ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2012-YL-023

POLAR ÇEKİRDEKLİ DOĞRUSAL VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİ

Maide ŞEN

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Maide ŞEN tarafından hazırlanan Polar Çekirdekli Doğrusal Volterra İntegral Denklem Sistemleri başlıklı tez, 19.07.2012 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yard. Doç.Dr. Ali IŞIK	ADÜ	……..
Üye :	Yard.Doç.Dr. Ali FİLİZ	ADÜ	……..
Üye :	Doç.Dr. Salih YALÇINBAŞ	CBÜ	……..

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ……………………. Sayılı kararıyla ………. tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN

Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

19/07/2012

Maide ŞEN

ÖZET

POLAR ÇEKİRDEKLİ DOĞRUSAL VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİ

Maide ŞEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK
2012, 59 sayfa

Bu çalışmada,

$$\bar{v}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau)\bar{v}(\tau)d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t)),$$

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)), \;\; f_m(t) \in C[0,T],$$

$$K(t,\tau) = \left(K_{ij}(t,\tau)\right)_{n\times n}, \qquad K_{ij}(t,\tau) \in C(0 \le \tau \le t \le T),$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n$$

polar çekirdeğe sahip integral denklem sistemi ele alınmıştır. Başlangıç değer koşullu, fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemin çözümü tekil çekirdeğe sahip 3 boyutlu Volterra tipi integral denklemini sağlar. Polar çekirdekli lineer Volterra integral denklemlerinin varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Tekil integral denklemlerin çözümlerinde yaklaşık ardışıklar yöntemi kullanılmış, varlık ve tekliğiyle ilgili gerekli teoremler üzerinde durulmuştur.

Anahtar Sözcükler: İntegral denklem sistemi, polar çekirdek, Weierstrass teoremi.

ABSTRACT

LINEAR SYSTEM OF THE VOLTERRA INTEGRAL EQUATION WITH A POLAR KERNEL

Maide ŞEN

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ali IŞIK
2012, 59 pages

In this study,

$$\bar{v}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau)\bar{v}(\tau)d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t)),$$

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)), \quad f_m(t) \in C[0,T],$$

$$K(t,\tau) = \left(K_{ij}(t,\tau)\right)_{n\times n}, \qquad K_{ij}(t,\tau) \in C(0 \leq \tau \leq t \leq T),$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n$$

are considered integral equation with a polar kernel. Initial value problems for hyperbolic equations with function coefficients provides integral equation with 3-D Volterra type. Existence and uniqueness theorems of the volterra integral equation a polar kernel are proved. Method of successive approximation used in solutions of singular integral equations, existence and uniqueness theorems are emphasied.

Key words : system of integral equations, a polar kernel, Weierstrass theoerms.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince tüm bilgi birikimi ve tecrübesiyle hiçbir fedakarlıktan kaçınmayarak bana destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK'a, daima yanımda olan sevgili eşim M. Taha CAN'a ve nihayetsiz destekleri için aileme teşekkürlerimi sunarım.

Maide ŞEN

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bir Volterra integral denkleminin $K(t,\tau)$ çekirdeği $t \in [a,T]$ için sınırlı, yani M bir sabit olmak üzere

$$|K(t,\tau)| \leq M, t \in [a,T];$$

$f(t)$'nin sabit terimi $[a,T]$ aralığında integre edilebilir ise her λ değeri için $[a,T]$ aralığında Volterra integral denkleminin $u(t)$ gibi integre edilebilir bir tek çözümü vardır.

Bir mekanik problemin incelendiği 1823 yılında Abel'in ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Karşılaştığı fiziksel problemin çözümünün

$$f(t) = \int_a^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}$$

şeklinde lineer Volterra integral denklemine indirgenip bu denklemin çözümü yine Abel tarafından 1826 yılında verilmiştir.

İntegral sınırlarının birinin değişken olmasıyla tanımlanan Volterra integral denklemlerinin çözümünde yaklaşık ardışıklar yöntemi elverişli bir yöntemdir. Bu yöntemle problemin çözümünde varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. R'de alınan ve homojen olmayan bir dalga denkleminin d'Alambert integral formülüne indirgendiği, R^2 ve R^3'de alınan homojen olmayan dalga denklemlerinin de Poisson ve Kirchoff integral denklemlerine indirgendiği ve bu integral denklemlerinin de yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülebilineceği O. Özkaya tarafından 2010 yılında gösterilmiştir.

2011'de G. Metin'in Yüksek lisans tezinde başlangıç değer koşullu fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemin çözümü tekil çekirdeğe sahip 3 boyutlu Volterra tipi integral denklemini sağladığı gösterilmiştir. Bu çözümde travel time function

$\tau(x, x^0)$ ve Sobolev fonksiyonu $\sigma(x, x^0)$ önemli rol oynar. Hiperbolik denklemi $[u(x, t)] = u(x, t - \tau)$ dönüşümüyle taşıyıcı denkleme indirgenmiştir. Travel time fonksiyonu eikonal denkleminin bir çözümü, Sobolev fonksiyonu da taşıyıcı denkleminin bir çözümüdür. Sobolev fonksiyonunu bulmak için taşıyıcı denklemi yapılandırılmıştır. Bu 3 boyutlu Volterra integral denklemi yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülebilir.

Bu çalışmada,

$$\bar{v}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t, \tau) \bar{v}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t)),$$

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)), \;\; f_m(t) \in C[0, T],$$

$$K(t, \tau) = \big(K_{ij}(t, \tau)\big)_{n \times n}, \qquad K_{ij}(t, \tau) \in C(0 \leq \tau \leq t \leq T),$$

$$i, j = 1,2, \cdots, n$$

polar çekirdeğe sahip integral denklem sistemi ele alınacaktır. Bu sistemin çözümü yaklaşık ardışıklar yöntemiyle sağlanabilir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1 İntegral sınırlarından biri t gibi bir değişkene sahip olan integral denkleme Volterra integral denklemi, sınırlarından her ikisi birden sabit olabileceği gibi biri veya her ikisi birden sonsuz olan denklemlere de Fredholm integral denklemleri denir.

(2.1.1)'te verilen tanıma göre Fredholm integral denklemine ait çekirdek $\{(t,\tau): a \leq t \leq T,\ a \leq \tau \leq T\}$ karesel bölgesi üzerinde, Volterra integral denklemine ait çekirdek $\{(t,\tau): a \leq \tau \leq t \leq T\}$ üçgensel bölgede tanımlanmıştır (Romanov, 1974).

Ayrıca bilinmeyen fonksiyonun türevleri integralin içindeyse buna İntegro diferansiyel denklemi denir.

Tanım 2.1.2 $K(t,\tau)$ çekirdek fonksiyonu $\{(a \leq t \leq T,\ a \leq \tau \leq T)\}$ aralığında sürekli ise integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemdir. Eğer $K(t,\tau)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denkleme tekil (singüler) integral denklem adı verilir (Lovitt, 1950).

Tanım 2.1.3 (Düzgün Sürekli Fonksiyon) E, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan bir alt kümesi ve $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Burada f düzgün sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak her bir $\mathcal{E} > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|t-a| < \delta$ ve $t, a \in E$ $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.1.1 (Birinci Weierstrass Teoremi) $t \in [0,T]$ olmak üzere $\forall n = 0,1,2,\dots$ için $|v_n(t)| \leq a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nümerik serisi yakınsak olsun. O zaman, $[0,T]$'de $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.1.2 (İkinci Weierstrass Teoremi) $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisi $[0, T]$'de düzgün yakınsak ve $v_n(t)$'lerin her biri $[0, T]$'de sürekli fonksiyon olsunlar. O zaman, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisi $[0, T]$'de süreklidir ve

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{N} v_n(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} v(t)dt$$

olur. Burada $\forall[\alpha, \beta] \subset [0, T]$'dir.

Teorem 2.1.3 (Gronwall Eşitsizliği)

i. $\xi(t), [0, T]$'de negatif olmayan, toplanabilir bir fonksiyon olsun. Öyle ki, $\forall t \in [0, T]$ ve $c_1, c_2 \geq 0$ için integral eşitsizliğini sağlar.
   $\xi(t) \leq c_1 \int_0^t \xi(s)ds + c_2.$ (2.1.1)
   O zaman, $\forall t \in [0, T]$ için $\xi(t) \leq c_2(1 + c_1 t e^{c_1 t})$'dir. (2.1.2)
ii. Özel olarak, eğer $\forall t \in [0, T]$ için
   $\xi(t) \leq c_1 \int_0^t \xi(s)ds$ ise $\xi(t) = 0$'dır.

İspat: $\eta(t) := \int_0^t \xi(s)ds$ olsun. O zaman $[0, T]$'de

$$\eta \leq c_1\eta + c_2\text{'dir.}$$

Gronwall eşitsizliğinin türev formuna göre

$\eta(t) \leq e^{c_1 t}(\eta(0) + c_2) = c_2 t e^{c_1 t}$ bulunur. O zaman (2.1.2)'den

$\xi(t) \leq c_1\eta + c_2 \leq c_2(1 + c_1 t e^{c_1 t})$

elde edilir.

2.2. Yaklaşık Ardışıklar Metodu

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (2.2.1)$$

integral denklemini ele alalım.

$\lambda = 0$ için $u(t) = f(t) = u_0(t)$ olsun. Elde edilecek fonksiyonu $u_1(t)$ ile gösterirsek

$$u_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)u_0(\tau)d\tau \qquad (2.2.2)$$

olur. t'nin bir fonksiyonu olan integral ifadesi

$$\phi_1(t) = \int_a^t K(t,\tau)u_0(\tau)d\tau \qquad (2.2.3)$$

ile gösterilirse (2.2.2) ifadesi

$$u_1(t) = f(t) + \lambda\phi_1(t) \qquad (2.2.4)$$

olur. İlk yaklaşımı

$$u_0(t) = f(t) = \phi_0(t) \qquad (2.2.5)$$

eşitliği şeklinde kabul edersek üçüncü yaklaşım

$$u_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)u_1(\tau)d\tau \qquad (2.2.6)$$

olur.

(2.2.4)'ü (2.2.6)'da yerine yazalım.

$$u_2(t) = \phi_0(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)[\phi_0(\tau) + \lambda\phi_1(\tau)]d\tau,$$

$$u_2(t) = \phi_0(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)\phi_0(\tau)d\tau + \lambda^2 \int_a^t K(t,\tau)\phi_1(\tau)d\tau.$$

Burada $\phi_2(t) = \int_a^t K(t,\tau)\phi_1(\tau)d\tau$ kabul edersek ve (2.2.3)'ü kullanırsak

$$u_2(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t)$$

olur. Dördüncü yaklaşım ise

$$u_3(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t) + \lambda^3\phi_3(t)$$

olacaktır. Yaklaşımlara böylece devam edilirse $u_0(t)$, $u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)$ gibi bir fonksiyon dizisi elde edilecektir. Sonuçta

$$u_n(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t) + \cdots + \lambda^n\phi_n(t) \tag{2.2.7}$$

şeklinde bir seri olacaktır. Burada

$$\phi_0(t) = f(t), \qquad \phi_n(t) = \int_a^t K(t,\tau)\phi_{n-1}(\tau)d\tau, \;\; n = 1,2,3, ... \tag{2.2.8}$$

olur. (2.2.1) denklemine gidilirse

$$u_n(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t) + \cdots + \lambda^n\phi_n(t) + \cdots \tag{2.2.9}$$

olur. Buradan da

$u(t) = lim_{n\to\infty} u_n(t)$ elde edilir. λ'nın yeterince küçük seçilmesi (2.2.9)'u yakınsak kılar; bu da integral denklemin çözümü olur. $f(t)$ fonksiyonu $[a,T]$'de sürekli ise sınırlıdır. Yani $A \in \mathcal{R}$ olmak üzere $|f(t)| \leq A$'dır. Benzer şekilde $K(t,\tau)$ fonksiyonu $a \leq t,\tau \leq T$'de sınırlıdır. Yani $M \in \mathcal{R}$ olmak üzere $|K(t,\tau)| \leq M$'dir.

(2.2.8)'de elde ettiğimiz eşitlikler şöyle ifade edilir:

$$|\phi_0(t)| = |f(t)| < A,$$

$$|\phi_1(t)| = \left| \int_a^t K(t,\tau)\phi_0(\tau)d\tau \right| < MA(t-a),$$

$$|\phi_2(t)| < MMA(t-a)(t-a) = M^2A(t-a)^2,$$

$$\vdots$$

$$|\phi_n(t)| = \left| \int_a^t K(t,\tau)\phi_{n-1}(\tau)d\tau \right| < MM^{n-1}A(t-a)^{n-1}(t-a)$$

$$= M^nA(t-a)^n\ ,$$

$\Longrightarrow |\phi_n(t)| < M^nA(t-a)^n$

olur. (2.2.9) serisindeki $\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2, \cdots, \phi_n$ ifadelerinin her birinden daha büyük olan

$$A + |\lambda|MA(t-a) + |\lambda^2|M^2A(t-a)^2 + \cdots + |\lambda^n|M^nA(t-a)^n + \cdots$$

olur ki, bu (2.2.9)'un majorantıdır.

Ortak çarpan $|\lambda|MA(t-a) = q$ dersek ve A ortak parantezinde yazarsak

$A(1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots)$

geometrik serisini elde ederiz.

q geometrik serisinin yakınsak olması için $|q|<1$ olmalıdır. Buradan

$|q|=|\lambda|MA(t-a)<1 \;\; \Rightarrow \;\; |\lambda|<\frac{1}{M(t-a)}$'dır.

2.3. Neumann Serisi

$$u(t)=f(t)+t\int_a^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.3.1}$$

denkleminde ilk yaklaşımı $u_0(t)=f(t)$ yazalım.

$u_1(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau$ denkleminde $\tau=\tau_1$ dönüşümü yapalım.

$$u_1(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 \tag{2.3.2}$$

olur.

$$u_2(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)u_1(\tau)d\tau$$

denkleminde $u_1(\tau)$ yerine (2.3.2) denklemini yazarsak

$$u_2(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)\left[f(\tau)+\lambda\int_a^t K(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau$$

$$= f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau + \lambda^2 \int_a^t \int_a^t K(t,\tau)K(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau$$

olur. Burada

$$K_{(2)}(t,\tau_1) = \int_a^t K(t,\tau)K(\tau,\tau_1)d\tau$$

dersek; o zaman

$$u_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau + \lambda^2 \int_a^t K_{(2)}(t,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1$$

olur. Bir sonraki yaklaşımda;

$$u_3(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)\left[f(\tau) + \lambda \int_a^t K(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 \right.$$

$$\left. +\lambda^2 \int_a^t K_{(2)}(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1\right] d\tau$$

denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} u_3(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau \\ + \lambda^2 \int_a^t \int_a^t K(t,\tau)K(\tau,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau \\ + \lambda^3 \int_a^t \int_a^t K(t,\tau)K_{(2)}(\tau,\tau_1)\, f(\tau_1)d\tau_1 d\tau \end{aligned}$$

olur. Burada $K_{(2)}(t,\tau)$’yi yerine yazarsak ve

$$K_{(3)}(t,\tau_1) = \int_a^t K(t,\tau)K_{(2)}(\tau,\tau_1)d\tau$$

dersek

$$u_3(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau + \lambda^2 \int_a^t K_{(2)}(t,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1$$
$$+ \lambda^3 \int_a^t K_{(3)}(t,\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1$$

olur.

Yaklaşımlara bu şekilde devam edersek ve $\tau_1 = \tau$ dönüşümü yaparsak

$$u_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau + \lambda^2 \int_a^t K_{(2)}(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

$$+\lambda^3 \int_a^t K_{(3)}(t,\tau)f(\tau)d\tau + \cdots + \lambda^n \int_a^t K_{(n)}(t,\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (2.3.3)$$

$n \longrightarrow \infty$ iken $u_n(t) \longrightarrow u(t)$ olacağından $lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$'dir. Buradan

$$u(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^t \lambda^n K_{(n)}(t,\tau)\, f(\tau)d\tau \qquad (2.3.4)$$

olur. Burada Neumann Serisi ortaya çıkar.

2.3.1. Neumann Serisi'nin Yakınsaklığı

Neumann serisi olarak belirttiğimiz (2.3.4) serisinde $f(t)$ fonksiyonu $a \leq t \leq T$ aralığında tanımlanmış sınırlı ve sürekli olduğundan

$$|f(t)| \leq N$$

olacak şekilde bir N sayısı bulmak mümkündür.

$K(t,\tau)$ çekirdek fonksiyonu ise $a \le t \le T,\ a \le \tau \le T$ ile sınırlı kare bölgede sürekli ve sınırlı olarak tanımlandığından

$$|K(t,\tau)| \le M$$

olarak yazılabilecek bir M sınır değeri bulunabilir.

$$\lambda \int_a^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau$$

ifadesine, yukarıda belirlenen koşullarla ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\left| \lambda \int_a^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau \right| \le |\lambda| M N |t-a|$$

olur. İkinci mertebeden itere çekirdek için bu

$$\left| K_{(2)}(t,\tau) \right| < M^2 (t-a)$$

yazılabileceğinden, yaklaşım böylece devam ettirilirse her mertebeden itere çekirdek için genel olarak

$$\left| K_{(n)}(t,\tau) \right| < M^n (t-a)$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre

$$\left| \lambda^n \int_a^t K_{(n)}(t,\tau) f(\tau) d\tau \right| \le |\lambda|^n M^n N (t-a)^n$$

olur. Bu şekilde elde edilen ifadeler (2.3.3) serisinde göz önüne alınırsa elde ettiğimiz eşitsizlik

$$N\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda M(t-a)^n|\right] \qquad (2.3.5)$$

şeklinde yazılabilecektir. Bu ise (2.3.3) serisinin majorantı olan bir seridir. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^t K_{(n)}(t,\tau)f(\tau)d\tau \leq \ N\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda M(t-a)^n|\right]$$

demektir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki köşeli parantez içi, ortak çarpanı

$$q = \lambda M(t-a)$$

olan bir geometrik seridir. Bu geometrik seri ise

$$q = \lambda M(t-a) < 1$$

olması durumunda yakınsak olacağından

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

koşulu, (2.3.5)'i yakınsak kılar. Böylece yaklaşık ardışıklar metoduna göre (2.3.4) serisi de bu koşul ile yakınsak olur.

2.4. İntegral Denklem Sistemleri

$i = 1,2,\dots,n$ ve $k = 1,2,\cdots,n$ olmak üzere,

$K(t,\tau) = (K_{ik}(t,\tau))_{n*n}$, $K_{ik}(t,\tau) \in C(0 \leq \tau \leq t \leq T)$ ve $f_i(t) \in C[0,T]$ olduğunu kabul edelim. Bu kabule göre;

$$u_i(t) = f_i(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^t K_{ik}(t,\tau) u_k(\tau) d\tau$$

denklemi integral denklem sistemini belirtir.

$\int_a^t |K_{ik}(t,\tau)|^2 \, dt$ mevcut ise λ parametresi,

$|\lambda| < \left[max \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^t \int_a^t |K_{ik}(t,\tau)|^2 dt d\tau} \right]^{-1}$ olacak şekilde yeterince küçük seçilebiliyorsa sistemin çözümü yaklaşık ardışıklar metodu ile yakınsak olur.

İkinci tip Volterra integral denklemiyle oluşturduğumuz integral denklem sistemi şu şekildedir;

$$\bar{V}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t K(t,\tau)\bar{V}(\tau) d\tau. \tag{2.4.1}$$

Burada

$$\bar{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)) \qquad \text{ve} \qquad \bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

fonksiyonları vektörel fonksiyonlardır. Ayrıca

$$K(t,\tau) = (K_{ij}(t,\tau))_{n*n}$$

çekirdek fonksiyonu kare matris formundadır. Bu sisteme Lineer Volterra İntegral Denklem Sistemi denir ve şöyle yazılabilir;

$$\bar{V}_m(t) = f_m(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} K_{mj}(t,\tau) V_j(\tau) d\tau, \qquad m = 0,1,\dots,n.$$

Denklem sisteminde

$f_m(t) \in C[0,T]$ ve $K_{mj}(t,\tau) \in C(0 \leq \tau \leq t \leq T)$, $\quad m = 0,1,\cdots,n$'dir.

2.5. Büyük "$\boldsymbol{O}$" Notasyonu

$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ yazılabilir öyle ki; ε'nun bir ε_0 komşuluğu ve sabit bir $k < 0$ sayısı varsa o zaman

$|f(\varepsilon)| < k|g(\varepsilon)|$

olur. Dolayısıyla, eğer f/g sınırlıysa $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0$ yaklaştığında

$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$'dir.

2.6. Polar Koordinatlar

Teorem 2.6.1 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlı, sürekli ve toplanabilir bir fonksiyon olsun. O zaman, her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası için

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f dS \right) dr$$

olur. Özel olarak; her $r > 0$ için

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0,r)} f dx \right) = \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f dS \right)$$

olur.

2.7. Eikonal Denklem

$\tau(x, x^0)$ bir fonksiyon x^0 parametre olmak üzere

$$|\nabla\tau(x,x^0)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}\,, \quad n^2 = \frac{1}{c^2(x)}\,, \quad x,x^0 \in R^3, \tag{2.7.1}$$

$$\tau(x,x^0) = O(|x-x^0|), \qquad x \to x^0, \tag{2.7.2}$$

koşulları altında eikonal denklemini sağlar.

2.7.1 Eikonal Denklemin Çözümü

Lemma 2.7.1:

c_0 pozitif sabit, $c(x) = c_0$ olmak üzere $\tau(x,x^0) = |x-x^0|/c_0$ denklemi (2.7.1), (2.7.2) probleminin bir çözümüdür.

İspat:

$$\left|\nabla_x\left(\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\right| = \left|\nabla_x\left(\left[\frac{1}{c_0}\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]^{1/2}\right)\right| = \frac{1}{c_0}\left|\frac{x-x^0}{|x-x^0|}\right| = \frac{1}{c_0}.$$

Lemma 2.7.2 : c_0 pozitif sabit, q_0 sabit olsun. Fonksiyon,

$$\sigma(x,x^0) = \frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}\,q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right).$$

Problemin çözümü

$$2\nabla\tau\nabla\sigma + \sigma\left(\Delta\tau - \frac{q_0}{c_0^2}\right) = 0, \tag{2.7.3}$$

$$\sigma(x,x^0) = O\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right), \qquad x \to x^0. \tag{2.7.4}$$

İspat:

$$\sigma(x,x^0) = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{1}{2}\ q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}\right), \ \ \tau(x,x^0) = |x-x^0|/c_0$$

olsun. Bu fonksiyonlar (2.7.1) denklemini sağlar.

$|x-x^0| = r$ ise

$$\Delta\left(\frac{|x-x^0|}{c_0}\right) = \frac{2}{c_0|x-x^0|}.$$

Küresel koordinatları kullanarak,

$$\Delta\tau = \Delta\left(\frac{r}{c_0}\right) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}(r)\right) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{r^2}2r = \frac{2}{c_0 r}.$$

gösterilmiş olur ve

$$\nabla_x(|x-x^0|) = \nabla_x\left(\left[\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x-x^0}{|x-x^0|},$$

$$\nabla_x\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right) = \nabla_x\left(\left[\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{x-x^0}{|x-x^0|^3}$$

olur.

$$\sigma\Delta\tau = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{1}{2} q_0 \frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\frac{2}{c_0|x-x^0|},$$

$$\nabla\sigma = \nabla\left(\frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\right)$$

$$= \nabla\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right)exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)$$

$$+\frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0}\nabla(|x-x^0|),$$

$$\nabla\sigma = -\frac{x-x^0}{|x-x^0|^3}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)+\frac{x-x^0}{|x-x^0|}exp\left(\frac{1}{2}q_0\frac{|x-x^0|}{c_0}\right)\frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0}$$

veya

$$\nabla\sigma = -\frac{x-x^0}{|x-x^0|^2}\sigma+\frac{x-x^0}{|x-x^0|}\frac{1}{2}\frac{q_0}{c_0}\sigma.$$

$\nabla\sigma,\ \nabla\tau,\ \Delta\tau$ için bu bağıntılar (2.7.3)'te yerine konulursa

$$2\nabla\tau\nabla\sigma+\sigma\Delta\tau-\frac{q_0\sigma}{c_0^2} = -\frac{2}{c_0|x-x^0|}\sigma+\frac{q_0\sigma}{c_0}+\frac{2}{c_0|x-x^0|}\sigma-\frac{q_0\sigma}{c_0} = 0$$

elde edilir.

3.VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1. Volterra İntegral Denklemleri

II. cins lineer integral denklemin çözümü, bilinen metotlar kullanılarak farklı şekilde elde edilmiştir. İlk önce C. Neumann, J. Liouville (1837) ve Volterra'nın ortaya koydukları metottur.

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

integral denklemi ile verilen $u(t)$ fonksiyonunun, λ'nın bir integral serisi şeklinde ifade edilebileceğini göstermişlerdir. Bu seride λ'nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları, t'nin fonksiyonlarıdır. Bu seri ise λ'nın her değeri için yakınsaktır. Çözüm elde edilmesi için kullanılan yol ise yaklaşık ardışıklar metodudur.

Volterra, önemli ve kullanışlı olan bu metodu, bir teorem halinde şu şekilde ifade etmiştir. Eğer $f(t)$ ve $K(t,\tau)$ fonksiyonları $[a,T]$ aralığında sürekli ise integral denklemi bu aralıkta her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar metodu ile belirlenir.

Teorem 3.1.1 İkinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (3.1.1)$$

denkleminde f fonksiyonu $[a,T]$ aralığında, K fonksiyonu da $\{a \le \tau \le t \le T\}$ üçgensel bölgede sürekli olsunlar. Bu takdirde

$$\phi_0 = f(t), \quad \phi_n(t) = \int_a^t K(t,\tau)\,\phi_{n-1}(\tau)d\tau, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (3.1.2)$$

olmak üzere (3.1.1) denkleminin düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(t) \tag{3.1.3}$$

serisi ile verilen bir ve yalnız bir sürekli çözümü vardır (Davis, 1930).

İspat: (3.1.1) integral denkleminde λ = 0 için;

$u(t) = f(t)$

olup bunu $u_0(t)$ ile gösterelim. (3.1.1) denkleminde elde edilecek fonksiyonu $u_1(t)$ ile gösterirsek

$$u_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau) u_0(\tau) d\tau \tag{3.1.4}$$

olur. Buradaki integral t'nin bir fonksiyonu olacağından, bunu

$$\phi_1(t) = \int_a^t K(t,\tau) u_0(\tau) d\,\tau \tag{3.1.5}$$

ile gösterirsek (3.1.4)

$$u_1(t) = f(t) + \lambda \phi_1(t) \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılabilir. İlk yaklaşımı

$$u_0(t) = f(t) = \phi_0(t) \tag{3.1.7}$$

ile ifade edersek üçüncü yaklaşımı

$$u_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau) u_1(\tau) d\tau \tag{3.1.8}$$

olacaktır. (3.1.6)'da (3.1.7) gereğince $f(t)$ yerine $\phi_0(t)$ yazılıp (3.1.8)'de yerine konursa

$$u_1(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t)$$

olup,

$$u_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)[\phi_0(\tau) + \lambda\phi_1(\tau)] d\tau$$

$$= f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)\phi_0(\tau) d\tau + \lambda^2 \int_a^t K(t,\tau)\phi_1(\tau) d\,\tau$$

olur. Burada $f(t)$ yerine $\phi_0(t)$ yazılır. O zaman buna uyularak

$$\phi_2(t) = \int_a^t K(t,\tau)\phi_1(\tau) d\tau,$$

$$u_2(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t)$$

yazılabilecektir. Bunu genelleştirirsek

$$u_n(t) = \phi_0(t) + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t) + \cdots + \lambda^n\phi_n(t) \tag{3.1.9}$$

şeklinde bir seri oluşacaktır. Burada

$$\phi_0(t) = f(t), \qquad \phi_n(t) \int_a^t K(t,\tau)\, \phi_{n-1}(\tau) d\tau, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

olur. Buradan (3.1.1) denklemine gidilerek,

$$u(t) = \phi_0 + \lambda\phi_1(t) + \lambda^2\phi_2(t) + \cdots + \lambda^n\phi_n(t) + \cdots,$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(t) \tag{3.1.10}$$

serisi elde edilir. Buna göre,

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$$

olur. λ'nın mutlak değeri yeteri kadar küçük olursa bu seri düzgün yakınsak olur. Çünkü $f(t)$'nin tanım aralığındaki sınırı F, $K(t,\tau)$'nin tanım bölgesindeki sınırını da K_0 ile gösterecek olursak

$$|\phi_0(t)| = |f(t)| \leq F,$$

$$|\phi_1(t)| = \left|\int_a^t K(t,\tau)\,\phi_0(\tau)d\tau\right|$$

$$\leq \int_a^t |K(t,\tau)||\phi_0(\tau)d\tau|$$

$$\leq FK_0(t-a),$$

$$|\phi_2(x)| = \left|\int_a^t K(t,\tau)\,\phi_1(\tau)d\tau\right|$$

$$\leq \int_a^t |K(t,\tau)||\phi_1(\tau)d\tau|$$

$$\leq \int_a^t K_0 F\,K_0(\tau-a)d\tau = FK_0{}^2\frac{(t-a)^2}{2!},$$

$$|\phi_3(t)| = \left|\int_a^t K(t,\tau)\,\phi_2(\tau)d\tau\right| \;\; \leq \int_a^t |K(t,\tau)||\phi_2(\tau)d\tau|$$

$$\leq \int_a^t K_0 F\, {K_0}^2 \frac{(t-a)^2}{2!} d\tau = F{K_0}^3 \frac{(t-a)^3}{3!}.$$

$$|\phi_n(t)| \;\leq\; F{K_0}^n \frac{(t-a)^n}{n!},$$

$$|\lambda^n \phi_n(t)| \;\leq\; F \frac{(K_0|\lambda|(t-a))^n}{n!}$$

bulunur. Genel terimi $\frac{(K_0|\lambda|(t-a))^n}{n!}$ olan seri (bölüm kriteri) yakınsak olduğundan Weierstrass kriterinden $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(t)$ serisi $[a, T]$ aralığında ve λ değeri için düzgün ve mutlak yakınsaktır. Terimlerin her biri sürekli olan bu serinin düzgün yakınsadığı fonksiyonu *u* ile gösterirsek *u* süreklidir.

$u(t)$ fonksiyonu (3.1.1) ile verilen denklemin bir çözümüdür.

$$f(t) + \lambda \int_a^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau \;= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, \phi_n(t) - \lambda \int_a^t K(t,\tau)[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, \phi_n(t)]d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, \phi_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^t K(t,\tau)\phi_n(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, \phi_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}\, \phi_{n+1}(t) = \phi_0(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, \phi_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\, \phi_n(t) = f(t)$$

olur ki bu (3.1.10) serisi yardımıyla verilen $u(t)$ denklemini sağladığını gösterir. Ayrıca (3.1.1) denkleminin çözümü tektir.

" 3.2. Yaklaşık Ardışıklar Yöntemiyle İntegral Denklemlerin Çözümü

Başlangıç ve sınır değer koşullarına sahip hiperbolik denklemler Volterra tipi integral denklemlere indirgenebilir. Bu denklemleri yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözebiliriz. İkinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau, \qquad (3.2.1)$$

$$f(t) \in C[0,T], \ \ K(t,\tau) \in C(\, 0 \leq \tau \leq t \leq T) \qquad (3.2.2)$$

olsunlar. $f(t)$, $K(t,\tau)$ fonksiyonları $[0,T]$ aralığında sürekli ise, integral denklemlerin bu aralıkta her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemiyle belirlenir. Bu takdirde

$$u_0(t) = \ f(t), \ \ u_n(t) = \ \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau\,, \ \ n = 1,2,3,\ldots$$

olmak üzere (3.2.1) denkleminin düzgün (ve mutlak) yakınsak

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(t) \qquad (3.2.3)$$

serisi ile verilen bir tek sürekli çözümü vardır. Volterra, önemli ve kullanışlı olan bu metodu şu şekilde ifade etmiştir.

Teorem 3.2.1 (Varlık Teoremi) $f(t) \in C[0,T]$, $K(t,\tau) \in C(0 \le \tau \le t \le T)$ koşulları altında $u(t) \in C[0,T]$ fonksiyonu (3.2.1) no'lu denklemin çözümüdür (Romanov V.G,1974).

İspat: Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara gereksinim vardır.

Lemma 3.2.1: Kabul edelim ki, $K_0 = max|K(t,\tau)|$, $F_0 = max|f(t)|$,

$0 \le \tau \le t \le T$ olsun. O zaman

$$|u_n(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^n}{n!}$$

olur.

İspat: Tümevarım yöntemiyle,

$n = 0$ için $|u_0(t)| \le F_0$ olur.

$n = k$ için $|u_k(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^k}{k!}$ doğruluğunu kabul edip

$n = k + 1$ için $|u_{k+1}(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^{k+1}}{(k+1)!}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$|u_{k+1}(t)| = \left|\int_0^t K(t,\tau)u_k(\tau)d\tau\right|$$

$$\le \int_0^t |K(t,\tau)||u_k(\tau)|\, d\tau$$

$$\le K_0 \int_0^t |u_k(\tau)| d\tau$$

$$\leq K_0 \int_0^t \frac{F_0 (K_0 \tau)^k}{K!} d\tau$$

$$= \frac{F_0 {K_0}^{k+1}}{K!} \int_0^t \tau^k \, d\tau = \frac{F_0 {K_0}^{k+1} t^{k+1}}{K! \, (K+1)} = \frac{F_0 (K_0 t)^{k+1}}{(K+1)!}.$$

Lemma 3.2.2: (3.2.2) koşulları altında $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0, T]$ aralığında yakınsaktır.

İspat: 1. Weierstrass teoreminden

$$|u_k(t)| \leq \frac{F_0 (K_0 t)^k}{k!} \leq \frac{F_0 (K_0 T)^k}{k!}, \qquad \forall t \in [0, T]$$

yakınsaklığı görülür.

Lemma 3.2.3: $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0, T]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

İspat: 1.Weierstrass teoremi gereği $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0, T]$ aralığında yakınsaktır, $u_k(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında süreklidir. O zaman $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ toplam fonksiyonu da $[0, T]$ aralığında süreklidir. 2. Weierstrass teoremi gereği,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=0}^{N} u_k \, (t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{N} u_k \, (t) dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} u \, (t) dt, \qquad \forall [\alpha, \beta] \in [0, T].$$

Lemma 3.2.4: $u(t)$ fonksiyonu (3.2.1) denklemini bir çözümüdür.

İspat:

$$u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau\,, \qquad n = 1,2,3\cdots.$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau)\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\tau)d\tau,$$

$$u_0(t) \;=\; f(t)$$

eşitliğini denklemin her iki tarafına ekleyelim

$$u_0(t) + \sum_{n=1}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau)\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \;+\; f(t),$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n\,(t) = \int_0^t K(t,\tau)\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \;+\; f(t)\,.$$

$n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$u(t) \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \;+\; f(t).$$

İkinci Weierstrass teoremi gereği,

$$u(t) \;=\; \int_0^t K(t,\tau)\;\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau)d\tau \;+\; f(t),$$

$$u(t) \ = \int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau + f(t) \ \ olur.$$

Teorem 3.2.2 (Teklik Teoremi) (3.2.1) denkleminin çözümü tektir.

İspat: (3.2.1) denkleminin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u_1(t)$, $u_2(t)$ gibi

$$u_1(t) \ = \ f(t) + \int_0^t K(t,\tau)\, u_1(\tau)d\tau,$$

$$u_2(t) \ = \ f(t) + \int_0^t K(t,\tau)u_1(\tau)\, d\tau$$

birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_0^t K(t,\tau)\,[u_1(\tau) - u_2(\tau)]d\tau$$

olur.

$u_1(t) - u_2(t) = \ \varphi(t)$ olmak üzere,

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t,\tau)\varphi\,(\tau)d\tau$$

homojen integral denklemini verir. $u_1(t) \ = |\varphi(\tau)|$ olmak üzere

$$|\varphi(t)| \ \le \ K_0 \int_0^t |\varphi(\tau)| d\,\tau,$$

$\int_0^t |\varphi(\tau)| d\,\tau \ = \ u(t)$ ise

$$u_1(t) \ \le \ K_0 u(t),$$

$$u_1(t) - K_0 u(t) \le 0.$$

Her iki tarafı $e^{-K_o t}$ ile çarparsak

$e^{-K_o t}u_1(t) - K_0\, e^{-K_o t}u(t) \le 0,$

$$\frac{d}{dt}[e^{-K_o t}u(t)] \le 0.$$

$t = 0$'dan $t = t$'ye integralini alırsak

$$e^{-K_o t}u(t) - u(0) \le 0,$$

$$e^{-K_o t}u(t) \le 0.$$

$u(t) \le 0$ ve $u(t) \ge 0$ ise $u(t) \equiv 0$. $\forall t \in [0,T]$ için $|\varphi(t)| \equiv 0$ olur.

$\varphi(t) = u_1(t) - u_2(t) = 0$ olduğundan $u_1(t) = u_2(t)$ olur.

Sonuç: (3.2.3) ile belirtilen seri her λ değeri için düzgün yakınsak olduğundan ikinci tip Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı λ'dan bağımsızdır.

3.3. Cauchy Probleminin Volterra İntegral Denklemine İndirgenmesi

$x = (x_1, x_2, x_3)$, c pozitif bir sabit, $q(x) \in C^2(R^3)$, $g(x) \in C^2(R^3) \cap H^4(R^3)$,

$h(x) \in C^1(R^3) \cap H^3(R^3)$ olmak üzere homojen telegraf denklemi

$$u_{tt} = c^2(x)\Delta u + q(x)u_t, \quad x \in R^3 \quad t > 0 \qquad (3.3.1)$$

$$u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), \qquad (3.3.2)$$

olsun. Amacımız telgraf denklemi için bu Cauchy problemini çok katlı Volterra tipi integral denkleme indirgemektir. Bu integral denklemin çözümü için yaklaşık ardışıklar metodu kullanılacaktır.

Teorem 3.3.1 : (3.3.1) problemi (3.3.2) koşulları altında

$$\sigma_\varepsilon(x,x^0)=\frac{1}{|x^\varepsilon-x^0|}\sqrt{\frac{J(x^\varepsilon)}{c(x^\varepsilon)}\frac{c(x)}{J(x)}}\,exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x^0,x)}q(\xi)d\tau\right).$$

$$F(x,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\tau(\xi,x)=t}\left\{\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial g(\xi)}{\partial n}-g(\xi)\frac{\partial\sigma_s(\xi,x)}{\partial n}+\sigma_s(\xi,x)\frac{\partial\tau(\xi,x)}{\partial n}h(\xi)\right\}dS$$

olmak üzere

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(\xi,t-\tau(\xi,x))\frac{\Delta_\xi\sigma_s(\xi,x)}{\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial\xi}\right|_{\xi=f(\tau\alpha,x)}}\tau^2 sin\theta d\theta d\varphi d\tau+F(x,t)$$

integral denklemini sağlar.

İspat : $u(x,t)$, (3.3.1) ve (3.3.2)'nin çözümü olsun.

$$[u(x,t)]=u(x,t-\tau)=u_1(x,t)$$

olmak üzere $[u(x,t)]$ fonksiyonu

$$[u_{tt}]=c^2(x)[\Delta u]+q(x)[u_t],$$
(3.3.3)

$$grad_x u_1=[gradu]-[u_t]grad\tau,$$
(3.3.4)

eşitlikleri yardımıyla

$$\Delta u_1=divgradu_1=div[gradu]-div\{[u_t]grad\tau\},$$

$div[gradu] = [\Delta u] - [gradu_t]grad\tau$,

$$div\{[u_t]grad\tau\} = [gradu_t]grad\tau - [u_{tt}](grad\tau)^2 + [u_t]\Delta\tau.$$

(3.3.4)'ten

$$\Delta u_1 = [\Delta u] - 2[gradu_t]grad\tau - [u_t]\Delta\tau + [u_{tt}](grad\tau)^2,$$

$$\Delta u_1 = \frac{[u_{tt}]-q(x)[u_t]}{c^2(x)} - 2\left\{grad\,\frac{\partial u_1}{\partial t} + [u_{tt}]grad\tau\right\}grad\tau - [u_t]\Delta\tau + [u_{tt}]\frac{1}{c^2(x)}$$

veya

$$\Delta u_1 = \frac{-q(x)[u_t]}{c^2(x)} - 2grad\,\frac{\partial u_1}{\partial t}\,grad\tau - [u_t]\Delta\tau\ .$$

Son eşitliği $\sigma_s(x)$ Sobolev fonksiyonuyla çarparsak;

$$\sigma_s\Delta u_1 = -2\sigma_s grad\tau grad\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(\sigma_s\Delta\tau - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$
(3.3.5)

$\sigma_s(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilirse

$$-2\sigma_s grad\tau grad\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(\sigma_s\Delta\tau - \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t} = div\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}w\right).$$
(3.3.6)

$w(x,t)$ düzgün fonksiyon olmak üzere

$$w = 2\sigma_s grad\tau,$$
(3.3.7)

$divw = \sigma_s \Delta\tau + \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}.$

(3.3.8)

(3.3.7)'i (3.3.8) denkleminde yerine koyduğumuzda

$$div(2\sigma_s grad\tau) = \sigma_s \Delta\tau + \frac{\sigma_s q(x)}{c^2(x)}$$

veya

$$2\nabla\tau\nabla\sigma_s + \sigma_s\left(\Delta\tau - \frac{q(x)}{c^2(x)}\right) = 0 \qquad (3.3.9)$$

$|x - x^0|\sigma(x, x^0) = 1, \;\; x \to x^0$

(3.3.10)

elde edilir.

3.4. Polar Çekirdekli Lineer Volterra İntegral Denklemleri

T verilen herhangi bir pozitif sayı ve t, $[0, T]$ aralığında bir değişken olsun. Lineer Volterra integral denklemini

$$v(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t, \tau) v(\tau) d\tau \qquad (3.4.1)$$

şeklinde düşünelim.

$f \in C[0, T]$ ve $K(t, \tau)$ fonksiyonunu $0 \le \tau \le t \le T$ aralığında sınırlı kabul edelim. Öyle ki; $K(t, tz)$, $t \in [0, T]$ ve $z \in [0,1]$ için t ve z'ye göre süreklidir. Buna göre, (3.4.1) denkleminin $t \in [0, T]$ için sürekli ve tekil bir çözümü vardır. Bu çözümü Neumann serisi formunda,

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \tag{3.4.2}$$

şeklinde elde ederiz. Öyle ki;

$v_0(t) = f(t),$

$$v_n(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau) v_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n \geq 1 \tag{3.4.3}$$

olur. Burada $\tau = tz$ yazarsak;

$$v_n(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - t^2 z^2}} K(t,tz) v_{n-1}(tz) dz, \quad n \geq 1,$$

$$v_n(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} K(t,tz) v_{n-1}(tz) dz, \quad n \geq 1 \tag{3.4.4}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.1 (Varlık Teoremi) $f(t)$ ve $K(t,\tau)$ fonksiyonlarının yukarıda verilen şartları sağladığını kabul edelim. Öyleyse (3.4.1) denkleminin tek bir çözümü $v(t) \in [0,T]$ vardır ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemiyle belirlenir.

İspat: Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara gereksinim vardır.

Lemma 3.4.1: (3.4.1) teoremini sağlayan şartlar altında

$$K_0 = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |K(t,\tau)|, \qquad F_0 = \max_{t \in [0,T]} |f(t)|,$$

$$F_1 = max \left\{F_0, K_0 F_0 T \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad K_1 = T {K_0}^2 \frac{\pi}{2}$$

koşullarını kabul edelim. O zaman

$$\left.\begin{array}{ll}|v_{2m}(t)| \leq F_1 \frac{(K_1T)^m}{m!}, & m = 1,2,3,\ldots \\ |v_{2m+1}(t)| \leq F_1 \frac{(K_1T)^m}{m!}, & m = 1,2,3,\ldots\end{array}\right\} \tag{3.4.5}$$

İspat: Tümevarım yöntemiyle;

$n = 1$ için $\quad |v_1(t)| \leq \int_0^t \left|\frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\right| |K(t,\tau)||v_0(\tau)|d\tau$

$$\leq \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K_0 F_0 \, d\tau$$

$$\leq F_0 K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} \, d\tau.$$

$\tau = tz$ alırsak $\quad |v_1(t)| \leq F_0 K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-t^2z^2}} \, d\tau$

$$\leq F_0 K_0 \int_0^t d\tau \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

$$\leq F_0 K_0 T \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

$z = sint$ dönüşümü yaparsak $dz = costdt$ ve integral sınırları 0 ve $\frac{\pi}{2}$ olur. Buradan,

$$|v_1(t)| \leq F_0 K_0 T \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{costdt}{\sqrt{1-sin^2t}} = F_0 K_0 T \frac{\pi}{2} \leq F_1$$

olur.

$$n = 2 \quad için \quad |v_2(t)| \leq \int_0^t \underbrace{\left|\frac{t^2}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\right| |K(t,\tau)|}_{K_0 T \frac{\pi}{2} K_0} \underbrace{|v_1(\tau)|}_{F_1} d\tau,$$

$$|v_2(t)| \leq TK_0{}^2 \frac{\pi}{2} \int_0^t F_1 d\tau = F_1 K_1 t$$

elde edilir.

(3.4.3) eşitliğinin her iki tarafını $(s^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpıp 0'dan s'ye integral alırsak

$$\int_0^s \frac{|v_n(t)|}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \leq K_0 \int_0^s \int_0^t |v_{n-1}(\tau)| \, d\tau dt \qquad (3.4.6)$$

denklemini elde ederiz.

Burada değişken dönüşümü yaparsak

$$|v_n(t)| \leq K_0 \int_0^s \left(\int_\tau^s \frac{t}{\sqrt{(s^2 - t^2)(t^2 - \tau^2)}} dt \right) |v_{n-1}(\tau)| d\tau,$$
$$t \in [0, T], \quad n = 1,2,3, \ldots$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.4.2:

$$\int_\tau^s \frac{tdt}{\sqrt{(s^2 - t^2)(t^2 - \tau^2)}} = \frac{\pi}{2}, \quad \tau \leq s \qquad (3.4.7)$$

İspat:

$t = x$ dönüşümü yaparsak;

$$x = \frac{2t^2 - s^2 - \tau^2}{s^2 - t^2},$$

eşitliğin türevinden

$$2tdt = \frac{s^2 - \tau^2}{2} dx,$$

$$\sqrt{(s^2 - t^2)(t^2 - \tau^2)} = \frac{s^2 - \tau^2}{2} \sqrt{1 - x^2}$$

olduğunu görürüz. Buradan,

$$\int_{\tau}^{s} \frac{\left(\frac{s^2 - \tau^2}{2}\right) \frac{1}{2} dx}{\frac{s^2 - \tau^2}{2} \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

olur. (3.4.7) denkleminin sol tarafı

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

şeklinde yazılabilir.

$x = sin\theta$ dönüşümünü kullanarak son integralde

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - sin^2\theta}} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece *Lemma 3.4.2*'nin ispatı tamamlanır.

Şimdi *Lemma 3.4.1*'in ispatına devam edelim. İspatladığımız *Lemma 3.4.2'*yi (3.4.3) denkleminde kullanırsak;

$$\int_0^t \frac{|v_n(t)|}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \leq K_0 \frac{\pi}{2} \int_0^t |v_{n-1}(\tau)| d\tau, \qquad t \in [0, T], \quad n = 1,2,3, \dots \qquad (3.4.8)$$

olur.

(3.4.3) ve (3.4.8) kullanırsak;

$$|v_n(t)| \leq K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} |v_{n-1}(\tau)| d\tau$$

$$\leq TK_0 \left(K_0 \frac{\pi}{2}\right) \int_0^t |v_{n-2}(\tau)| d\tau$$

$$= K_1 \int_0^t |v_{n-2}(\tau)| d\tau \,, \qquad n = 2,3, \ldots$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$|v_n(t)| \leq K_1 \int_0^t |v_{n-2}(\tau)| d\tau, \qquad n = 2,3, \ldots \tag{3.4.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.4.9) eşitsizliği aşağıdaki iki bağıntı şeklinde yazılabilir.

$$|v_{2m}(t)| \leq K_1 \int_0^t |v_{2m-1}(\tau)| d\tau \leq F_1 \frac{(K_1 T)^m}{m!}, \qquad m = 1,2,3, \ldots$$

$$|v_{2m+1}(t)| \leq K_1 \int_0^t |v_{2m-1}(\tau)| d\tau \leq F_1 \frac{(K_1 T)^m}{m!}, \qquad m = 1,2,3, \ldots$$

Lemma 3.4.3: Teoremin koşulları altında $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisi $[0, T]$'de düzgün yakınsaktır.

İspat:

$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisini iki serinin toplamı olarak düşünürsek

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_{2m}(t) + v_{2m+1}(t)) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{2m}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} v_{2m+1}(t).$$

Lemma 3.4.1'den $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisinin yakınsak nümerik bir seri tarafından majorize edildiğini görürüz. Yani,

$$\sum_{m=0}^{\infty} v_{2m}(t) \leq \sum_{m=0}^{\infty} |v_{2m}(t)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} F_1 \frac{(K_1 T)^m}{m!}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty} v_{2m+1}(t) \leq \sum_{m=0}^{\infty} |v_{2m+1}(t)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} F_1 \frac{(K_1 T)^m}{m!}$$

olur. Birinci Weierstrass teoremi gereği $\sum_{m=0}^{\infty} F_1 \frac{(K_1 T)^m}{m!}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{m=0}^{\infty} v_{2m}(t)$ ve $\sum_{m=0}^{\infty} v_{2m+1}(t)$ serileri de yakınsak olur. Dolayısıyla $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisi de $[0, T]$ aralığında düzgün yakınsak olur.

Lemma 3.4.4 (3.4.1) teoreminin koşulları altında $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)$ serisini her bir $v_n(t)$ terimi $[0, T]$'de sürekli fonksiyondur.

İspat:

$K(t, tz)$ fonksiyonu t ve z'ye göre $t \in [0, T]$ ve $z \in [0,1]$ için süreklidir ve

$$\frac{K(t,tz)}{\sqrt{1-z^2}}$$

ifadesi $\forall t \in [0,T]$ için -1'den 1'e , z'ye göre integrallenebilir. (Lavrent'ev, 1997, sf. 99) teoremine ve (3.4.3) ve (3.4.4) bağıntılarına göre; serinin her bir terimi $[0,T]$'de süreklidir.

Lemma 3.4.3, *Lemma 3.4.4* ve İkinci Weierstrass teoremine göre

$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$ sürekli fonksiyondur.

Şimdi $v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$ fonksiyonunun (3.4.1) denkleminin bir çözümü olduğunu göstereceğiz.

Teoremin İspatı: (3.4.3)'daki eşitliği 1'den N'ye kadar toplayalım. O zaman;

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{n=1}^{N} v_{n-1}(\tau)d\tau, \qquad n \geq 1$$

olur. Eşitliğin her iki tarafına $v_0(t) = f(t)$ ekleyelim.

$$\sum_{n=0}^{N} v_n(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{n=0}^{N-1} v_n(\tau)d\tau, \qquad n \geq 1$$

eşitliğini elde ederiz. $N \to \infty$ dönüşümünü ve 2. Weierstrass teoremini kullanırsak

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n(t) = f(t) + \lim_{N\to\infty} \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{n=0}^{N-1} v_n(\tau)d\tau,$$

$$v(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau) \left[\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} v_n(\tau) \right] d\tau,$$

$$v(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau) v(\tau) d\tau$$

elde edilir. Buradan $v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$ eşitliğinin (3.4.1) denklemini sağladığını buluruz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2 (Teklik Teoremi) (3.4.1) teoreminin koşulları altında (3.4.1) denkleminin çözümü $C[0,T]$ sınıfında tektir.

İspat: v_1 ve v_2 iki farklı çözüm olsunlar.

$\bar{v}(t) = v_1(t) - v_2(t)$ diyelim.

$$\bar{v}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau)\, \bar{v}(\tau) d\tau$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan,

$$|\bar{v}(t)| \le K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} |\bar{v}(\tau)|\, d\tau \qquad (3.4.10)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eşitsizliğin her iki tarafını $(s^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpıp 0'dan s'ye integralini alırsak

$$\int_0^s \frac{|\bar{v}(t)|}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \le K_0 \int_0^s \frac{t}{\sqrt{s^2 - t^2}} \int_0^t \frac{|\bar{v}(\tau)|}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau dt$$

$$= K_0 \int_0^s |\bar{v}(\tau)| d\tau \int_\tau^s \frac{t}{\sqrt{(s^2 - t^2)(t^2 - \tau^2)}} dt$$

$$= K_0 \frac{\pi}{2} \int_0^s |\bar{v}(\tau)| d\tau$$

buluruz.

Sonuç olarak;

$$\int_0^s \frac{|\bar{v}(t)|}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \leq K_0 \frac{\pi}{2} \int_0^s |\bar{v}(\tau)| d\tau \qquad (3.4.11)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.4.10) ve (3.4.11) eşitsizliklerini kullanırsak

$$|\bar{v}(t)| \leq K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} |\bar{v}(\tau)|\, d\tau \ \leq T{K_0}^2 \frac{\pi}{2} \int_0^t |\bar{v}(\tau)| d\tau$$

veya

$$|\bar{v}(t)| \leq K_1 \int_0^t |\bar{v}(\tau)|\, d\tau \qquad (3.4.12)$$

olur.

(3.4.12) ve Gronwall eşitsizliğinden (Evans, 1998, sf.625)

$$|\bar{v}(t)| = 0$$

yani

$$v_1(t) = v_2(t)$$

bulunur. Dolayısıyla denklemin tek bir çözümü vardır.

4. POLAR ÇEKİRDEKLİ TEKİL LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİ

İkinci tip Volterra integralleriyle oluşturduğumuz integral denklem sistemi şu şekildedir:

$$\bar{v}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau)\bar{v}(\tau)d\tau. \qquad (4.1.1)$$

Burada;

$\bar{v}(t) = \big(v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)\big)$ ve $\bar{f}(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$ vektörel fonksiyonlardır.

$K(t,\tau) = \big(K_{ij}(t,\tau)\big)_{n\times n}$ çekirdek fonksiyonu $n \times n$ bir kare matristir.

Bu koşullar ile

$$\int_0^t \bar{v}(t) = \left(\int_0^t v_1(t) + \int_0^t v_2(t) + \cdots + \int_0^t v_n(t)\right)$$

olmak üzere; (4.1.1) sistemi şu şekilde yazılabilir:

$$v_m(t) = f_m(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} K_{mj}(t,\tau)v_j(\tau)d\tau, \qquad m = 1,2,3,\cdots.$$

Bu sisteme Polar Çekirdekli Lineer Volterra Denklem Sistemi denir.

Kabul edelim ki;

$$f_m(t) \in C[0,T], \quad K_{mj}(t,\tau) \in C(0 \le \tau \le t \le T), \qquad m,j = 1,2,3,\ldots$$

olsun. Öyle ki, $K(t,tz)$ fonksiyonu $t \in [0,T]$ için t ve z'ye göre sürekli olsun. Buna göre (4.1.1) sisteminin $t \in [0,T]$ için sürekli bir çözüm belirttiğini göstereceğiz.

Bunun için çözümü Neumann serisi formunda arayacağız:

$$\bar{v}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^{(k)}(t). \tag{4.1.2}$$

Burada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^{(k)}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} {v_1}^{(k)}(t),\ \sum_{k=0}^{\infty} {v_2}^{(k)}(t), \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} {v_n}^{(k)}(t) \right),$$

$$\bar{v}^{(0)}(t) = \bar{f}(t),\ \ \bar{v}^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau)\bar{v}^{(k-1)}(\tau)d\tau, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{4.1.3}$$

(4.1.3) bağıntısında $k = 1,2,\cdots$ için $K(t,\tau) = K(t,tz)$ dönüşümü yapılırsa şekildeki gibi yazılabilir:

$$\bar{v}^{(k)}(t) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} K(t,tz)\bar{v}^{(k-1)}(tz)dz. \tag{4.1.4}$$

Teorem 4.1.1 (Varlık Teoremi)

T verilen herhangi bir pozitif sayı olsun. $f_m(t)$ ve $K_{mj}(t,\tau)$, $m = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,n$, fonksiyonlarının integral denklem sistemleri için yukarıda verilen şartları sağladığını kabul edelim. Öyleyse (4.1.1) integral sisteminin tek bir çözümü vardır:

$$\bar{v}(t) \in C[0,T]$$

şeklindeki bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemiyle belirlenir.

İspat:

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 4.1.1: *Teorem 4.1.1*'in şartları altında

$$K_0 = \max_{1\le i\le n} \max_{1\le j\le n} \max_{0\le\tau\le t\le T} \left|K_{ij}(t,\tau)\right|, \qquad F_0 = \max_{t\in[0,T]} \sum_{j=1}^{n} \left|f_j(t)\right|,$$

$$M_1 = T(nF_0K_0)^2\frac{\pi}{2}, \qquad F_1 = max\{F_0, K_0F_0T\pi\}$$

koşullarını kabul edelim. O zaman,

$$\left|v_m{}^{(2l)}(t)\right| \le F_1\frac{(M_1t)^l}{l!}, \qquad l = 1,2,\dots$$

ve

$$\left|v_m{}^{(2l+1)}(t)\right| \le F_1\frac{(M_1t)^l}{l!}, \qquad l = 1,2,\dots, \quad t \in [0,T]$$

İspat: Tümevarım yöntemini kullanalım. (4.1.3) denkleminde

$l = 0$ için

$$\left|v_m{}^{(0)}(t)\right| = |f_m(t)| \le \max_{t\in[0,T]} \sum_{m=1}^{n} |f_m(t)| = F_0 \le F_1, \quad m = 1,2,\dots n.$$

bağıntısı sağlanır. (4.1.3) denklemi kullanılarak

$l = 1$ için

$$v_m^{(1)}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} K_{mj}(t,\tau) f_j(\tau) d\tau, \quad t \in [0,T]$$

bulunur. Son bağıntıdan

$$\left|v_m^{(1)}(t)\right| = K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} \left|f_j(\tau)\right| d\tau = K_0 F_0 T \frac{\pi}{2},$$

$m = 1,2, \dots, n; \quad t \in [0,T]$

elde edilir.

Şimdi $l = k$ için düşünelim. (4.1.3)'teki bağıntılar

$$v_m^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} K_{mj}(t,\tau) v_j^{(k-1)}(\tau) d\tau,$$

$$m = 1,2, \dots, n; \quad t \in [0,T] \tag{4.1.5}$$

şeklinde yazılabilir.

$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left|v^{(k)}(t)\right|, \quad k = 1,2, \dots, n$ dersek (4.1.5)'ten

$$\begin{aligned} \left|v_m^{(k)}(t)\right| &\leq F_0 K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} \left|v_j^{(k-1)}(\tau)\right| \, d\tau \\ &= F_0 K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} y^{(k-1)}(\tau) d\tau, \qquad m = 1,2, \dots, n; \;\; t \in [0,T] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son bağıntıları topladığımızda

$$y^{(k)}(t)=\sum_{m=1}^{n}\left|v_m{}^{(k)}(t)\right|\leq nF_0K_0\int_0^t\frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}y^{(k-1)}(\tau)d\tau, \qquad (4.1.6)$$

$$k=2,3,\dots,n; \qquad t\in[0,T].$$

Eşitsizliğin her iki tarafını $(s^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpıp 0'dan s'ye integralini alırsak ve daha önce elde ettiğimiz sonuçları kullanırsak

$$\int_0^s\frac{\left|y^{(k)}(t)\right|}{\sqrt{s^2-t^2}}dt\leq nF_0K_0\int_0^s\int_0^t\frac{t}{\sqrt{s^2-t^2}}\frac{\left|y^{(k-1)}(\tau)\right|}{\sqrt{t^2-\tau^2}}d\tau dt$$

$$=nF_0K_0\frac{\pi}{2}\int_0^s\left|y^{(k-1)}(\tau)\right|d\tau, \qquad t\in[0,T]$$

veya

$$\int_0^t\frac{\left|y^{(k)}(\tau)\right|}{\sqrt{t^2-\tau^2}}d\tau\leq nF_0K_0\frac{\pi}{2}\int_0^t\left|y^{(k-1)}(\tau)\right|d\tau, \qquad (4.1.7)$$

$$t\in[0,T]; \;\; k=1,2,\dots$$

eşitsizliklerini elde ederiz. (4.1.6) ve (4.1.7) eşitsizliklerini kullanırsak

$$y^{(k)}(t)\leq nF_0K_0\int_0^t\frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}y^{(k-1)}(\tau)d\tau$$

$$\leq TnF_0K_0\left(nF_0K_0\frac{\pi}{2}\right)\int_0^t y^{(k-2)}(\tau)d\tau, \qquad t\in[0,T]$$

bağıntısını buluruz.

Sonuç olarak; *Lemma 4.1.1* deki tanımladığımız M_1 koşulunu kullanırsak

$$y^{(k)}(t) \leq M_1 \int_0^t y^{(k-2)}(\tau)d\tau, \quad k = 2,3,4,\dots; \ t \in [0,T] \quad (4.1.8)$$

bağıntısına ulaşırız. Dolayısıyla (4.1.8) bağıntısı

$$\left|v_m{}^{(2l)}(t)\right| \leq y^{(2l)}(t) \leq M_1 \int_0^t y^{(2l-2)}(\tau)d\tau \leq F_1 \frac{(M_1 t)^l}{l!}, \qquad l = 1,2,3,\dots$$

$$\left|v_m{}^{(2l+1)}(t)\right| \leq y^{(2l+1)}(t) \leq M_1 \int_0^t y^{(2l-1)}(\tau)d\tau \leq F_1 \frac{(M_1 t)^l}{l!}, \qquad l = 1,2,3,\dots$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 4.1.2: *Teorem 4.1.1*'in koşulları altında $\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisi $m = 1,2,\dots$ için $[0,T]$'de düzgün yakınsaktır.

İspat: $\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisini iki serinin toplamı olarak düşünelim.

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(v_m{}^{(2l)}(t) + v_m{}^{(2l+1)}(t)\right) = \sum_{l=0}^{\infty} v_m{}^{(2l)}(t) + \sum_{l=0}^{\infty} v_m{}^{(2l+1)}(t).$$

Lemma 4.1.1'den $t \in [0,T]$ için $\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisinin yakınsak sayısal bir seri tarafından majorize edildiğini görürüz. Yani, $\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisini oluşturan seriler yakınsak olduğundan,

$$\left|v_m{}^{(2l)}(t)\right| \leq F_1 \frac{(M_1 t)^l}{l!} \quad \text{ve} \quad \left|v_m{}^{(2l+1)}(t)\right| \leq F_1 \frac{(M_1 t)^l}{l!}, \ l = 1,2,\dots \ t \in [0,T]$$

bağıntılarına göre, Birinci Weierstrass Teoremi gereğince $\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisi $[0,T]$'de düzgün yakınsak olur.

Lemma 4.1.3: *Teorem 4.1.1*’in koşulları altında $v_m{}^{(k)}(t)$ fonksiyonu $[0, T]$’de sürekli bir fonksiyondur.

İspat: $K(t, tz)$ fonksiyonu t ve z’ye göre $t \in [0, T]$ ve $z \in [0,1]$ için süreklidir ve

$$\frac{K(t, tz)}{\sqrt{1 - z^2}}$$

ifadesi $\forall t \in [0, T]$ için -1’den 1’e, z’ye göre integrallenebilir. (Lavrent’ev, 1997, sf. 99) teoremine ve (4.1.3) ve (4.1.4) bağıntılarına göre; serinin her bir terimi $[0, T]$’de süreklidir.

Lemma 4.1.4: $m = 1,2, . . , n$ olmak üzere $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^{(k)}(t)$ serisi $\bar{v}(t)$ sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat: *Lemma 4.1.2*’den Birinci Weierstrass Teoremi gereği $\sum_{n=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisi $[0, T]$’de düzgün yakınsaktır. Burada, *Lemma 4.1.3*’ten $v_m{}^{(k)}(t)$ fonksiyonu yani $\sum_{k=0}^{\infty} v_m{}^{(k)}(t)$ serisinin her bir terimi $[0, T]$’de sürekli bir fonksiyondur. İkinci Weierstrass Teoremini gereğince, $N \to \infty$ dönüşümünü yapıp limit aldığımızda $lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \bar{v}^{(k)}(t) = \bar{v}(t)$ olduğunu görürüz. Böylece $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^{(k)}(t)$ serisi $\bar{v}(t)$ sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Lemma 4.1.5: Teorem 4.1.1’in koşulları altında, $\bar{v}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}^{(k)}(t)$ fonksiyonu, (4.1.1) integral denkleminin bir çözümüdür.

İspat: (4.1.3) denklemini düşünelim. Denklemdeki eşitliğin her iki tarafının $k = 1$'den N'ye toplamını alalım.

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{v}^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{k=1}^{N} \bar{v}^{(k-1)}(\tau) d\tau, \quad k \geq 1; \quad t \in [0,T].$$

Burada eşitliğin her iki tarafına $\bar{v}^{(0)}(t) = \bar{f}(t)$ eklersek, $t \in [0,T]$ için

$$\bar{v}^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^{N} \bar{v}^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{k=1}^{N} \bar{v}^{(k-1)}(\tau) d\tau + \bar{f}(t)$$

veya

$$\sum_{k=0}^{N} \bar{v}^{(k)}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{v}^{(k)}(\tau) d\tau, \quad k \geq 1$$

olur. $N \to \infty$ dönüşümü yapıp, İkinci Weierstrass Teoremi gereği her iki tarafın limitini alırsak,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \bar{v}^{(k)}(t) = \bar{f}(t) + \lim_{N\to\infty} \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{v}^{(k)}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = f(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \left[\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{v}^{(k)}(\tau) \right] d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} K(t,\tau) \bar{v}(\tau) d\tau$$

elde edilir. Böylece $\bar{v}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{v}_m{}^{(k)}(t)$ eşitliği (4.1.1) denklemini sağlar ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2 (Teklik Teoremi)

Teorem 4.1.1'in koşulları altında, (4.1.1) denkleminin $C[0,T]$ sınıfında bir ve yalnız bir çözümü vardır.

İspat:

$\bar{v}_1(t)$ ve $\bar{v}_2(t)$, (4.1.1) denkleminin iki farklı çözümü olsunlar.

$\tilde{v}(t) = \bar{v}_1(t) - \bar{v}_2(t)$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\tilde{v}(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} K(t,\tau)\tilde{v}(\tau)d\tau$$

veya

$$\tilde{v}_m(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} K_{mj}(t,\tau)\tilde{v}_j(\tau)d\tau, \quad m = 1,2,\dots,n; \;\; t \in [0,T]$$

olur. Buradan

$$|\tilde{v}_m(t)| \le \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} |K_{mj}(t,\tau)| |\tilde{v}_j(\tau)| \, d\tau, \qquad t \in [0,T] \qquad (4.1.9)$$

$$\le K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{v}_j(\tau)| \, d\tau, \qquad m = 1,2,\dots,n; \;\; t \in [0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizliğin her iki tarafını $(s^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpıp, 0'dan s'ye integralini alırsak,

$$\int_0^s \frac{|\tilde{v}_m(t)|}{\sqrt{s^2-t^2}}dt \le K_0 \int_0^s \frac{t}{\sqrt{s^2-t^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^2-\tau^2}} \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau dt$$

$$= K_0 \int_0^s \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau \int_\tau^s \frac{t}{\sqrt{(s^2-t^2)(t^2-\tau^2)}} dt$$

$$= K_0 \frac{\pi}{2} \int_0^s \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau \ , \quad m = 1,2,\dots,n \quad ; \quad s \in [0,T]$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\int_0^s \frac{|\tilde{v}_m(t)|}{\sqrt{s^2-t^2}}dt \le K_0 \frac{\pi}{2} \int_0^s \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau, \quad m = 1,2,\dots,n; \quad s \in [0,T] \qquad (4.1.10)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(4.1.9) ve (4.1.10) bağıntılarını kullanırsak

$$|\tilde{v}_m(t)| \le K_0 \int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau \le \frac{T{K_0}^2\pi}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau$$

veya

$$|\tilde{v}_m(t)| \le T{K_0}^2 \frac{\pi}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \left|\tilde{v}_j(\tau)\right| d\tau, \quad m = 1,2,\dots,n; \quad s \in [0,T] \qquad (4.1.11)$$

elde edilir.

Son bağıntıdaki toplamı yaparsak

$$\tilde{y}(t) \le K_1 \int_0^t \tilde{y}(\tau) d\,\tau, \qquad t \in [0,T]. \qquad (4.1.12)$$

(4.1.11) bağıntısını ve Gronwall eşitsizliğini (Evans, 1998, pp. 625) kullanırsak

$$\tilde{y}(t) \equiv 0, \qquad t \in [0, T]$$

denkliğini elde ederiz.

Bu da

$$|\tilde{v}_m(t)| = 0, \qquad m = 1,2,3, \dots, n; \quad t \in [0, T]$$

veya

$$\bar{v}_1(t) = \bar{v}_2(t); \quad t \in [0, T]$$

eşitliğini verir.

Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ:

Tezin başlıca sonuçları şunlardır:

1) Değişken katsayılı hiperbolik denklem tekil Volterra integral denkleme dönüşmüştür.
2) Polar çekirdekli integral denklemler yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülmüştür.
3) Bu integral denklemlerin varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

Davis, H. T. 1930. The Theory of the Volterra Integral Equation of Second Kind. Indiana University Studies, Vol. 17, America.

Evans, L.C. 1998. Partial Differential Equations. Providence, **RI: American Mathematical Society**.

Ikowa, M. 1997. Partial Differential Equations and Wave Phenomena. Providence, **RI: American Mathematical Society**.

Işık, A. 2004. Application of the Volterra Type Integral Equations for Problem of Applied Mathematics. Dokuz Eylül University, Ph.D. Thesis, İzmir.

Kanwal, R.P. 1971. Linear Integral Equations Theory and Technique. Academic Press, New York.

Lavrent'ev M.M., Savel'ev L. Ya. 1995. Linear Operators and Ill Posed Problems. N.Y. Nauka Publishers, New York.

Lovitt, W.V. 1950. Linear Integral Equations. Dover Publications Inc., New York

Metin, G. 2011. Sobolev'in Bulduğu Fonksiyon Hızlı Dalga Denkleminin Geliştirilmişi ve Genelleştirilmesi. Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aydın.

Mizohata, S. 1973. The Theory of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, USA.

Özkaya, O. 2010. Volterra İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Ardışıklar Yöntemiyle Çözümlemeleri. Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aydın.

Rakesh, R. 2003. An Inverse Problem for a Layered Medium with a Point Source. Problems 19: 497-506, USA.

Romanov, V.G. 1974. Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations. Springer-Verlag, Berlin.

Romanov, V.G. 1987. Inverse Problem of Mathematical Physics. VNU Science Press, The Netherlands.

Ross, S. L. 1984. Differential Equations. John Wiley and Sons, New York.

Smirnov, V.I. 1963. A Course of Higher Mathematics. Permagon Press, Vol. IV, USA.

Sobolev, S.L. 1933. A Generalization of Kirchoff's Formula. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. 6: 256-262.

Volterra, V. 1930. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. Blackie and Son, Ltd., London and Glasgow.

Yakhno, V.G. 1998. Multidimensional Inverse Problems in Ray Formulations for Hyperbolic Equations**. Journal of Inverse and III Posed Problems,** VSP, 6(4): 373-386.

Yakhno, V.G. 2001. Inverse problems in Underwater Acoustics, Multidimensional Inverse Problems for Acoustic Equation in the Ray Statement. Springer - Verlag, pp.159-184, New York.

Yakhno, V.G. 2002. III Posed and Inverse problem, Multidimensional Inverse Problems for Hyperbolic equations with point sources. VSP, pp.443-468, The Netherlands.

Yakhno, V.G. and Işık, A. 2003. Volterra Integral Equation Method for Solving Some Hyperbolic Equation Problems, **Selcuk Journal of Appl. Math**. 4(2):103-112.

Zauderer, E. 1989. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. John Wiley Sons, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Maide ŞEN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Sultanhisar – 06.10.1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	: Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik (İngilizce) Bölümü.
Yüksek Lisans Öğrenimi	: Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı.
Bildiği Yabancı Diller	: İngilizce, Arapça

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
   -SCI
   -Diğer
b) Bildiriler
   -Uluslararası
   -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	: Özel Değerli Eğitim Kurumları, 3 Yıl, MEB, 1 Yıl

İLETİŞİM

E-posta Adresi	: maydeshen@gmail.com
Tarih	: 19.07.2012