T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2011-0003

ATOMİK VE EŞATOMİK MODÜLLER ÜZERİNE

Nazlı AYDEMİR

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN-2011

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2011-0003

ATOMİK VE EŞATOMİK MODÜLLER ÜZERİNE

Nazlı AYDEMİR

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN-2011

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nazlı AYDEMİR tarafından hazırlanan ATOMİK VE EŞATOMİK MODÜLLER ÜZERİNE başlıklı tez, .../ /2011 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:	Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ	Adnan Menderes ÜNiversitesi	
Üye	:	Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Üniversitesi	
Üye	:			
Üye	:			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

..../ /2011

Nazlı AYDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ATOMİK VE EŞATOMİK MODÜLLER ÜZERİNE

Nazlı AYDEMİR

Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

Eşatomik Modüllerin yapısı ve bunların bazı modül sınıfları ile ilişkileri çalışıldı. Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Halkalar birimli, modüller birimsel sağ modülleri olarak alınmıştır. Birinci bölüm giriş bölümüdür, diğer bölümler de kullanılacak kavramları ve önbilgileri içermektedir. İkinci bölümde eşatomik modüllerin genel özellikleri verilmektedir. $Rad(M)$, M'de artık(small) olacak şekilde M bir modül olsun. O halde M, aşağıdakilerden birini sağlarsa eşatomiktir denir:

1) $M/Rad(M)$ yarıbasittir.
2) M zayıf tümleyen modüldür.
3) M doğrusal kompakttır.

Üçüncü bölümde Dedekind bölgeleri üzerinde eşatomik modüller ve özellikleri incelenmektedir. R bir Dedekind bölgesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler bir M_R modülü için denktir:

1) M eşatomiktir.
2) M'nin her N altmodülü eşatomiktir.
3) M'nin her L altmodülü için M/L inmiştir.

Dördüncü bölümde δ-eşatomik modüller ve özellikleri incelenmiştir. $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ δ-eşatomiktir ancak ve ancak her M_i $(i = 1, 2, ..., n)$ δ-eşatomiktir. Beşinci bölümde ise sonlu eşatomik (f-eşatomik) modüllerin özellikleri ve diğer modüller ile olan bağlantıları verilmiştir. Altıncı bölümde atomik modüllerin özellikleri ve eşatomik modüllerle ilişkileri incelenmiştir.

2011, 53 sayfa

Anahtar Sözcükler
Eşatomik modüller, Atomik Modüller, Tümleyen modüller, δ-artık modül

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON CLASS OF ATOMIC and CO-ATOMIC MODULES

Nazlı AYDEMİR

Adnan Menderes University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

Fundemental properties of coatomic modules and its relations with some module classes has been worked. This work consists of five chapters. All rings have an identity and all modules are unitary right modules. The first chapter is a preparatory section contains notions that will be needed. In the second chapter general properties of coatomic modules are given. Let $Rad(M)$ is small module in M. Then M is a coatomic module if it satisfies one of the following condition:

1) $M/Rad(M)$ is semisimple.
2) M is a weakly supplemented.
3) M is linearly compakt.

In the third chapter, coatomic modules in Dedekind domains and their properties are studied. If R is a Dedekind domain, then the following statements are equivalent for a module M_R:

1) M is coatomic.
2) Every submodule N of M is coatomic.
3) For every submodule L of M, M/L is reduced.

In the fourth chapter, δ-coatomic modules and their properties are given. In addition, it is proved that $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ is δ-coatomic if only if each M_i $(i = 1, 2, ..., n)$ is δ-coatomic. In the fifth chapter, properties of finitely coatomic modules and their relations with some other modules are given. In the sixth chapter, properties of atomic modules and their relations with coatomic modules are given.

2011, 53 page

Key Words
Coatomic modules, Atomic modules, Supplemented modules, δ-small module

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim insanı sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Nazlı AYDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

R_R	:	R, sağ R-modül
$_RR$	:	R, sol R-modül
$_RR_R$	:	R, iki yanlı R-modül
M_R	:	M, sağ R-modül
$\leq$	:	Altmodül
$\nleq$	:	Altmodül değil
$\lneqq$	:	Öz altmodül
$\leq_{maks}$	:	Maksimal altmodül
$\ll$	:	Artık(small) altmodül
$\ll_{\delta}$	:	δ-artık (small) altmodül
$Rad(M)$	:	M'nin radikali
$Soc(M)$	:	M'nin sokulu (socle)
$J(R)$	:	R'nin jakobson radikali
$E(M)$	:	M modülünün injektif örtüsü
$P(M)$	:	M modülünün projektif örtüsü
$Kerf$	:	f dönüşümünün çekirdeği
Imf	:	f dönüşümünün görüntüsü
$\cong$	:	İzomorfizma
$\oplus$	:	Dik toplam
$Hom_R(M,N)$	:	M'den N'ye homomorfizma

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu çalışmada halkalar birimli ve modüller birimsel sağ modüller olarak alınacaktır. Bu bölümde diğer bölümlerde gerekli olan bazı tanım ve özellikler verilecektir.

Tanım 1.1 M bir modül olsun. M'nin bir B altmodülü için $M = A + B$ iken $M = B$ olursa A altmodülüne M'de *artık (small, essential)* denir.

Tanım 1.2 M bir modül ve A ile B, M'nin bir altmodülü olsun. $M = A \cap B$ iken $B = 0$ olursa A altmodülüne M'de *esas (large, superfluous)* denir.

Tanım 1.3 $M = M_R$ ve A, M'nin bir altmodülü olsun.
i) M'nin $Rad(M) = \sum\limits_{A \ll M} A = \bigcap\limits_{B \leq_{maks} M} B = \bigcap\limits_{N_R\ yaribasit} Ker\varphi \quad (\varphi \in Hom_R(M,N))$ altmodülüne M'nin *radikali* denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir.
ii) M'nin $Soc(M) = \bigcap\limits_{A esas} A = \sum\limits_{B basit} B = \sum\limits_{N_R yaribasit} Im\varphi \quad (\varphi \in Hom_R(N,M))$ altmodülüne M'nin *sokulu* denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4 $\wp$ modüllerin bir sınıfı olsun. M, $\wp$ ile üretilen esas altmodül olsun. $Rej_M \wp = \cap\{Kerh | h : M \to U \text{ homomorfizma, } U \in \wp\}$ altmodülüne M'nin *rejekti* denir.

Sonuç 1.5 *$m \in M_R$ olmak üzere mR'nin M'de artık olması için gerek ve yeter koşul $m \in Rad(M)$ olmasıdır.*

Teorem 1.6 *a) $\varphi \in Hom_R(M,N)$ ise $\varphi(Rad(M)) \leq Rad(N)$ ve $\varphi(Soc(M)) \leq Soc(N)$*
b) $Rad(M/Rad(M)) = 0$ ve M'nin her C altmodülü için $Rad(M/C) = 0$ ise $Rad(M)$, C'nin altmodülü olur.
c) $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$ ve M'nin her C altmodülü için $Soc(C) = C$ ise C, $Soc(M)$'nin altmodülüdür.

Sonuç 1.7 *a)* $\varphi : M \to N$ *epimorfizma ve* $Ker\varphi$*, M'de artık ise* $\varphi(Rad(M)) = Rad(N)$ *ve* $\varphi^{-1}(Rad(N)) = Rad(M)$*'dir.*

$\varphi : M \to N$ *monomorfizma ve* $Im\varphi$*, N'de esas ise* $\varphi(Soc(M)) = Soc(N)$ *ve* $Soc(M) = \varphi^{-1}(Soc(N))$*'dir.*

b) M'nin bir C altmodülü için $Rad(C)$*,* $Rad(M)$*'nin ve* $Soc(C)$*,* $Soc(M)$*'nin altmodülü olur.*

c) $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ *ise* $Rad(M) = \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i)$ *ve* $Soc(M) = \bigoplus_{i\in I} Soc(M_i)$*'dir.*

d) $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ *ise* $M/Rad(M) \cong \bigoplus_{i\in I} (M_i/Rad(M_i))$

Teorem 1.8 $M = M_R$ *olsun. O halde*

a) M yarıbasit ise $Rad(M) = 0$*'dır.*

b) $MRad(R_R)$*,* $Rad(M)$*'nin altmodülüdür.*

c) M sonlu üretilmiş ise $Rad(M)$*, M'de artık ve* $Rad(R_R)$*,* R_R*'de artıktır.*

Sonuç 1.9 *a) M artin ise* $M/Rad(M)$ *yarıbasittir.*

b) R_R *artin ise* $R/Rad(R_R)$ *yarıbasittir.*

Teorem 1.10 $Rad(R) = Rad(R_R) = Rad(R_R)$

Teorem 1.11 $R/Rad(R)$ *yarıbasit bir halka olsun. O halde her* M_R *modülü için* $Rad(M) = MRad(R)$*'dir.*

Not 1.12 $\wp$*, basit sağ R-modüllerin bir sınıfı olsun. Her bir M sağ R-modülü için M'nin Jakobson radikali* $\wp$*'nin rejektidir. Yani* $Rad(M) = Rej_M(\wp)$ *dir.*

Tanım 1.13 $i = 1,2,,$, olmak üzere A_i'ler modüller olsun. $\underline{A} : \ldots \overset{\alpha_{i-2}}{\to} A_{i-1} \overset{\alpha_{i-1}}{\to} A_i \overset{\alpha_i}{\to} A_{i+1} \overset{\alpha_{i+1}}{\to} \ldots$ dizisinin $A_{i-1} \overset{\alpha_{i-1}}{\to} A_i \overset{\alpha_i}{\to} A_{i+1}$ formundaki her altdizisi için $Im(\alpha_{i-1}) = Ker(\alpha_i)$ özelliğini sağlıyorsa $\underline{A}$'ya *tam dizi* denir.

Tanım 1.14 *A, M, W* birer modül, $f : A \to M$ bir monomorfizma ve $g : M \to W$ bir epimorfizma olsun. O zaman bir tam dizinin $0 \to A \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} W \to 0$ formuna *kısa tam dizi* denir.

Tanım 1.15 Bir Q_R modülü aşağıdaki denk koşullardan birini sağlarsa Q_R'ye *injektif R-modül* denir.

(1) Her $\psi : Q \to B$ monomorfizması parçalanabilir. Yani *Im*ψ*, B*'de dik toplanandır.

(2) Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde bir $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[dl, dotted, "\kappa"'] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

$\varphi = \kappa\alpha$ ve diyagram değişmelidir.

(3) Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması için Hom(α, 1_Q): Hom_R(B, Q)$\to$ Hom_R(A, Q) bir epimorfizmadır.

Tanım 1.16 Bir P_R modülü aşağıdaki denk koşullardan birini sağlarsa P_R'ye *projektif R-modül* denir.

(1) Her $\psi : B \to P$ epimorfizması parçalanabilir. Yani *Ker*ψ*, B*'de dik toplanandır.

(2) Her $\beta : B \to C$ epimorfizması ve her $\varphi : P \to C$ homomorfizması için $\varphi : \beta\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda : P \to B$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\varphi = \beta\lambda$ ve diyagram değişmelidir.

(3) Her $\beta : B \to C$ epimorfizması için Hom*(1_P, β): Hom_R(P, B) $\to$ Hom_R(P, C)* bir epimorfizmadır.

Tanım 1.17 M_R bir modül olsun.

(a) Q bir injektif modül ve φ esas monomorfizma olsun. O halde $\varphi : M \to Q$ monomorfizmasına *M*'nin *injektif örtüsü* denir.

(b) P projektif bir modül ve ψ artık epimorfizma olsun. O halde $\psi : P \to M$ epimorfizmasına M'nin *projektif örtüsü* denir.

Tanım 1.18 M bir modül ve N ile K, M'nin altmodülleri olsun. N, $M = N + K$ özelliğiyle minimal ise N'ye M'de K'nın *tümleyeni(supplement)* denir. N, M'nin K altmodülü için bir tümleyense N'ye M'de bir *tümleyen altmodül* denir.

Tanım 1.19 M'nin her U altmodülü için $M = U + V$ ve $U \cap V$, M'de artık olacak şekilde bir V altmodülü varsa M modülüne *zayıf tümleyen (weakly supplemented)* denir.

Tanım 1.20 U ve X, M'nin bir altmodülü olsun. $M = V + W$ ve $M = U + X$ ise $M = W + X$ olacak şekilde M'nin bir W altmodülü varsa V'ye M'de U'nun *H-tümleyeni* denir. M'nin A her altmodülü için $M = A' + X$ olacak şekilde bir A' direk toplananı varsa M'ye *H-tümleyen* denir.

Tanım 1.21 V, M'nin her altmodülü M'nin bir direk toplananı ve M'de U'nun bir tümleyeni ise V, U'nun *$\oplus$-tümleyenidir.* M'nin her altmodülü M'nin bir direk toplananı olan bir tümleyeni varsa M'ye *$\oplus$-tümleyen* denir. (Mohammed, S.H. and Müller, 1990)'dan *H-tümleyen $\oplus$-tümleyendir.*

Tanım 1.22 $M = N + K$ ve $M = N \cap K$, N'de artık ise N'ye M'de K'nın *tümleyeni* denir. M'nin her A altmodülü için $M = A + X$ M'de bir tümleyeni varsa M'ye *tümleyen modül* denir (Wisbauer R. 1991).

Lemma 1.23 *(Mohammed, S.H. and Müller, 1990) $M = A + B$ olsun. M/A'nın projektif örtüsü varsa B, A'nın bir tümleyenini içerir.*

Lemma 1.24 *V, U'nun M'deki tümleyeni olsun. O halde*

(1) X, V'nin özaltmodülü ise V/X, M/X'de artık değildir.

(2) X, V'nin altmodülü ve X, M'de artık ise X, V'de artıktır.

(3) $Rad(V) = V \cap Rad(M)$'dir.

(4) $Rad(M/U) = (Rad(M)+U)/U$'dur.

(5) $Rad(M) = (V + Rad(M)) \cap (V + Rad(M)) = (V \cap Rad(M)) + (U \cap Rad(M))$ (Zöschinger, H. 1974)

Tanım 1.25 Bir modülü projektif ve M'nin her homomorf görüntüsünün bir projektif örtüsü varsa M modülüne *yarımükemmel (semiperfect)* denir. Her R-modülün projektif örtüsü varsa R halkasına *sağ-mükemmeldir* denir.

Lemma 1.26 *Bir P projektif modülü yarımükemmeldir ancak ve ancak*

(1) $Rad(P)$, P'de artıktır.

(2) $P/Rad(P)$ yarıbasittir.

(3) $P/Rad(P)$'nin parçalanışı P'nin parçalanışına yükseltilebilir. (Mohammed, S.H. and Müller, 1990)

Önerme 1.27 *Her sıfırdan farklı projektif modül bir maksimal altmodül içerir. (Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990)*

Önerme 1.28 *$M = A + B$ olsun. M/A'nın projektif örtüsü varsa B, A'nın bir tümleyenini içerir. (Mohammed, S.H. and Müller, 1990)*

Önerme 1.29 *D_1: M'nin her A altmodülü için M_1, A'nın altmodülü ve $A \cap M_2$, M'de artık olacak şekilde M'nin $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır. ($A \cap M_2$, M'de artık ise $A \cap M_2$ de, M_2'de artıktır). Aşağıdaki gerektirmeler vardır:*

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r] \arrow[d] & Tumleyen \arrow[r] \arrow[d] & Zayif\ Tumleyen \\
H-Tumleyen \arrow[r] & \oplus-Tumleyen \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Tanım 1.30 Her elemanı $a \in R$ karesel (idempotent) yani $a^2 = a$ olan bir R halkasına *Boole halkası* denir.

Tanım 1.31 M'nin her N altmodülü için $Rad(N) = N$ iken $N = 0$ sağlanırsa *M'ye inmiş (reduced)* denir.

Tanım 1.32 $Z(M)$, esas ideal tarafından sıfırlanan elemanların kümesidir.

Tanım 1.33 $M = Z(M)$ ise M modülüne *singülerdir* denir.

Tanım 1.34 R bir halka, M bir sağ R-modül olsun. M'nin K altmodülü için M/K singüler ve $N + K = M$ iken $K = M$ oluyorsa N'ye M'de δ-*artıktır* denir. $N \ll_\delta M$ ile gösterilir.

Tanım 1.35 $\delta(M)$=$\sum\{L \leq M | L$, M'nin bir δ-artık altmodülü $\}$=$\bigcap\{N \subset M$: $M/N = 0$ $\}$ ile tanımlanır.

Tanım 1.36 Her $a \in R$ için $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa R halkasına *von Neumann regular halka* denir.

Tanım 1.37 *Modülarite Kanunu: A, B, $C \leq M$ ve $B \leq C$ olsun. $(A+B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) = (A \cap C) + B$'dir.*

Tanım 1.38 Bir $\eta : M \to Q$ monomorfizmasına M'nin bir *injektif hull'ı* denir $\Leftrightarrow$: Q injektiftir ve η bir esas monomorfizmadır.

Teorem 1.39 *(Baer Kriteri): Bir Q_R modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul, R_R'nin her U sağ ideali ve her $\rho : U \to Q$ homomorfizması için $\iota : U \to R$ içerim dönüşümü olmak üzere $\rho = \tau\iota$ olacak şekilde bir $\tau : R_R \to Q$ homomorfizması var olmasıdır.*

Teorem 1.40 *(Wisbauer, R. 1991) Q abel grubu bölünebilirdir ancak ve ancak Q bir* $\mathbb{Z}$*-modül olarak injektiftir.*

Tanım 1.41 M bir modül ve L, M'nin bir altmodülü olsun. P, R halkasının tek asal ideali olmak üzere $(M/L)P = Rad(M/L)$ ise R'ye *ayrık değerlendirme halkası(discrete valuation ring)*denir.

Tanım 1.42 M bir modül, $L \leq M$ olsun. P, R halkasının tek asal ideali olmak üzere $M/L = (M/L)P$ ise M/L'ye *bölünebilir bölüm modülü* denir.

2. Eşatomik Modüller

Bu bölümde eşatomik modüllerin genel özellikleri ve diğer modüllerle bağlantıları incelenmiştir (Güngöroğlu, G. 1998.).

Tanım 2.1 M bir modül olsun. M'nin her N altmodülü için $Rad(M/N) = M/N$ iken $M/N = 0$ oluyorsa M'ye *eşatomik modül* denir.

Yarıbasit modüller, sonlu üretilmiş modüller, hollow modüller ve yerel modüller eşatomik modüllerdir.

Lemma 2.2 *Bir M modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul M'nin eşatomik ve M'nin her maksimal altmodülünün M'nin bir dik toplananı olmasıdır (Kasch, F. 1982).*

İspat.

$\Rightarrow$): M yarıbasit ise her altmodülü dik toplanandır. Maksimal altmodülü de dik toplanan olur. $Rad(M/N) = M/N$ iken $M/N = (N \oplus N_1)/N = N/N = 0$'dır.
$\Leftarrow$): U, M'nin bir altmodülü olsun. M eşatomik olduğundan M'de $U \leq K$ olacak şekilde bir maksimal K altmodülü vardır. Kabulden $M = K \oplus K'$ olacak şekilde M'de K' vardır. $U \cap K' = 0$ *ve* $M/K \cong K'$ olduğundan K' basit olur. $S = \{\bigoplus_{i\in I} S_i : U \cap (\bigoplus_{i\in I} S_i) = 0,\ S_i$ *basit* $\}$ kümesini gözönüne alalım. Zorn Lemma'dan S'de bir $\bigoplus_{i\in I} S_i$ maksimal altmodülünü bulalım. $U \oplus (\bigoplus_{i\in I} S_i) = M$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde, yani $U \oplus (\bigoplus_{i\in I} S_i) \neq M$ ise $U \oplus (\bigoplus_{i\in I} S_i)$, L'nin altmodülü olacak şekilde M'nin bir maksimal L altmodülü vardır ve $M = L \oplus L'$'dür. Buradan L' basit olur. Böylece $U \cap (\bigoplus_{i\in I} S_i \oplus L') = 0$ olur. Bu da bir çelişkidir. Yani M yarıbasittir. □

Teorem 2.3 *M bir modül olsun. O halde aşağıdakiler denktir.*

(1) M eşatomiktir.

(2) M'nin her N özaltmodülü M'nin bir maksimal altmodülündedir.

İspat. *(1)⇒ (2):* M eşatomik ise $Rad(M/N) = M/N$ iken $M/N = 0$ olur. Yani $M = N$'dir. N, M'nin özaltmodülü olsun. O halde $N = M$ olamaz. Bu durumda N, M'nin bir büyük altmodülünde bulunur.

(2)⇐ (1): N, M'nin gerçek altmodülü olsun. B, M'nin maksimal altmodülü ve M/N'nin altmodülü olacak şekilde her N, B'nin altmodülü ise $Rad(M/N) = \bigcap_{B \text{ maksimal}} = M/N$'dir. B her özaltmodülü kapsadığı için en küçük altmodül ile diğerlerinin kesişimi ancak sıfır olur. Öyleyse $\bigcap_{B \text{ maksimal}} B = M/N$ olduğundan $M/N = 0$'dır. O halde M eşatomik olur. □

Teorem 2.4 *R bir ayrık değerlendirme halkası ve M bir modül olsun. M eşatomiktir ancak ve ancak M nin her bölüm modülü sıfırdır.*

İspat. M bir eşatomik modül ve $L \leq M$ olsun. M/L'nin bölünebilir bir modül olduğunu varsayalım. O halde $M/L = (M/L)P$ olur. P, R'nin tek asal idealidir. R ayrık değerlendirme halkası olduğundan tanımdan $(M/L)P = Rad(M/L)$ olur. Bu yüzden $M/L = Rad(M/L)$ olur. Kabulden $M/L = 0$ dır.

Şimdi M her bölünebilir faktör modülü sıfır olan bir modül ve L, M'nin bir altmodülü olsun. $Rad(M/L) = M/L$ kabul edelim. $Rad(M/L) = (M/L)P$ ve R ayrık değerlendirme halkası olduğundan M/L bir injektif modül ve böylece M/L bölünebilirdir *(Rotman, I.J. 1979).* Böylece $M/L = 0$'dır. Yani M eşatomik olur. □

Lemma 2.4 (1), (2) ayrık değerlendirme halkaları üzerindeki modüller için bilinmektedir.

Teorem 2.5 $0 \to L \to M \to K \to 0$ *modüllerin bir tam dizisi olsun.*

(1) M bir eşatomik modül ise o halde K da bir eşatomik modüldür.

(2) K ve L eşatomik modüller ise o halde M de bir eşatomik modüldür.

(3) R bir ayrık değerlendirme halkası ve M bir eşatomik modül ise o halde L bir eşatomik modüldür.

İspat. *(1)* M'nin bir L altmodülü için $K = M/L$ olduğunu kabul edelim. L'/L, M/L'nin bir altmodülü ve $Rad(M/L') = (M/L')$ olsun. M eşatomik olduğundan $M/L' = 0$ olur. Dolayısıyla K eşatomiktir.

(2) K ve L eşatomik modüller ve D, M'nin bir özaltmodülü ve $(D+L)/L = M/L$ olsun. O halde $D+L = M$ olur. N, L'nin $D\cap L \leq N$ olacak şekilde bir maksimal altmodülü olsun. O halde $M/(D+N) = (D+L)/N \cong L/D\cap N \cong L/N$ ve böylece $D+N$, M'de maksimaldir. $(D+L)/L \neq M/L$ ise $D+L \neq M$ olur. K eşatomik ve $K = M/L$ olduğundan M/L'nin $(D+L)/L \leq N'/L$ olacak şekilde bir N'/L maksimal altmodülü var olur. O halde N', M'nin D'yi içeren maksimal altmodülü olur. Lemma 2.2'den M bir eşatomik modül olur.

(3) M bir eşatomik modül ve L, M'nin bir altmodülü, $L/U = Rad(L/U)$ olmak üzere U, L'nin bir altmodülü olsun. $L \neq U$ kabul edelim. O halde bir basit S modülü ve $f : L/U \to E(S)$ homomorfizması vardır (Matlis, E. 1960). $\pi : L \to L/U$ doğal dönüşüm olsun. O halde $g = f\pi$ olacak şekilde $g : M \to E(S)$ dönüşümünü göz önüne alalım. $E(S)$ bir artin modüldür (Matlis, E. 1960) ve (1)'den dolayı Meşatomik ise $g(M)$ eşatomiktir.

$$\begin{tikzcd} & E(S) \\ M \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, dotted, "g"] & L/U \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

$g(M)$ sonlu üretilmiştir (Sharpe, D. W. and Vamos, P. 1972) ve L, M'nin altmodülü olduğundan $g(L)$ de sonlu üretilmiştir. Her sonlu üretilmiş sağ R-modülün her altmodülü sonlu üretilmiştir (Anderson, F. W. and Füller, K.R. 1990). Bundan dolayı L/U'nun bir maksimal altmodülü vardır. O halde $Rad(L/U) \neq L/U$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse $L = U$ ve $L/U = 0$'dır. Yani L bir eşatomik modül olur. $\square$

Not: Örnek 2.28'de herhangi bir halka için (3)'ün doğru olmadığı gösterilmiştir.

Lemma 2.6 *$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. O halde M eşatomiktir ancak ve ancak M_1 ve M_2 eşatomiktir.*

İspat. M eşatomik, N, M_1'in bir altmodülü ve $Rad(M_1/N) = M_1/N$ olsun. O halde $M/(N \oplus M_2) = (M_1 \oplus M_2)/(N \oplus M_2) \cong M_1/N$ bir radikal modüldür. Bundan dolayı $M/(N \oplus M_2) \cong M_1/N = Rad(M_1/N) \cong Rad(M/(N \oplus M_2)) = M/(N \oplus M_2)$ olur. M eşatomik olduğundan $M/(N \oplus M_2) = 0$ elde edilir. Öyleyse $M = N \oplus M_2$ olur. $M = M_1 \oplus M_2$ olduğundan $N = M_1$ ve böylece $M_1/N = 0$ olur. Dolayısıyla M_1 eşatomiktir. Benzer şekilde M_2 de eşatomiktir.
Şimdi M_1 ve M_2 eşatomik modüller olsun.

$0 \to M_1 \xrightarrow{i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi} M_2 \to 0$ tam dizisini göz önüne alalım. Teorem 2.5'ten M eşatomiktir. □

Sonuç 2.7 *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, M_i $(i = 1, 2, ...n)$ altmodüllerinin bir sonlu dik toplamı olsun. O halde M eşatomiktir ancak ve ancak her M_i $(i = 1, 2, ...n)$ eşatomiktir.*

İspat. *$\Rightarrow$):* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$ olmak üzere M eşatomik olsun. Tümevarım yönteminden, $n = 1$ için $M = M_1$, M eşatomik olduğundan M_1 eşatomik olur. $n = 2$ için $M = M_1 \oplus M_2$, Lemma 2.6'dan M_1 ve M_2 eşatomiktir. $n = k$ için iddia doğru olsun. Yani $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_k$ ve M_1, M_2,... M_k *eşatomik olsun.* $n = k+1$ *için* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_{k+1}$*'dir.* M *eşatomik ve* M_1, M_2,... M_k da eşatomik olduğundan M_{k+1} eşatomiktir. O halde her M_i eşatomiktir.
$\Leftarrow$): Her M_i eşatomik ise, bunların dik toplamı da eşatomiktir, yani M eşatomik olur. Sonuç 2.7'de bir eşatomik modülün herhangi bir dik toplamının da eşatomik olduğu belirtildi. Fakat eşatomik modüllerin herhangi dik toplamının eşatomik olması gerekmez (Örnek 3.7). □

Önerme 2.8 *M bir yarımükemmel modül olsun. O halde M eşatomiktir.*

İspat. M bir yarımükemmel modül olsun. O halde M projektif ve M'nin her homomorf görüntüsünün bir projektif örtüsü vardır. U, M'nin $Rad(M/U) = M/U$ olacak şekilde bir altmodülü olsun. O halde M/U'nun bir (P, f) projektif örtüsü vardır. Şimdi

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/L \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım. Burada π:$M \to M/U$ doğal dönüşümdür. Buradan $P \to M$ bir g dönüşümü var olur. O halde $M = g(P)+U$ olur. Çünkü $g(P)+U \leq M$ her zaman vardır. Şimdi $m \in M$ olsun. $\pi(m) = m+U$ ve f örten ve diyagram değişmeli olduğundan $f(x) = \pi(m)$ olacak şekilde $x \in P$ vardır. Diyagramdan $\pi g = f$'tir. Buradan $\pi g(x) = f(x) = \pi(m) = m+U$ olur. O halde $g(x)+U = m+U$ elde edilir. Dolayısıyla $g(x)-m \in U$ olur. Böylece her $u \in U$ için $g(x)-m = u \in U$ olur. Buradan $m = g(x)+(-u) \in g(P)+U$ olur. Bu yüzden $M \leq g(P)+U$ elde edilir. O halde $g(P)+U = M$ elde ederiz. P, M/U'nun bir projektif örtüsü olduğundan $g(P)$, (Mohammed, S.H. and Müller, B.J. 1990) U'nun bir N tümleyenini içerir. Bu yüzden $M = N+U$, $N \leq g(P)$ ve $U \cap N$, N'de artık olur ve buradan $Rad(M)+U = M$ olur. $Rad(M)$, M'de artık olduğundan $M = U$ olur. O halde $M/U = 0$'dır. Böylece M eşatomiktir. □

***Not**: Her R halkası eşatomik ve projektif R-modül olduğundan yarımükemmel olmayan eşatomik modüller vardır.*

Sonuç 2.9 *R bir sağ mükemmel halka olsun. O halde her R-modül eşatomiktir (Güngöroğlu, G. 1998).*

İspat. M bir R-modül ve (P, f), M'nin projektif bir örtüsü olsun. R sağ mükemmel halka olduğundan P'nin her homomorf görüntüsünün projektif örtüsü vardır ve böylece P yarımükemmeldir. Önerme 2.8'den P eşatomiktir. Lemma 2.5(1)'den M eşatomiktir. □

Lemma 2.10 *M bir modül ve U ve V, M'nin altmodülleri, V, U'nun bir tümleyeni olsun. O zaman V atomiktir ancak ve ancak M/U eşatomiktir.*

İspat. *$\Rightarrow$):* $M = U + V$ ve V eşatomik olduğundan Teorem 2.5(1)'den, M/U eşatomiktir.

$\Leftarrow$): N, V'nin özaltmodülü olsun. $V \cap U$, V'de artık ve $N + (V \cap U) \neq V$ olduğundan $N + (V \cap U)/(V \cap U) \neq V/(V \cap U)$ olur. $M/U = (U + V)/U \cong V/(V \cap U)$ ve $V/(V \cap U)$ eşatomik olduğundan V'nin $N + (V \cap U)$'yu içeren bir L maksimal altmodülü vardır. O halde V eşatomiktir. □

Lemma 2.11 *M bir modül, U ve V, M'nin altmodülleri $M = U + V$, $V \cap U$, M'de artık ve $Rad(V/(V \cap U)) = V/(V \cap U)$ olsun. O halde V, $Rad(M)$'nin altmodülüdür.*

İspat. $V \cap U$, M'de artık olduğundan $V \cap U$, $Rad(M)$'nin bir altmodülü olur. L, M'nin herhangi bir maksimal altmodülü olsun. O halde $V \cap U$ da L'nin altmodülüdür. V'nin L'de olmadığını kabul edip bir çelişki elde edelim. O zaman $M = V + L$ ve $M/L \cong V/V \cap L$*'dir. Bu nedenle* $V \cap L$, V'de maksimaldir. Kabulden $V \cap U = V \cap L$ olur. Çünkü $V \cap L$ L'nin altmodülü ve $V \cap U$, L'de maksimal olduğundan $V \cap V \cap U$, $V \cap L$'dedir. O halde $V \cap U \leq V \cap L \leq V$'dir. O zaman $V \cap L = V$ yada $V \cap U = V \cap L$ olur. $V \nleq L$ olduğundan $V \cap L \neq V$'dir. Bu bir çelişkidir yani $V \leq Rad(M)$'dir. □

Lemma 2.12 *M bir tümleyen modül olsun. Eğer M inmiş yada $Rad(M)$, M'de artık ise M eşatomiktir.*

İspat. M bir tümleyen modül olsun. M'nin inmiş olduğunu varsayalım. U'da M'nin bir özaltmodülü olsun. O halde M'nin V altmodülü için $M = U + V$ ve $V \cap U$, V'de artık olur. $Rad(M/U) = M/U$ olduğunu kabul edelim. $\pi : V \to V/V \cap U$ doğal dönüşüm olsun. O halde $\pi(Rad(V)) = V/(V \cap U)$ olur (Kasch, F. 1982). Bu nedenle $V = Rad(V) + (V \cap U)$'dur. $V \cap U$, V'de artık olduğundan $V = Rad(V)$ ve buradan $M = U + V$ olduğundan $V = 0$ ve böylece $M = U$ elde edilir.

Şimdi M tümleyen bir modül, $Rad(M)$'nin M'de artık olduğunu kabul edelim. U, M'nin bir altmodülü olacak şekilde $M/U = Rad(M/U)$ olacak şekilde M'nin altmodülü ve V, M'de U'nun bir tümleyeni olsun. O halde $V \cap U$, V'de artık olur. Lemma 2.11'den $V \leq Rad(M)$'dir. Böylece $M = U + V = U + Rad(M)$ olur, yani $M = U$ elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 2.13 *(Kasch, F. 1982) M bir modül ve $U \leq Rad(M)$ olacak şekilde $U \leq M$ olsun. U eşatomik ise U, M'de artık olur.*

İspat. K, $M = K + U$ olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun. $K \neq M$ kabul edelim ve bir çelişki elde edelim. O halde $U \neq (U \cap K)$ olur. U'nun $U \cap K \leq L$ olacak şekilde bir L maksimal altmodülü vardır. U/L basit ve $M/(K+L) = (K+U)/(K+L) \cong U/L$ olduğundan $K+L$, M'nin maksimal altmodülü olur. $U \leq K+L$ olduğundan $M = K+L$ ve buradan $U = L$ olur. Bu ise çelişkidir. U, M'de artıktır. □

Teorem 2.14 *M bir tümleyen modül, $Rad(M)$ eşatomik olsun. O halde M eşatomik modüldür.*

İspat. Lemma 2.13'ten, $Rad(M)$ eşatomik ise $Rad(M)$, M'de artık olur. U, $Rad(M/U) = M/U$ olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun ve $U \cap V$, V'de artık olsun. O halde $Rad(M/U) = (Rad(M)+U)/U = M/U$'dur (Lemma 1.24). Bu yüzden $M = Rad(M)+U$ ve $Rad(M)$, M'de artık olduğundan $M = U$ olur. Böylece M eşatomiktir. □

Tanım 2.15 I bir indis kümesi, N_i $(i \in I)$ler M'nin altmodülleri ve J, I'nın sonlu bir alt kümesi olmak üzere M'nin x_i $(i \in I)$ elemanları ve her $i \in J$ için $x_j - x_i \in N_i$ olacak şekilde $x_j \in M$ ve dolayısıyla her $i \in I$ için $x - x_i \in N_i$ olacak şekilde bir $x \in M$ varsa, M modülüne *doğrusal kompakt* denir.

Bilgi : M bir modül olsun. Her $i \in I$ için $m - m_i \in M_i$ olacak şekilde $m \in M$ varsa $\{m_i, M_i\}_{i \in I}$ ($m_i \in M$ ve $M_i \leq M$ $i \in I$) ailesine çözülebilir (solvable) denir. Sonlu $F \subseteq I$ için $\{m_i, M_i\}_{i \in I}$ çözülebilir ise $\{m_i, M_i\}_{i \in I}$'ya sonlu çözülebilir denir. Bir M modülünün sonlu çözülebilir ailesi çözülebilir ise M modülüne doğrusal kompakt denir.

Artin modüller doğrusal kompakt ve doğrusal kompakt modüller tümleyen modüllerdir (Xue, W. 1992).

Teorem 2.16 *Doğrusal kompakt modüller tümleyen modüldür.*

İspat. N, M'nin bir altmodülü ve $W = \{L|\ L \leq M$ ve $M = N + L\}$ (Xue, W. 1992)'den N de doğrusal kompakttır. Kısmi sıralı W için L_1, $L_2 \in W$ olmak üzere $L_1 \leq L$'dir ancak ve ancak $L_1 \geq L_2$'dir. $L_{i i \in I}$, W'nin iyi sıralı alt kümesi olsun. $m \in M$ alalım. $n_i \in N$ ve $l_i \in L$ olacak şekilde $m = n_i + l_i$ alalım. Eğer $F \subseteq I$ sonlu ise her $i \in F$ için $L_j \subseteq L_i$ olacak şekilde $j \in F$ vardır. Böylece her $i \in F$ için $n_j - n_i = l_i - l_j \in L_i$ olur. Bunun anlamı $\{n_i, N \cap L_i\}_{i \in I}$ doğrusal kompakt N modülünün sonlu çözülebilir olmasıdır. Her $i \in I$ için $n - n_i \in N \cap L_i$ olacak şekilde $n \in N$ olsun. O halde her $i \in I$ için $m - n = m - n_i + n_i - n = l_i + n_i - n \in L_i$ olur. Böylece $m - n \in \bigcap\limits_{i \in I} L_i$, m, M'de keyfi bir eleman olduğundan $M = N + (\bigcap\limits_{i \in I} L_i)$ *ve* $(\bigcap L_i)$, *W'de* $\{L_i\}_{i \in I}$*'nın üst sınırıdır.* *Zorn* Lemma'dan W'nin M'de L maksimal elemanı vardır ve L, N'nin M'de tümleyeni olur. □

Teorem 2.17 *Artin modüller doğrusal kompakttır.*

İspat. M artin modül olsun ve $\{m_i, M_i\}_{i \in I}$, M'nin sonlu çözülebilir ailesi olsun. $W = \{\bigcap\limits_{i \in I} M_i | F \subseteq I$ *sonlu alt küme*$\}$ olsun. M artin olduğundan W'nin minimal elemanı vardır, buna $K\ \bigcap\limits_{i \in F} M_i$ ($F \subseteq I$, F sonlu) diyelim. $\{m_i, M_i\}_{i \in I}$ çözülebilir olduğundan her $i \in F$ için $m - m_i \in M_i$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Her $j \in I$ için $m - m_j \in M_j$ olduğunu göstereceğiz. $j \in I$ olsun. $F \cup \{J\}$ de I'nın sonlu alt kümesi olduğundan $\{m_i, M_i\}_{i \in F \cup \{J\}}$ çözülebilirdir. Böylece her $i \in (F \cup \{J\})$ için $m' - m_i \in M_i$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. $i_0 \in F$ alalım. Her $i_0 \in F$ için $m - m' = (m - m_{i_0}) - (m' - m_{i_0}) \in M_i$ yazılabilir. Böylece $m - m' \bigcap\limits_{i \in F} M_i = (\bigcap\limits_{i \in F} M_i) \cap M_j$ olur. Burada eşitlik $\bigcap M_i$'nin W'deki minimalliğinden vardır. O halde $m - m' \in M_j$ ve böylece $m - m_j = (m - m') + (m' - m_j) \in M_j$ elde edilir ki bu da M'nin doğrusal kompakt olması demektir. □

Teorem 2.18 *M bir modül ve $Rad(M)$, M'de artık olsun. O zaman $M/Rad(M)$ yarıbasittir ve $Rad(M)$'nin her altmodülü eşatomiktir ancak ve ancak M zayıf tümleyen modüldür ve M'nin her altmodülü eşatomiktir.*

İspat. *⇒):* $M/Rad(M)$ yarıbasit, $Rad(M)$'nin her altmodülü eşatomik ve $U \leq M$ olsun. $L \leq U$ için $Rad(U/L) = U/L$ olsun. O halde $Rad(U/L_1) = U_1/L_1$ olur. Burada $U_1 = U + Rad(M)$ ve $L_1 = L + Rad(M)$'dir. $M/Rad(M)$ yarıbasit olduğundan M'nin L_1 ve K_1 altmodülleri için $M = L_1 + K_1$ ve $L_1 \cap K_1 = Rad(M)$ olur. Buradan $U_1/L_1 = Rad(U_1/L_1) \leq Rad(M/L_1) = Rad((K_1 + L_1)/L_1) \cong Rad(K_1/(L_1 \cap K_1)) = Rad(K_1/Rad(M)) \leq Rad(M/Rad(M))$'dir. $M/Rad(M)$ yarıbasit olduğundan $Rad(M/Rad(M)) = 0$ ve böylece $U_1 = L_1$ elde edilir. Bu nedenle $U + Rad(M) = L + Rad(M)$ olur. O halde $U = L + (U \cap Rad(M))$ ve $U/L = L + (U \cap Rad(M))/L \cong (U \cap Rad(M))/(L \cap Rad(M))$ ve $Rad(M)$'nin her altmodülü eşatomik olduğundan $U \cap Rad(M) = V \cap Rad(M)$ ve buradan $U = L$ olur. Böylece U'nun eşatomikliği elde edilir.

U, M'nin herhangi bir altmodülü olsun. $M/Rad(M)$ yarıbasit olduğundan $M = U + K$ ve $U \cap K \leq Rad(M)$ olacak şekilde M'nin bir K altmodülü vardır. $Rad(M)$, M'de artık ve bir artık modülün her altmodülü artık olduğu için $U \cap K$, M'de artık olur. O halde M zayıf tümleyendir.

⇐): Tanımlardan açıktır: $M/Rad(M)$, M'nin altmodülü olduğundan eşatomiktir. M zayıf tümleyen modül olduğundan her altmodülü dik toplanandır. O halde $M/Rad(M)$ yarıbasit olur. M'nin her altmodülü eşatomik olduğundan ve $Rad(M)$'nin her altmodülü M'nin altmodülü olduğundan $Rad(M)$'nin her altmodülü eşatomiktir. □

Teorem 2.19 *M bir modül, $Rad(M)$, M'de artık olsun. M aşağıdaki şartlardan birini sağlarsa eşatomiktir:*

(1) $M/Rad(M)$ yarıbasittir.

(2) M zayıf tümleyendir.

(3) M doğrusal kompakttır.

İspat. *(1)* $M/Rad(M)$'nin yarıbasit olduğunu kabul edelim. N, M'nin bir altmodülü ve $Rad(M/N) = M/N$ olsun. O zaman $(N + Rad(M))/Rad(M) \oplus$

$T/Rad(M) = M/Rad(M)$ olacak şekilde bir $T \leq M$ vardır. $Rad(M) \leq N$ kabul edilebilir. O halde $M = N+T$ ve $N \cap T \leq Rad(M)$ olur. Çünkü $M/Rad(M) = (N+Rad(M))/Rad(M) \oplus T/Rad(M)$ olduğundan $N+Rad(M) \cap T = Rad(M)$'dir. $Rad(M) \leq T$ ve Modülarite Kuralından $Rad(M) + (N \cap T) = Rad(M)$'dir. Böylece $N \cap T \leq Rad(M)$ olur. Şimdi $M/N = N+T/N \cong T/N \cap T$'dir ve $f : T/(N \cap T) \longrightarrow T/Rad(M)$ epimorfizması vardır. O halde $f(M/N) = f(Rad(M/N)) \leq Rad(T/Rad(M)) \leq Rad(M/(Rad(M))) = 0$ olur ve böylece $f = 0$'dır. Buradan $T/Rad(M) = 0$ yani $T = Rad(M)$ olur. Buradan da $M = N+T = N+Rad(M)$ elde edilir. $Rad(M)$, M'de artık olduğundan $M = N$ olur.

(2) $Rad(M/U) = M/U$ olacak şekilde $U \leq M$ var olsun. M zayıf tümleyen modül olduğundan $M = U+V$ ve $U \cap V$, M'de artıktır. $V/V \cap U \cong M/U = Rad(M/U)$ ve Lemma 2.11'den $V \leq Rad(M)$ olur. *Buradan* $M = U+V = U+Rad(M)$*'dir. O halde* $M = U$ *olur yani ispat biter.*

(3) Her doğrusal kompakt modül zayıf tümleyendir (Xue, W. 1992) □

Teorem 2.20 *$M/Rad(M)$ yarıbasit olacak şekilde M bir projektif modül olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

(1) $Rad(M)$'nin M'de bir H-tümleyeni vardır.

(2) $Rad(M)$'ni M'de bir $\bigoplus$-tümleyeni vardır.

(3) $Rad(M)$, M'de artıktır.

(4) M eşatomiktir.

İspat. *(1) $\Rightarrow$ (2) :* Tanımlardan ve (Mohammed, S.H. and Müller, B.J. 1990)'dan açıktır. Çünkü $Rad(M)$'nin M'de H-tümleyeni varsa $M = V \oplus W$ olacak şekilde $W \leq M$ vardır. $M = Rad(M) + V$ olması için gerek ve yeter koşul $M = W+V$ olmasıdır. Önerme 1.29'dan V, H-tümleyen ise V, $Rad(M)$'nin $\oplus$-tümleyenidir.

*(2) $\Rightarrow$ (3): N, M'*de $Rad(M)$'nin bir $\oplus$-tümleyeni olsun. O halde $M = Rad(M)+N = K \oplus N$ ve $K \leq M$ için $Rad(M) \cap N$, N'de artıktır. $Rad(K)$, $Rad(M)$'nin altmodülü

olduğundan $M = Rad(K) + N = K \oplus N$ ise $Rad(K) = K$'dir. Önerme 1.28'den ve K'nın projektifliğinden $K = 0$ ve $N = M$ olur. Dolayısıyla $Rad(M)$, M'de artık olur.

(3) ⇒ (4): $Rad(M)$, M'de artık, M projektif ve $M/Rad(M)$ yarıbasit olduğundan Teorem 2.19 (1)'den M eşatomiktir.

(4) ⇒ (3) ⇒ (1): M eşatomik ise $Rad(M)$, M'de artıktır. $M = N$ olduğundan $Rad(M)$, N'de artıktır. $M = Rad(M) \oplus W$, $Rad(M) \ll M$ olduğundan $M = W$, $M = U + X$'tir ancak ve ancak X, M'nin altmodülü olmak üzere $M = W + X = M + X$ olacak şekilde bir X vardır. O halde $Rad(M)$'nin M'de bir H-tümleyeni vardır. □

Tanım 2.21 M bir modül olsun. M'nin her N altmodülü için $Rad(M/N) = 0$ ise, M'ye *eşyarıbasit (cosemisimple)*denir. Yarıbasit modüller ve Boolean halkalar eşyarıbasittir (Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990).

Lemma 2.22 *M bir modül olsun. O halde M eşyarıbasittir ancak ve ancak M'nin her altmodülü maksimal altmodüllerin bir arakesitidir.(Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990)*

İspat. *⇒):* M eşyarıbasit modül olsun. M'nin bir L altmodülünü alalım. O halde $Rad(M/L) = 0$'dır. M/N'nin maksimal altmodülleri ile M'nin L'yi kapsayan maksimal altmodülleri birebir karşılık geldiği için L, kendisini kapsayan M'nin maksimal altmodüllerinin arakesiti olur.
⇐): M'nin bir L altmodülü alınsın. Kabulden L, maksimal altmodüllerin bir arakesitidir. O halde M/L, basit modüllerin bir dik çarpımı içine gömülebilir. Basit modüllerin dik çarpımının radikali sıfır olduğundan $Rad(M/L) = 0$'dır. □

Lemma 2.23 *M bir eşyarıbasit modül olsun. O halde M eşatomiktir.*

İspat. M bir yarıbasit modül ve L, $Rad(M/L) = M/L$ olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun. M, eşyarıbasit olduğundan $Rad(M/L) = 0$ olur. O halde $M = L$ ve M eşatomik olur. □

Eşatomik modüller eşyarıbasit değildir.

Örnek 2.24 *:R bir halka olsun. O halde $M = R_R$ modülü eşatomiktir. R, $\mathbb{Z}$ tamsayıların halkası, $L = 8\mathbb{Z}$ ve $M = 4\mathbb{Z}$ olsun. O halde M eşatomik $\mathbb{Z}$-modül ve $Rad(M/L) = (4\mathbb{Z})/(8\mathbb{Z}) \neq 0$ olduğundan M eşyarıbasit değildir.*

Teorem 2.25 *(Kasch, F. 1982) M bir eşatomik modül olsun. M'nin her maksimal altmodülü bir dik toplanan ise M eşyarıbasittir.*

İspat. *$S = \{N : N$, M'nin yarıbasit bir altmodülü$\}$* verilsin. Hipotezden S boş değildir. Zorn Lemma'dan S'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu K olsun. $K \neq M$ ise K'yi içeren bir L maksimal altmodülü vardır ve bir basit modül için $M = L \oplus L'$'dür. O halde $K \oplus L' \in S$ olur bu ise K'nın maksimal olması ile çelişir. Dolayısıyla M yarıbasit ve böylece eşyarıbasit olacaktır. Bu ise ispatı tamamlar. □

Lemma 2.26 *R bir Dedekind bölgesi ve M bir tümleyen modül olsun. O halde M eşatomiktir ancak ve ancak M'nin her injektif altmodülü eşatomiktir.*

İspat. *$\Rightarrow$):* M eşatomik ve L, M'nin bir injektif altmodülü olsun. M'nin K altmodülü için $M = L \oplus K$ olur. Teorem 2.5'ten L eşatomiktir.
$\Leftarrow$): $D(M)$, M'nin injektif altmodüllerinin toplamını göstersin. Buradan M'nin M' inmiş altmodülü için $M = D(M) \oplus M'$ olur ve $D(M)$, M'nin injektif altmodülü olduğundan ve kabulden $D(M)$ eşatomik olur. Lemma 2.10 dan M' eşatomiktir. Dolayısıyla Lemma 2.4'ten M eşatomik olur. □

Teorem 2.27 *R bir ayrık değerlendirme bölgesi olsun. O halde M eşatomiktir ancak ve ancak M'nin her N altmodülü için M/N inmiştir.*

İspat. *($\Leftarrow$):* M/N inmiş olduğundan M/N'nin her K/N altmodülü için $Rad(K/N) = K/N$ ise $K/N = 0$'dır. Bu da M/N'nin eşatomik olması demektir. M/N'nin her altmodülü sıfır ise M/N yarıbasittir. O halde M/N, M'nin altmodülü olduğundan M eşatomiktir.
($\Rightarrow$): N ve K M'nin altmodülleri, N, K'nın altmodülü ve $Rad(K/N) = K/N$ olsun. O halde P, R'nin tek asal ideali olmak üzere $K/N = (K/N)P$ bir injektif R-modüldür.

Bu yüzden $N \leq L$ olmak üzere $L \leq M$ altmodülü için $M/N = K/N \oplus L/N$ olur. O halde $M = K + L$ olmak üzere $M/L = (K+L)/L \cong K/(K \cap L) = K/N$ olduğundan $M/L \cong K/N$'dir. M eşatomik olduğundan $Rad(M/L) = M/L$'dir. Böylece $Rad(K/N) = K/N$ ve $K/N = 0$'dır. Bundan dolayı K/N, M/N'nin altmodülü olmak üzere M/N inmiştir. □

Örnek 2.28 *:p bir asal tamsayı olsun. M, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde bir modül iken $M = \mathbb{Z}(p^{\infty})$ (prüfer p-grup) olsun.*

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & M \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

halkasını düşünelim. $Rad(M) = M$ (Çünkü maksimal altmodülü olmadığından radikali kendisine eşit) ve M'nin herhangi bir L özaltmodülü için $M/L \cong M$ olduğu biliniyor.

$$I = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$K = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Buradan $Rad(R_R) = I$ ve $Rad(I/K) = I/K$ olur. Böylece I eşatomik değildir. Fakat R_R eşatomiktir. Dolayısıyla Lemma 2.4(3) herhangi bir halka için doğru değildir.

3. Dedekind Bölgesi Üzerinde Eşatomik Modüller

Bu bölümde Dedekind bölgesi üzerinde eşatomik modüllerin durumları çalışıldı. (Güngöroğlu, G. and Harmancı, A. 1999.)

Lemma 3.1 *R bir Dedekind bölgesi ve M bir modül olsun. O halde*

(1) N, M'de artık bir altmodül ise N eşatomiktir.

(2) $Rad(M)$, M'de artıktır ancak ve ancak $Rad(M)$ eşatomiktir.

(3) M, bir bölünebilir R-modül ise M eşatomik değildir.

İspat. *(1) N, M'*nin bir altmodülü ve $Rad(N/L) = N/L$ olacak şekilde N'nin bir L altmodülünü alalım. O zaman R Dedekind bölgesi olduğundan her P maksimal ideali için $(N/L)P = N/L$'dir. Yine R Dedekind bölgesi olduğundan N/L bölünebilir ve dolayısıyla injektif bir R-modüldür (Teo 1.40). Dolayısıyla N/L, M/L'nin bir dik toplananıdır. Yani, M'nin bir K altmodülü için $M/L = (N/L) \oplus (K/L)$'dir. O halde $M = N + K$ olur. Buradan N, M'de artık olduğundan $K = M$ ve dolayısıyla $N/L = 0$ olur. O halde N eşatomiktir.

(2) ⇒): $Rad(M)$, M'de artık olsun. (1)'den $Rad(M)$ eşatomiktir.
⇐): $Rad(M)$ eşatomik ise Lemma 2.2'den $Rad(M)$, M'de artıktır.

(3) M bölünebilir bir R-modül ise sıfırdan farklı her $a \in R$ için $Ma = M$'dir. N, M'nin bir altmodülü olsun. R Dedekind bölgesi olduğundan R'nin tüm P maksimal idealleri için $Rad(M/N) = (M/N)P$ olur. $0 \neq a \in R$ ve P, R'nin a'yı içeren bir maksimal ideali olsun. O halde $M/N = [(Ma+N)/N] = (M/N)a \leq (M/N)P = Rad(M/N)$ olur. Bu durumda $Rad(M/N) = M/N$ olur. Böylece M eşatomik değildir. □

Örnek 3.2 *: M bir p asal tamsayısı için $\mathbb{Z}(p^\infty)$ prüfer p-grubu göstersin. Tamsayılar üzerinde bir modül olarak $Rad(M) = M$'dir. Bundan dolayı Lemma 3.1(2)'deki $Rad(M)$'nin M'de artık olması gözardı edilemez. M'nin her özaltmodülü eşatomiktir fakat M değildir.*

M bir modül ve $P(M)$, $Rad(N) = N$ olacak şekilde M'nin N altmodüllerinin toplamı olsun. (Zöschinger, H. 1986) da R nother değişmeli bölge (noetherian commutative domain) ve $M/Rad(M)$ bir yarıbasit R-modül ise $M/P(M)$'nin eşatomik olduğu gösteriliyor. Bu anlamda aşağıdaki lemma ispatlanabilir:

Lemma 3.3 *R bir halka ve M bir modül olsun. O zaman*

(1) $P(M)$, $Rad(M)$'nin altmodülüdür.

(2) $Rad(M)$, M'de artık ve $M/Rad(M)$ yarıbasit olsun. O halde $M/P(M)$ eşatomiktir. (Wisbauer R. 1991)

İspat. *1)* M bir modül olsun. $P(M) \nleq Rad(M)$ olduğunu kabul edelim ve buradan bir çelişki elde edelim. Kabulden $M = P(M) + K$ olacak şekilde M'nin bir K altmodülü vardır. O halde $M/K = (P(M)+K)/K \cong P(M)/(P(M) \cap K)$ ve bu nedenle $P(M)/(P(M) \cap K)$ basittir. O halde $x \in P(M)/(P(M) \cap K)$ için $P(M)/(P(M) \cap K) = (x + (P(M) \cap K)R$ olur. $x \in N$ *ve* $Rad(N) = N$ olacak şekilde N, $P(M)$'nin bir altmodülü olsun. O halde N'nin bir maksimal altmodülü yoktur. Şimdi $P(M) = xR + (P(M) \cap K) = N + (P(M) \cap K)$ ise $P(M)/(P(M) \cap K) \cong M/K = (N + P(M) \cap K)/(P(M) \cap K) \cong (N)/(P(M) \cap K \cap N) = N/(K \cap N)$ olur. K maksimal ise M/K basit ve $N/(K \cap N)$ de basit olduğundan $K \cap N$, N'de maksimaldir. Oysa N maksimal altmodül içermez. Bu bir çelişkidir. O halde $P(M)$, $Rad(M)$'nin bir altmodülüdür.

2) $Rad(M)$, M'de artık ve $M/Rad(M)$ yarıbasit olsun. $M/P(M)/L/P(M) \cong M/L$ olduğundan $L/P(M)$, $Rad(M/L) = M/L$ olacak şekilde $M/P(M)$'nin özaltmodülü olsun. $(M/P(M))/(L/P(M)) \cong M/L$'dir. $\pi : M \to M/L$ doğal dönüşüm olmak üzere (Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990) dan $M/L = \pi(Rad(M)) = Rad(M/L)$ ve buradan $M = Rad(M) + L$ olur. Kabulden $M = L$ elde edilir. Yani M ve $M/P(M)$ eşatomiktir. Bu da ispatı tamamlar (Wisbauer R. 1991) $\square$

Önerme 3.4 *M bir modül ve N, $Rad(M)$'nin altmodülü olsun. O zaman M eşatomiktir ancak ve ancak M/N eşatomiktir ve N, M'de artıktır.*

İspat. $\Rightarrow$): M eşatomik ve N, $Rad(M)$'nin altmodülü olsun. M/N Lemma 2.5(1)'den eşatomiktir. L, M'nin özaltmodülü olsun. O halde $L \leq H$ olacak şekilde M'nin bir H maksimal altmodülü vardır. $N + L \leq H$ olacak şekilde $N \leq Rad(M) \leq H$'dir. Buradan N, M'de artık olur.
$\Leftarrow$): M/N eşatomik, N, M'de artık ve K, M'nin özaltmodülü olsun. O halde $N+K$, M'nin özaltmodülü olur. M/N'nin $(N+K)/N$ özaltmodülü, N'yi içeren U altmodülü için M/N'nin U/N maksimal altmodülünde kalır. O halde U, M'nin maksimal altmodülü ve $K \leq U$ olur. Böylece M eşatomiktir. □

Sonuç 3.5 *R bir halka J, R'nin jakobson radikali ve her sağ (R/J)-modül eşatomik olsun. O halde bir sağ R-modül eşatomiktir ancak ve ancak MJ, M'de artıktır.*

İspat. Önerme 3.4'ten elde edilir. □

Bir M modülünün sıfırdan farklı injektif altmodülü yoksa M'ye inmiş (reduced) modül denir. Bölüm 2'de aşağıdaki teoremdeki $(1) \Rightarrow (2)$ ve $(1) \Rightarrow (3)$ ayrık değerlendirme bölgeleri üzerindeki modüller için gösterilmişti. □

Teorem 3.6 *R bir Dedekind bölgesi olsun. Bir R-modül M için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) M eşatomiktir.

(2) M'nin her N altmodülü için N eşatomiktir.

(3) M'nin her L altmodülü için M/L inmiştir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): N/L maksimal altmodülleri kapsamayacak şekilde N, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü ve L, N'nin bir altmodülü olsun. O halde R'nin her P maksimal ideali için $N/L = (N/L)P$ olur. R Dedekind bölgesi olduğundan N/L bölünebilir ve bu yüzden Teo 1.40'tan injektiftir. O halde N/L, M/L'nin bir dik toplananıdır; yani $M = N + K$ ve $N \cap K = L$ olacak şekilde M'nin L yi içeren bir K altmodülü vardır. Buradan $M/K = (N+K)/K \cong N/(N \cap K) = N/L$ olur. M eşatomik olduğundan $M/K = 0$ yani $M = K$ ve böylece $N = L$ olur. O halde N eşatomiktir.

(2) $\Rightarrow$ (3): L, M'nin bir altmodülü ve M/L inmiş olmasın. N/L, M/L'nin sıfırdan farklı injektif bir altmodülü olsun. O halde N/L'nin maksimal altmodülü olmadığından N eşatomik değildir. Bu da kabul ile çelişir. O halde M/L inmiştir.

(3) $\Rightarrow$ (1): L, M'nin özaltmodülü olsun. M/L'nin inmiş olması M/L'nin injektif olmaması demektir. Bu yüzden M/L bölünebilir değildir ve böylece R'nin P maksimal ideali için $M/L \neq (M/L)P$ olur ve bu da $M \neq L + MP$ demektir. R/P cismi üzerinde M/MP sıfırdan farklı bir altmodül olduğundan M/MP ve dolayısıyla $M/(L+MP)$ yarıbasittir. Böylece $M/(L+MP)$'nin bir maksimal altmodülü vardır ve bundan dolayı M/L'nin bir maksimal altmodülü vardır. O halde M eşatomiktir. $\square$

2. Bölümde eşatomik modülün herhangi dik toplananının eşatomik ve eşatomik modüllerin sonlu dik toplamının da eşatomik olduğu gösterildi. Fakat aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi eşatomik modüllerin keyfi dik toplamı eşatomik olmak zorunda değildir.

Örnek 3.7 *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, $\mathbb{N}$ doğal sayıları ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları göstersin. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $M_n = \mathbb{Z}$ olacak şekilde $\mathbb{Z}$-modül $F = \bigoplus M_n$ ($n \in N$) eşatomik değildir ve $Rad(F) = 0$.*

İspat. Çekirdeği K olacak şekilde bir $\varphi : F \to Q$ epimorfizması vardır. Buradan $F/K \cong Q$ ve bu yüzden F/K'nın maksimal altmodülü yoktur. $Rad(\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan $Rad(F) = 0$ olur. $\square$

Uyarı 3.8 *R-modüllerin bir tam dizisi $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ için M' ve M'' eşatomik iken M de eşatomik olur. Eşatomik modüllerin sınıfı genişletme altında kapalıdır.*

Önerme 3.9 *n bir pozitif tamsayı ve M, $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde her i için M_{i-1}/M_i eşatomik olmak üzere M'nin altmodüllerinin bir $M = M_0 \geq M_1 ... \geq M_n = 0$ zinciri var olacak şekilde bir modül olsun. O halde M eşatomiktir.*

İspat. n üzerinden tümevarımla ispat yapılacaktır. M_1 eşatomik olsun. N, M'nin bir özaltmodülü olsun. $M \neq N+M_1$ ise $M_1 \leq N+M_1 \leq M$ den $M/(N+M_1) \cong (M/M_1)/((N+M_1)/M_1)$'in ve dolayısıyla $M/(N+M_1)$'in de bir maksimal altmodülü vardır. O halde M/N'nin de bir maksimal altmodülü vardır. Şimdi $M = N+M_1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $M/N = (N+M_1)/N \cong M_1/(N \cap M_1)$ ve $N \cap M_1$, M_1'in özaltmodülüdür. Böylece $M_1/(N \cap M_1)$ bir maksimal altmodülü vardır ve dolayısıyla M/Nnin de maksimal altmodülü vardır. Böylece M eşatomiktir.
□

Tanım 3.10 M'nin her altmodülü eşatomik ise M *kuvvetli eşatomik modül* denir.

Sonuç 3.11 *n bir pozitif tamsayı ve M, her $1 \leq i \leq n$ için M_{i-1}/M_1 kuvvetli eşatomik olmak üzere $M = M_0 \geq M_1 ... \geq M_n = 0$, M'nin altmodüllerinin bir zinciri olacak şekilde bir modül olsun. O halde M kuvvetli eşatomiktir.*

İspat. N, M'nin bir altmodülü olsun. $N = (N \cap M_0) \geq (N \cap M_1) \geq .... \geq (N \cap M_n) = 0$ zincirini düşünelim. $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde her i için $(N \cap M_{i-1})/(N \cap M_i) = (N \cap M_{i-1})/((N \cap M_{i-1} \cap M_i) \cong ((N \cap M_{i-1}) + M_i)/M_i$ zinciridir. Bu (M_{i-1}/M_i)'nin altmodülü olduğundan eşatomiktir. O halde $(N \cap M_{i-1})/(N \cap M_i)$, $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde her i için eşatomik olur ve Uyarı 3.8'den N eşatomiktir. Bu da M'nin kuvvetli eşatomik olması demektir. □

4. Eşatomik Modüllerin Genelleştirilmesi

Bu bölümde (Koşan, M. Tamer and Harmancı Abdullah, 2005) deki δ-eşatomik modüller ve δ-eşatomik halkalar incelenmiştir. Eşatomik modüllerin genelleştirilmesi olarak δ-eşatomik modüller ve özellikleri çalışılmıştır.

Tanım 4.1 M bir modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. $M/N = \delta(M/N)$ iken $M/N = 0$ oluyorsa M'ye *δ-eşatomik modül* denir. Eğer sağ (sol) R-modül R_R $({}_RR)$ δ-eşatomik ise R halkasına sağ (sol) *δ-eşatomik halka* denir.

Lemma 4.2 *M bir modül olsun.*

(1) N, M'de δ-artık, $M = X + N$ ve Y, N'nin projektif yarıbasit altmodülü olsun. O halde $M = X \oplus Y$'dir.

(2) K, N'nin bir altmodülü olsun. M'nin N, K, L altmodülleri için

i) N, M'de δ-artıktır ancak ve ancak K, M'de δ-artık ve N/K, M/K'da δ-artıktır.

ii) $N + L$, M'de δ-artıktır ancak ve ancak N, M'de δ-artıktır.

(3) K, M'de δ-artık ve $f : M \to N$ bir homomorfizma ise $f(K)$, N'de δ-artıktır. Özel olarak M, N'nin bir altmodülü olmak üzere $f(K)$ M'de δ-artık ise K N'de δ-artıktır.

İspat. 1) (Zhou, Y. 2000) $X + N = M$ olsun. Zorn Lemma'dan N'nin $X \cap Y = 0$ olacak şekilde bir Y maksimal altmodülü vardır. $(N \cap X) + Y$, N'de esas olsun. Bunu görmek için N'nin sıfırdan farklı bir a elemanını alalım. a'nın Y'de olduğunu düşünebiliriz. Y'nin maksimalliğinden $X \cap (Y + aR) \neq 0$ olur. Şimdi $0 \neq X = y + ar$ olsun ($y \in Y$ ve $r \in R$). O halde $ar = x$ ancak ve ancak $y \in (N \cap X) + Y$ ve $X \cap Y = 0$ olduğundan $ar \neq 0$ olur. Yani $(N \cap X) + Y$, N'nin esas altmodülü olur. Bu yüzden $M/(X + Y) = (X + N)/(X + Y) \neq N/[(N \cap X) + Y$ singülerdir. $M/(X + Y)$ singüler ve N, M'de δ-artık olduğundan N, M'de artık olur. $(X \oplus Y) + N = M$ ((1)den)

$M = X + Y$ olur. Y'nin yarıbasit olduğunu görmek için Y'nin bir A altmodülü alalım. O halde $X + A + N = M$ yazabiliriz.

Yukarıdaki gibi $X + A$ ile tartışmak için X'in yerini değiştirirsek $X + A = X \oplus A$, M'nin bir dik toplananı olur. A, Y'nin bir dik toplananıdır. O halde Y yarıbasittir. $Y = Z(Y) \oplus Y_n$ yazalım. Bu yüzden Y_n singüler değildir. O halde $M/(X \oplus Y_n$ singüler olduğundan $M/(X \oplus Y_n) = (X \oplus Y)/(X \oplus Y_n) \cong Z(Y)$ singülerdir. $M = (X \oplus Y_n) + N$ olduğundan (1)den $X \oplus Y_n = M$ yani $Z(Y) = 0$ olur. Çünkü $X \oplus Y = M$ ve $Y = Z(Y) \oplus Y_n$ olduğundan $X \oplus Z(Y) \oplus Y_n = M$'dir. O halde Y projektiftir. (Basit R-modül non-singülerdir ancak ve ancak projektiftir). (Her sonlu non-singüler modülün sıfırdan farklı bir projektif toplananı vardır. Rocky Mountain Volume 22) 2) K, N'nin bir altmodülü ve N, K, L de M'nin altmodülleri olsunlar.

i) N, M'de δ-artık olsun. Kabulden $N + K \neq M$'dir. M/N'nin singüler olduğu gösterilmelidir. $M/K = Z(M/K)$ ise $M/N = Z(M/N)$ olur yani M/N singülerdir. Dolayısıyla K, M'de δ-artıktır. N, M'de δ-artık olduğundan M/L singüler ve $L + N \neq M$ diyebiliriz. $M/L \cong (M/K)/(L/K)$ olduğundan $(M/K)/(L/K)$ da singülerdir. $L + N \neq M$ ise $L/K + N/K \neq M/K$ dır. Buradan N/K, M/K'da δ-artık olur.
ii) $\Rightarrow$): $N + L$, M'de δ-artık olsun. O halde M/K singüler ve $(N + L) + K \neq M$ olur. K, N'nin bir altmodülü olduğundan $N + L \neq M$'dir. M/K singüler olduğundan $M/(L + K)$ da singülerdir. $N + (L + K) \neq M$ olduğundan N, M'de δ-artık olur. Benzer şekilde $M/(N + K)$ singüler ve $L + (K + N) \neq M$ olduğundan N, M'de δ-artık olur.

3) K, M'de δ-artık, Y, M'nin bir altmodülü ve $f(K) + Y = N$ olsun. O halde $m \in M$, $k \in K$ ve $y \in Y$ için $f(m) = f(k) + y$'dir. Buradan $f(m - k) = y$ olur. Dolayısıyla $m - k \in f^{-1}(Y)$ olur. O halde $m \in K + f^{-1}(Y)$'dir. Buradan $K + f^{-1}(Y) = M$ ve K, M'de δ-artık olduğundan $f^{-1}(Y) = M$ yani $Y = N$ elde edilir. O halde $f(K)$, N'de δ-artıktır. $\square$

Bir M modülü için $\delta(M)$=$\Sigma\{L \leq M|\ L$, M'nin δ-artık altmodülü$\}$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.3 *(Koşan, M. Tamer and Harmancı Abdullah, 2005) $\wp$, bütün singüler basit modüllerin sınıfı olsun. O halde*

(1) $\delta(M)=Rej_M(\wp)=\cap\{N \leq M : M/N \in \wp\}$ *dir.*

(2) $f : M \to N$ *bir R-homomorfizma olsun. O halde* $f(\delta(M)) \leq \delta(N)$*'dir.*

(3) $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ *ise* $\delta(M) = \bigoplus_{i\in I} \delta(M_i)$ *dir.*

(4) M'nin her özaltmodülü M'nin bir maksimal altmodülü içinde ise o zaman $\delta(M)$*, M'nin tek en büyük* δ*-artık altmodülüdür.*

Uyarı: Genel olarak $\delta(M)$, M'de δ-artık olmak zorunda değildir. Fakat M eşatomik modül ise M'nin her özaltmodülü M'nin maksimal altmodülünde kapsanır. O halde $\delta(M)$, M'de δ-artık olur.

Lemma 4.4 *M bir modül olsun. O halde*

(1) $\delta(M)$*, M'nin* δ*-artık altmodülü ve K, M'nin bir altmodülü olsun.* $K/\delta(M)$*,* $M/\delta(M)$*'de* δ*-artık ise K, M'de* δ*-artıktır.*

(2) $\delta(M)$*, M'de* δ*-artık ise* $\delta(M/\delta(M)) = 0$ *dır.*

İspat. 1) $K/\delta(M)$, $M/\delta(M)$'nin δ-artık altmodülü ve M/L singüler olacak şekilde $M = K + L$ olsun. M/L singüler olduğundan $M/(L+\delta(M))$, M/L singüler modülünün bir homomorf görüntüsü olarak singülerdir. $M/\delta(M) = (K/\delta(M) + L + \delta(M))/\delta(M)$ ve $K/\delta(M)$, $M/\delta(M)$'nin δ-artık altmodülü olduğundan $M = L + \delta(M)$ olur. $\delta(M)$, M'de δ-artık ve M/L singüler olduğundan $M = L$'dir. O halde K, M'de δ-artıktır.

2) Açıktır. □

Önerme 4.5 *M bir modül olsun.*

(1) M bir R-modül ve A, M'nin, M_1, A'nın bir altmodülü ve $A \cap M_2$, M_2'de δ-artık olsun. O halde M'nin bir $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı varsa $M/\delta(M)$ yarıbasittir.

(2) A, M'nin bir altmodülü olsun. $M = A + B$ ve $A \cap B$, M'de δ-artık olsun. O halde $M/\delta(M)$ yarıbasittir.

İspat. 1) $\delta(M) \leq N \leq M$ olsun. O halde $N/\delta(M)$, $M/\delta(M)$'nin bir altmodülü olur. Kabulden M'nin bir B altmodülü için $M = A \oplus B$ ve $N \cap B$, B'de δ-artık olacak şekilde N'nin bir A altmodülü vardır. Böylece $M/\delta(M) = N/\delta(M) \oplus B + \delta(M)/\delta(M)$ dir.

2) $\delta(M) \leq N \leq M$ olsun. Kabulden $M = N + K$ ve $N \cap K$, M'de δ-artık olacak şekilde M'nin bir K altmodülü vardır. O halde $N \cap K$ $\delta(M)$'nin bir altmodülü olur. Dolayısıyla $M/\delta(M)$ yarıbasittir (Lomp, C. 1999.) □

δ-eşatomik Modüller ve Halkalar

M bir R-modül olsun. Eğer her $N \leq M$ için $\delta(M/N) = M/N$ iken $M/N = 0$ ise M'ye δ-eşatomik denir. R halkasına da sağ (yada sol) δ-eşatomik denir ancak ve ancak sağ (yada sol) R-modül R_R (R_R) δ-eşatomiktir. Aşağıda δ-eşatomik bir modülün denk koşulları verilecektir.

Lemma 4.6 *M bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir.*

(1) M, δ-eşatomiktir.

(2) K, M'nin sıfırdan farklı özaltmodülü ve M/N singüler olsun. M'nin her K özaltmodülü bir maksimal N altmodülünde kapsanır.

İspat. 1) ⇒2): K, M'nin bir özaltmodülü olsun. (1)'den $\delta(M/K) \neq M/K$ olur. Çünkü $M/K \neq 0$ ve K, M'de maksimaldir. Bu yüzden bir basit S singüler modülü ve $f : M/K \to S$ homomorfizması vardır. $Kerf = N/K$ olsun. O zaman N, M'de maksimal ve M/N singülerdir.

2) ⇒1): K, M'nin bir özaltmodülü $\delta(M/K) = M/K$ olsun. $M/K = 0$ olduğu gösterilecektir. (2)'den, K, N'nin bir altmodülü ve M/N basit singüler olacak

şekilde M'nin bir N altmodülü vardır. $\rho : M/K \to M/N$ kanonik epimorfizma olsun. $Ker(\rho) = N/K$ olduğundan $\delta(M/K) \leq N/K$ olur. Kabulden $M/K = N/K$ ve dolayısıyla $M = N$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıya M, δ-eşatomiktir. □

Teorem 4.7 *M, bir R-modül ve $\delta(M)$, M'nin δ-artık modülü olsun. M, aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa δ-eşatomiktir.*

(1) $M/\delta(M)$ yarıbasittir.

(2) M'nin her A altmodülü için $M = A + B$ ve $A \cap B$, M'de δ-artık olacak şekilde bir M'nin bir B altmodülü vardır.

İspat.

1) $M/\delta(M)$ yarıbasit ve $\delta(M)$, M'de δ-artık olsun. M'nin N altmodülü için $\delta(M/N) = M/N$ olsun. $M/\delta(M)$ yarıbasit olduğundan $\delta(M) \leq K$ ve $M/\delta(M) = (N + \delta(M)/\delta(M)) \oplus K/\delta(M)$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. Böylece $M = N + K$ ve $N \cap K \leq \delta(M)$ olur.Bu yüzden $M/N = (N+K)/N \cong K/(N \cap K)$ olur. $\rho : K/(N \cap K) \to K/\delta(M)$ kanonik epimorfizma olsun. Lemma 4.2'den $K/\delta(M) = \rho(K/(N \cap K)) = \rho(\delta(K/(N \cap K))) \leq \delta(K/\delta(M))$ ve Lemma 4.4'ten $\delta(M/\delta(M)) =$ 0'dır. Buradan $\delta(K/\delta(M)) = 0$ olur. O halde $K/(N \cap K) = 0$'dır. Böylece $M/N = 0$ elde edilir. Çünkü $\delta(M) \ll_\delta M$ ise $\delta(M/\delta(M)) = 0$'dır.

2) M'nin her A altmodülü için B, $M = A + B$ ve $A \cap B$, M'de δ-artık olacak şekilde bir M'nin bir altmodülü olsun. Önerme 4.5 (2)'den $M/\delta(M)$ yarıbasittir. Dolayısıyla M, δ-eşatomiktir. □

Lemma 4.8 *M bir modül olsun. Aşağıdakiler vardır:*

(1) X, $\delta(M)$'nin altmodülü ve X, δ-eşatomik olsun. O halde X, M'de artıktır.

(2) M δ-eşatomik ise $\delta(M)$, M'de artıktır. Bir başka deyişle $\delta(M)$, M'de δ-artıktır.

İspat.

1) X, $\delta(M)$'nin altmodülü ve X, δ-eşatomik modül olsun. M'nin Y altmodülü için $M = X+Y$ ve $M = Y$ olduğu gösterilecektir. $M \neq Y$ olsun ($\cap X$ alındı). Buradan $X \neq X \cap Y$ olur. Kabul ve Lemma 4.6'dan $X \cap Y \leq X^{'} \leq X$ ve $X/X^{'}$ basit singüler olacak şekilde Xin bir $X^{'}$ maksimal altmodülü vardır. $X/X^{'} \cong (X+Y)/(X^{'}+Y) = M/(X^{'}+Y)$ olduğundan $M/(X^{'}+Y)$ basit singüler olur. Buradan $X^{'} \leq \delta(M) \leq X^{'}+Y$ ve $X^{'}+Y \leq \delta(M)+Y \leq X^{'}+Y$ ve bu yüzden $M = X^{'}+Y$ ve buradan $X = X^{'}$ elde edilir. Bu, $X^{'}$'nün X'in maksimal altmodülü olması ile çelişir. Böylece X, M'de artıktır ve böylece X, M'de δ-artıktır.

2) M, δ-eşatomik modül olsun. M'nin Y altmodülü için $M = \delta(M)+Y$ olsun. $M \neq Y$ olsun. Lemma 4.6'dan $M/Y^{'}$ basit singüler olmak üzere $Y \leq Y^{'} \leq M$ vardır. Lemma 4.2'den $\delta(M) \leq Y^{'}$ olur. Bu yüzden $M = Y^{'}$ elde edilir. $Y^{'}$'nün M'de maksimal olması ile çelişir. O halde $\delta(M)$, M'de artıktır ve dolayısıyla $\delta(M)$ M'de δ-artıktır.
□

Teorem 4.9 *Bir R-modül M için, aşağıdakiler denktir.*

(1) $M/\delta(M)$ yarıbasittir ve $\delta(M)$'nin her altmodülü δ-eşatomiktir.

(2) M'nin bir A altmodülü için $M = A+B$ ve $A \cap B$, M'de δ-artık olacak şekilde M'nin bir B altmodülü vardır ve M'nin her altmodülü δ-eşatomiktir.

İspat. Lemma 4.8'den ve Önerme 4.5'ten $\delta(M)$, M'de δ-eşatomik olur.

($1 \Rightarrow 2$): M'nin A ve B altmodülleri için $M/\delta(M) = (A+\delta(M))/\delta(M) \oplus B/\delta(M)$ olsun. O zaman $M = A+B$ ve $A \cap B \leq \delta(M)$ olur. $\delta(M)$, M'de δ-artık olduğundan Lemma 4.2'den $A \cap B$, M'de δ-artık olur.

X, M'nin bir altmodülü olsun. X'in δ-eşatomik olduğunu gösterilecektir. X'in A altmodülü için $\delta(X/A) = X/A$ olsun. Buradan $M/\delta(M)$ yarıbasit olduğundan M'nin B altmodülü için $M/\delta(M) = ((A+\delta(M))/\delta(M)) \oplus B/\delta(M)$ olur. Dolayısıyla $M = A+B$ ve $A \cap B$, $\delta(M)$'nin bir altmodülü olur.

$(X+\delta(M))/(A+\delta(M)) = \delta((X+\delta(M))/(A+\delta(M))) \leq \delta(M/(A+\delta(M)))$

$\delta(M/(A+\delta(M))) \cong \delta(B/\delta(M)) \leq \delta(M/\delta(M))$ dir. Lemma 4.4'ten $\delta(M/\delta(M)) =$

0 dır. Böylece $A+\delta(M)=X+\delta(M)$ dir ve buradan $X=A+(X\cap\delta(M))$ olur. Çünkü $A+\delta(M)=X+\delta(M)$ ise $X\cap(A+\delta(M))=X\cap(X+\delta(M)$ dir. Buradan $X\cap A+X\cap\delta(M)=X\cap X+X\cap\delta(M)$ olur. Böylece $A+(X\cap\delta(M))=X+(X\cap\delta(M))=X$ dir). Böylece $X/A\cong(X\cap\delta(M))/(A\cap\delta(M))$ olur. Kabulden $\delta(M)$'nin her altmodülü δ-eşatomik olduğundan $X\cap\delta(M)$, $\delta(M)$'nin δ-eşatomik modülü olur. $\delta((X\cap\delta(M))/(A\cap\delta(M)))=(X\cap\delta(M))/(A\cap\delta(M))$ olduğundan $X\cap\delta(M)=A\cap\delta(M)$ olur ve böylece $A=X$ tir

2)$\Rightarrow$ 1): Önerme 4.5'ten açıktır. □

Önerme 4.10 $0\to K\to M\to N\to 0$ *modüllerin bir tam dizisi olsun.*

(1) M bir δ-eşatomik modül olsun. O zaman N, δ-eşatomiktir.

(2) K ve N, δ-eşatomik modüller olsun. O zaman M de bir δ-eşatomik modüldür. Özel olarak bir δ-eşatomik modülün bir dik toplananı δ-eşatomiktir.

İspat.

1) K, M'nin altmodülü, $N=M/K$ ve U da N'nin altmodülü ve $\delta(N/U)=N/U$ olsun.$L/K=U$ olacak şekilde M'nin bir L altmodülü bulunabilir. O halde $\delta(M/L)=M/L$ ve M bir δ-eşatomik modül olduğundan $M/L=0$ olur. Bu da $N/U=0$ demektir. Böylece N, δ-eşatomik olsun.

2) K ve N δ-eşatomik olsun. L, M'nin bir özaltmodülü olsun.

Durum a. $M/K=(L+K)/K$ ise $M=L+K$'dır. K, δ-eşatomik olduğundan ve $K\cap L\leq K^{'}\leq K$ ve $K/K^{'}$ basit singüler olacak şekilde K'nın $K^{'}$ gibi bir maksimal altmodülü vardır. $K/K^{'}\cong(K+L)/(K^{'}+L)=M/(K^{'}+L)$ olduğundan $M/(K^{'}+L)$ basit singülerdir. Dolayısıyla Lemma 4.6'dan M, δ-eşatomik olur.

Durum b. $M/K\neq(L+K)/K$ olsun. O zaman $M\neq L+K$ olur. N, δ-eşatomik olduğundan ve $N\cong M/K$ olduğundan $(M/K)/(K^{'}/K)\cong M/K^{'}$ basit singüler $(L+K)/K\leq K^{'}/K$ olacak şekilde M/K'nın $K^{'}/K$ altmodülü vardır. O halde Lemma 4.6'dan M, δ-eşatomiktir. □

Önerme 4.11 *$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, $i = 1,2,..n$ için M_i modüllerinin sonlu bir dik toplamı olsun. M, δ-eşatomiktir ancak ve ancak her M_i δ-eşatomiktir.*

İspat. Teorem $n = 2$ için ispatlanırsa n üzerinden tümevarımla ispat tamamlanır. M_1 ve M_2, δ-eşatomik modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdaki tam dizi göz önüne alınsın.

$$0 \to M_1 \to M = M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$$

Böylece Önerme 4.10'dan $M = M_1 \oplus M_2$ δ-eşatomiktir ancak ve ancak M_1 ve M_2 δ-eşatomiktir. □

Teorem 4.12 *M bir R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(1) M yarıbasit ve singüler modüldür.

(2) M, δ-eşatomik ve M/N basit singüler olsun. M'nin her N altmodülü M'nin bir dik toplananıdır.

İspat.

$1) \Rightarrow 2)$: K, M'nin herhangi bir maksimal altmodülü olsun. O zaman N, M'nin basit bir altmodülü olmak üzere $M = N \oplus K$ olur. (1)'den M/K basit singülerdir. O halde M'nin her K maksimal altmodülü için $\delta(M) \leq K$ olur. Dolayısıyla $\delta(M) = 0$ elde edilir. M'nin N altmodülü için $\delta(M/N) = M/N$ ve $N' \leq M$ için $M = N \oplus N'$ olsun. O halde $0 = \delta(N') = N' \cong M/N$ 'dir. Çünkü $M/N = (N' + N)/N = N'/(N \cap N') = N'$'dir. Bu yüzden M, δ-eşatomiktir.

$2) \Rightarrow 1)$: A, M'nin bir altmodülü olsun. Zorn Lemma'dan $A \cap K = 0$ olacak şekilde M'nin bir K maksimal altmodülü vardır. O halde $A \oplus K$, M'de esastır. Şimdi $A \oplus K$'yı M'nin bir özaltmodülü olarak kabul edebiliriz. M, δ-eşatomik olduğundan $A \oplus K \leq N$ olacak şekilde M'nin bir N altmodülü vardır ve Lemma 4.6'dan M/N basit singülerdir. Kabulden N, M'nin bir dik toplananıdır. M'nin N' altmodülü için $M = N \oplus N'$ olsun. O halde $(A \oplus K) \cap N' = 0$ ve $A \oplus K$ esas olduğundan $N' = 0$ ve buradan $M = N$ olur. Bu N'nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $M = A \oplus K$ ve M yarıbasit modül olur. $M/K = (A \oplus K)/K \cong A/(A \cap K) = A$ singüler ve A, M'nin keyfi bir altmodülü olduğundan M bir singüler modüldür. □

Önerme 4.13 *M bir yarıbasit modül, M_1, M'nin δ-eşatomik bir singüler altmodülü ve M_2 singüler olmayan bir altmodül olsun. O halde M'nin $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır.*

İspat. M bir δ-eşatomik modül, $L \cap Z(M) = 0$ olmak üzere L, M'nin bir maksimal altmodülü ve $M \neq L \oplus Z(M)$ olsun. O zaman $M \neq L \oplus Z(M) \leq K$ ve M/K singüler olacak şekilde bir K maksimal altmodülü vardır. $M = K \oplus K^{'}$ olsun. O zaman $K^{'}$, $Z(M)$'nin bir altmodülü olur. Buradan $K^{'} = 0$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $M = L \oplus Z(M)$ olur. Teorem 4.12'den $Z(M)$ singüler δ-eşatomik ve L singüler olmayan bir altmodül olur. Çünkü $L \cap Z(M) = 0$ ve $Z(M)$ singüler olduğundan $Z(M)$ sıfırdan farklıdır. □

Sonuç 4.14 *Her singüler yarıbasit modül δ-eşatomiktir.*

İspat. Önerme 4.13'ten açıktır. □

Tanım 4.15 P projektif bir sağ R-modül, $f : P \to M$ ye bir epimorfizma ve $Kerf$, P'de δ-artık olsun. O halde (P, f) çiftine M modülünün bir *projektif δ-örtüsü* denir.

Lemma 4.16 *$M = A + B$ olsun. M/A'nın bir projektif δ-örtüsü varsa $M = A \oplus A^{'}$ ve $A \cap A^{'}$ $A^{'}$'de δ-artık olacak şekilde B, A'nın bir $A^{'}$ altmodülünü içerir.*

İspat. $\pi : B \to M/A$ doğal homomorfizma ve $f : P \to M/A$ bir projektif δ-örtü olsun. P projektif olduğundan $\pi g = f$ ve $Kerf$, P'de δ-artık olmak üzere $g : P \to B$ vardır. O halde $\pi g(P) = f(P)$ ve $A \cap g(P) = g(Ker(f))$ olur. Böylece $M = A + g(P)$ ve $A \cap g(P) = g(Ker(f))$ elde edilir. $Kerf$, P'de δ-artık olduğundan $g(Ker(f))$ $g(P)$'de δ-artık ve buradan $A \cap g(P)$, $g(P)$'de δ-artık olur. □

Lemma 4.17 *A, M'nin herhangi bir altmodülü ve M/A'nın bir projektif δ-örtüsü var olsun. O halde $M = A + A^{'}$ ve $A \cap A^{'}$, $A^{'}$'de δ-artık olacak şekilde bir $A^{'}$ altmodülü var olur.*

İspat. Önerme 4.16'da $B = M$ alınırsa ispat biter. □

Tanım 4.18 M bir modül olsun. M'nin her homomorf görüntüsünün bir projektif δ-örtüsü varsa M projektif modülüne δ-*yarımükemmel* denir.

Lemma 4.19 *Herhangi bir projektif R-modül M için aşağıdakiler denktir:*

(1) M, δ-yarımükemmeldir.

(2) N, M'nin herhangi bir altmodülü olsun. M'nin $M_1 \leq N$ ve $M_2 \cap N \ll_\delta M_2$ olacak şekilde M_1, M_2 altmodülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır (Zhou, Y. 2000).

Lemma 4.20 *M bir δ-yarımükemmel modül ve $\delta(M)$, M'de δ-artık olsun. O halde M, δ-eşatomiktir.*

İspat. M bir δ-yarımükemmel modül ve A herhangi bir altmodül olsun. Lemma 4.17'den $M = A + A^{'}$ ve $A \cap A^{'}$, $A^{'}$'de δ-artık olacak şekilde bir $A^{'}$ altmodülü vardır. Teorem 4.7(2)'den M, δ-eşatomiktir . □

Önerme 4.21 (Zhou, Y. 2000.)'de verilmiştir. Daha kısa ve öz ispatı burada yapılacaktır.

Önerme 4.21 *R bir halka olsunn. O halde $\delta(R)$, R'de δ-artıktır.*

İspat. I, R'de bir sağ ideal, R/I singüler ve $R = \delta(R) + I$ olsun. I, R'nin bir özaltmodülü ve K'nın I'yı içeren maksimal sağ ideal olduğunu kabul edelim. O halde R/K basit singüler sağ R-modüldür. Böylece $\delta(R)$, K'nın bir altmodülü olur. Bu bir çelişkidir. O halde R/I singüler ve $R = \delta(R) + I$ olacak şekilde herhangi bir I sağ ideali için $R = I$ olur. Tanımdan $\delta(R)$, R'de δ-artık olur. □

Önerme 4.22 *R bir δ-yarımükemmel halka olsun. O zaman R sol ve sağ δ-eşatomik halka olur.*

İspat. Teorem 4.20 ve Önerme 4.21'den R sağ δ-eşatomik halkadır. Simetrik olarak R aynı zamanda sol δ-eşatomik halkadır. $\square$

Teorem 4.23 *R bir halka olsun. O halde $\delta(R/I) = R/I$ olacak şekilde R'nin her ideali bir dik toplanandır.*

İspat. I, R'de sağ ideal ve $\delta(R/I) = R/I$ olsun. O zaman R/I'dan basit singüler sağ R-modüllere tüm dönüşümler sıfırdır. I bir esas sağ ideal ve K da I'yı içeren maksimal sağ ideal olsun. O halde R/K basit singüler sağ R-modül olur. R/K, R/I'nın görüntüsü ve $\delta(R/I) = R/I$ olduğundan $R = K$'dır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla I esas değildir. L, $I \cap L = 0$ olacak şekilde bir maksimal sağ ideal olsun. Bu durumda $I \oplus L$, R'de esastır. Şimdi $I \oplus L$ özaltmodül ve T de $I \oplus L$'yi içeren bir maksimal sağ ideal olsun. O halde R/T, R/I'nın basit singüler görüntüsü olur. Bu yine bir çelişkidir. Buradan $R = I \oplus L$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.24 *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(1) R yarıbasit artindir.

(2) R'nin her maksimal sağ ideali R_R'nin bir dik toplananıdır.

İspat. (Kasch, F. 1982.) $\square$

Uyarı: I, R halkasında bir esas sağ ideal ise o zaman R/I singüler sağ R-modüldür. Tersi de doğrudur. Modül durumunda ise şu formu alır:
B singüler olmayan bir modül ve B'nin bir A altmodülü için, B/A singülerdir ancak ve ancak A, B'de esastır. (Goodearl, K.R. 1976) Bir halkada herhangi maksimal sağ ideal ya esas sağ idealdir yada dik toplanandır.

Teorem 4.25 *R bir sağ δ-eşatomik halka olsun. O zaman*

(1) Her basit sağ R-modül singülerdir.

(2) R'de her maksimal sağ ideal esas sağ idealdir.

İspat. 1) I, R'de maksimal sağ ideal olsun. $\delta(R/I) = R/I$ ise δ-eşatomik olduğundan $R/I = 0$ yani $R = I$ olur. Bu mümkün değildir dolayısıyla $\delta(R/I) = 0$ olur. O halde S bir basit singüler sağ R-modül olacak şekilde $f : R/I \to S$ sıfırdan farklı bir homomorfizma var olur. Bu yüzden f bir izomorfizma ve R/I singüler sağ R-modüldür.

2) I, R'de maksimal sağ ideal olsun. I'nın esas sağ ideal olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki I esas sağ ideal olmasın ve bir K sağ ideali için $R = I \oplus K$ olsun. $\delta(R/I) = R/I$ ise kabulden $R = I$ olur. Bu mümkün değildir. Böylece $\delta(R/I) \neq R/I$ olur. (1)'den R/I sıfırdan farklı singüler basit sağ R-modül olur. Önceki uyarıdan I, R'de esas sağ idealdir. Bu ise bir çelişkidir. O halde I dik toplanandır. □

Örnek 4.26*(1) $\mathbb{Z}$ tamsayıları $\mathbb{Z}$-modül olarak düşünülsün. O halde $\delta(\mathbb{Z}) = 0$ ve p asal tamsayıları için $\delta(\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})) = 0$ olur. Çünkü $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ basit singüler $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ bir δ-eşatomik $\mathbb{Z}$-modüldür. Fakat $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları, $\mathbb{Z}$-modül olarak δ-eşatomik değildir. Çünkü $\mathbb{Q}$'nun her devirli altmodülü artıktır ve bu yüzden $\delta(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ olur.*

(2) M bir lokal modül ve $Rad(M) = \delta(M)$ olacak şekilde $Rad(M)$, M'nin tek maksimal altmodülü olsun. O halde M eşatomiktir. Çünkü tek maksimal altmodülü varsa $Rad(M) = M = \delta(M)$ olur. Buradan M, δ-eşatomiktir.

(3) M, bir $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}$ olsun. Lemma 4.19'dan M δ-yarımükemmel modül değildir. Her özaltmodül esas ve bir maksimal altmodülde kapsandığından Lemma 4.6'dan M, δ-eşatomiktir.

5. Sonlu Eşatomik Modüller

Bu bölümde (Bilhan, G. and Hatipoğlu, C. 2007) makalesindeki sonlu eşatomik modüller incelenmiştir.

Tanım 5.1 M bir modül olsun. M'nin sonlu üretilmiş her özaltmodülü M'nin bir maksimal altmodülünde kapsanırsa M'ye *sonlu eşatomik (yada kısaca f-eşatomik) modül* denir. Bu tanıma denk olarak M modülü f-eşatmoiktir ancak ve ancak M'nin sonlu üretilmiş bir L altmodülü için $Rad(M/L) = M/L$ iken $M = L$'dir.

Aşağıda f-eşatomik olan fakat eşatomik olmayan modüle örnek verilmiştir.

Örnek 5.2 *$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sırasıyla doğal sayılar, tamsayılar ve rasyonel sayılar kümesi olsun. Her $n \in N$ için $M_n = \mathbb{Z}$ olmak üzere $K = \bigoplus_{n\in N} M_n$, $\mathbb{Z}$-modülünü göz önüne alalım. $K \to Q$ bir epimorfizma var olduğundan ve Q'nun maksimal altmodülü olmadığından K eşatomik değildir (Örnek 3.7). L, K'nın sonlu üretilmiş altmodülü olsun. O halde $\mathbb{N}$'nin sonlu J altkümesi için $L \leq \oplus_{i\in J} M_i$'dir. Böylece L, $\oplus_{i\in J} M_i$'nin bir P maksimal altmodülünde kapsanır çünkü $\mathbb{Z}$ eşatomiktir ve (Güngöroğlu, G. 1997)'den eşatomik modüllerin sonlu dik toplamları da eşatomiktir. O halde $P \oplus (\bigoplus_{i\in N-J} M_i)$, K'nın L'yi içeren bir maksimal altmodülüdür. Bu yüzden K, f-eşatomiktir.*

f-Eşatomik Modüllerin Özellikleri

Önerme 5.3 *Bir f-eşatomik modülün artık altmodüllerle genişlemeleri f-eşatomiktir.*

İspat.

M bir modül N, M'nin artık altmodülü, M/N, f-eşatomik ve K, M'nin sonlu üretilmiş özaltmodülü olsun. N, K'nın bir altmodülü ise kabulden K/N ve bu yüzden K, M'nin bir maksimal altmodülünde kapsanır. Eğer değilse, $(K+N)/N$

bölüm modülünü göz önüne alalım. Bu modül sonlu üretilmiştir ve N, M'de artık olduğundan M/N'nin bir özaltmodülüdür. Kabulden $(K+N)/N$, M/N'nin maksimal altmodülünde kapsanır. Bu yüzden $K+N$ ve dolayısıyla K, M'nin maksimal altmodülündedir. O halde M, f-eşatomiktir. □

Keyfi bir altmodül tarafından bir f-eşatomik modülün her genişlemesi f-eşatomik değildir. Aşağıdaki buna bir örnektir.

Örnek 5.4 *Örnek 5.2'deki $\mathbb{Z}$-modül K için $M = K \oplus \mathbb{Z}(p^{\infty})$ olsun. Burada $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ herhangi bir p asalı için prüfer p-grubu göstersin. O halde M, f-eşatomiktir çünkü M'nin sonlu üretilmiş özaltmodülü, M'nin $T \oplus \mathbb{Z}(p^{\infty})$ formundaki bir altmodülüne gömülür. Burada T, örnek 5.2'deki gibi K'nın sonlu üretilmiş altmodülüdür. Fakat $M/K = (K \oplus \mathbb{Z}(p^{\infty}))/K \cong \mathbb{Z}(p^{\infty})/(K \cap \mathbb{Z}(p^{\infty}))$ bölüm modülü f-eşatomik değildir.*

Önerme 5.5 *M bir f-eşatomik modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N, $Rad(M)$'nin altmodülüdür yada N sonlu üretilmiş ise M/N bölüm modülü f-eşatomiktir.*

İspat.

M bir f-eşatomik modül, $N \leq Rad(M)$ olacak şekilde N, M'nin bir altmodülü ve K/N, M/N'nin sonlu üretilmiş özaltmodülü olsun. $s \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $k_1...k_s \in K$ için $Rk_1 + Rk_2 + ... + Rk_s + N = K$ olur. Kabulden M'nin L maksimal altmodülü için $Rk_1 + Rk_2 + ... + Rk_s + N$, L'nin altmodülüdür. $N \leq Rad(M) \leq L$ olduğundan K, L'nin ve böylece L/N, (M/N)'nin maksimal altmodülü olacak şekilde K/N, L/N'nin altmodülü olur. Şimdi N, M'nin sonlu üretilmiş bir altmodülü olsun. M/N bölüm modülünü göz önüne alalım. K/N, M/N'nin sonlu üretilmiş altmodülü olsun. N sonlu üretilmiş olduğundan K da sonlu üretilmiştir. Kabulden M'nin bir maksimal M_0 altmodülü için K, M_0'ın altmodülü olur. Böylece M_0/N uygun bir maksimal altmodüldür. O halde M/N, f-eşatomiktir. □

Sonuç 5.6 *M bir modül ve N, M'nin artık atmodülü olsun. O zaman M, f-eşatomiktir ancak ve ancak M/N f-eşatomiktir.*

İspat.

$\Rightarrow$): Önerme 5.4

$\Leftarrow$): Önerme 5.2 $\square$

Örnek 5.2'deki K modülü gösterir ki, bir sonlu dik toplam için doğru olmasına rağmen eşatomik modüllerin her sonsuz dik toplamı eşatomik değildir (Güngöroğlu, G. 1998). Bir noether halka üzerinde f-eşatomik modüllerin bazı dik toplamlarının da f-eşatomik olduğunu ispatlamadan önce bazı lemmalar verilecektir.

Lemma 5.7 *R bir noether halka ve M bir R-modül olsun. N ve M/N, M'nin f-eşatomik altmodülü olsun. O halde M, f-eşatomiktir.*

İspat. X, M'nin sonlu üretilmiş özaltmodülü olsun. $X+N$, M'nin özaltmodülü ise $(X+N)/N$ sonlu üretilmiştir ve kabulden M/N'nin $(X+N)/N$'yi içeren bir M_0/N maksimal altmodülü vardır. O halde M_0 da, M'nin X'i içeren maksimal altmodülüdür.
$X+N$ özaltmodül değilse $X\cap N$ sonlu üretilmiş ve N, f-eşatomik olduğundan N'nin $X\cap N$'yi içeren bir N_0 maksimal alt modülü vardır. Şimdi N/N_0 basit ve $N/N_0 \to (X+N)/(X+N_0)$ bir epimorfizma olsun. O halde $M/(X+N_0) = (X+N)/(X+N_0) \cong N/N_0$'dır. O halde $X+N_0$, X'i içeren bir maksimal altmodüldür.
$\square$

Bölüm 2'de eşatomik modüllerin sonlu dik toplamının eşatomik olduğu gösterilmişti. Bu durum f-eşatomik modüller için de gösterilecek ve keyfi dik toplama genişletilecektir.

Lemma 5.8 *f-eşatomik modüllerin sonlu dik toplamı da f-eşatomiktir.*

İspat. Açıktır ki, iki f-eşatomik modülün dik toplamının f-eşatomik olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. M_1 ve M_2, f-eşatomik modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Kabul edelim ki M, f-eşatomik olmasın. O halde M'nin maksimal altmodülünde kapsanmayacak şekilde M'nin sonlu üretilmiş bir N altmodülü vardır.

Burada $N+M_1/(M_1)$, $M/M_1 \cong M_2$'nin sonlu üretilmiş bir altmodülüdür. Eğer $N+M_1 \neq M$ ise o zaman $N+M_1$ ve bu yüzden N, M'nin bir maksimal altmodülünde kapsanır. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $M = N+M_1$'dir. O halde $M_2 \cong M/M_1 = (M_1+N)/M_1 \cong N/(M_1 \cap N$ sonlu üretilmiştir. Benzer düşünceyle M_1 de sonlu üretilmiştir. Bu yüzden M sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla f-eşatomiktir yani bu bir çelişkidir. □

Lemma 5.9 *f-eşatomik modüllerin herhangi dik toplamı da f-eşatomiktir.*

İspat. I herhangi indis kümesi olmak üzere $\{M_i\}_{i\in I}$, bir R halkası üzerinde f-eşatomik modüllerin bir ailesi olsun. $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$'yi göz önüne alalım. K, M'nin herhangi bir sonlu üretilmiş özaltmodülü olsun. O zaman F, I'nın sonlu bir altkümesi olmak üzere $K \leq \bigoplus\limits_{i\in F} M_i$ olur. Lemma 5.8'den $\bigoplus M_i$'nin K'yı içeren bir T maksimal altmodülü vardır. O halde açık olarak $T \oplus (\bigoplus\limits_{i\in I-F} M_i)$ de M'nin K'yı içeren bir maksimal altmodülü olur. Böylece M, f-eşatomiktir. □

Diğer Modüller ile Bağlantılar

Tanım 5.10 *M* bir modül olsun. *M'*nin her sonlu üretilmiş altmodülü *M'*nin bir dik toplananı ise *M'*ye *f-yarıbasit modül(semisimple)*denir. Örneğin, bir von Neumann regular halka kendi üzerinde bir R-modül olarak düşünüldüğünde *f-yarıbasittir.* *($Ra \leq \bigoplus R$* ve $aR \leq \bigoplus R$ dir ancak ve ancak $a = axa$ *)*

Lemma 5.11 *Bir f-yarıbasit modülün her altmodülü f-yarıbasittir.*

İspat. M bir f-yarıbasit modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N'nin sonlu üretilmiş bir K altmodülü ve M'nin S altmodülü için, $M = K \oplus S$'dir. Modülarite kuralından $N = K \oplus (N \cap S)$ elde edilir. Çünkü K, N'nin altmodülü olduğundan $(K \cap N) \oplus (N \cap S) = (K \oplus S) \cap N = M \cap N = N$'dir. □

Lemma 5.12 *f-yarıbasit modüllerin radikali sıfırdır.*

İspat. M bir f-yarıbasit modül ve K, M'nin sıfırdan farklı bir artık altmodülü olsun. K'nın sıfırdan farklı bir k elemanı ve K'nın Rk devirli altmodülünü göz önüne alalım. K, M'de artık olduğundan Rk da M'de artıktır fakat kabulden M'nin L özaltmodülü için $M = Rk \oplus L$ olur. $L = 0$ olur fakat L özaltmodüldü. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden M'nin sıfırdan farklı artık altmodülü yoktur. Yani $Rad(M) = 0$ olur. $\square$

Önerme 5.13 *f-yarıbasit modüller f-eşatomiktir.*

İspat. M, bir f-yarıbasit modül ve N, M'nin sonlu üretilmiş bir özaltmodülü olsun. $m \in M - N$ ise o zaman $Rm + N$, M'nin bir dik toplananıdır ve N, $Rm + N$'nin özaltmodülüdür. O halde N, sonlu üretilmiş $Rm + N$ modülünün maksimal altmodülünde kapsanır ve bu yüzden M'nin bir maksimal altmodülündedir. $\square$

Aşağıda örnekte gösterildiği gibi Önerme 5.13'ün tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 5.14 *Örnek 5.4'teki bir M modülü, $Rad(M) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ olacak şekilde bir f-eşatomik modül olsun. Bu yüzden $Rad(M)$ sıfırdan farklı ve dolayısıyla Lemma 5.12'den M, f-yarıbasit değildir.*

Lemma 5.15 *M bir modül ve N, M'nin sonlu üretilmiş bir altmodülü olsun. O halde M/N, f-yarıbasittir ancak ve ancak M'nin her sonlu üretilmiş L altmodülü için $M = L + K$ ve $L \cap K \leq N$ olacak şekilde M'nin bir K altmodülü vardır.*

İspat. M/N f-yarıbasit ve L, M'nin sonlu üretilmiş bir altmodülü olsun. O halde $(L+N)/N$ sonlu üretilmiştir. Kabulden $N \leq K \leq M$ için $M/N = (L+N)/N \oplus K/N$ dir. $M = (L+N) \oplus K$ ve $N \leq K$ olduğundan $M = L + K$ ve $(L \cap K)$, N'nin bir altmodülü olur. Çünkü $L \cap K \nleq N$ olursa çelişki elde edilir. $n \in N - (L \cap K)$ alalım. Bu durumda $n \not\in L$ ve $n \in K$ dir.

Şimdi L/N, M/N'nin sonlu üretilmiş bir altmodülü olsun. N sonlu üretilmiş olduğundan L de sonlu üretilmiştir ve kabulden $M = L + K$ ve $L \cap K \leq N$ olacak şekilde M'nin K altmodülü vardır. $L \cap (K + N) = (L \cap K) + N = N$ olduğundan $L/N \oplus (K+N)/N = M/N$ olur. $\square$

(Lomp, C. 1999)'de $M/Rad(M)$ yarıbasit ise bir M modülünü yarılokal olarak tanımlandı. $M/Rad(M)$, f-yarıbasit ise M'ye f-yarılokal modül denir.

Teorem 5.16 *M sonlu üretilmiş radikali olan bir modül olsun. O halde aşağıdaki özellikler vardır.*

(1) M, f-yarıbasittir.

(2) M, f-yarılokaldir.

(3) M sonlu zayıf tümleyen ve f-eşatomiktir.

O zaman (1)$\Rightarrow$ (2), (1)$\Rightarrow$ (3) ve (2)$\Leftrightarrow$ (3) tür. Eğer $Rad(M) = 0$ ise (örneğin R bir V-halka ise) o zaman üç özellik denktir:

İspat. 1)$\Rightarrow$ 2): $\sigma : M \to M/Rad(M)$ kanonik epimorfizma olsun. M'nin bir X altmodülü için $\bar{X}$, $\sigma(x)$'i göstersin. $\bar{K}$, $\bar{M}$'nin bir sonlu üretilmiş altmodülü olsun. O halde K da sonlu üretilmiştir ve kabulden $M = K \oplus T$ olacak şekilde M'nin bir T altmodülü vardır. O zaman açık olarak $\bar{M} = \bar{K} \oplus \bar{T}$ olur. O halde M, f-yarılokaldir.

1)$\Rightarrow$ 3): Tanımdan M, sonlu zayıf tümleyendir. O halde Önerme 5.13'ten M, f-eşatomiktir. f-yarıbasit ise $Rad(M) = 0$ ise 0, M'de artıktır veya $M = U + V$ ise $U \cap V = 0$ M'de artıktır.

2)$\Leftrightarrow$ 3): M, f-yarılokal olsun. $M/Rad(M)$ f-yarıbasit ve dolayısıyla sonlu zayıf tümleyen olur. (Alizade,R. and Büyükaşık,E. 2003)'ten M sonlu zayıf tümleyendir. Şimdi, N, M'nin bir sonlu üretilmiş altmodülü ve $Rad(M/N) = M/N$ olsun. $\bar{N}$ sonlu üretilmiş olduğundan M'nin $Rad(M)$'yi içeren bir K altmodülü var olur ve bu yüzden $\bar{M} = \bar{N} \oplus \bar{K}$ olur. Buradan $M = N + K$ ve $N \cap K \leq Rad(M)$ olmasından

$$M/N = Rad(M/N) \leq Rad(K/Rad(M)) = 0$$

elde edilir. Çünkü $M/N \cong K/(N \cap K)$'dır. Böylece M f-eşatomik olur.
M'nin her L sonlu üretilmiş altmodülü için $L + K = M$ ve $L \cap K \leq Rad(M)$ olacak şekilde M'nin bir K zayıf tümleyeni vardır. O halde Lemma 5.15'ten M, f-yarılokaldir. □

6. Atomik Modüller

Bu bölümde atomik modüller incelenecek ve eşatomik modüllerle bağlantıları gösterilecektir (Hiremath, V.A. and Shanbag, Poonam M. 2010)

Tanım 6.1 M bir modül olsun. M'nin sıfırdan farklı her altmodülünün sokulu sıfırdan farklı ise M'ye *atomik modül* denir. Bir başka deyişle M'nin sıfırdan farklı her altmodülü bir basit altmodül içerirse M atomiktir. Bir R halkası sağ R-modül olarak atomik ise R halkası da *sağ atomiktir* denir.
Artin ve eşsonlu üretilmiş modüller atomiktir. Bir sağ mükemmel halka üzerinde sıfırdan farklı her modül atomiktir. Bu Bass teoreminden çıkar. Bir R-modül eşsonlu üretilmiştir ancak ve ancak M atomiktir ve M'nin sokulu sonlu üretilmiştir.

Tanım 6.2 M bir modül olsun. M'nin sıfırdan farklı altmodülleri M'de esas ise M'ye *üniform modül* denir.

Uyarı: Hollow modüller eşatomiktir. Fakat uniform modüller atomik olmak zorunda değildir.

Örnek 6.3 *$\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-modül olarak uniformdur fakat atomik değildir.*

Uyarı: Bir atomik modülün her altmodülü atomiktir. Fakat bir atomik modülün bir homomorf görüntüsü atomik olmak zorunda değildir.

Örnek 6.4 *Osofsky $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$ halkasını tanımlamıştır. R, p-adik tamsayıların $\mathbb{Z}_p$ halkası ile $\mathbb{Z}(p^\infty)$ p-prüfer grubunun dik toplam grubu olsun ve R'de çarpma da şu şekilde tanımlansın: $(\lambda, x), (\mu, y) \in R$ olmak üzere $(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x)$. Osofsky, R'nin değişmeli bir self-injektif halka olduğunu ispatladı. I R'nin herhangi bir özaltmodülü ise, I ya $\mathbb{Z}(p^\infty)$'u içerir yada $\mathbb{Z}(p^\infty)$'dadır. R'nin sokulu, p sıralı $\mathbb{Z}(p^\infty)$'un devirli alt grubu olan $\mathbb{Z}_p$'dir. Bu yüzden R eşsonlu üretilmiştir.*

Dolayısıyla R, R-modül olarak atomiktir. Açık olarak $\mathbb{Z}(p^\infty)$, R'nin bir idealidir ve $R/\mathbb{Z}(p^\infty)$ bölüm halkası p-adik tamsayıların halkası olan $\mathbb{Z}_p$'ye izomorftur. $\mathbb{Z}_{(p)}$ değişmeli integral bölgesi olduğundan sokulu sıfırdır ve bu yüzden $R/\mathbb{Z}(p^\infty)$ bölüm halkalarının sokulu da sıfırdır. O halde R-modül olarak $R/\mathbb{Z}(p^\infty)$'nin sokulu da sıfırdır. Dolayısıyla $R/\mathbb{Z}(p^\infty)$ bir R-modül olarak atomik olamaz.

Aşağıda bir atomik modülün bölüm modülünün atomik olması için yeter koşul verilmiştir.

Önerme 6.5 *R bir sağ eşnoether ve bir sağ nother halka ve M bir R-modül olsun. N de M'nin bir altmodülü olsun. Eğer M atomik ise, M/N de atomiktir.*

İspat. K/N, M/N'nin sıfırdan farklı bir altmodülü ve $f : R \to K/N$ sıfırdan farklı herhangi bir dönüşüm olsun. O halde $\eta : M \to M/N$ kanonik bir epimorfizma olmak üzere $\eta g = f$ olacak şekilde bir $g : R \to M$ homomorfizması vardır. $Kerg$, $Kerf$'in bir altmodülü olduğundan $\phi : R/Kerg \to R/Kerf$ bir epimorfizma ve $R/Kerg$'den M'ye bire-bir bir dönüşüm elde edilir. Hipotezden M atomik olduğundan $R/Kerg$ de atomik olur. Aynı zamanda $R/Kerg$ sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $R/Kerg$ eşsonlu üretilmiştir. R hipotezden sol eşnother olduğundan $R/Kerf$ eşsonlu üretilmiştir. Bu yüzden $Soc(R/Kerf)$, $R/Kerf$'te esastır ve bu yüzden $Soc(R/Kerf)$, sıfırdan farklıdır. Fakat $R/Kerf$'ten K/N'ye bire-bir bir dönüşüm vardı. O halde $Soc(K/N)$, sıfırdan farklıdır. Buradan M/N atomik olur. □

Önerme 6.6 *M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N ve M/N atomik ise M de atomiktir.*

İspat. N ile K, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü ve N ile M/N atomik olsunlar. K, N'in bir altmodülü ise o zaman $Soc(K)$ sıfırdan farklıdır çünkü hipotezden N atomiktir. Bu yüzden K'nın N'de olmadığını düşünelim. O halde $(K+N)/N$, sıfırdan farklıdır. Hipotezden M/N atomik olduğundan $Soc(K+N)/N$, sıfırdan farklı olur. $(K+N)/N \cong K/N \cap K$ olduğundan $Soc(K/N \cap K)$ sıfırdan farklıdır.

$N \cap K = 0$ ise o halde $Soc(K)$ de sıfırdan farklı olur. $N \cap K \neq 0$ ise $N \cap K$, N'nin bir altmodülü ve hipotezden N atomik olduğundan $Soc(N \cap K)$ ve bu yüzden $Soc(K)$ sıfırdan farklıdır. Buradan M atomik olur. $\square$

Sonuç 6.7 *R- modüllerin $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ kısa tam dizisi verilsin. $M^{'}$ ve $M^{''}$ atomik ise M de atomiktir.*

Önerme 6.8 *M_1 ve M_2, birer R-modül olsun. O halde $M = M_1 \oplus M_2$ atomiktir ancak ve ancak M_1 ve M_2 atomiktir.*

İspat. $\Leftarrow$): M atomik ise açık olarak M_1 ve M_2 atomiktir.
$\Rightarrow$): $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ kanonik kısa tam dizisini düşünelim. O halde Sonuç 6.7'den M atomik olur. $\square$

Sonuç 6.9 *Atomik R-modüllerin sonlu dik toplamı da atomiktir.*

İspat. Sonuç 6.8'den ve n üzerinden tümevarımla çıkar. $\square$

Bunun daha geneli de doğrudur. Yani atomik modüllerin herhangi dik toplamı da atomiktir.

Önerme 6.10 *$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Her M_i atomik ise M de atomiktir.*

İspat. Hipotezden her M_i atomik olduğundan $Soc(M_i)$, M_i'nin altmodülü olur. Bu yüzden $\bigoplus_{i \in I} Soc(M_i)$, $\bigoplus_{i \in I} M_i$'nin ve (Lam, T.Y. 1999)'dan $Soc(\bigoplus_{i \in I} M_i)$, $\bigoplus_{i \in I} M_i$'nin altmodülüdür. Buradan $Soc(M)$, M_i'nin altmodülü olur. O halde M atomiktir. $\square$

Uyarı: Yukarıda atomik bir modülün bir yarıbasit modülün genelleştirilmişi olduğu görüldü. R yarıbasit bir R-modül ise o halde her R-yarıbasit modül yarıbasittir. Fakat aynı şey atomik modüller için doğru değildir. Örnek 6.3'te görüldüğü üzere R bir R-modül olarak atomiktir fakat $R/\mathbb{Z}(p^{\infty})$ bölüm modülü atomik değildir. Ne var ki, şimdi aşağıdaki ispatlanabilir.
Her R-modülün atomik olduğu bir R halkası karakterize edilemez. Buna rağmen şimdi aşağıdaki sonuç verilebilir.

Önerme 6.11 *R bir sağ Artin halka olsun. O zaman her R-modül atomiktir.*

İspat. M bir R-modül, N, M'nin sıfırdan farklı herhangi bir altmodülü ve x de N'nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Rx bir R_R-modülünün homomorf görüntüsü olduğundan artindir ve bu yüzden atomiktir. Dolayısıyla $Soc(Rx)$ sıfırdan farklıdır ve buradan $Soc(N)$ de sıfırdan farklı olur. O halde M atomiktir. □

Önerme 6.12 *Bir R halkası sağ artindir ancak ve ancak sağ notherdir ve her R-modül atomiktir.*

İspat. Üstteki önermeden sadece gerek koşulu ispatlamak yeterlidir. Her devirli R-modülün eşsonlu üretilmiş olduğu ispatlanacaktır. I, R'nin herhangi bir sağ ideali olsun. O halde hipotezden R/I atomik ve sonlu üretilmiştir. O halde sonlu eşüretilmiştir ve hipotezden R sağ nother olur. Dolayısıyla R bir sağ artin halkadır. □

Tanım 6.13 *R bir modül, A, R'nin boş olmayan altkümesi ve $a_i \in A$ olsun. Eğer $a_1.a_2...a_k = 0$ $(a_k.a_{k-1}...a_1 = 0)$ ise R'ye sol T-nilpotent (sağ T-nilpotent) modül denir. Hem sağ hem sol T-nilpotent modüle T-nilpotent modül denir.*

Önerme 6.14 *Her R-modül atomik ise o zaman $J(R)$ T-nilpotenttir.*

İspat. (Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990). □

Sonuç 6.15 *Her R-modül atomik ve $J(R)$ yarıbasit ise o zaman R bir sağ mükemmel halkadır.*

İspat. Önerme 6.14 ve (Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990) Bass Teoreminden çıkar. □

Tanım 6.16 M bir modül olsun. M'nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoksa o zaman M'ye *yarıasal modül* denir.

Önerme 6.17 *Bir R halkası sağ atomik ve yarıasal ise o zaman $J(R) = 0$'dır.*

İspat. Kolaylık için $J = J(R)$ alalım. J sıfırdan farklı olsun. Hipotezden R sağ atomik olduğundan J'nin bir minimal sağ ideali vardır. Bu ideal S olsun. O halde $JS = 0$ ve dolayısıyla $S^2 = 0$ olur. Fakat S nilpotent olduğundan $S^2 = 0$ olamaz. Bu R'nin yarıasal olmasıyla çelişir. Bu yüzden $J = 0$'dır. □

Sonuç 6.18 *R bir R-modül olarak yarıasal halka ve eşsonlu üretilmiş olsun. O halde R yarıbasit artin olur.*

İspat. $J(R) = \bigcap M_\alpha$ ve her M_α, R'nin bir sağ maksimal ideali olsun. Önerme 6.17'den $J(R) = 0$ olur. Buradan $M_\alpha = 0$ olur. Hipotezden R eşsonlu üretilmiş olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} = 0$ olacak şekilde $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ler vardır. O halde her $r \in R$ için $\phi(r) = (r + M_{\alpha_1}, ..., r + M_{\alpha_n})$ ile tanımlı $\phi : R \to R/M_\alpha$ dönüşümü bire-bir bir dönüşümdür. $\bigoplus_{i=1}^{n} R/M_{\alpha_i}$ yarıbasit olduğundan R de yarıbasittir. Buradan R yarıbasit artin olur. □

Şimdi Önerme 6.17 genelleştirilecektir.

Önerme 6.19 *I, R halkasının bir ideali ve M bir R/I-modül olsun. M bir R-modül olarak atomik ise M, R/I-modül olarak da atomik olur.*

İspat. N, M'nin sıfırdan farklı bir R/I-altmodülü olsun. Açık olarak N, M'nin sıfırdan farklı bir R-altmodülüdür. Hipotezden M R-modül olarak atomik olduğundan N basit bir R-altmodülü içerir. Bu altmodül S olsun. O halde S, N'nin basit bir R/I-altmodülü olur. Dolayısıyla $Soc_{R/I}(N)$ sıfırdan farklıdır. O halde N'nin sıfırdan farklı basit altmodülü var oldu. Yani M bir R/I-altmodül olarak atomiktir. □

Sonuç 6.20 *R her R-modülü atomik olan bir halka ve I, R'nin bir ideali ise her R/I-modül atomiktir.*

Önerme 6.21 *M bir tümleyen modül olsun. O halde M yarıbasittir ancak ve ancak M atomiktir ve M'nin her basit altmodülü M'nin bir dik toplananıdır.*

İspat. Sadece gerek koşulu ispatlamak yeterlidir. Çünkü yarıbasit modüller basit modüllerin dik toplamı olduğu için M atomiktir.

$\Rightarrow$): N, M'nin herhangi bir altmodülü olsun. Hipotezden M tümleyen olduğundan N'nin bir tümleyeni vardır, bu tümleyen K olsun. O halde $N+K=M$ ve $N\cap K$, K'da artıktır. $N\cap K=0$ ise ispat biter. $N\cap K\neq 0$ olsun. Hipotezden M atomik olduğundan $Soc(N\cap K)\neq 0$'dır. Dolayısıyla $N\cap K$'nın basit bir S altmodülü var olur. Hipotezden S, M'nin bir dik toplananıdır ve bu yüzden K'nın da dik toplananı olur. Aynı zamanda S, K'da artıktır. Dolayısıyla $S=0$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $N\cap K=0$ olur. Buradan N, M'nin bir dik toplananıdır. Dolayısıyla M yarıbasittir.

□

Önerme 6.22 *M bir R-modül ve N, M'nin artık bir altmodülü olsun. N atomik ise o halde M de atomiktir.*

İspat. K, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. Hipotezden N, M'de artık olduğundan $N\cap K$ sıfırdan farklıdır. Yine hipotezden N atomik olduğundan $Soc(N\cap K)$ ve buradan $Soc(K)$ sıfırdan farklı olur. Bu yüzden M atomik olur. □

Önerme 6.23 *M bir R-modül olsun. U ve V, M'nin altmodülleri olmak üzere U, V'nin tümleyeni olsun. O halde V atomiktir ancak ve ancak M/U atomiktir.*

İspat. $\Rightarrow$): V atomik olsun. $(U+V)/U\cong V/(U\cap V)\cong V$ ($U\cap V=0$ komplementlikten) olduğundan $(U+V)/U$ atomiktir. Hipotezden U, V'nin komplementi olduğundan $(U+V)/U$ M/U'da esastır. Yine hipotezden V atomik olduğundan Önerme 6.23'ten M/U atomiktir.

$\Leftarrow$): M/U atomik olsun. $\eta : M\to M/U$ kanonik dönüşüm ve $f=\eta|_V : V\to M/U$ olsun. Hipotezden U, V'nin komplementi olduğundan $U\cap V=0$'dır. O halde $Kerf=U\cap V=0$ olur. Çünkü $f(V)=0$, M/U'nun sıfırı ise U'dur yani $f(U)=0$'dır. O halde $U\cap V=0$ olur. Bu yüzden f bire-bir bir dönüşümdür. Dolayısıyla V atomiktir. □

Önerme 6.24 *M bir R-modül ve U, M'nin bir altmodülü olsun. $Soc(M)$, U'nun altmodülü olmak üzere M/U atomik ise o zaman U, M'de esastır.*

İspat. K, M'nin bir altmodülü ve $U \cap K = 0$ olsun. K sıfırdan farklı olsun. O halde $(K+U)/U$ da sıfırdan farklıdır. Hipotezden M/U atomik olduğundan $Soc((K+U)/U)$ da sıfırdan farklı olur. $(K+U)/U \cong K$ olduğundan $Soc(K)$ sıfırdan farklıdır ve $Soc(K) \leq Soc(M) \leq U$ elde edilir. Bu yüzden $0 \neq Soc(K) \leq U \cap K = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $K = 0$'dır. O halde U, M'de esastır. □

Önerme 6.25 *M bir R-modül ve $M/Soc(M)$ atomik olsun. O zaman M de atomiktir.*

İspat. Hipotezden $M/Soc(M)$ atomik olduğundan Önerme 6.24'ten $Soc(M)$ yarıbasit olacağından atomiktir. □

Uyarı: M yarımükemmel bir modül ise o zaman M eşatomiktir (Mares, E. A. 1963). Yarımükemmel bir modülün duali injektiftir modüldür fakat injektif modüller atomik olmayabilir.

Örnek 6.26 *$\mathbb{Q}$ bir $\mathbb{Z}$-modül olarak injektiftir. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak atomik olmadığından $\mathbb{Q}$ da atomik değildir.*

Tanım 6.27 M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. $Soc(M/N) = 0$ iken $M = N$ sağlanıyorsa M'ye *eşinmiş modül(coreduced)*denir.

Önerme 6.28 *M eşinmiş bir modül ise o zaman M atomiktir.*

İspat. N, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü ve $Soc(N) = 0$ olsun. K, M'de N'nin bir tümleyeni olmak üzere $\eta : M \to M/K$ kanonik dönüşüm ve $f = \eta|N : N \to M/K$ olsun. $N \cap K = 0$ olduğundan f bire-bir bir dönüşümdür. K, N'nin bir komplementi olduğundan $f(N) = (N+K)/K$, M/K'da esastır. Dolayısıyla $f(Soc(N)) = Soc(M/K)$ olur (Kasch, F. 1982). Bu yüzden $Soc(M/K) = f(Soc(N)) = f(0) = 0$ olur. Hipotezden M eşsonlu üretilmiş olduğundan $M = K$ ve buradan $N = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Soc(N) = 0$ olur. Yani M atomiktir. □

Önerme 6.29 *R bir sağ eşnoether ve sağ noether halka ve M bir R-modül olsun. M atomiktir ancak ve ancak M'nin her altmodülü eşinmiştir.*

İspat. $\Rightarrow$) : M atomik ve N, M'nin sıfırdan farklı herhangi bir altmodülü olsun. K, N'nin bir altmodülü olmak üzere $Soc(N/K) = 0$ olsun. Hipotezden N atomik, R sağ eşnother ve sağ nother olduğundan Önerme 2.5'ten N/K atomik olur ve bu yüzden $N/K = 0$ olur. Dolayısıyla $N = K$ elde edilir. Yani N eşinmiştir.

$\Leftarrow$) : Bir önceki önermeden çıkar. $\square$

KAYNAKLAR

Alizade, R. and Büyükaşık,E. 2003. ofinitely weak Supplemented Modules. **Comm.Algebra 31(11):** ,5377-5390.

Anderson, F. W. and Füller K.R. 1990. ings and Categories of Modules

Bilhan, G. and Hatipoğlu C. 2007 Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 36(1): 37-41

Güngöroğlu, G. 1998. oatomic Modules. **Far East J.Math.Sciences** 153-162.

Güngöroğlu, G. and Harmancı, A. 1999. oatomic Modules over Dedekind Domains. **Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B 28:** 25-29.

Goodearl, K.R. 1976. ing Theory, Nonsingular Rings and Modules. **Dekker, New York** 485-497.

Hiremath, V. A. and Shanbag Poonam M. 2010. International Journal of Algebra 4:, 61-69

Jans, J.P. 1969. n co-Noetherian rings. **J. London Math. Soc(2)1** 588-590.

Kasch, F. 1982. odules and Rings. **Academic Press**

Koşan, M. Tamer and Harmancı Abdullah, 2005 Central European Journal of Mathematics 3(2):, 273-281

Lam, T.Y. 1999. ectures on Modules and Rings. **Springer-Verlag Newyork.**

Lomp, C. 1999. n Semilocal Modules and Rings. **Comm.Alg.27(4)** 1921-1935

Mares, E. A. 1963. emiperfect Modules. **Math.82** 347-360

Matlis, E. 1960. odules with descending chain condition. **Trans.Amer.Math.Soc.97:** 495-508.

Mohammed, S.H. and Müller, B.J. 1990. ontinious and Discrete Modules. **London Math.Soc.LMS 147:**, Cambridge Univ.Press.

Osofsky, B.L 1966. generilizations of quasi-Frobeius rings. **J. Algebra 4:**, 373-387

Rotman, I.J. 1979. n Introduction to Homological Algebra **Academic Press**

Rudlof, P. 1991. ommutative Ring Theory. Cambridge University Press, New York. On the structure of Couniform and complemented Modules. **J.Pure Appl.Algebra 74(3):**, 281-305

Sharpe, D. W. and Vamos, P. 1972. Cambdridge University Press Injektive Modules.

Vamos, P. 1968. n co-Noetherian rings. **J. London Math. Soc(2)1:**, 643-646

Wisbauer, R. 1991. oundations of Module and Ring Theory. **Gordon and Breach Reading**

Xue, W. 1992. ings with Morita Duality, Springer-Verlag

Zhou, Y. 2000. eneralizations of Perfect, Semiperfect and Semiregular Rings. **Algebra Colloquium,Vol 7(3):** 305-318.

Zöschinger, H. 1980. oatomare Moduln. **Math. Z, 170:** 221-232.

Zöschinger, H. 1986. omplemente als direkte Summanden III.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Nazlı Aydemir
Doğum Yeri ve Tarihi	:	AYDIN, 13.08.1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
  -SCI
  -Diğer
b) Bildiriler
  -Uluslararası
  -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Koçarlı Halk Eğitim Merkezi	2009-201
	:	Koçarlı Ç.P.L.	2010 - ...

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	n_ pau@hotmail.com
Tarih	:	2011