirilmiş türev olduğu gösterilecektir.
Bu bölümde R, 2-burulmasız bir halka ve (δ,τ), R üzerinde $\tau : R \to R$ Jordan türevi ile birlikte bir genelleştirilmiş Jordan türev alınacaktır.

Lemma 4.3.1 *Her $a,b,c \in R$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $\delta(ab+ba) = \delta(a)b + a\tau(b) + \delta(b)a + b\tau(a)$

2. $\delta(aba) = \delta(a)ba + a\tau(b)a + ab\tau(a)$

3. $\delta(abc+cba) = \delta(a)bc + a\tau(b)c + ab\tau(c) + \delta(c)ba + c\tau(b)a + cb\tau(a)$

İspat. 1. Her $a,b \in R$ için

$$\delta((a+b)^2) = \delta(a+b)(a+b) + (a+b)\tau(a+b) \tag{4.3.25}$$

dir. Ayrıca $\delta((a+b)^2) = \delta(a^2+ab+ba+b^2)$ dir. Bu durumda

$$\delta((a+b)^2) = \delta(a)a + a\tau(a) + \delta(ab+ba) + \delta(b)b + b\tau(b) \tag{4.3.26}$$

elde edilir. (4.3.25) ve (4.3.26) birbirine eşit olduğundan

$$\begin{aligned}&(\delta(a)+\delta(b))(a+b) + (a+b)(\tau(a)+\tau(b))\\ &= \delta(a)a + a\tau(a) + \delta(ab+ba) + \delta(b)b + b\tau(b)\end{aligned}$$

olur. Burada gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa;

$$\delta(ab+ba) \quad = \quad \delta(a)b+a\tau(b)+\delta(b)a+b\tau(a)$$

elde edilir.

2. $w=\delta(a(ab+ba)+(ab+ba)a)$ olsun. 1'in ispatından

$$\begin{aligned} w &= \delta(a)(ab+ba)+a\tau(ab+ba)+\delta(ab+ba)a+(ab+ba)\tau(a) \\ &= \delta(a)ab+\delta(a)ba++a\tau(ab+ba)+(\delta(a)b+a\tau(b)+\delta(b)a \\ &\quad +b\tau(a))a+ab\tau(a)+ba\tau(a) \\ &= \delta(a)ab+\delta(a)ba+\delta(a)ba+\delta(b)a^2+a\tau(b)a+b\tau(a)a \\ &\quad +a\tau(a)b+a^2\tau(b)+a\tau(b)a+ab\tau(a)+ab\tau(b)+ba\tau(a) \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} w &= \delta(a^2b+ba^2+2aba) \\ &= \delta(a^2b+ba^2)+2\delta(aba) \\ &= \delta(a^2)b+a^2\tau(b)+\delta(b)a^2+b\tau(a^2)+2\delta(aba) \\ &= \delta(a)ab+a\tau(a)b+a^2\tau(b)+\delta(b)a^2+b\tau(a)a \\ &\quad +b\tau(a)a+ba\tau(a)+2\delta(aba) \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.27) ve (4.3.28) birbirine eşit ifadeler olduğundan gerekli düzenlemeler yapıldığında her $a,b\in R$ için

$$2\delta(aba)=2(\delta(a)ba+a\tau(b)a+ab\tau(b))$$

$$2\delta(aba)-2(\delta(a)ba+a\tau(b)a+ab\tau(b)) \quad = \quad 0$$

$$2(\delta(aba)-(\delta(a)ba+a\tau(b)a+ab\tau(b)) \quad = \quad 0$$

olur. R, 2-burulmasız bir halka olduğundan

$$(\delta(aba)-(\delta(a)ba+a\tau(b)a+ab\tau(b)) \quad = \quad 0$$

O halde

$$\delta(aba) = \delta(a)ba + a\tau(b)a + ab\tau(b) \tag{4.3.29}$$

dir.

3. (4.3.29) eşitliğinde a yerine $a+c$ yazılırsa her $a,b,c \in R$ için;

$$\begin{aligned}
\delta((a+c)b(a+c)) &= \delta(abc+cba) + \delta(aba) + \delta(cbc) \\
&= \delta(abc+cba) + \delta(a)ba + a\tau(b)a + ab\tau(a) \\
&\quad + \delta(c)ba + c\tau(b)c + cb\tau(c)
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\delta((a+c)b(a+c)) &= \delta(a+c)b(a+c) + (a+c)\tau(b)(a+c) + (a+c)b\tau(a+c) \\
&= (\delta(a)+\delta(c))(ba+bc) + (a\tau(b)+c\tau(b))(a+c) \\
&\quad + (ab+cb)(\tau(a)+\tau(c)) \\
&= \delta(a)ba + \delta(a)bc + \delta(c)ba + \delta(c)bc + a\tau(b)a + a\tau(b)c \\
&\quad + c\tau(b)a + c\tau(b)c + ab\tau(a) + ab\tau(c) + cb\tau(a) + cb\tau(c)
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

dir. Her $a,b,c \in R$ için $(4.3.30) = (4.3.31)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\delta(abc+cba) &= \delta(a)bc + \delta(c)ba + a\tau(b)c + c\tau(b)a + ab\tau(c) + cb\tau(a) \\
&= \delta(a)bc + a\tau(b)c + ab\tau(c) + \delta(c)ba + c\tau(b)a + cb\tau(a)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.3.2 *R yarı asal bir halka olsun. Her $x \in R$ için $axb = 0$ ise $bxa = 0$'dır.*

Bu bölümde $a^b = \delta(ab) - \delta(a)b - a\tau(b)$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda her $a,b,c \in R$ için aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı açıktır:

1. $a^b = -b^a$

2. $a^{b+c} = a^b + a^c$

3. $(a+b)^c = a^c + b^c$

Teorem 4.3.3 *R yarı asal bir halka olmak üzere herhangi $a,b,x \in R$ için*

$$a^b x[a,b] = 0$$

dır.

İspat. $w = \delta(abxba + baxab)$ olsun. Bu durumda

$$w = \delta(ab)xba + ab\tau(x)ba + abx\tau(ba) + \delta(ba)xab + ba\tau(x)ab + bax\tau(ab) \quad (4.3.32)$$

dir. Diğer taraftan w aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$w = \delta(a)bxba + a\tau(bxb)a + abxb\tau(a) + \delta(b)axab + b\tau(axa)b + baxa\tau(b) \quad (4.3.33)$$

2-burulmasız yarı asal halkalarda her Jordan türev bir türev olduğundan τ bir türevdir.(4.3.32) ve (4.3.33) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&\delta(ab)xba + ab\tau(x)ba + abx\tau(b)a + abxb\tau(a) + \delta(ba)xab + ba\tau(x)ab \\
&+bax\tau(a)b + baxa\tau(b) = \delta(a)bxba + a\tau(b)xba + ab\tau(x)ba + abx\tau(b)a\tau \\
&+abxb\tau(a) + \delta(b)axab + b\tau(a)xab + ba\tau(x)ab + bax\tau(a)b + baxa\tau(b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
a^b xba + b^a xab &= 0 \\
a^b xba - a^b xab &= 0 \\
a^b (xba - xab) &= 0 \\
a^b x[a,b] &= 0
\end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 4.3.4 *R yarı asal bir halka ise* $a^b \in Z(R)$*'dir.*

İspat.

$$Z(R) \quad = \quad \{a \in R \;\mid\; ax = xa; \;\; \forall x \in R\}$$

şeklindedir. Herhangi $a,b,c,x \in R$ için Teorem 4.3.3'den

$$\begin{aligned}
a^{b+c}x[a,b+c] &= 0 \\
a^b x[a,b+c] + a^c x[a,b+c] &= 0 \\
a^b x[a,b] + a^b x[a,c] + a^c x[a,b] + a^c x[a,c] &= 0 \\
a^b x[a,c] + a^c x[a,b] &= 0
\end{aligned}$$

olur. Yine Teorem 4.3.3'den her $y \in R$ için $a^c y[a,c] = 0$ yazılabilir. Lemma 4.3.2'dan $[a,c]ya^c = 0$'dır. Buradan

$$(a^b x[a,c])y(a^b x[a,c]) \quad = \quad -a^b x[a,c]ya^c x[a,b] = 0$$

olur. R yarı asal halka olduğundan $a^b x[a,c] = 0$ olmalıdır.

Benzer şekilde her $d \in R$ için $a^b x[d,c] = 0$'dır. Özel olarak

$$\begin{aligned}
[a^b,c]x[a^b,c]x &= (a^b c - ca^b)x[a^b,c] \\
&= a^b cx[a^b,c] - ca^b x[a^b,c] \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. R yarı asal halka olduğundan $[a^b,c] = 0$ olmalıdır. Burada $[a^b,c] = a^b c - ca^b$ eşitliği ile tanımlı olduğundan $a^b c = ca^b$ olur. Bu da $a^b \in Z(R)$ olduğunu gösterir. □

Teorem 4.3.5 *R,* 2*-burulmasız asal bir halka olmak üzere R üzerinde tanımlı her genelleştirilmiş Jordan türev bir genelleştirilmiş türevdir.*

İspat. $\delta : R \to R$ bir genelleştirilmiş Jordan türev olsun. τ, R üzerindeki Jordan türev olsun. Sonuç 4.3.4'in ispatından her $a,b,c,d,x \in R$ için

$$a^b[c,d] \quad = \quad 0$$

dır. Bu koşullarda 2 durum söz konusudur:

1.Durum: R değişmeli olmasın. O halde $[c,d] \neq 0$ olacak şekilde $\exists\ c,d \in R$ vardır. R asal halka olduğundan

$$a^b = 0 \quad veya \quad [c,d] = 0$$

olmalıdır. $[c,d] \neq 0$ olduğundan $a^b = 0$ olur. O zaman a^b'nin tanımından

$$a^b = \delta(ab) - \delta(a)b - a\tau(b) = 0$$

olup $\delta(ab) = \delta(a)b + a\tau(b)$ bulunur. Dolayısıyla δ bir genelleştirilmiş türevdir.

2.Durum: R değişmeli olsun. $w = \delta(a^2b + ba^2)$ şeklinde alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} w &= \delta(a^2b+ba^2) \\ &= \delta(a^2)b + a^2\tau(b) + \delta(b)a^2 + b\tau(a^2) \\ &= (\delta(a)a + a\tau(a))b + a^2\tau(b) + \delta(b)a^2 + b\tau(a^2) \\ &= \delta(a)ab + a\tau(a)b + \delta(b)a^2 + b\tau(a^2) \\ &= \delta(a)ab + a\tau(a)b + \delta(b)a^2 + b\tau(a)a + ba\tau(a) \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} w &= \delta(a^2b+ba^2) = \delta(a)ab + a\tau(ab) + \delta(ab)a + ab\tau(a) \\ &= \delta(a)ab + a\tau(a)b + aa\tau(b) + \delta(ab)a + ab\tau(a) \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

(4.3.34) ve (4.3.35) birbirine eşit olduğundan

$$\begin{gathered} \delta(a)ab + a\tau(a)b + \delta(b)a^2 + b\tau(a)a + ba\tau(a) \\ = \delta(a)ab + a\tau(a)b + aa\tau(b) + \delta(ab)a + ab\tau(a) \\ \Rightarrow \quad \delta(ab)a = \delta(b)a^2 + b\tau(a)a \\ \Rightarrow \quad \delta(ab)a - \delta(b)a^2 - b\tau(a)a = 0; \quad \forall a \in R \end{gathered}$$

Bu durumda

$$b^a a = 0 \tag{4.3.36}$$

olur. Burada a yerine $a+c$ alınırsa;

$$\begin{aligned} b^{a+c}(a+c) &= b^a(a+c)+b^c(a+c)=0 \\ &= b^a a + b^a c + b^c a + b^c c \\ &\Rightarrow b^a c + b^c a = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$(b^a c)x(b^a c) = -b^c a x b^a c = -(b^c c)x(b^a a) = 0$$

dır. Bu durumda R yarı asal halka olduğundan $b^a c = 0$ olmalıdır. Bu eşitliğin her iki tarafı sağdan b^a ile çarpılırsa;

$$b^a c b^a = 0$$

olur. Yine R'nin yarı asallığından $b^a = 0$ elde edilir. Her $a, b \in R$ için $b^a = 0$ olduğundan δ bir genelleştirilmiş türevdir. □

4.4. Asal Halkalar Üzerinde Genelleştirilmiş Jordan 3'lü Türevler

Bu bölümde W. Jing ve S. Lu'nun [19] çalışmasının devamı incelenerek asal halkalardaki her genelleştirilmiş Jordan 3'lü türevin bir genelleştririlmiş türev olduğu gösterilmiştir. Burada R bir 2-burulmasız yarı asal halka ve (δ, τ), R halkası üzerinde $\tau : R \to R$ Jordan 3'lü türevi ile birlikte bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev alınacaktır.

Lemma 4.4.1 *Herhangi $a, b, c \in R$ için*

$$\delta(abc+cba) = \delta(a)bc + a\tau(b)c + ab\tau(c) + \delta(c)ba + c\tau(b)a + cb\tau(a)$$

dır.

İspat. Lemma 4.3.1'nin ispatına benzer şekilde $w = \delta((a+c)b(a+c))$ olsun.

$$\begin{aligned}
w &= \delta((a+c)b(a+c)) \\
&= \delta(a+c)b(a+c) + (a+c)\tau(b)(a+c) + (a+c)b\tau(a+c) \\
&= \delta(a+c)(ba+bc) + a\tau(b)a + a\tau(b)c + c\tau(b)a + c\tau(b)c + (ab+cb)\tau(a+c) \\
&= \delta(a)ba + \delta(a)bc + \delta(c)ba + \delta(c)bc + a\tau(b)a + a\tau(b)c \\
&\quad + c\tau(b)a + c\tau(b)c + ab\tau(a) + ab\tau(c) + cb\tau(a) + cb\tau(c) \qquad (4.4.37)
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$w = \delta(aba) + \delta(cbc) + \delta(abc+cba)$$

şeklinde gruplandırılırsa;

$$w = \delta(a)ba + a\tau(b)a + ab\tau(a) + \delta(c)bc + c\tau(b)a + cb\tau(a) + \delta(abc+cba) \qquad (4.4.38)$$

olur. Burada (4.4.37) ve (4.4.38) birbirine eşit olduğundan gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa

$$\delta(abc+cba) = \delta(a)bc + a\tau(b)c + ab\tau(c) + \delta(c)ba + c\tau(b)a + cb\tau(a)$$

elde edilir. □

Bu bölümde ispatlanacak teorem ve lemmalar için aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır:

i. $A(abc) = \delta(abc) - \delta(a)bc - a\tau(b)c - ab\tau(c)$

ii. $B(abc) = abc - cba$

A ve B ile ilgili bazı eşitlikler de aşağıdaki gibidir:

1. $A(abc) + A(cba) = 0$
2. $A((a+b)cd) = A(acd) + A(bcd)$ ve $B((a+b)cd) = B(acd) + B(bcd)$

3. $A(a(b+c)d) = A(abd) + A(acd)$ ve $B(a(b+c)d) = B(abd) + B(acd)$

4. $A(ab(c+d)) = A(abc) + A(abd)$ ve $B(ab(c+d)) = B(abc) + B(abd)$

Lemma 4.4.2 *R bir yarı asal halka olmak üzere herhangi $a,b,c,x \in R$ için $A(abc)xB(abc) = 0$ dır.*

İspat. R yarı asal bir halka olduğundan [5]'den τ bir türevdir.
$w = \delta(abcxcba + cbaxabc)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} w &= \delta(abcxcba + cbaxabc) \\ &= \delta(abc)xcba + abc\tau(x)cba + abcx\tau(cba) + \delta(cba)xabc + cba\tau(x)abc + cbax\tau(abc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta(abc)xcba + abc\tau(x)cba + abcx\tau(c)ba + abcxc\tau(b)a + abcxcb\tau(a) + \delta(cba)xabc \\ &\quad + cba\tau(x)abc + cbax\tau(a)bc + cbaxa\tau(b)c + cbaxab\tau(c) \end{aligned} \tag{4.4.39}$$

olur. Ayrıca $w = \delta(a(b(cxc)b)a + c(b(axa)b)c)$ şeklinde de gruplandırılabilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} w &= \delta(a(b(cxc)b)a + c(b(axa)b)c) \\ &= \delta(a)bcxcba + a\tau(b(cxc)b)a)a + abcxbc\tau(a) \\ &\quad + \delta(c)baxabc + c\tau(b(axa)b)c + cbaxab\tau(c) \\ &= \delta(a)bcxcba + a(\tau(b)cxxb + b\tau(cxc)b + bcxc\tau(b))a + abcxbc\tau(a) \\ &\quad + \delta(c)baxabc + c(\tau(b)axab + b\tau(axa) + baxa\tau(b))c + cbaxab\tau(c) \\ &= \delta(a)bcxcba + a\tau(b)cxcba + ab(\tau(c)xc + c\tau(x)c + cx\tau(c))ba \\ &\quad + abcxc\tau(b)a + abcxcb\tau(a) + \delta(c)baxabc + c\tau(b)axabc \\ &\quad + cb(\tau(a)xa + a\tau(x)a + ax\tau(a))bc + cbaxa\tau(b)c + cbaxab\tau(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta(a)bcxcba + a\tau(b)cxcba + ab\tau(c)xcba + abc\tau(x)cba + abcx\tau(c)ba \\ &\quad + abcxc\tau(b)a + abcxcb\tau(a) + \delta(c)baxabc + c\tau(b)axabc \\ &\quad + cb\tau(a)xabc + cba\tau(x)abc + cbax\tau(a)bc + cbaxa\tau(b)c + cbaxab\tau(c) \end{aligned}$$

(4.4.40)

olur. Burada (4.4.39) ve (4.4.40) karşılaştırılırsa;

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(abc)xcba+\delta(cba)xabc-\delta(a)bcxcba-a\tau(b)cxcba-ab\tau(c)xcba \\ &\quad -\delta(c)baxabc-c\tau(b)axabc-cb\tau(a)xabc \\ &= (\delta(abc)-\delta(a)bc-a\tau(b)c-ab\tau(c))xcba \\ &\quad +(\delta(cba)-\delta(c)ba-c\tau(b)a-cb\tau(a))xabc \\ &= A(abc)xcba+A(cba)xabc \end{aligned}$$

bulunur. $A(abc)=-A(cba)$ olduğundan her $a,b,c,x\in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= -A(abc)xcba+A(abc)xabc \\ &= A(abc)x(abc-cba) \\ &= A(abc)xB(abc) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.4.3 *R bir yarı asal halka olsun. O zaman her $a,b,c,r,s,t,x\in R$ için*

$$A(abc)xB(rst) = 0$$

dır.

İspat. Lemma 4.4.2'de a yerine $a+r$ alınırsa;

$$\begin{aligned} A((a+r)bc)xB((a+r)bc) &= A(abc)xB(abc)+A(abc)xB(rbc)+A(rbc)xB(abc) \\ &\quad +A(rbc)xB(rbc) \\ &= 0+A(abc)xB(rbc)+A(rbc)xB(abc)+0 \\ &= A(abc)xB(rbc)+A(rbc)xB(abc) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$A(abc)xB(rbc)+A(rbc)xB(abc) = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla $A(abc)xB(rbc) = -A(rbc)xB(abc)$ olur. Burada $y \in R$ olmak üzere x yerine $xB(rbc)yA(abc)x$ alınırsa;

$$0 = A(abc)xB(rbc)yA(abc)xB(rbc) \quad = \quad -A(rbc)xB(rbc)yA(abc)xB(abc)$$

olur. R yarı asal bir halka olduğundan her $y \in R$ için

$$A(abc)xB(rbc) \quad = \quad 0$$

olmalıdır. Bu eşitlikte b yerine $b+s$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
A(a(b+s)cxB(r(b+s)c) &= 0 \\
A(abc)xB(rbc) + A(abc)xB(rsc) + A(asc)xB(rbc) + A(asc)xB(rsc) &= 0 \\
0 + A(abc)xB(rsc) + A(asc)xB(rbc) + 0 &= 0 \\
A(abc)xB(rsc) + A(asc)xB(rbc) + 0 &= 0 \\
\Rightarrow A(abc)xB(rsc) = -A(asc)xB(rbc) &
\end{aligned}$$

elde edilir. $z \in R$ olmak üzere x yerine $xB(rsc)zA(abc)x$ alınırsa;

$$0 = A(abc)xB(rsc)zA(abc)xB(rsc) \quad = \quad A(asc)xB(rsc)zA(abc)xB(rbc)$$

olur. R'nin yarı asallığından her $z \in R$ için

$$A(abc)xB(rsc) \quad = \quad 0$$

olur. Son olarak bu eşitlikte de c yerine $c+t$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
A(ab(c+t))xB(rs(c+t)) &= 0 \\
A(abc)xB(rsc) + A(abc)xB(rst) + A(abt)xB(rsc) + A(abt)xB(rsc) &= 0 \\
0 + A(abc)xB(rst) + A(abt)xB(rsc) + 0 &= 0 \\
A(abc)xB(rst) + A(abt)xB(rsc) &= 0 \\
\Rightarrow A(abc)xB(rst) = -A(abt)xB(rsc) &
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada da $q \in R$ olmak üzere x yerine $xB(rst)A(abc)x$ alınırsa;

$$0 = A(abc)xB(rst)A(abc)xB(rst) \quad = \quad -A(abt)xB(rst)A(abc)xB(rsc)$$

olur. Yine R halkasının yarı asallığı kullanılırsa her $a,b,c,r,s,t,x \in R$ için

$$A(abc)xB(rst) = 0$$

olur. □

Sonuç 4.4.4 *R bir asal halka olmak üzere $Z(R) \neq \{0\}$ ise her $a,b,c \in R$ için $A(abc) \in Z(R)$'dir.*

İspat. Her $a,b,c,x,r,s \in R$ için

$$\begin{aligned} B(A(abc)rs)xB(A(abc)rs) &= (A(abc)rs - srA(abc))xB(A(abc)rs) \\ &= A(abc)rsxB(A(abc)rs) - srA(abc)xB(A(abc)rs) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. O halde $B(A(abc)rs)xB(A(abc)rs) = 0$'dır. R bir asal halka olduğundan her $x \in R$ için $B(A(abc)rs) = 0$ olur. B'nin tanımından

$$\begin{aligned} A(abc)rs - srA(abc) &= 0 \\ \Rightarrow A(abc)rs &= srA(abc) \end{aligned}$$

olur. $0 \neq r_0 \in Z(R)$ olsun. Bu durumda $A(abc)r_0 \in Z(R)$'yi sağlayan

$$A(abc)r_0s = sr_0A(abc) = sA(abc)r_0$$

eşitliği vardır. Buradan

$$\begin{aligned} sr_0A(abc) - sA(abc)r_0 &= 0 \\ s(r_0A(abc) - A(abc)r_0) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her $s \in R$ için $r_0A(abc) - A(abc)r_0 = 0$'dır.
Yani $r_0A(abc) = A(abc)r_0$'dır. Bu durumda Önerme 2.1.21'den $A(abc) \in Z(R)$'dir.
□

Teorem 4.4.5 *R, 2-burulmasız bir asal halka olmak üzere R üzerinde tanımlı her genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev bir genelleştirilmiş türevdir.*

İspat. δ, R halkası üzerinde $\tau : R \to R$ Jordan 3'lü türevi ile birlikte bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev olsun. $a,b,c,x \in R$ olsun. Burada 2 durum söz konusudur:

1.Durum: $B(rst) \neq 0$ olacak şekilde $r,s,t \in R$ vardır. Teorem 4.4.3'ten her $a,b,c,r,s,t,x \in R$ için $A(abc)xB(rst) = 0$ eşitliği vardır. R bir asal halka olduğundan $A(abc) = 0$ veya $B(rst) = 0$ olmalıdır. $B(rst) \neq 0$ kabul edildiğinden $A(abc) = 0$'dır.

2.Durum: $B(rst) = 0$ olsun. O halde B'nin tanımından $rst = tsr$'dir. (B(rst)=rst-tsr) Q, R'nin merkezi kapanışı veya sağ kesirler (Marindale) halkası olsun ([16]). Bu durumda Q, R'yi içeren, birimli bir asal halkadır. [16]'den Q, R'nin sağladığı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar. Her $r,s,t \in Q$ için $rst = tsr$ eşitliğinde özel olarak $s = 1$ alınırsa $rt = tr$ elde edilir. Bu da Q ve R'nin değişmeli olduğunu gösterir.

$w = \delta(a^3bc + cba^3)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
w &= \delta(a^3)bc + a^3\tau(b)c + a^3b\tau(c) + \delta(c)ba^3 + c\tau(b)a^3 + cb\tau(a^3) \\
&= (\delta(a)a^2 + a\tau(a)a + a^2\tau(a))bc + a^3\tau(b)c + a^3b\tau(c) + \delta(c)ba^3 \\
&\quad + c\tau(b)a^3 + cb\tau(a^3) \\
&= \delta(a)a^2bc + a\tau(a)abc + a^2\tau(a)bc + a^3\tau(b)c + a^3b\tau(c) + \delta(c)ba^3 \\
&\quad + c\tau(b)a^3 + cb(\tau(a)a^2 + a\tau(a)a + a^2\tau(a)) \\
&= \delta(a)a^2bc + a\tau(a)abc + a^2\tau(a)bc + a^3\tau(b)c + a^3b\tau(c) + \delta(c)ba^3 \\
&\quad + c\tau(b)a^3 + cb\tau(a)a^2 + cba\tau(a)a + cba^2\tau(a)
\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

olur. R ve Q değişmeli halka olduğundan $w = ((abc)aa + aa(abc))$ şeklinde de gruplandırılabilir. O zaman

$$\begin{aligned}
w &= \delta(abc)aa + abc\tau(a)a + abca\tau(a) + \delta(a)aabc + a\tau(a)abc + aa\tau(abc) \\
&= \delta(abc)a^2 + abc\tau(a)a + abca\tau(a) + \delta(a)a^2bc + a\tau(a)abc + a^2\tau(abc) \\
&= \delta(abc)a^2 + abc\tau(a)a + abca\tau(a) + \delta(a)a^2bc + a\tau(a)abc \\
&\quad + a^2(\tau(a)bc + a\tau(b)c + ab\tau(c)) \\
&= \delta(abc)a^2 + abc\tau(a)a + abca\tau(a) + \delta(a)a^2bc + a\tau(a)abc \\
&\quad + a^2\tau(a)bc + a^3\tau(b)c + a^3b\tau(c)
\end{aligned} \tag{4.4.42}$$

bulunur. (4.4.41) ve (4.4.42) eşitlikleri karşılaştırılırsa;

$$\begin{aligned}
\delta(abc)a^2 - \delta(c)ba^3 - c\tau(b)a^3 - cb\tau(a)a^2 &= 0 \\
\Rightarrow [\delta(abc) - \delta(c)ba - c\tau(b)a - cb\tau(a)]a^2 &= 0
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda $A(abc)a^2 = 0$ olur. Bu eşitlik sağdan $xA(abc)$ ile çarpılırsa;

$$A(abc)a^2xA(abc) = 0$$

olur. R değişmeli halka olduğundan

$$A(abc)a^2xA(abc) = A(abc)axA(abc)a = 0$$

yazılabilir. Burada R asal halka olduğundan her $x \in R$ için $A(abc)a = 0$ elde edilir. Burada Teorem 4.3.5'in ispatına benzer bir düşünceyle; $A(abc)x = 0$ elde edilir. Bu eşitlik sağdan $A(abc)$ ile çarpıldığında $A(abc)xA(abc) = 0$ olur. Yine R halkasının asallığından $x \in R$ için

$$A(abc) = 0$$

olur.

Şimdi δ'nın bir genelleştirilmiş türev olduğu gösterilecektir:

Herhangi $a,b,c,d,x,y \in R$ için $w = \delta(abxab)$ olsun. İlk olarak $w = \delta((ab)xab)$ biçiminde gruplandırılsın. Bu durumda;

$$\begin{aligned} w &= \delta(ab)xab + ab\tau(x)ab + abx\tau(ab) \\ &= \delta(ab)xab + ab\tau(x)ab + abx(\tau(a)b + a\tau(b)) \\ &= \delta(ab)xab + ab\tau(x)ab + abx\tau(a)b + abxa\tau(b) \end{aligned} \tag{4.4.43}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} w &= \delta(a)(bxa)b + a\tau(bxa)b + abxa\tau(b) \\ &= \delta(a)bxab + a(\tau(b)xa + b\tau(x)a + bx\tau(a))b + abxa\tau(b) \end{aligned}$$

$$w = \delta(a)bxab + a\tau(b)xab + ab\tau(x)ab + abx\tau(a)b + abxa\tau(b) \tag{4.4.44}$$

yazılabilir. Burada (4.4.43) ve (4.4.44) birbirine eşit olduğundan gerekli sadeleştirme işlemleri yapıldığında;

$$\delta(ab)xab - \delta(a)bxab - a\tau(b)xab = (\delta(ab) - \delta(a)b - a\tau(b))xab = 0 \tag{4.4.45}$$

elde edilir. $a^b = \delta(ab) - \delta(a)b - a\tau(b)$ şeklinde tanımlıydı. O zaman (4.4.45) eşitliği

$$a^b xab = 0$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $c \in R$ olmak üzere a yerine $a+c$ alınırsa;

$$\begin{aligned} 0 = (a+c)^b x(a+c)b &= a^b xab + a^b xcb + c^b xab + c^b xcb \\ &= 0 + a^b xcb + c^b xab + 0 \\ &= a^b xcb + c^b xab \end{aligned}$$

olur. O halde $a^b xcb = -c^b xab$'dir.$y \in R$ olmak üzere bu eşitliğin her iki tarafı sağdan $y(a^b xcb)$ ile çarpılırsa;

$$a^b xcby(a^b xcb) = -c^b xaby(a^b xcb) = -a^b x(cbyc^b)xab = 0$$

elde edilir. O halde $(a^bxcb)y(a^bxcb) = 0$ olur. r halkası asal olduğundan

$$a^bxcb = 0$$

dır. $d \in R$ için bu eşitlik b yerine $b+d$ alınarak lineerleştirilirse;

$$\begin{aligned} 0 = a^{b+d}xc(b+d) &= a^bxcb + a^bxcd + a^dxcb + a^dxcd \\ &= 0 + a^bxcd + a^dxcb + 0 \\ &= a^bxcd + a^dxcb \end{aligned}$$

olur. Yani $a^bxcd = -a^dxcb$'dir. $z \in R$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı sağdan za^bxcd ile çarpılırsa;

$$a^bxcdza^bxcd = -a^dxcbza^bxcd = -a^dz(a^bxcd)xcb = 0$$

olur. Bu durumda $(a^bxcd)z(a^bxcd) = 0$ olur. Yine R halkasının asallığından her $z \in R$ için

$$a^bxcd = 0$$

elde edilir. Özellikle $a^bcxa^bc = 0$'dır. Buradan $a^bc = 0$ olur. Dolayısıyla $a^b = 0$ bulunur. a^b'nin tanımından;

$$\begin{aligned} a^b = \delta(ab) - \delta(a)b - a\tau(b) &= 0 \\ \Rightarrow \delta(ab) &= \delta(a)b + a\tau(b) \end{aligned}$$

dir. Yani δ bir genelleştirilmiş türevdir. $\square$

Buna göre 2-burulmasız yarı asal halkalarda tanımlanan her genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev bir genelleştirilmiş türevdir.

4.5. Asal Halkalarda Jordan (θ, φ)-Türev

Bu bölümde karakteristiği M. Brešar ve J. Vukman'ın [6] çalışması incelenerek karakteristiği 2'den farklı olan asal halkalar üzerinde her Jordan (θ, φ)-türevin bir (θ, φ)-türev olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.5.1 *T herhangi bir halka ve R değişmeli olmayan bir halka; $\theta,\varphi : T \to R$ homomorfizmalar olsun. X, 2-burulmasız R-bimodül olsun. $x \in X$ ve $a \in R$ için φ veya θ örten ve $xRa = 0$ iken $x = 0$ veya $a = 0$ olsun. O halde $d : T \to X$'e tanımlı her Jordan (θ,φ)-türev bir (θ,φ)-türevdir.*

Önerme 4.5.2 *T ve R bir halka, $\theta,\varphi : T \to R$ birer homomorfizma ve X, 2-burulmasız bir R-bimodül olsun. Eğer $d : T \to X$ bir Jordan (θ,φ)-türev ise her $a,b,c \in T$ için*

i. $d(ab+ba) = d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)+\theta(b)d(a)$

ii. $d(aba) = d(a)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)$

iii. $$\begin{aligned} d(abc+cba) &= d(a)\varphi(b)\varphi(c)+d(c)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a) \\ &\quad +\theta(c)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(c)+\theta(c)\theta(b)d(a) \end{aligned}$$

iv. $a^b[\varphi(a),\varphi(b)] = 0$ *ve*

$[\theta(a),\theta(b)]a^b = 0$

v. $a^b\varphi(c)[\varphi(a),\varphi(b)]+[\theta(a),\theta(b)]\theta(c)a^b = 0$

dır.

İspat. *i.* $d(a^2) = d(a)\varphi(a)+\theta(a)d(a)$ eşitliğinde a yerine $a+b$ alınırsa;

$$\begin{aligned} d((a+b)(a+b)) &= d(a+b)\varphi(a+b)+\theta(a+b)d(a+b) \\ d(a^2+ab+ba+b^2) &= (d(a)+d(b))(\varphi(a)+\varphi(b))+(\theta(a)+\theta(b)) \\ &\quad (d(a)+d(b)) \\ d(a^2)+d(ab+ba)+d(b^2) &= d(a)\varphi(a)+d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a)+d(b)\varphi(b) \\ &\quad +\theta(a)d(a)+\theta(a)d(b)+\theta(b)d(a)+\theta(b)d(b) \\ \Rightarrow d(ab+ba) &= d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)+\theta(b)d(a) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. *i*'nin ispatından;

$$\begin{aligned}
d(a(ab+ba)+(ab+ba)a) &= d(a)\varphi(ab+ba)+d(ab+ba)\varphi(a)+\theta(a)d(ab+ba) \\
&\quad +\theta(ab+ba)d(a) \\
d(aab+aba+aba+baa) &= d(a)\varphi(ab+ba)+(d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b) \\
&\quad +\theta(b)d(a))\varphi(a)+\theta(a)(d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a) \\
&\quad +(\theta(a)d(b)+\theta(b)d(a))+\theta(ab+ba)d(a) \\
d(a^2b+2(aba)+ba^2) &= d(a)\varphi(ab+ba)+(d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b) \\
&\quad +\theta(b)d(a))\varphi(a)+\theta(a)(d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a) \\
&\quad +(\theta(a)d(b)+\theta(b)d(a)+\theta(ab+ba)d(a) \\
d(a^2b+ba^2)+d(2aba) &= d(a)\varphi(a)\varphi(b)+d(a)\varphi(b)\varphi(a)+d(a)\varphi(b)\varphi(a) \\
&\quad +d(b)\varphi(a)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(b)d(a)\varphi(a) \\
&\quad +\theta(a)d(a)\varphi(b)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(a)d(b) \\
&\quad +\theta(a)\theta(a)d(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)+\theta(b)\theta(a)d(a)
\end{aligned} \tag{4.5.46}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
d(a^2b+ba^2)+d(2aba) &= d(a^2)\varphi(b)+d(b)\varphi(a^2)+\theta(a^2)d(b)+\theta(b)d(a^2) \\
&\quad +d(a)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(a)d(a)\varphi(b)+d(b)\varphi(a)\varphi(a) \\
&\quad +\theta(a)\theta(a)d(b)+\theta(b)d(a)\varphi(a)+\theta(a)\theta(a)D(a) \\
&\quad +d(2aba)
\end{aligned} \tag{4.5.47}$$

(4.5.46) ve (4.5.47) birbirine eşit olduğundan ;

$$\begin{aligned}
d(2aba) = 2(d(a)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)) \\
\Rightarrow d(2aba)-2(d(a)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)) &= 0 \\
\Rightarrow 2(d(aba)-(d(a)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)) &= 0
\end{aligned}$$

X, 2-burulmasız bir R-bimodül olduğundan

$$\begin{aligned}
d(aba)-(d(a)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)) &= 0 \\
\Rightarrow d(aba) = d(a)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(a)
\end{aligned}$$

olur.

iii. ii. de a yerine $a+c$ yazılarak lineerleştirilirse;

$$\begin{aligned}
d((a+c)b(a+c)) &= d(a+c)\varphi(b)\varphi(a+c)+\theta(a+c)d(b)\varphi(a+c) \\
&\quad +\theta(a+c)\theta(b)d(a+c) \\
&= (d(a)\varphi(b)+d(c)\varphi(b))(\varphi(a)+\varphi(c))
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv. $w = d((ab)^2+ba^2b)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d((ab)^2)+d(ba^2b) &= d(ab)\varphi(ab)+\theta(ab)d(ab)+d(b)\varphi(a^2)\varphi(b) \\
&\quad +\theta(b)d(a^2)\varphi(b)+\theta(b)\theta(a^2)d(b) \\
&= d(ab)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(a)\theta(b)d(ab)+d(b)\varphi(a)\varphi(a)\varphi(b) \\
&\quad +\theta(b)(d(a)\varphi(a)+\theta(a)d(a))\varphi(b)+\theta(b)\theta(a)\theta(a)d(b) \\
&= d(ab)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(a)\theta(b)d(ab)d(b)\varphi(a)\varphi(a)\varphi(b) \\
&\quad +\theta(b)d(a)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(b)\theta(a)d(a)\varphi(b)+\theta(b)\theta(a)\theta(a)d(b)
\end{aligned}$$

(4.5.48)

olur. Ayrıca *iii.*'den

$$\begin{aligned} w &= d(abab+baab) \\ &= d(ab)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(ab)\theta(a)d(b)+d(b)\varphi(a)\varphi(ab) \\ &\quad +\theta(b)d(a)\varphi(ab)+\theta(b)\theta(a)d(ab) \end{aligned} \tag{4.5.49}$$

(4.5.48) ve (4.5.49) ifadeleri birbirine eşit olduğundan

$$\begin{aligned} &d(ab)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(a)\theta(b)d(ab)d(b)\varphi(a)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(b)d(a)\varphi(a)\varphi(b) \\ &+\theta(b)\theta(a)d(a)\varphi(b)=d(ab)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(ab)\theta(a)d(b)+d(b)\varphi(a)\varphi(ab) \\ &+\theta(b)d(a)\varphi(ab)+\theta(b)\theta(a)d(ab) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \theta(b)\theta(a)a^b-\theta(a)\theta(b)a^b=0$$

Bu ifade a^b parantezine alınıp düzenlenirse;

$$[\theta(a),\theta(b)]a^b = 0$$

elde edilir. w başka bir biçimde şöyle gruplandırılsın:

$$\begin{aligned} w &= d((ab)ba+(ab)^2) \\ &= d(ab^2a)+d((ab)^2) \\ &= d(a)\varphi(b^2)\varphi(a)+\theta(a)d(b^2)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b^2)d(a) \\ &\quad +d(ab)\varphi(ab)+\theta(ab)d(ab) \end{aligned} \tag{4.5.50}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi w, *iii.*'ye göre açılırsa;

$$\begin{aligned} w &= d(abab+baab) \\ &= d(ab)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(ab)d(b)\varphi(a)+\theta(ab)\theta(b)d(a) \\ &\quad +d(a)\varphi(b)\varphi(ab)+\theta(a)d(b)\varphi(ab)+\theta(a)\theta(b)d(ab) \end{aligned}$$

(4.5.51)

(4.5.50) ve (4.5.51) eşitliklerinden

$$d(a)\varphi(b)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)\theta(b)\varphi(a)$$
$$=d(ab)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(ab)d(b)\varphi(a)+d(a)\varphi(b)\varphi(ab)+\theta(a)d(b)\varphi(ab)$$

Bu durumda

$$(d(ab)-d(a)\varphi(b)-\theta(a)d(b))\varphi(b)\varphi(a)$$
$$+(d(ab)-\theta(a)d(b)-d(a)\varphi(b))\varphi(a)\varphi(b)=0$$

olur. Buradan

$$a^b[\varphi(a),\varphi(b)] \quad = \quad 0$$

elde edilir.

v. $$d((ab)c(ba)+(ba)c(ab)=d(ab)\varphi(c)\varphi(ba)+\theta(ab)d(c)\varphi(ba)$$
$$+\theta(ab)\theta(c)d(ba)+d(ba)\varphi(c)\varphi(ab)+\theta(ba)d(c)\varphi(ab)+\theta(ba)\theta(c)d(ab)$$

(4.5.52)

Bu ifade başka bir biçimde aşağıdaki gibi de düzenlenebilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
d(a(bcb)a)+d(b(aca)b) &= d(a)\varphi(bcb)\varphi(a)+\theta(a)d(bcb)\varphi(a)+\theta(a)\theta(bcb)d(a)\\
&\quad +d(b)\varphi(aca)\varphi(b)+\theta(b)d(aca)\varphi(b)+\theta(b)\theta(aca)d(b)\\
&= d(a)\varphi(bcb)\varphi(a)+\theta(a)d(b)\varphi(c)\varphi(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(b)d(c)\varphi(b)\varphi(a)\\
&\quad +\theta(a)\theta(b)\theta(c)d(b)\varphi(a)+\theta(a)\theta(bcb)d(a)d(b)\varphi(aca)\varphi(b)\\
&\quad +\theta(b)d(a)\varphi(c)\varphi(a)\varphi(b)+\theta(b)\theta(a)d(c)\varphi(a)\varphi(b)\\
&\quad +\theta(b)\theta(a)\theta(c)d(a)\varphi(b)+\theta(b)\theta(a)\theta(c)\theta(a)d(b)
\end{aligned}$$

(4.5.53)

olur. (4.5.52) = (4.5.53) olduğundan;

$$a^b\varphi(c)[\varphi(a),\varphi(b)]+[\theta(a),\theta(b)]\theta(c)a^b \quad = \quad 0$$

elde edilir. □

Lemma 4.5.3 *G,H toplamsal iki grup ve R, 2-burulmasız bir halka olsun.*

$$f : G\times G \;\to\; H \quad ve \quad g : G\times G \;\to\; R$$

çift yönlü toplamsal dönüşümler olsun. Her $a,b \in G$ için $f(a,b) = 0$ veya $g(a,b)^2 = 0$ ise $f = 0$ veya $g = 0$'dır.

İspat. $a \in G$ olsun. $U_a = \{b \in G | f(a,b) = 0\}$ ve $V_a = \{b \in G | g(a,b)^2 = 0\}$ kümeleri tanımlansın. Hipotezden $G = U_a \cup V_a$ olduğu açıktır. $G = U_a$ veya $G = V_a$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. $b,c \in G$ için $b \notin U_a$ ve $c \notin V_a$ olsun. Bu durumda $b \in V_a$ ve $c \in U_a$ olur. $G = U_a \cup V_a$ olduğundan U_a, G'nin altgrubudur. $b \notin U_a$ ve $c \in U_a$ için $b+c \notin U_a$ ve $b-c \notin U_a$'dır. O halde $b+c \in V_a$ ve $b-c \in V_a$ olmalıdır. g'nin tanımından

$$g(a,b+c)^2 = 0 \qquad ve \quad g(a,b-c)^2 = 0$$

eşitlikleri vardır. g, çift yönlü toplamsal dönüşüm olduğundan

$$g(a,b)^2 + g(a,b)g(a,c) + g(a,c)g(a,b) + g(a,c)^2 \;=\; 0 \qquad (4.5.54)$$

$$g(a,b)^2 \;=\; 0$$

$$g(a,b)^2 - g(a,b)g(a,c) - g(a,c)g(a,b) + g(a,c)^2 \;=\; 0 \qquad (4.5.55)$$

$$g(a,b)^2 \;=$$

(4.5.54) ve (4.5.55) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$2g(a,c)^2 \;=\; 0$$

elde edilir. R, 2- burulmasız bir halka olduğundan $g(a,c)^2 = 0$'dır. Bu durumda $c \in V_a$ olmalıdır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla her $a \in G$ için $U_a = G$ veya $V_a = G$ olmalıdır. Yani $U = G$ veya $V = G$ 'dir □

Açıklama 1 *R bir halka ve X, sıfır bölensiz bir R-bimodül olmak üzere $x \in X$ ve $a \in R$ için $xRa = 0$ iken $x = 0$ veya $a = 0$ oluyorsa R asal halkadır.*

Teorem 4.5.1'in İspatı: Her $a,b,c \in T$ için Önerme 4.5.2(v)'deki eşitlik sağdan $[\varphi(a),\varphi(b)]$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} a^b\varphi(c)[\varphi(a),\varphi(b)][\varphi(a),\varphi(b)] + [\theta(a),\theta(b)]\theta(c)a^b[\varphi(a),\varphi(b)] &= 0 \\ a^b\varphi(c)[\varphi(a),\varphi(b)]^2 + [\theta(a),\theta(b)]\theta(c)a^b[\varphi(a),\varphi(b)] &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.5(iv)'den $a^b[\varphi(a),\varphi(b)] = 0$'dır. Dolayısıyla $a^b\varphi(c)[\varphi(a),\varphi(b)]^2 = 0$ olmalıdır. φ örten olduğundan $\forall\ \varphi(c) \in R$ için $\exists\ c \in T$ vardır. Teoremin hipotezinden $a^b = 0$ veya $[\varphi(a),\varphi(b)]^2 = 0$'dır. Yukarıdaki açıklamaya göre R bir halka ve X, sıfırdan farklı bir R-bimodül olmak üzere $x \in X$ ve $a \in R$ için $xRa = 0$ iken $a^b(\to x) = 0$ veya $[\varphi(a),\varphi(b)]^2(\to a) = 0$ olduğundan R asaldır. $a \in R$ için $2a = 0$ olduğunda her $x \in X$ için $2xRa = 0$ oluyorsa X, 2-burulmasız olduğundan $a = 0$ olmalıdır. Buradan R, 2-burulmasız olur.
Şimdi

$$f : (a,b) \mapsto a^b \quad ve \quad g : (a,b) \mapsto [\varphi(a),\varphi(b)]$$

şeklinde tanımlanırsa Lemma 4.5.3'nin koşulları sağlanmış olur. Yani

$$f(a,b) = 0 \quad veya \quad g(a,b) = [\varphi(a),\varphi(b)]^2 = 0$$

olur. φ, örten olduğunda her $r,s \in R$ için $[r,s]^2 = 0$'dır. Bu koşullar altında R'nin asal halka olduğu söylenebilir. Fakat bu durumda Smiley, 1975 [27]'ten R'nin değişmeli olduğu söylenir. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla her $a,b \in T$ için $a^b = 0$ olmalıdır. a^b'nin tanımından;

$$\begin{aligned} a^b = d(ab) - d(a)b - ad(b) = 0 \\ \Rightarrow \quad d(ab) = a(a)b + ad(b) \end{aligned}$$

olur. Yani d, bir (θ,φ)-türevdir.

4.6. Yarı Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-Türevleri

Bu bölümde esas olarak C. K. Liu ve W. K. Shiue'nin [21] "Generalized Jordan triple (θ,φ)-derivations on Semiprime Rings" adlı çalışması incelenerek 2 burulmasız yarı asal halkalarda tanımlı her genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türevin bir genelleştirilmiş 3'lü (θ,φ)-türev olduğu gösterilmiştir.

Burada 1,R'nin birim dönüşümü olmak üzere δ, R halkasının bir Jordan 3'lü $(1,\varphi)$-türev alınacaktır. O halde $\theta,\varphi : R \to R$ birer otomorfizma olmak üzere her $a,b \in R$ için ;

$$\delta(aba) = \delta(a)ba + \varphi(a)\delta(b)a + \varphi(a)\varphi(b)\delta(a) \tag{4.6.56}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte a yerine $a+c$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} \delta((a+c)b(a+c)) &= \delta(aba)+\delta(abc+cba)+\delta(cbc) \\ &= \delta(a)ba+\varphi(a)\delta(b)a\varphi(a)\varphi(b)\delta(a)+\delta(abc+cba) \\ &\quad +\delta(c)bc+\varphi(c)\delta(b)c+\varphi(c)\varphi(b)\delta(c) \end{aligned} \tag{4.6.57}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \delta((a+c)b(a+c)) &= \delta(a+c)b(a+c)+\varphi(a+c)\delta(b)(a+c)+\varphi(a+c)\varphi(b)\delta(a+c) \\ &= (\delta(a)+\delta(c))(ba+bc)+(\varphi(a)+\varphi(c))(\delta(b)a+\delta(b)c) \\ &\quad +(\varphi(a)+\varphi(c))\varphi(b)(\delta(a)+\delta(c)) \\ &= \delta(a)ba+\delta(a)bc+\delta(c)ba+\delta(c)bc+\varphi(a)\delta(b)a+\varphi(a)\delta(b)c \\ &= +\varphi(c)\delta(b)a+\varphi(c)\delta(b)c+\varphi(a)\varphi(b)\delta(a)+\varphi(a)\varphi(b)\delta(c) \\ &= +\varphi(c)\varphi(b)\delta(a)+\varphi(c)\varphi(b)\delta(c) \end{aligned} \tag{4.6.58}$$

Bu iki eşitlik karşılaştırıldığında her $a,b,c \in R$ için

$$\begin{aligned} \delta(abc+cba) &= \delta(a)bc+\delta(c)ba+\varphi(a)\delta(b)c+\varphi(c)\delta(b)a \\ &\quad +\varphi(c)\delta(b)a+\varphi(a)\varphi(b)\delta(c)+\varphi(c)\varphi(b)\delta(a) \end{aligned}$$

(4.6.59)

elde edilir. (4.6.56)deki eşitlik yardımıyla her $a,b,c,x \in R$ için

$$\begin{aligned}
\delta(abcxcba) &= \delta(a(b(cxc)b)a) \\
&= \delta(a)bcxcba + \varphi(a)\delta(b(cxc)b)a + \varphi(a)\varphi(bcxcb)\delta(a) \\
&= \delta(a)bcxcba + \varphi(a)(\delta(b)cxcb + \varphi(b)\delta(cxc)b + \varphi(b)\varphi(cxc)\delta(b))a \\
&\quad +\varphi(a)\varphi(bcxcb)\delta(a) \\
&= \delta(a)bcxcba + \varphi(a)\delta(b)cxcba + \varphi(a)\varphi(b)(\delta(c)xc + \varphi(c)\delta(x)c \\
&\quad +\varphi(c)\varphi(x)\delta(c))ba + \varphi(a)\varphi(b)\varphi(cxc)\delta(b)a + \varphi(a)\varphi(bcxcb)\delta(a) \\
&= \delta(a)bcxcba + \varphi(a)\delta(b)cxcba + \varphi(a)\varphi(b)\delta(c)xcba \\
&\quad +\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\delta(x)cba + \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\varphi(x)\delta(c)ba \\
&\quad +\varphi(a)\varphi(b)\varphi(cxc)\delta(b)a + \varphi(a)\varphi(bcxcb)\delta(a)
\end{aligned}$$

(4.6.60)

olur. M. Brešar'ın [5]'deki çalışması göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
A(a,b,c) &= \delta(abc) - \delta(a)bc - \varphi(a)\delta(b)c - \varphi(a)\varphi(b)\delta(c) \\
&\quad ve \\
B(a,b,c) &= abc - cba
\end{aligned}$$

eşitlikleri tanımlansın. (4.6.57)'den $A(a,b,c)+A(c,b,a)=0$ olduğu açıktır.

Lemma 4.6.1 *R bir halka ve δ, R'nin bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türevi olsun. O halde her $a,b,c,x \in R$ için*

$$A(a,b,c)xB(a,b,c) + \varphi(B(a,b,c))\varphi(x)A(a,b,c) = 0$$

dır.

İspat. $w = \delta(abcxcba + cbaxabc)$ olsun. (4.6.57)'den

$$\begin{aligned}
w &= \delta((abc)x(cba) + (cba)x(abc)) \\
&= \delta(abc)xcba + \varphi(abc)\delta(x)cba + \varphi(abc)\varphi(x)\delta(cba) \\
&\quad +\delta(cba)xabc + \varphi(cba)\delta(x)abc + \varphi(cba)\varphi(x)\delta(abc)
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan (4.6.58)'deki eşitlik yardımıyla;

$$\begin{aligned} w &= \delta((a(b(cxc)b)a)+(c(b(axa)b)c)) \\ &= \delta(a)bcxcba+\varphi(a)\delta(b)cxcba+\varphi(a)\varphi(b)\delta(c)xcba \\ &\quad +\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\delta(x)cba+\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\varphi(x)\delta(c)ba \\ &\quad +\varphi(a)\varphi(b)\varphi(cxc)\delta(b)a+\varphi(a)\varphi(bcxcb)\delta(a) \\ &\quad +\delta(c)baxabc+\varphi(c)\delta(b)axabc+\varphi(c)var(b)\delta(a)xabc \\ &\quad +\varphi(c)\varphi(b)\varphi(a)\delta(x)abc+\varphi(c)\varphi(b)\varphi(a)\varphi(x)\delta(a)bc \\ &\quad +\varphi(c)\varphi(b)\varphi(axa)\delta(b)c+\varphi(c)\varphi(baxab)\delta(c) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki son iki eşitlik karşılaştırırlırsa her $a,b,c,x\in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta(abc)-\delta(a)bc-\varphi(a)\delta(b)c-\varphi(a)\varphi(b)\delta(c))xcba \\ &\quad +\varphi(abc)\varphi(x)(\delta(cba)-\delta(c)ba-\varphi(c)\delta(b)a-\varphi(c)\varphi(b)\delta(a)) \\ &\quad +(\delta(cba)-\delta(c)ba-\varphi(c)\delta(b)a-\varphi(c)\varphi(b)\delta(a)xabc \\ &\quad +\varphi(cba)\varphi(x)(\delta(abc)-\delta(a)bc-\varphi(a)\delta(b)c-\varphi(a)\varphi(b)\delta(c)) \\ &= A(a,b,c)xcba+\varphi(abc)\varphi(x)A(c,b,a) \\ &\quad +A(c,b,a)xabc+\varphi(cba)\varphi(x)A(a,b,c) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $a,b,c\in R$ için $A(c,b,a)=-A(a,b,c)$ olduğundan

$$A(a,b,c)xB(a,b,c)+\varphi(B(a,b,c))\varphi(x)A(a,b,c) = 0$$

olur. □

Lemma 4.6.2 *R bir yarı asal halka ve $n\in Z^+$ olmak üzere $i=1,2,...,n$ için R_i'ler R halkasının toplamsal altgrupları olsun. Eğer $H,K:R^n=R\times...\times R\to R$ n-toplamsal dönüşümleri her $a_i\in R_i$ ve $x\in R$ için*

$$H(a_1,...,a_n)xK(a_1,...,a_n) = 0$$

şartını sağlıyorsa o zaman her $a_i,b_i\in R_i$, $x\in R$ için

$$H(a_1,...,a_n)xK(b_1,...,b_n) = 0$$

olur.

İspat. Verilen eşitlikte a_1 yerine a_1+b_1 yazılır ve her H,K dönüşümlerinin toplamsallığı kullanılırsa her $x\in R$ için

$$H(a_1,a_2,...,a_n)xK(b_1,a_2,...,b_n)+H(b_1,a_2,...,a_n)xK(b_1,a_2,...,b_n) \quad = \quad 0$$

bulunur. Burada $y\in R$ olmak üzere x yerine $xH(b_1,a_2,...,a_n)yH(a_1,a_2,...,a_n)x$ yazılırsa her $x,y\in R$ için

$$H(a_1,a_2,...,a_n)xK(b_1,a_2,...,b_n)yH(a_1,a_2,...,a_n)xK(b_1,a_2,...,b_n) \quad = \quad 0$$

elde edilir. R yarı asal bir halka olduğundan her $x\in R$ için

$$H(a_1,a_2,...,a_n)xK(b_1,a_2,...,b_n) \quad = \quad 0$$

olur. $i\geq 2$ için a_i yerine a_i+b_i yazılıp yukarıdaki işlemler aynen devam ettirilirse istenen elde edilir. □

Keyfi bir R halkası için

$$S \quad = \quad \{\alpha\in Z(R)|\alpha R\subseteq Z(R)\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda S, R halkasının bir idealidir ve her $\alpha\in S$ ve $b,c\in R$ için

$$\alpha bc \quad = \quad cb\alpha$$

şartı sağlanır.

Lemma 4.6.3 *R yarı asal bir halka ve $a\in R$ olsun. Eğer her $x,y\in R$ için $axy=yxa$ ise $a\in S$'dir.*

İspat. $x,y,z,w\in R$ olsun. O halde

$$a(wz)yx=yx(wz)a=ya(wz)x \quad = \quad y(zwa)x=(yzwa)x=awyzx$$

dir. R halkasının yarı asallığından $awzy=awyz$ bulunur. Böylece her $z,y,w\in R$ için $aw[z,y]=0$ olur. Bu durumda

$$ayw[a,y] \quad = \quad yaw[a,y]=0$$

dır. Yani her $y, w \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= ayw[a,y] - yaw[a,y] \\ &= (ay - ya)w[a,y] \\ &= [a,y]w[a,y] \end{aligned}$$

dır. R yarı asal bir halka olduğundan $[a,y] = 0$ olmalıdır. Böylece $a \in Z(R)$'dir ve her $x, y \in R$ için $axy = yxa = yax$'dir. O halde her $x \in R$ için $ax \in Z(R)$; yani $a \in S$'dir. □

Aşağıdaki Lemma D. Eremita'nın [11] 2001 yılında yayınlanan makalesindeki Teorem (3.1)'in özel bir halidir. Burada $Q = Q_s(R)$ ile R halkasının simetrik Martindale kesirler halkası gösterilecektir.

Lemma 4.6.4 *R bir yarı asal halka ve φ, R'nin bir otomorfizması olsun.Eğer $a, b, c, d \in R$ ve her $x \in R$ için $axb = c\varphi(x)d$ ise $i \neq j$ için $\varepsilon_i \varepsilon j = 0$,*

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = 1_Q$$

ve her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varphi(x) = \varepsilon_1 qxq^{-1}, \qquad \varepsilon_1 a = \varepsilon_1 cq, \quad \varepsilon_1 b = \varepsilon_1 q^{-1} d \\ \varepsilon_2 b = \varepsilon_2 d = \varepsilon_3 b = \varepsilon_3 c = \varepsilon_4 a = \varepsilon_4 d = \varepsilon_5 a = \varepsilon_5 c = 0 \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 \in C$ merkezi idempotentler ve bir $q \in q \in Q$ tersinir elemanı vardır.

Sonuç 4.6.5 *R, 2-burulmasız yarı asal bir halka ve φ, R'nin bir otomorfizması olsun. Eğer $a, b \in R$ ve her $x \in R$ için*

$$axb + \varphi(b)\varphi(x)a = 0$$

ise her $x \in R$ için $axb = 0$'dır.

İspat. Lemma 4.6.4'ten yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5 &= 1_Q \\
\varepsilon_1\varphi(x) &= \varepsilon_1 qxq^{-1} \\
\varepsilon_1 a &= \varepsilon_1\varphi(b)q \\
\varepsilon_1 b &= -\varepsilon_1 q^{-1}a \\
\varepsilon_2 b = -\varepsilon_2 a = \varepsilon_3 b &= \varepsilon_3\varphi(b) = \varepsilon_4 a = \varepsilon_5 a = 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5 \in C$ merkezi idempotentler ve bir $q \in q \in Q$ tersinir elemanı vardır. Buradan

$$\varepsilon_1 a = -q(-\varepsilon_1 q^{-1}a) = -q\varepsilon_1 b = -\varepsilon_1 qb$$

olur. Diğer taraftan

$$\varepsilon_1 a = \varepsilon_1\varphi(b)q \quad = \quad \varepsilon_1 qbq^{-1}q = \varepsilon_1 qb$$

bulunur. Böylece bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$2\varepsilon_1 a \quad = \quad 0$$

elde edilir. R, 2-burulmasız bir yarı asal halka olduğundan $\varepsilon_1 a = 0$'dır. Bu durumda $\varepsilon_1 axb = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
axb &= (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5)axb \\
&= \varepsilon_1 axb+\varepsilon_2 axb+\varepsilon_3 axb+\varepsilon_4 axb+\varepsilon_5 axb \\
&= -\varepsilon_3\varphi(b)\varphi(x)a \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.6.6 *R, 2-burulmasız bir yarı asal halka ve φ, R'nin bir otomorfizması olsun. Eğer $\alpha \in Z(R)$, $b \in R$ ve her $x \in R$ için $(\varphi(\alpha x)-\alpha x)b = 0$ ise her $x \in R$ için*
$(\varphi(x)-x)\alpha b = 0$'dır.

İspat. Hipotezden $-\alpha xb+\varphi(\alpha)\varphi(x)=0$'dır. Lemma 4.6.4'den

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5 \;=\; 1_Q$$

ve $\varepsilon_1\varphi(x)=\varepsilon_1 qxq^{-1}$,

$$\varepsilon_2 b=\varepsilon_3 b \;=\; \varepsilon_4 b=\varepsilon_5\alpha$$

olacak şekilde $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\in C$ merkezi idempotentleri ve bir $q\in q\in Q$ tersinir elemanı vardır. $\alpha\in Z(R)$ olduğundan, özel olarak,

$$\varepsilon_1\varphi(\alpha)=\varepsilon_1 qxq^{-1}=\varepsilon_1\alpha$$

bulunur. Böylece

$$0 \;=\; \varepsilon_1(-\alpha xb+\varphi(\alpha)\varphi(x)b)=\varepsilon_1(-x+\varphi(x))\alpha b$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}(\varphi(x)-x))\alpha b &= (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5)(\varphi(x)-x))\alpha b\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.6.7 *R, 2-burulmasız bir yarı asal halka ve θ ve φ, R'nin birer otomorfizması olsun. Eğer $\delta: R\to R$ bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev ise δ bir (θ,φ)-türevdir.*

İspat. $\theta^{-1}\delta$ bir Jordan 3'lü $(1,\theta^{-1}\varphi)$-türev olduğundan δ yerine $\theta^{-1}\delta$ yazılıp δ bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olarak alınabilir. Lemma 4.6.1 gereği her $a,b,c,x\in R$ için

$$A(a,b,c)xB(a,b,c)+\varphi(B(a,b,c))\varphi(x)A(a,b,c) \;=\; 0$$

dır. Buradan Sonuç 4.6.5 gereği her $a,b,c,x\in R$ için

$$A(a,b,c)xB(a,b,c) \;=\; 0$$

bulunur. Lemma 4.6.2'den her $a,b,c,r,s,t,x \in R$ için

$$A(a,b,c)xB(r,s,t) \quad = \quad 0$$

olur. Böylece $a,b,c,r,s,x \in R$ için

$$\begin{aligned}
&B(A(a,b,c),r,s)xB(A(a,b,c),r,s) \\
&= (A(a,b,c)rs - srA(a,b,c))xB(A(a,b,c),r,s) \\
&= A(a,b,c)rsxB(A(a,b,c),r,s) - srA(a,b,c)xB(A(a,b,c),r,s) = 0
\end{aligned}$$

olur. R yarı asal halka olduğundan her $a,b,c,r,s \in R$ için

$$B(A(a,b,c),r,s) \quad = \quad A(a,b,c)rs - srA(a,b,c) = 0$$

bulunur. Lemma 4.6.3'den her $a,b,c \in R$ için $A(a,b,c) \in S$'dir. $\alpha \in S$ ve $b,c \in R$ olsun. O halde $\alpha, \alpha b, \alpha c \in Z(R)$ ve

$$cb\alpha = c(\alpha b) = \alpha bc$$

olur. Benzer şekilde

$$\delta(c)b\alpha = \alpha b\delta(c) ve \alpha\delta(b)c = c\delta(b)\alpha \tag{4.6.61}$$

olur. $w = \delta(\alpha bcxcb\alpha)$ olsun. (4.6.60) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
w \quad &= \quad \delta(\alpha(b(cxc)b)\alpha) \\
&= \quad \delta(\alpha)bcxcb\alpha + \varphi(\alpha)\delta(b)cxcb\alpha + \varphi(\alpha)\varphi(b)\delta(c)xcb\alpha \\
&\quad +\varphi(\alpha)\varphi(b)\varphi(c)\delta(x)cb\alpha + \varphi(\alpha)\varphi(b)\varphi(c)\varphi(x)\delta(c)b\alpha \\
&\quad +\varphi(\alpha)\varphi(b)\varphi(cxc)\delta(b)\alpha + \varphi(\alpha)\varphi(bcxcb)\delta(\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.6.56) eşitliği kullanılırsa ;

$$\begin{aligned}
w \quad &= \quad \delta((\alpha bc)x(cb\alpha)) \\
&= \quad \delta(\alpha bc)x\alpha bc + \varphi(\alpha bc)\delta(x)\alpha bc \\
&\quad +\varphi(\alpha bc)\varphi(x)\delta(\alpha bc)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda elde edilen son iki eşitlik, $cb\alpha = \alpha bc$ olduğu göz önüne alınarak karşılaştırılırsa,

$$\varphi(\alpha bc)\varphi(x)A(c,b,\alpha) + A(\alpha,b,c)x\alpha bc = 0$$

olur. Burada $A(c,b,\alpha) = -A(\alpha,b,c)$ ve $\alpha bc \in Z(R)$ olduğundan her $\alpha \in S$ ve $b,c,x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\alpha bc)\varphi(x)A(\alpha,b,c) - A(\alpha,b,c)x\alpha bc \\ &= \varphi(\alpha bcx)A(\alpha,b,c) - A(\alpha,b,c)x\alpha bc \\ &= (\varphi(\alpha bcx) - \alpha bcx)A(\alpha,b,c) \end{aligned}$$

dir ve Sonuç 4.6.6'dan $(\varphi(x) - x)\alpha bcA(\alpha,b,c) = 0$ bulunur. Bu eşitlik sağdan y ile çarpılır ve $A(\alpha,b,c) \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa;

$$(\varphi(x) - x)\alpha bcyA(\alpha,b,c) = 0$$

olur. Lemma 4.6.2'den her $\alpha, \beta \in S$ ve $b,c,s,t,y \in R$ için

$$(\varphi(x) - x)\beta styA(\alpha,b,c) = 0$$

dır. Bu eşitlikte β yerine $A(\alpha,b,c)$ yazılırsa her $x \in R$ için

$$(\varphi(x) - x)\alpha bcyA(\alpha,b,c)^2 = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$A(\alpha,b,c)[x,y] = [A(\alpha,b,c),x,y] = 0$$

dır ve buradan $A(\alpha,b,c)[R,R]=0$ olduğu görülür. Böylece (4.6.61)'teki eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned}
2A(\alpha,b,c)^3 &= A(\alpha,b,c)^2(A(\alpha,b,c)-A(c,b,\alpha))\\
&= A(\alpha,b,c)^2(\delta(\alpha,b,c)-\delta(\alpha)bc\\
&\quad -\varphi(\alpha)\delta(b)c-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\delta(c)\\
&\quad -\delta(cb\alpha)+\delta(c)b\alpha+\varphi(c)\delta(b)\alpha+\varphi(c)\varphi(b)\delta(\alpha))\\
&= A(\alpha,b,c)^2(-\delta(\alpha)bc-\varphi(\alpha)\delta(b)c-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\delta(c)\\
&\quad +\delta(c)b\alpha+\varphi(c)\delta(b)\alpha+\varphi(c)\varphi(b)\delta(\alpha))\\
&= A(\alpha,b,c)^2(\delta(\alpha)\varphi(bc)-bc)-\delta(\alpha)(\varphi(b)\varphi(c)-\varphi(c)\varphi(b))\\
&\quad +(\varphi(c)-c)\delta(b)\alpha+(\alpha b-\varphi(\alpha b))\delta(b)c\\
&\quad +(\varphi(c)-c)\delta(b)\alpha+(\alpha b-\varphi(\alpha b))\delta(c))\\
&= A(\alpha,b,c)^2(\delta(\alpha)(\varphi(bc)-bc)-\delta(\alpha)[\varphi(b),\varphi(c)]\\
&\quad +[\varphi(cb),\delta(\alpha)]-(\varphi(\alpha)-\alpha)\delta(b)c\\
&\quad +(\varphi(c)-c)\delta(b)\alpha+(\alpha b-\varphi(\alpha b))\delta(c)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Her $x\in R$ için $\varphi(x)-x)A(\alpha,b,c)^2=0$ ve $A(\alpha,b,c)[R,R]=0$ olduğundan $2A(\alpha,b,c)^3=0$ elde edilir. $Z(R)$ halkası, sıfır bölensiz nilpotent elemanlar içermediğinden her $\alpha\in S$ ve $b,c\in R$ için $A(\alpha,b,c)=0$ bulunur. Yani;

$$\delta(\alpha bc)-\delta(\alpha)bc-\varphi(\alpha)\delta(b)c-\varphi(\alpha)\varphi(b)\delta(c) = 0 \qquad (4.6.62)$$

dır. $\alpha\in S$ olduğunda $\alpha R\subseteq S$ olur ve $\varphi(\alpha),\varphi^{-1}(\alpha)\in S$ olur. $\alpha\in S$ ve $b,c,x\in R$ olsun. (4.6.62) eşitliğinden

$$\delta(\alpha xabc) = \delta(\alpha)xabc+\varphi(\alpha)\delta(x)abc+\varphi(\alpha)\varphi(x)\delta(abc)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\delta((\alpha xa)bc) &= \delta(\alpha xa)bc+\varphi(\alpha xa)\delta(b)c+\varphi(\alpha xa)\varphi(b)\delta(c)\\
&= (\delta(\alpha)xa+\varphi(\alpha)\delta(x)a+\varphi(\alpha)\varphi(x)\delta(a))bc\\
&\quad +\varphi(\alpha xa)\delta(b)c+\varphi(\alpha xa)\varphi(b)\delta(c)
\end{aligned}$$

bulunur. Son iki eşitlik karşılaştırılırsa her $\alpha \in S$ ve $a,b,c \in R$ için

$$\varphi(\alpha)\varphi(x)A(a,b,c) \quad = \quad 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte α yerine $\varphi^{-1}(A(a,b,c))$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha)\varphi(x)A(a,b,c) &= \varphi(\varphi^{-1}(A(a,b,c))\varphi(x)A(a,b,c) \\
&= A(a,b,c)\varphi(x)A(a,b,c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda R halkası yarı asal bir halka olduğundan her $a,b,c \in R$ için $A(a,b,c) = 0$ olmalıdır. Yani her $a,b,c \in R$ için

$$\delta(a,b,c) \quad = \quad \delta(a)bc + \varphi(a)\delta(b) + \varphi(a)\varphi(b)\delta(c)$$

dir. $w = \delta(abxba)$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
w &= \delta(a(bxb)a) \\
&= \delta(a)bxba + \varphi(a)\delta(bxa)b + \varphi(a)\varphi(bxa)\delta(b) \\
&= \delta(a)bxba + \varphi(a)(\delta(b)xa + \varphi(b)\delta(x)a + \varphi(b)\varphi(x)\delta(a))b + \varphi(a)\varphi(bxa)\delta(b)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
w &= \delta((ab)x(ab)) \\
&= \delta(ab)xab + \varphi(ab)\delta(x)ab + \varphi(ab)\varphi(x)\delta(ab)
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler karşılaştırılırsa;

$$(\delta(ab) - \varphi(a)\delta(b) - \delta(a)b)xab + \varphi(ab)\varphi(x)(\delta(ab) - \varphi(a)\delta(b) - \delta(a)b) \quad = \quad 0$$

elde edilir. Sonuç 4.6.5'den,

$$(\delta(ab) - \varphi(a)\delta(b) - \delta(a)b)xab \quad = \quad 0$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.6.2 gereği her $a,b,c,d,x \in R$ için

$$(\delta(ab) - \varphi(a)\delta(b) - \delta(a)b)xcd \quad = \quad 0$$

olur. R'nin yarı asal bir halka olmasından dolayı

$$\delta(ab)-\varphi(a)\delta(b)-\delta(a)b = 0$$

sonucuna varılır. Bu durumda

$$\delta(ab) = \varphi(a)\delta(b)+\delta(a)b$$

olur. Yani δ bir $(1,\varphi)$-türevdir. $\square$

Sonuç 4.6.8 *R, 2-burulmasız yarı asal bir halka ve θ,φ'ler R'nin otomorfizmaları olmak üzere R'nin her Jordan (θ,φ)-türevi aynı zamanda bir (θ,φ)-türevdir.*

Teorem 4.6.9 *R, 2-burulmasız yarı asal bir halka olsun. Eğer $T:R\rightarrow R$ dönüşümü bir Jordan 3'lü sol (sağ) merkezleyen ise o zaman T bir sol (sağ) merkezleyendir.*

İspat. $T:R\rightarrow R$ dönüşümü bir Jordan 3'lü sol merkezleyen olsun.

$$\begin{aligned} A(a,b,c) &= T(abc)-T(a)bc \quad \textit{ve} \\ B(a,b,c) &= abc-cba \end{aligned}$$

eşitlikleri tanımlansın. Hipotezden her $a,b,c\in R$ için $T(aba)=T(a)ba$'dır. Burada a yerine $a+c$ yazılırsa;

$$T(abc+cba)=T(a)bc+T(c)ba$$

elde edilir. $w=T(abcxcba+cbaxabx)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} w &= T((abc)x(cba)+(cba)x(abc)) \\ &= T(abc)xcba+T(cba)xabc \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} w &= T(a(b(cxc)b)a)+(c(b(axa)b)c)) \\ &= T(a)bcxcba+T(c)baxabc \end{aligned}$$

dir. Son iki eşitlik karşılaştırılırsa her $a,b,c,x \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (T(abc)-T(a)bc)xcba+(T(cba)-T(c)ba)xabc \\ &= A(a,b,c)xcba+A(c,b,a)xabc \end{aligned}$$

bulunur. $A(a,b,c) = -A(c,b,a)$ olduğundan $A(a,b,x)xB(a,b,c) = 0$'dır. Lemma 4.6.2 gereği her $a,b,c,r,s,t,x \in R$ için $A(a,b,x)xB(r,s,t) = 0$ olup $a,b,c,r,s,x \in R$ için

$$\begin{aligned} & B(A(a,b,c),r,s)xB(A(a,b,c),r,s) \\ &= (A(a,b,c)rs - srA(a,b,c))xB(A(a,b,c),r,s) \\ &= A(a,b,c)rsxB(A(a,b,c),r,s) - srA(a,b,c)xB(A(a,b,c),r,s) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. R yarı asal bir halka olduğundan her $a,b,c,r,s \in R$ için

$$B(A(a,b,c),r,s) = A(a,b,c)rs - srA(a,b,c) = 0$$

olur. Lemma 4.6.3 gereği her $a,b,c \in R$ için $A(a,b,c) \in S$ olur. $\alpha \in S$ ve $b,c \in R$ olsun. $w = T(\alpha bcxcb\alpha)$ olarak tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} T(\alpha)bcxcb\alpha &= T(\alpha(b(cxc)b)\alpha)) \\ &= w \\ &= T((\alpha bc)x(\alpha bc)) \\ &= T((\alpha bc)x\alpha bc \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} A(\alpha,b,c)x\alpha bc &= (T(\alpha bc)-T(\alpha)bc)x\alpha bc \\ &= T(\alpha bc)x\alpha bc - T(\alpha)bcx\alpha bc \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.6.2'den her $\alpha,\beta \in S$ ve her $b,c,s,t,x \in R$ için

$$A(\alpha,b,c)x\beta st = 0$$

bulunur. $A(\alpha,b,c)\in S$ olduğundan $A(\alpha,b,c)^2xst=0$'dır. R'ninn yarı asallığından $A(\alpha,b,c)^2=0$ olur. $Z(R)$ althalkası sıfırdan darklı nilpotent eleman içermediğinden $A(\alpha,b,c)=0$ olmalıdır. Özel olarak, $A(c,b,\alpha)=0$'dır. Yani her $b,c\in R$ ve her $\alpha\in S$ için $T(cb\alpha)=T(c)b\alpha$'dır.

$a,b,c\in R$ ve $\alpha=A(a,b,c)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} T(abc)\alpha^2 &= T((abc)\alpha\alpha) \\ &= T(a(bc)(\alpha^2)) \\ &= T(a)bc\alpha^2 \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= A(a,b,c)\alpha^2 \\ &= (T(abc)-T(a)bc)\alpha^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu durumda $\alpha=0$'dır. Yani her $a,b,c\in R$ için $T(abc)=T(a)bc$'dir. Buradan

$$T(a)bxab=T(abxab)=T(ab)xab$$

bulunur. O halde $(T(ab)-T(a)b)xab=0$'dır. Lemma 4.6.2 gereği her $a,b,x,s,t\in R$ için $(T(ab)-T(a)b)xst=0$ olup R yarı asal bir halka olduğundan $T(ab)-T(a)b=0$ elde edilir. Böylece T dönüşümünün R'nin bir sol merkezleyeni olduğu sonucuna varılır. $\square$

Teorem 4.6.10 *R, 2-burulmasız bir yarı asal halka ve θ,φ'ler R'nin birer otomorfizmaları olsun. Eğer $F:R\to R$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev ise o zaman F bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türevdir.*

İspat. δ bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olmak üzere (F,δ) bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olsun. Teorem 4.6.7'den δ bir (θ,φ) türevdir. $G=F-\delta$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}
G(xyx) &= F(xyx)-\delta(xyx) \\
&= F(x)\theta(y)\theta(x)+\varphi(x)\delta(y)\theta(x)+\varphi(x)\varphi(y)\delta(x) \\
&\quad -\delta(x)\theta(y)\theta(x)-\varphi(x)\delta(y)\theta(x)-\varphi(x)\varphi(y)\delta(x) \\
&= F(x)\theta(y)\theta(x)-\varphi(x)\varphi(y)\delta(x) \\
&= (F(x)-\delta)\theta(y)\theta(x) \\
&= G(x)\theta(y)\theta(x)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\theta^{-1}G$ bir Jordan 3'lü sol merkezleyendir. Teorem 4.6.9'den her $x,y\in R$ için $\theta^{-1}G(xy)=\theta^{-1}G(x)y$ bulunur. Buradan $G(xy)=G(x)y$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
F(xy) &= G(xy)+\delta(xy) \\
&= G(x)\theta(y)+\delta(xy) \\
&= (F(x)-\delta(x))\theta(y)+\delta(xy) \\
&= \delta(xy)+F(x)\theta(y)-\delta(x)\theta(y) \\
&= (\delta(x)\theta(y)+\varphi(x)\delta(y))+F(x)\theta(y)-\delta(x)\theta(y) \\
&= F(x)\theta(y)+\varphi(x)\delta(y)
\end{aligned}$$

dir. Böylece F bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türev olur. □

[1, Lemma 2.1]'den her genelleştirilmiş Jordan (θ,φ)-türev bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.6.11 *R, 2-burulmasız yarı asal bir halka ve θ,φ'ler R'nin otomorfizmaları olmak üzere R'nin her genelleştirilmiş Jordan (θ,φ)-türevi aynı zamanda bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türevdir.*

Bölüm (4.4)'te W. Jing ve S. Liu [19] tarafından 2-burulmasız asal bir halkalar üzerinde hem genelleştirilmiş Jordan türevin hem de genelleştirilmiş Jordan 3'lü türevin bir genelleştirilmiş türev olduğu gösterilmiştir.

Bu bölümün son kısmında ise benzer sonuçlar 2-burulmasız yarı asal halkalar için elde edilecektir.

Teorem 4.6.12 *2-burulmasız yarı asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan 3'lü türev bir türevdir.*

Önerme 4.6.13 *K, karakteristiği 2'den farklı olan bir yarı asal halka ve $T : K \to K$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x \in K$ için $T(x^2) = T(x)x$ ise T K'nin bir sol merkezleyenidir.*

Teorem 4.6.14 *[28] R, 2-burulmasız bir yarı asal halka ve $F : R \to R$ bir genelleştirilmiş Jordan türev olsun. O halde F bir genelleştirilmiş türevdir.*

İspat. F bir genelleştirilmiş Jordan türev olduğundan her $x \in R$ için

$$F(x^2) = F(x)x + xD(x)$$

olacak şekilde bir $D : R \to R$ Jordan türevi vardır. R bir yarı asal halka olduğundan D aynı zamanda bir türevdir.
$T = F - D$ olsun. O haldeher $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} T(x^2) &= F(x^2) - D(x^2) \\ &= F(x)x + xD(x) - D(x)x - xD(x) \\ &= F(x)X - D(x)x \\ &= (F(x) - D(x))x \\ &= T(x)x \end{aligned}$$

dir. O halde Önerme 4.6.13 gereği T, R'nin bir sol merkezleyenidir. Bu durumda D, R'nin bir türevi ve T, R'nin bir sol merkezleyeni olduğundan her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} (D+T)(xy) &= D(xy) + T(xy) \\ &= D(x)y + xD(y) + T(x)y \\ &= (D+T)(x)y + xD(y) \end{aligned}$$

dir. Burada $F = D + T$ olup her $x, y \in R$ için

$$F(xy) = F(x)y + xD(y)$$

olacak şekilde bir $D : R \to R$ türevi var olduğundan F bir genelleştirilmiş türevdir. □

Teorem 4.6.15 *R, 2-burulmasız bir yarı asal halka ve $F : R \to R$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev olsun. Bu durumda F bir genelleştirilmiş türevdir.*

İspat. F bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev olduğundan her $x, y \in R$ için

$$F(xyx) = F(x)yx + xD(y)x + xyD(x)$$

olacak şekilde bir $D : R \to R$ Jordan 3'lü türevi vardır. Teorem 4.6.12'den D bir türevdir. $T = F - D$ olsun. O halde her $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned} T(xyx) &= F(xyx) - D(xyx) \\ &= F(x)yx + xD(y)x + xyD(x) - D(x)yx - xD(y)x - xyD(x) \\ &= F(x)yx - D(x)yx \\ &= (F(x) - D(x))yx \\ &= T(x)yx \end{aligned}$$

olur. Yani T dönüşümü R'nin bir Jordan 3'lü sol merkezleyenidir. Teorem 4.6.9 gereği T, R'nin bir sol merkezleyeni olur. Böylece F dönüşümü, D bir türev ve T bir sol merkezleyen olacak şekilde $F = D + T$ formunda yazılabilir. Yani her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} F(xy) &= (D + T)(xy) \\ &= D(xy) + T(xy) \\ &= D(x)y + xD(y) + T(x)y \\ &= (D(x) + T(x))y + xD(y) \\ &= (D + T)(x)y + xD(y) \\ &= F(x)y + xD(y) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir D türevi var olduğundan F bir genelleştirilmiş türevdir. □

5. 3'LÜ LIE SİSTEMLER ÜZERİNDE JORDAN TÜREV

5.1. 3'lü Lie Sistemler Üzerinde Jordan θ-Türevleri

3'lü Lie sistem kavramı ilk kez N. Jacobson tarafından ortaya atılmıştır [16, 17, 22]. K bir cisim olmak üzere K üzerinde bir L vektör uzayı bir 3'lü Lie sistem olsun.

$$\begin{array}{rccc} [.,.,.] & : & L\times L\times L & \to & L \\ & & (x,y,z) & \mapsto & [x,y,z] \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Her $x,y,z,u,v\in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $[x,y,z]=-[y,x,z]$

2. $[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$

3. $[u,v,[x,y,z]]=[[u,v,x],y,z]+[x,[u,v,y],z]+[x,y,[u,v,z]]$

Öncelikle yukarıdaki dönüşümün 3-lineer olduğu gösterilsin:
$x,y,y^{'},z\in L$ ve $a,b\in K$ olsun.

$$\begin{aligned}
[x,ay+by^{'},z] &= [[x,ay+by^{'}],z]\\
&= [x(ay+by^{'})-(ay+by^{'})x,z]\\
&= [xay+xby^{'}-ayx-by^{'}x,z]\\
&= (xay+xby^{'}-ayx-by^{'}x)z-z(xay+xby^{'}-ayx-by^{'}x)\\
&= xayz+xby^{'}z-xzay-xzby^{'}-ayzx-by^{'}zx+zayx+zby^{'}x\\
&= a(xyz-xzy-yzx+zyx)+b(xy^{'}z-xzy^{'}-y^{'}zx+zy^{'}x)\\
&= a((xy-yx)z-z(xy-yx))+b((xy^{'}-y^{'}x)z-z(xy^{'}-y^{'}x))\\
&= a[[x,y],z]+b[[x,y^{'}],z]\\
&= a[x,y,z]+b[x,y^{'},z]
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bu dönüşüm 3-lineer dönüşümdür.
Burada her $x,y,z\in L$ için $[x,y,z]=-[y,x,z]$ olduğu açıktır.

$[x,y,z] := [[x,y],z]$ olmak üzere her Lie cebiri $[.,.]$ kommütatör çarpımı ile bir 3'lü Lie sistem belirtir. Tersine herhangi bir 3'lü Lie sistemin Lie cebirinin bir alt uzayı olduğu düşünülebilir [3, 17].

Uyarı 5.1.1 *Bu bölümde $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi ve L, $\mathbb{C}$ üzerinde bir 3'lü Lie sistem alınacaktır.*

$u,v \in L$ için $D_{u,v} : L \to L$ dönüşümü her $x \in L$ için
$D_{u,v}(x) := [u,v,x]$ eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda $D_{u,v}$ bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olup 3. özellikten L üzerinde bir türevdir. Öncelikle $D_{u,v}$'nin bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olduğu gösterilsin:

Her $x \in L$ için $D_{u,v}(x) := [u,v,x]$'dir. Burada x yerine $x,x^{'} \in L$ ve $a,b \in L$ olmak üzere $ax+bx^{'}$ alınsın

$$\begin{aligned}
D_{u,v}(ax+bx^{'}) &= [u,v,ax+bx^{'}] \\
&= [[u,v],ax+bx^{'}] \\
&= [(uv-vu),ax+bx^{'}] \\
&= (uv-vu)(ax+bx^{'})-(ax+bx^{'})(uv-vu) \\
&= uvax+uvbx^{'}-vuax-vubx^{'}-axuv+axvu-bx^{'}uv+bx^{'}vu \\
&= a(uvx-vux-xuv+xvu)+b(uvx^{'}-vux^{'}-x^{'}uv+x^{'}vu) \\
&= a((uv-vu)x-x(uv-vu))+b((uv-vu)x^{'}-x^{'}(uv-vu)) \\
&= a[(uv-vu),x]+b[(uv-vu),x^{'}] \\
&= a[[u,v],x]+b[[u,v],x^{'}] \\
&= a[u,v,x]+b[u,v,x^{'}] \\
&= aD_{u,v}(x)+bD_{u,v}(x^{'})
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $D_{u,v}$ bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşümdür.
Şimdi $D_{u,v}$'nin L üzerinde türev olduğunu gösterilsin:

$D_{u,v}$'nin tanımına göre her $x,y,z \in L$ için

$$\begin{aligned} D_{u,v}([x,y,z]) &= [u,v,[x,y,z]] \\ &= [[u,v,x],y,z] + [x,[u,v,y],z] + [x,y,[u,v,z]] \\ &= [D_{u,v}(x),y,z] + [x,[D_{u,v}(y),z] + [x,y,[D_{u,v}(z)] \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $D_{u,v}$ dönüşümü L üzerinde bir türevdir.

L, bir 3'lü Lie sistem olmak üzere L üzerinde her θ-türevin bir Jordan θ-türev olduğu açıktır. Bu bölümde A. Najati'nin [25] çalışması incelenerek 3'lü Lie sistemler üzerindeki her Jordan θ-türevin aynı zamanda bir θ-türev olduğu gösteilecektir.

$D : L \to L$ ve $\theta :\to L$ bir $\mathbb{C}$-lineer dönüşüm olmak üzere $A_{D,\theta} : L \times L \times L \to L$ dönüşümü her $x,y,z \in L$ için

$$A_{D,\theta}(x,y,z) : = [D(x),\theta(y),\theta(z)] + [\theta(x),D(y),\theta(z)] + [\theta(x),\theta(y),D(z)]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $A_{D,\theta}$ bir 3-lineer dönüşümdür ve her $x,y \in L$ için

$$A_{D,\theta}(x,x,y) = 0$$

dır.

$A_{D,\theta}$'nın bir 3-lineer dönüşümdür:

$x,y,y',z \in L$ ve $a,b \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned} A_{D,\theta}(x,ay+by',z) &= [D(x),\theta(ay+by'),\theta(z)] + [\theta(x),D(ay+by'),\theta(z)] \\ &\quad + [\theta(x),\theta(ay+by'),D(z)] \\ &= a[D(x),\theta(y),\theta(z)] + b[D(x),\theta(y'),\theta(z)] \\ &\quad + a[\theta(x),D(y),\theta(z)] + b[\theta(x),D(y'),\theta(z)] \\ &\quad + a[\theta(x),\theta(y),D(z)] + b[\theta(x),\theta(y'),D(z)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a([D(x),\theta(y),\theta(z)]+[\theta(x),D(y),\theta(z)] \\
&\quad +[\theta(x),\theta(y),D(z)])+b([D(x),\theta(y'),\theta(z)] \\
&\quad +[\theta(x),D(y'),\theta(z)]+[\theta(x),\theta(y'),D(z)]) \\
&= aA_{D,\theta}(x,y,z)+bA_{D,\theta}(x,y',z)
\end{aligned}
$$

dir. Şimdi ise her $x,y \in L$ için $A_{D,\theta}(x,x,y)=0$ olduğu gösterilsin:

$$
\begin{aligned}
A_{D,\theta}(x,x,y) &= [D(x),\theta(x),\theta(y)]+[\theta(x),D(x),\theta(y)]+[\theta(x),\theta(x),D(y)] \\
&= D(x)\theta(x)\theta(y)-\theta(x)D(x)\theta(y)-\theta(y)D(x)\theta(x) \\
&\quad +\theta(y)\theta(x)D(x)+\theta(x)D(x)\theta(y)-D(x)\theta(x)\theta(y) \\
&\quad -\theta(y)\theta(x)D(x)+\theta(y)D(x)\theta(x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2 *$D: L \to L$ bir Jordan θ-türev olsun. O zaman D bir θ-türevdir.*

İspat. $D: L \to L$ bir Jordan θ-türev olduğundan her $x,y \in L$ için

$$A_{D,\theta}(x,y,x)=D([x,y,x])$$

dir. Burada x yerine $x+z$ alınırsa;

$$
\begin{aligned}
D([x+z,y,x+z]) &= [D(x+z),\theta(y),\theta(x+z)]+[\theta(x+z),D(y),\theta(x+z)] \\
&\quad +[\theta(x+z),\theta(y),D(x+z)] \\
&= [D(x)+D(z),\theta(y),\theta(x)+\theta(z)]+[\theta(x)+\theta(z),D(y),\theta(x)+\theta(z)] \\
&\quad +[\theta(x)+\theta(z),\theta(y),D(x)+D(z)]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= (D(x)\theta(y)+D(z)\theta(y)-\theta(y)D(x)-\theta(y)D(z))(\theta(x)+\theta(z)) \\
&\quad -(\theta(x)+\theta(z))(D(x)\theta(y)+D(z)\theta(y)-\theta(y)D(x)-\theta(y)D(z)) \\
&\quad +(\theta(x)D(y)+\theta(z)D(y)-D(y)\theta(x)-D(y)\theta(z))(\theta(x)+\theta(z)) \\
&\quad -(\theta(x)+\theta(z))(\theta(x)D(y)+\theta(z)D(y)-D(y)\theta(x)-D(y)\theta(z)) \\
&\quad +(\theta(x)\theta(y)+\theta(z)\theta(y)-\theta(y)\theta(x)-\theta(y)\theta(z))(D(x)+D(z)) \\
&\quad -(D(x)+D(z))(\theta(x)\theta(y)+\theta(z)\theta(y)-\theta(y)\theta(x)-\theta(y)\theta(z)) \\
&= [D(x),\theta(y),\theta(x)]+[\theta(x),D(y),\theta(x)]+[\theta(x),\theta(y),D(x)] \\
&\quad +[D(z),\theta(y),\theta(z)]+[\theta(z),D(y),\theta(z)]+[\theta(z),\theta(y),D(z)] \\
&\quad +[D(x),\theta(y),\theta(z)]+[\theta(x),D(y),\theta(z)]+[\theta(x),\theta(y),D(z)] \\
&\quad +[D(z),\theta(y),\theta(x)]+[\theta(z),D(y),\theta(x)]+[\theta(z),\theta(y),D(x)] \\
&= D([x,y,x])+D([z,y,z])+A_{D,\theta}(x,y,z)+A_{D,\theta}(z,y,x)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca her $x,y,z \in L$ için $[x+z,y,x+z]=[x,y,x]+[z,y,z]+[x,y,z]+[z,y,x]$'tir. O zaman her $x,y,z \in L$ için

$$D([x+z,y,x+z]) = D([x,y,x])+D([z,y,z])+D([x,y,z])+D([z,y,x])$$

olur. Diğer taraftan

$$D([x+z,y,x+z]) = D([x,y,x])+D([z,y,z])+A_{D,\theta}(x,y,z)+A_{D,\theta}(z,y,x)$$

idi. Bu durumda

$$D([x,y,z])+D([z,y,x]) = A_{D,\theta}(x,y,z)+A_{D,\theta}(z,y,x) \tag{5.1.1}$$

olur. 2. özellikten her $x,y,z \in L$ için;

$$[z,y,x]+[y,x,z]+[x,y,z] = 0$$

yazılabilir. Buradan her $x,y,z \in L$ için

$$[z,y,x] = -[y,x,z]-[x,z,y]$$

olur. 1. özellikten $[y,x,z] = -[x,y,z]$'dir. O zaman

$$[z,y,x] \quad = \quad [x,y,z]-[x,z,y]$$

olur. Buna göre her $x,y,z \in L$ için;

$$D([x,y,z])+D([z,y,x]) = 2D([x,y,z])-D([x,z,y]) \tag{5.1.2}$$

elde edilir. Ayrıca her $x,y,z \in L$ için

$$\begin{aligned}
A_{D,\theta}(x,y,z)-A_{D,\theta}(x,z,y) &= [D(x),\theta(y),\theta(z)]+[\theta(x),D(y),\theta(z)]+[\theta(x),\theta(y),D(z)] \\
&\quad -[D(x),\theta(z),\theta(y)]-[\theta(x),D(z),\theta(y)]-[\theta(x),\theta(z),D(y)] \\
&= ([D(x),\theta(y),\theta(z)]+[\theta(z),D(x),\theta(y)]) \\
&\quad +([\theta(x),D(y),\theta(z)]+[\theta(z),\theta(x),D(y)]) \\
&\quad +[\theta(x),\theta(y),D(z)]+[D(z),\theta(x),\theta(y)]) \\
&= [\theta(z),\theta(y),D(x)]+[\theta(z),D(y),\theta(x)]+[D(z),\theta(y),\theta(x)] \\
&= A_{D,\theta}(z,y,x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece her $x,y,z \in L$ için

$$A_{D,\theta}(x,y,z)+A_{D,\theta}(z,y,x) = 2A_{D,\theta}(x,y,z)-A_{D,\theta}(x,z,y) \tag{5.1.3}$$

olur. (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.3) kullanılırsa her $x,y,z \in L$ için

$$2D([x,y,z])-D([x,z,y]) = 2A_{D,\theta}(x,y,z)-A_{D,\theta}(x,z,y) \tag{5.1.4}$$

elde edilir. (5.1.4)'te z yerine y alınırsa;

$$2D([x,y,y])-D([x,y,y]) \quad = \quad 2A_{D,\theta}(x,y,y)-A_{D,\theta}(x,y,y)$$

olur. Buradan da

$$D([x,y,y]) \quad = \quad A_{D,\theta}(x,y,y)$$

elde edilir. Şimdi de y yerine $y+z$ alınırsa

$$D([x,y+z,y+z]) \quad = \quad A_{D,\theta}(x,y+z,y+z)$$

olur. $[.,.,.]$ ve $A_{D,\theta}$ dönüşümleri 3-lineer olduğundan her $x,y,z \in L$ için

$$D([x,y,z]) + D([x,z,y]) = A_{D,\theta}(x,y,z) + A_{D,\theta}(x,z,y) \tag{5.1.5}$$

olur. (5.1.4) ve (5.1.5) denklemleri toplanırsa her $x,y,z \in L$ için

$$\begin{aligned} 3D([x,y,z]) &= 3A_{D,\theta}(x,z,y) \\ \Rightarrow 3D([x,y,z]) - 3A_{D,\theta}(x,z,y) &= 0 \\ \Rightarrow 3(D([x,y,z]) - A_{D,\theta}(x,z,y)) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. D ve $A_{D,\theta}$ 3-lineer dönüşümler olduğundan $(D([x,y,z]) - A_{D,\theta}(x,z,y)) = 0$ olur.

Buradan $D([x,y,z]) = A_{D,\theta}(x,z,y)$ elde edilir. Dolayısıyla D, L üzerinde bir θ-türevdir. □

Sonuç 5.1.3 *3'lü Lie sistemler üzerindeki her Jordan türev aynı zamanda bir türevdir.*

5.2. 3'lü Lie Sistemler Üzerinde Genelleştirilmiş Jordan Türevleri

Bu bölümde A. Najati'nin [24] çalışması incelenmiştir. Burada 3'lü Lie sistemler üzerindeki her genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türevin bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türev olduğu ispatlanacaktır. Buradan da 3'lü Lie sistemler üzerinde her Jordan 3'lü θ-türevin bir θ-türev olduğu sonucuna varılacaktır.

Burada L R-modülü bir 3'lü Lie sistem ve $\theta,\varphi : L \to L$ birer R-lineer dönüşüm kabul edilecektir.

$u,v \in L$ olmak üzere her $x \in L$ için $D_{u,v} : L \to L$ dönüşümü

$$D_{u,v}(x) : \quad = \quad [u,v,x]$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $D_{u,v}$'nin bir R-lineer dönüşüm olduğu açıktır. Ayrıca 3. özellikten $D_{u,v}$, L üzerinde bir türevdir. $D_{u,v}$ dönüşümü R-lineerdir:

$a,b \in R$ ve $x,x^{'} \in L$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
D_{u,v}(ax+bx^{'}) &= [u,v,ax+bx^{'}] \\
&= [[u,v],ax+bx^{'}] \\
&= [(uv-vu),ax+bx^{'}] \\
&= (uv-vu)(ax+bx^{'})-(ax+bx^{'})(uv-vu) \\
&= uvax+uvbx^{'}-vuax-vubx^{'}-axuv+axvu-bx^{'}uv+bx^{'}vu \\
&= a(uvx-vux-xuv+xvu)+b(uvx^{'}-vux^{'}-x^{'}uv+x^{'}vu) \\
&= a((uv-vu)x-x(uv-vu))+b((uv-vu)x^{'}-x^{'}(uv-vu)) \\
&= a[(uv-vu),x]+b[(uv-vu),x^{'}] \\
&= a[[u,v],x]+b[[u,v],x^{'}] \\
&= a[u,v,x]+b[u,v,x^{'}] \\
&= aD_{u,v}(x)+bD_{u,v}(x^{'})
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla $D_{u,v}$ bir R-lineer dönüşümdür.

Bunda sonra $\theta,\varphi,D,\delta : L \to L$ birer R-lineer dönüşüm ve

$$
A_{\theta,\varphi}^{\delta,D}(x,y,z): \quad = \quad [\delta(x),\theta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\delta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\varphi(y),D(z)]
$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $A_{\theta,\varphi}^{\delta,D}(x,y,z)$ bir $R-3$-lineer dönüşüm ve her $x,y \in L$ için

$$
A_{\theta,\varphi}^{\delta,D}(x,x,y) \quad = \quad [\delta(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)]
$$

olduğu açıktır.

Öncelikle bu dönüşümün $R-3$-lineer olduğu gösterilecektir. Bunun için $x,y,y',z \in L$ ve $a,b \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,ay+by',z) &= [\delta(x),\theta(ay+by'),\theta(z)] \\
&\quad +[\varphi(x),\delta(ay+by'),\theta(z)]+[\varphi(x),\varphi(ay+by'),D(z)] \\
&= a[\delta(x),\theta(y),\theta(z)]+b[\delta(x),\theta(y'),\theta(z)]+a[\varphi(x),\delta(y),\theta(z)] \\
&\quad +b[\varphi(x),\delta(y'),\ theta(z)]+a[\varphi(x),\varphi(y),D(z)]+b[\varphi(x),\varphi(y'),D(z)] \\
&= a[\delta(x),\theta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\delta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\varphi(y),D(z)] \\
&\quad +b[\delta(x),\theta(y'),\theta(z)]+[\varphi(x),\delta(y'),\theta(z)]+[\varphi(x),\varphi(y'),D(z)] \\
&= aA^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,y,z)+bA^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,y',z)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla bu dönüşüm $R-3$-lineerdir.

Ayrıca $x,y \in L$ için

$$\begin{aligned}
A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,x,y) &= [\delta(x),\theta(x),\theta(y)]+[\varphi(x),\delta(x),\theta(y)] \\
&\quad +[\varphi(x),\varphi(x),D(y)] \\
&= [\delta(x),\theta(x),\theta(y)]-[\delta(x),\varphi(x),\theta(y)]+0 \\
&= [\delta(x),\theta(x)-\varphi(x),\theta(y)] \\
&= [\delta(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)]
\end{aligned}$$

dir. Buradan her $x,y \in L$ için

$$A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,x,y) = [\delta(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)]$$

olduğu görülür.

Uyarı 5.2.1 *$D=\delta$ olduğunda*

$$A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}=A^{\delta,\delta}_{\theta,\varphi}$$

olur. Bu durumda $A^{\delta,\delta}_{\theta,\varphi}=A^{\delta}_{\theta,\varphi}$ ile gösterilecektir.

Lemma 5.2.2 *R, 3-burulmasız bir halka ve $D : L \to L$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olsun. δ bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olmak üzere her $x,y,z \in L$ için*

$$[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)]+[\varphi(y),\varphi(z),(D-\delta)(x)]+[\varphi(z),\varphi(x),(D-\delta)(y)]=0 \tag{5.2.6}$$

ise

$$(D-\delta)([x,y,z])=[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)] \tag{5.2.7}$$

ve

$$B := A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}-A^{\delta}_{\theta,\varphi}$$

olmak üzere

$$B(x,y,z)+B(y,z,x)+B(z,x,y)=0 \tag{5.2.8}$$

dır.

İspat. Her $x,y,z \in L$ için

$$(D-\delta)([x,y,x]) \quad = \quad [\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(x)]$$

olduğu açıktır. Buradan

$$(D-\delta)([x,y,x]) \quad = \quad D([x,y,x])-\delta(x,y,x)$$

elde edilir. Ayrıca D bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü türev ve δ bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olduğundan

$$\begin{aligned}
D-\delta([x,y,x]) &= D([x,y,x])-\delta(x,y,x)\\
&= [\delta(x),\theta(y),\theta(x)]+[\varphi(x),\delta(y)\theta(x)]+[\varphi(x),\varphi(y),D(x)]\\
&\quad -[\delta(x),\theta(y),\theta(x)]-[\varphi(x),\delta(y)\theta(x)]-[\varphi(x),\varphi(y),\delta(x)]\\
&= [\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(x)]
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $F : L\times L\times L \to L$ R-lineer dönüşümü her $x,y,z \in L$ için

$$F(x,y,z) \quad = \quad (D-\delta)([x,y,z])-[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)]$$

şeklinde tanımlansın. Burada $F(x,y,z)=0$ olduğu gösterilmelidir. Her $x,y\in L$ için

$$\begin{aligned} F(x,y,x) &= (D-\delta)([x,y,x])-[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(x)] \\ &= [\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(x)]-[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(x)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca her $x,y\in L$ için

$$\begin{aligned} F(x,x,y) &= (D-\delta)([x,x,y])-[\varphi(x),\varphi(x),(D-\delta)(y)] \\ &= (D-\delta)(0)-0 \\ &= 0-0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Yukarıda her $x,y\in L$ için $F(x,y,x)=0$ olduğu gösterildi. Burada x yerine $x+y$ ve y yerine x alınırsa $(x+y,x,x+y)=0$ elde ederiz. Ayrıca F dönüşümü $R-3$-lineer olduğundan

$$\begin{aligned} F(x+y,x,x+y) &= F(x,x,x)+F(x,x,y)+F(y,x,x)+F(y,x,y) \\ &= 0+0+0+F(y,x,y) \\ &= 0 \\ \Rightarrow F(y,x,y) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $F(y,x,x)=0$'dır.

O zaman $F(x,y,z)=F(y,z,x)=F(z,x,y)$ ve 2. özellik ile (5.2.6)'den her $x,y,z\in L$ için

$3F(x,y,z)=F(x,y,z)+F(y,z,x)+F(z,x,y)=0$ olur. R, 3-burulmasız bir halka olduğundan

$3F(x,y,z)=0\Rightarrow F(x,y,z)=0$ 'dır.

Şimdi ise $B(x,y,z)+B(y,z,x)+B(z,x,y)=0$ olduğu gösterilsin:

Her $x,y,z\in L$ için

$$B := \quad A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,y,z)-A^{\delta,}_{\theta,\varphi}(x,y,z)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned}
& B(x,y,z)+B(y,z,x)+B(z,x,y) \\
= \; & A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(x,y,z)-A^{\delta,}_{\theta,\varphi}(x,y,z)+A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(y,z,x)-A^{\delta,}_{\theta,\varphi}(y,z,x) \\
& A^{\delta,D}_{\theta,\varphi}(z,x,y)-A^{\delta,}_{\theta,\varphi}(z,x,y) \\
= \; & [\delta(x),\theta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\delta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\varphi(y),D(z)] \\
& -[\delta(x),\theta(y),\theta(z)]-[\varphi(x),\delta(y),\theta(z)]-[\varphi(x),\varphi(y),\delta(z)] \\
& +[\delta(y),\theta(z),\theta(x)]+[\varphi(y),\delta(z),\theta(x)]+[\varphi(y),\varphi(z),\delta(x)] \\
& -[\delta(y),\theta(z),\theta(x)]-[\varphi(y),\delta(z),\theta(x)]-[\varphi(y),\varphi(z),D(x)] \\
& +[\delta(z),\theta(x),\theta(y)]+[\varphi(z),\delta(x),\theta(y)]+[\varphi(z),\varphi(x),D(y)] \\
& -[\delta(z),\theta(x),\theta(y)]-[\varphi(z),\delta(x),\theta(y)]-[\varphi(z),\varphi(x),\delta(y)] \\
= \; & [\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)]+[\varphi(y),\varphi(z),(D-\delta)(x)]+[\varphi(z),\varphi(x),(D-\delta)(y)] \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

dır. □

Burada D, φ ve δ birer R-lineer dönüşümdür ve 2. özellikten

$$[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y] = 0$$

Önerme 5.2.3 *$D : L \to L$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev ve δ (5.2.7)'yi sağlayan bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev ise (5.2.6) gerçeklenir.*

İspat. $D : L \to L$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olduğundan her $x,y \in L$ için

$$D([x,y,x]) = [\delta(x),\theta(y),\theta(x)]+[\varphi(x),\delta(y),\theta(x)]+[\varphi(x),\varphi(y),D(x)]$$

tir. Burada δ (5.2.7)'yi sağlayan bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olduğundan her $x,y,z \in L$ için

$$(D-\delta)([x,y,z]) = [\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)]$$

dir. O zaman

$$\begin{aligned}(D-\delta)([y,z,x]) &= [\varphi(y),\varphi(z),(D-\delta)(x)]\\(D-\delta)([z,x,y]) &= [\varphi(z),\varphi(x),(D-\delta)(y)]\end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&(D-\delta)([x,y,z])+(D-\delta)([y,z,x])+(D-\delta)([z,x,y])\\=\;&[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)]+[\varphi(y),\varphi(z),(D-\delta)(x)]+[\varphi(z),\varphi(x),(D-\delta)(y)]\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}&(D-\delta)([x,y,z])+(D-\delta)([y,z,x])+(D-\delta)([z,x,y])\\=\;&(D-\delta)([x,y,z]+[y,z,x]+[z,y,x])\\=\;&(D-\delta)(0)\\=\;&0\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)]+[\varphi(y),\varphi(z),(D-\delta)(x)]+[\varphi(z),\varphi(x),(D-\delta)(y)] = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (5.2.6) gerçeklenir. □

Lemma 5.2.4 *R, 3-burunmasız halka ve $F: L\times L\times L\to L$ dönüşümü her $x,y,z\in L$ için*

$$F(x,y,z)+F(y,z,x)+F(z,x,y)=0 \tag{5.2.9}$$

eşitliğini sağlayan 3-lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F=0$'dır.

İspat. F, R-lineer ayrıca her $x,y\in L$ için $F(x+y,x,x+y)=0$'dır. Buradan

$$\begin{aligned}F(x+y,x,x+y) &= F(x,x,x)+F(x,x,y)+F(y,x,x)+F(y,x,y)\\&= 0+0+F(y,x,x)+0\\&= 0\\\Rightarrow F(y,x,x) &= 0\end{aligned}$$

olur. Böylece her $x,y,z \in L$ için $F(x,y,z) = F(y,z,x) = F(z,x,y)$dir. (5.2.9)'dan

$$\begin{aligned} F(x,y,z)+F(y,z,x)+F(z,x,y) &= 3F(x,y,z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. R 3-burunmasız halka olduğundan $f(x,y,z) = 0$'dır. Buradan $F = 0$ elde edilir.

□

Teorem 5.2.5 *R 3-burulmasız halka ve $D : L \to L$ bir Jordan 3'lü (θ, φ)-türev olsun. O zaman*

D bir (θ, φ)-türev $\Leftrightarrow$ her $x,y,z \in L$ için

i. $[D(x), (\theta - \varphi)(x), \theta(y)] = 0$

ii. $A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z) + A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x) + A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) = 0$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Öncelikle D bir (θ, φ)-türev olsun. O zaman her $x,y,z \in L$ için

$$D([x,y,x]) = [D(x), \theta(y), \theta(z)] + [\varphi(x), D(y), \theta(z)] + [\varphi(x), \varphi(y), D(z)]$$

eşitliği vardır. Ayrıca her $x,y,z \in L$ için

$$A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z) = [D(x), \theta(y), \theta(z)] + [\varphi(x), D(y), \theta(z)] + [\varphi(x), \varphi(y), D(z)]$$

olduğundan

$$D([x,y,z]) = A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)$$

olur. Buradan $x,y \in L$ için

$$\begin{aligned} D([x,x,y]) &= A^D_{\theta,\varphi}(x,x,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
A^D_{\theta,\varphi}(x,x,y) &= [D(x),\theta(x),\theta(y)]+[\varphi(x),D(x),\theta(y)]+[\varphi(x),\varphi(x),D(y)] \\
&= [D(x),\theta(x),\theta(y)]-[D(x),\varphi(x),\theta(y)]+0 \\
&= [D(x),\theta(x)-\varphi(x),\theta(y)] \\
&= [D(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. O halde *i* sağlanır.

Şimdi *ii*'nin sağlandığı gösterilsin:

2. özellikten her $x,y,z\in L$ için

$$[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y] = 0$$

$$\begin{aligned}
A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)+A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x)+A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) &= D([x,y,z])+D([y,z,x])+D([z,x,y]) \\
&= D([x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]) \\
&= D(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

O halde *ii* sağlanır.

Tersine *i* ve *ii* eşitlikleri sağlansın. D'nin bir (θ,φ)-türev olduğu gösterilecektir:

$F: L\times L\times L\to L$ R-lineer dönüşümü her $x,y,z\in L$ için

$$F(x,y,z) = D([x,y,z])-A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)$$

şeklinde tanımlansın. F'in sıfıra eşit olduğu gösterilmelidir.

Her $x, y \in L$ için $[x,x,y] = 0$ ve $[D(x), (\theta - \varphi)(x), \theta(y)] = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F(x,x,y) &= D([x,x,y]) - A^D_{\theta,\varphi}(x,x,y) \\
&= D(0) - [D(x), \theta(x), \theta(y)] + [\varphi(x), D(x), \theta(y)] + [\varphi(x), \varphi(x), D(y)] \\
&= 0 - [D(x)], (\theta - \varphi)(x), \theta(y)] \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Teoremin hipotezinden $D : L \to L$ bir Jordan 3'lü (θ, φ)-türev idi.
O zaman her $x, y \in L$ için

$$D([x,y,x]) = [D(x), \theta(y), \theta(x)] + [\varphi(x), D(y), \theta(x)] + [\varphi(x), \varphi(y), D(x)]$$

eşitliği vardır. Her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned}
F(x,y,x) &= D([x,y,x]) - A^D_{\theta,\varphi}(x,y,x) \\
&= [D(x), \theta(y), \theta(x)] + [\varphi(x), D(y), \theta(x)] + [\varphi(x), \varphi(y), D(x)] \\
&\quad -[D(x), \theta(y), \theta(x)] - [\varphi(x), D(y), \theta(x)] - [\varphi(x), \varphi(y), D(x)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. özellikten her $x, y, z \in L$ için

$$[x,y,z] + [y,z,x] + [z,x,y] = 0$$

dır. Buradan

$$A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z) + A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x) + A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) = 0$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y) &= D(x,y,z) - A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z) \\
&\quad +D(y,z,x) - A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x) \\
&\quad +D(z,x,y) - A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned} F(x,y,z)+F(y,z,x)+F(z,x,y) &= D([x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]) \\ &\quad -(A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)+A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x)+A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y)) \\ &= D(0)-0 \\ &= 0-0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Böylece (5.2.9) sağlanır. Lemma 5.2.4'den $F=0$ olur. Dolayısıyla D bir (θ,φ)-türevdir. □

Teorem 5.2.6 *R 3-burulmasız halka ve $D : L \to L$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olsun. $\delta : L \to L$ (5.2.6) şartını sağlayan bir Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olmak üzere her $x,y,z \in L$ için*

i. $[\delta(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)]=0$;

ii. $A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)+A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x)+A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y)=0$

ise δ bir (θ,φ)-türev ve D bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türevdir.

İspat. Teorem 5.2.5'den δ bir (θ,φ)-türevdir. Lemma 5.2.2'in (5.2.8) durumundan ve *ii*'den her $x,y,z \in L$ için

$$A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)+A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x)+A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) = 0$$

elde edilir.

D'nin genelleştirilmiş (θ,φ)-türev olabilmesi için her $x,y,z \in L$ için $\delta : L \to L$ bir (θ,φ)-türev olmak üzere

$$D([x,y,z]) = [\delta(x),\theta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\delta(y),\theta(z)]+[\varphi(x),\varphi(y),D(z)]$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

$$\begin{array}{rccl} F: & l\times L\times L & \rightarrow & L \\ & (x,y,z) & \mapsto & D([x,y,z]) - A^{D}_{\theta,\varphi}(x,y,z) \end{array}$$

$R-3$lineer dönüşümünün sıfır olduğu gösterilmelidir. δ, (5.2.6) şartını sağlıyorsa;

$$[\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(z)] + [\varphi(y),\varphi(z),(D-\delta)(x)] + [\varphi(z),\varphi(x),(D-\delta)(y)] \quad = \quad 0$$

eşitliği vardır. Ayrıca her $x,y \in L$ için [x, x, y]=0 ve

$$[\delta(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)] = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F(x,x,y) &= D([x,x,y]) - A^{D}_{\theta,\varphi}(x,x,y) \\ &= D(0) - \{[\delta(x),\theta(x),\theta(y)] + [\varphi(x),\delta(x),\theta(y)] + [\varphi(x),\varphi(x),D(y)]\} \\ &= D(0) - \{[\delta(x),\theta(x),\theta(y)] - [\delta(x),\varphi(x),\theta(y)] + 0\} \\ &= D(0) - [\delta(x),(\theta-\varphi)(x),\theta(y)] \\ &= 0-0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $D: L \rightarrow L$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türev olduğundan her $x,y \in L$ için

$$D([x,y,x]) \quad = \quad [\delta(x),\theta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\delta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\varphi(y),D(x)]$$

$$\begin{aligned} F(x,y,x) &= D([x,y,x]) - A^{D}_{\theta,\varphi}(x,y,x) \\ &= [\delta(x),\theta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\delta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\varphi(y),D(x)] \\ &\quad -\{[\delta(x),\theta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\delta(y),\theta(x)] + [\varphi(x),\varphi(y),\delta(x)]\} \\ &= [\varphi(x),\varphi(y),(D-\delta)(x)] \\ &= 0 \qquad (i.'den) \end{aligned}$$

olur. Her $x,y,z \in L$ için

$$[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y] = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D[x,y,z]+D[y,z,x]+D[z,x,y] &= D([x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]) \\ &= D(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca *ii*'den her $x,y,z \in L$ için

$$A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)+A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x)+A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) = 0$$

olduğundan

$$F(x,y,z)+F(y,z,x)+F(z,x,y) = 0$$

olur.

$$F(x,y,z)=F(y,z,x)=F(z,x,y) \quad \Rightarrow \quad 3F(x,y,z)=0$$

dır. R, 3-burulmasız halka olduğundan $F(x,y,z)=0$ olur. Buradan

$$D([x,y,z]) = A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z)$$

elde edilir. Dolayısıyla D genelleştirilmiş (θ,φ)-türevdir. □

Sonuç 5.2.7 *R 3-burulmasız halka ve $D: L \to L$ bir genelleştirilmiş Jordan 3'lü θ-türev , $\delta: L \to L$ her $x,y,z \in L$ için*

$$[\theta(x),\theta(y),(D-\delta)(z)]+[\theta(y),\theta(z),(D-\delta)(x)]+[\theta(z),\theta(x),(D-\delta)(y)] = 0$$

koşulunu sağlayan bir Jordan 3'lü θ-türev olsun. O zaman δ bir θ-türevdir ve δ bir θ-türev olmak üzere D bir genelleştirilmiş θ-türevdir.

İspat. Teorem 5.2.6'nin *i*. kısmında $\varphi=\theta$ alınırsa;

i. $[\delta(x), (\theta - \theta)(x), \theta(y)] = 0$;

ii. $A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z) + A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x) + A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) = 0$

olur. Burada her $x,y,z \in L$ için

$$\begin{aligned} & A^D_{\theta,\varphi}(x,y,z) + A^D_{\theta,\varphi}(y,z,x) + A^D_{\theta,\varphi}(z,x,y) \\ = \; & [\delta(x), \theta(y), \theta(z)] + [\theta(x), \delta(y), \theta(z)] + [\theta(x), \theta(y), \delta(z)] \\ & + [\delta(y), \theta(z), \theta(x)] + [\theta(y), \delta(z), \theta(x)] + [\theta(y), \theta(z), \delta(x)] \\ & + [\delta(z), \theta(x), \theta(y)] + [\theta(z), \delta(x), \theta(y)] + [\theta(z), \theta(x), \delta(y)] \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 5.2.5'in koşulları $\varphi = \theta$ olacak şekilde gerçeklenir. Yani δ bir θ-türev ve D bir genelleştirilmiş θ-türev olur. □

Sonuç 5.2.8 *R 3-burulmasız halka olmak üzere*
$D : L \to L$ bir Jordan 3'lü θ-türev $\Leftrightarrow$ D bir θ-türevdir.

İspat. Öncelikle $D : L \to L$ bir Jordan 3'lü θ-türev olsun. O zaman her $x,y \in L$ için

$$D([x,y,x]) = [D(x), \theta(y), \theta(x)] + [\theta(x), D(y), \theta(x)] + [\theta(x), \theta(y), D(x)]$$

eşitliği sağlanır. Her $x,y,z \in L$ için

$$[\theta(x), \theta(y), (D-\delta)(z)] + [\theta(y), \theta(z), (D-\delta)(x)] + [\theta(z), \theta(x), , (D-\delta)(y)] = 0$$

dır. Sonuç 5.2.7'dan D bir θ-türev olur.

Tersine $D : L \to L$ bir θ-türev olsun. O zaman her $x,y,z \in L$ için

$$D([x,y,z]) = [D(x), \theta(y), \theta(z)] + [\theta(x), D(y), \theta(z)] + [\theta(x), \theta(y), D(z)]$$

eşitliği vardır. Burada z yerine x alınırsa;

$$D([x,y,x]) = [D(x), \theta(y), \theta(x)] + [\theta(x), D(y), \theta(x)] + [\theta(x), \theta(y), D(x)]$$

elde edilir. Dolayısıyla $D : L \to L$ bir Jordan 3'lü θ-türevdir. □

Sonuç 5.2.9 *R 3-burulmasız halka olsun. Bu durumda $D : L \to L$ bir Jordan 3'lü türev $\Leftrightarrow$ D bir türevdir.*

İspat. Öncelikle $D : L \to L$ bir Jordan 3'lü türev olsun. O zaman Sonuç 5.2.8'den D, bir θ-türevdir. Burada $\theta = 1_R$ alınırsa D bir türev olur.

Tersine D bir türev olsun. O zaman her $x, y, z \in L$ için

$$D([x,y,z) = [D(x),y,z] + [x,D(y),z] + [x,y,D(z)]$$

dir. Burada z yerine x alınırsa;

$$D([x,y,x]) = [D(x),y,x] + [x,D(y),x] + [x,y,D(x)]$$

elde edilir. Dolayısıyla D bir Jordan 3'lü türevdir. $\square$

6. SONUÇ

Üçüncü bölümde I. N. Herstein'ın 1956 yılında yayınlanan "Jordan Homomorphisms" adlı makalesinde Jordan homomorfizmalarıyla ilgili ispatladığı lemma ve teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve bunun sonucunda karakteristiği 2 ve 3'ten farklı olan asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan homomorfizmasının ya bir homomorfizma ya da bir anti-homomorfizma olduğunu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında ise yine I. N. Herstein'ın 1957 yılında yayınlanan "Jordan Derivations of Prime Rings" adlı çalışması incelenmiştir. Bu çalışmada yer alan lemma ve teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Çalışmanın sonunda da karakteristiği 2'den farklı asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan türevin bir türev olduğu görülmüştür.

Daha sonra J. M. Cusack'ın 1975 yılında yayınlanan "Jordan Derivations on Rings" adlı çalışmasındaki lemma ve teoremler incelenmiştir. Bu incelemenin sonunda yarı asal halkalar üzerinde tanımlı 2-burulmasız yarı asal halkalar üzerinde tanımlı her Jordan türevin bir her Jordan türevin bir (adi) türev olduğu gösterilmiştir. Ayrıca 2-burulmasız ve sıfır bölensiz kommütatöre sahip halkalardaki her Jordan türevin bir türev olduğu gosterilmiştir.

Dördüncü bölümün üçüncü kısmında asal aalkalarda genelleştirilmiş Jordan türevlerle ilgili lemma ve teoremler çalışılmıştır. Bu sırada Wu Jing ve Shije Lu'nun 2003'teki "Generalized Jordan Derivations on Prime Rings and Standard Operator Algebras" adlı ortak çalışmalarından faydalanılmıştır. Sonuç olarak 2-burulmasız asal halkalardaki her genelleştirilmiş Jordan türevin bir genelleştirilmiş türev olduğu ispatlanmıştır.

Devamında ise asal halkalarda genelleştirilmiş Jordan 3'lü türevler kavramı üzerinde durulmuştur. Bu kısımda da Wu Jing ve Shije Lu'nun 2003'teki "Generalized Jordan Derivations on Prime Rings and Standard Operator Algebras" adlı çalışmadan yararlanılmıştır. Bunun sonucunda 2-burulmasız asal halkalarda tanımlı her genelleştirilmiş Jordan 3'lü türevin bir genelleştirilmiş türev olduğu görülmüştür.

Dördüncü bölümün beşinci kısmında M. Brešar ve J. Vukman'ın 1991'deki "Jordan (θ,φ)-Derivations" çalışmasıyla karakteristiği 2'den farklı olan asal halkalar üzerinde her Jordan (θ,φ)-türevin bir (θ,φ)-türev olduğu sonucuna varılmıştır.

Sonraki bölümde C. K. Liu ve W. K. Shiue'nin "Generalized Jordan triple (θ,φ)-derivations on Semiprime Rings" adlı çalışması incelenmiştir. Burada 2-burulmasız yarı asal halkalarda tanımlı her Jordan (θ,ϕ)-türevin bir (θ,ϕ)-türev olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca buradan 2-burulmasız yarı asal halkalardaki her genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türevin bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türev ve her genelleştirilmiş Jordan (θ,φ)-türevin bir gennelleştirilmiş (θ,φ)-türev olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Beşinci bölümde 3'lü Lie sistemler üzerinde tanımlanan türevler üzerine çalışılmıştır. Bu sırada Abbas Najati'nin çalışmaları kullanılmıştır. İlk kısımda "2009 yılında yayınlanan Jordan θ-Derivations on Lie Triple Systems" adlı çalışmanın sonunda 3'lü Lie sistemler üzerinde tanımlanan her Jordan θ-türevin bir θ-türev olduğu gösterilmiştir.

Son kısımda ise 2010'da yayınlanan "On Generalized Jordan Derivations Of Lie Triple Systems" çalışması incelenmiştir. Burada 3'lü Lie sistemler üzerinde her genelleştirilmiş Jordan 3'lü (θ,φ)-türevin bir genelleştirilmiş (θ,φ)-türev olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca 3'lü Lie sistemler üzerindeki her Jordan 3'lü θ-türevin bir θ-türev olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Ashraf, M., Al-Shammakh, W S. M. 2002. On generalized (θ, φ) derivations in rings. **Int. J. Math. Game Theory and Algebra,** 12: 295-300.

[2] Beidar, K. I., Martindale, W. S. 3rd Mikhalev, A. V. 1996. Ring with Generalized Identities, Marcel Dekker, Inc. , Newyork- Basel-Hong Kong.

[3] Bertram, W. 2000. The Geometr.y of Jordan and Lie Structures. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, p.292, New York.

[4] Brešar, M. 1988. Jordan derivations on semiprime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 104: 1003-1006.

[5] Brešar, M. 1989. Jordan mappings of semiprime rings. **J. Algebra,** 127: 218-228.

[6] Brešar, M., Vukman, J. 1991. Jordan (θ, φ) derivations. **Glasnik Math.,** 46: 13-17.

[7] Brešar, M., Vukman, J. 1988. Jordan derivations on prime rings. **Bull. Austral. Math. Soc.,** 37: 321-322.

[8] Brešar, M. 1991. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivation. **Glasgow Math. J.,** 33: 89-93.

[9] Chuang, C. 1988. GPI's having coefficients in Utumi quotient rings. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 103: 723-728.

[10] Cusack, J. 1975. Jordan derivations on rings. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 53: 321-324.

[11] Eremita, D. 2001. A functional identity with an automorphism in semiprime rings. **Algebra Colloq.,** 8: 301-306.

[12] Herstein, I. N. 1957. Jordan derivations on prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 8: 1104-1110.

[13] Herstein, I. N. 1956. Jordan homomorphisms. **Trans. Amer. Math. Soc.,** 81: 331-341.

[14] Hungerford, T. W. 1974. Algebra, Holf, Rinehart and Wiston, Inc., p. 502, New York, Chicago.

[15] Hvala, B. 1998. Generalized derivations in rings. **Comm. Algebra,** 26: 1147-1166.

[16] Jacobson, N. 1949. Lie and Jordan triple system. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 71: 149-170.

[17] Jacobson, N. 1951. General representation theory of Jordan algebras. **Trans. Amer. Math. Soc.,** 70: 509-530.

[18] Jacobson, N. 1956. Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., p.299.

[19] Jing, W., Lu, S. 2003. Generalized Jordan derivations of prime rings and standard operator algebras. **Taiwanese J. Math.,** 7: 605-613.

[20] Lam, T. Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings, 2nd Ed. Springer-Verlag, p. 385, New York.

[21] Liu, C. K., Shiue, W. -K. 2007. Generalized Jordan triple (θ, φ) derivations on semiprime rings. **Taiwanese J. Math.,** 11: 1397-1406.

[22] Lister, W. G. 1952. A structure theory of Lie triple systems. **Trans. Amer. Math. Soc.,** 72: 217-242.

[23] Mccoy, N. H. 1964. The theory of rings. Macmillan, New York and London.

[24] Najati, A. 2010. On generalized Jordan derivations of lie triple systems. **Czechoslovak Mathematical Journal,** 60: 541-547.

[25] Najati, A. 2009. Jordan θ-derivations on lie triple systems. **Bull. Korean Math. Soc.,** 46: 435-437.

[26] Posner, E. C. 1957. Derivations in prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 8: 1093-1100.

[27] Smiley, M. F. 1975. Jordan homomorphisms onto prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.,** 8: 426-429.

[28] Vukman, J. 2007. A note on generalized derivations of semiprime rings. **Taiwanese J. Math.,** 11: 367-370.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER
Adı Soyadı : Azime TARHAN
Doğum Yeri ve Tarihi : Aydın 15.05.1989
EĞİTİM DURUMU
Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl., devam ediyor.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
BİLİMSEL FAALİYETLERİ
a) Yayınlar
b) Bildiriler
c) Katıldığı Projeler
İŞ DENEYİMİ
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :
İLETİŞİM
E-posta Adresi : a.tarhan89@hotmail.com
Tarih :