ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2011-0005

AĞIRLIKLI TOPLANABİLİR İNTEGRALLER İÇİN TAUBER TİPİ KOŞULLAR

Şükran YILDIZ

Tez Danışmanları:
Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU
Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı *Yüksek Lisans* Programı öğrencisi *Şükran YILDIZ* tarafından hazırlanan *Ağırlıklı Toplanabilir İntegraller İçin Tauber Tipi Koşullar* başlıklı tez, 22.08.2011 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Doç. Dr. İbrahim Çanak	Ege Ü.	
Üye	: Yrd. Doç Dr. Sibel Paşalı Atmaca	Muğla Ü.	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ali Işık	Adnan Menderes Ü.	
Üye	: Yr. Doç Dr. Adnan Melekoğlu	Adnan Menderes Ü.	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hüsnü Barutoğlu	Adnan Menderes Ü.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu *yüksek lisans* tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun Sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

22.08.2011

Şükran YILDIZ

ÖZET

AĞIRLIKLI TOPLANABİLİR İNTEGRALLER İÇİN TAUBER TİPİ KOŞULLAR

Şükran YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanları: Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU
Doç. Dr. İbrahim ÇANAK
2011, 35 sayfa

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın amacı ağırlıklı toplanabilir integraller için Tauber tipi koşulları incelemektir.

Birinci bölümde giriş kısmı verildi.

İkinci bölümde $(C, 1)$ toplanabilir integraller için Tauber tipi koşullar verildi. İlk olarak reel değerli fonksiyonlar için tek taraflı Tauber tipi teorem verildi. Yavaş azalanlık (artanlık) kavramı gösterildi. İkinci olarak da kompleks değerli fonksiyonlar için iki taraflı Tauber tipi teorem verildi. Yavaş salınımlılık kavramı tanıtıldı.

Üçüncü bölümde R_+ da ağırlıklı ortalama toplanabilir integraller için gerek ve yeter Tauber tipi koşullar verildi. Bu bölümde de ilk olarak reel değerli fonksiyonlar için tek taraflı Tauber tipi teorem verildi. Daha sonra kompleks değerli fonksiyonlar düşünülerek iki taraflı Tauber tipi teorem verildi.

Dördüncü bölümde R_+ ağırlıklı ortalama toplanabilir integraller için gerek ve yeter Tauber tipi koşullar II verildi. Ağırlık fonksiyonu tanıtıldı. (W, P) toplanabilme metodu tanıtıldı. Bölümün sonunda da ağırlık fonksiyonunun özel seçimleri verildi.

Anahtar Sözcükler: Lebesgue İntegrali, Riemann-Stieltjes İntegrali, toplanabilmenin ağırlıklı ortalaması, Cesàro Metodu, harmonik ortalama metodu, gerek ve yeter Tauber koşulları, yavaş azalanlık, yavaş artanlık, yavaş salınımlılık, Landau ve Hardy tipi Tauber koşulları.

ABSTRACT

TAUBERIAN CONDITIONS FOR WEIGHTED MEAN SUMMABLE INTEGRALS

Şükran YILDIZ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisors: Assist. Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU
Assoc. Prof. Dr. İbrahim ÇANAK
2011, 35 pages

The main topic of this study, which consists of four chapters, is to investigate Tauberian conditions for weighted mean summable integrals.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, Tauberian conditions for $(C, 1)$ summable integrals were given. First, for real valued functions one-sided Tauberian theorem was given. Then the concept of slow decreasing (increasing) was shown. Second, for complex valued functions two-sided Tauberian theorem was given. The concept of slow oscillation was introduced.

In the third chapter, necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over R_+ were given. In this section first, for real valued function one-sided Tauberian theorem was given too. Later second, for complex valued functions two-sided Tauberian theorem was given.

In the fourth chapter, necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over R_+ II were given. The weight function was introduced. (W, P) summability method was introduced. At the end of the section particular choices of the weight function were given.

Key words: Lebesgue integral, Riemann-Stieltjes integral, weighted mean methods of summability, Cesàro method, harmonic mean method, necessary and sufficient Tauberian conditions, slow decrease, slow increase, slow oscillation, Landau type and Hardy type Tauberian conditions.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen danışman hocalarım Doç. Dr. İbrahim ÇANAK' a (Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü), Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU' na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik bölümü) sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca, tezin düzeltme aşamasında yapıcı önerileriyle bana yol gösteren değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA' ya (Muğla Üniversitesi, Matematik Bölümü), Yrd. Doç Dr. Ali IŞIK' a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BARUTOĞLU' na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL' e (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), Öğretim Görevlisi Ümit TOTUR' a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), Öğretim Görevlisi Yılmaz ERDEM' e (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve her zaman bana destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$f \in L^1_{loc}(R_+)$	Lebesgue anlamında integrallenebilen kompleks değerli fonksiyon
$(C, 1)$	Cesaro Toplanabilme
P	R_+ üzerinde bir pozitif Borel ölçüsünden dolayı ağırlık fonksiyonu
ρ	P ağırlık fonksiyonuna bağlı kesin artan sürekli fonksiyon
Λ_u	Üst kabul edilen fonksiyon sınıfı
Λ_ℓ	Alt kabul edilen fonksiyon sınıfı
(W, P)	Ağırlıklı ortalama metoduyla toplanabilme
$\widetilde{\Lambda_u}$	Üst kabul edilen alt fonksiyon sınıfı
$\widetilde{\Lambda_\ell}$	Alt kabul edilen alt fonksiyon sınıfı

1. GİRİŞ

$(0, t)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen kompleks değerli f : R₊ ⟶ C fonksiyonu $f \in L^1_{loc}$ (R₊) ile gösterilecektir. Burada s ve σ iki tane fonksiyon olmak üzere

$$s(t) := \int_0^t f(x)dx$$

ve

$$\sigma(t) := \frac{1}{t}\int_0^t s(u)du$$

olarak tanımlanacaktır. A sonlu bir sayı olsun. $\mathrm{Lim}_{t\to\infty} s(t) = A$ limiti mevcut ise $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = A$ limiti de mevcuttur. Genelde tersi doğru değildir. Tersinin gerçeklenmesi için bazı koşullar vardır. Bu çalışmada tersinin gerçeklenmesi için bu koşullar gösterilecektir.

Öncelikle A sonlu bir sayı olmak üzere, $t \to \infty$ için $\sigma(t) \to A$ olduğu varsayılacaktır. İlk olarak reel değerli fonksiyonlar incelenecektir. $t \to \infty$ iken $s(t) \to A$ olması için gerek ve yeter koşullar incelenecektir. Eğer $s(t)$ fonksiyonu yavaş azalan ya da yavaş artan ise bu koşullar gerçeklenir. Bu çalışmada yavaş azalanlık ve yavaş artanlık kavramları gösterilecektir. Yavaş azalanlık kavramı reel sayı dizileri için R. Schmidt tarafından 1925'te verilmiştir. Yavaş azalanlık kavramını Hardy (1949) gerek ve yeter koşulları bulmak için kullanmıştır. Ayrıca reel sayı dizileri için benzer koşullar 1910'da Landau tarafından verilmiştir.

Daha sonra ikinci olarak kompleks değerli fonksiyonlar için gerek ve yeter koşullar incelenecektir. $\sigma(t) \to A$, $t \to \infty$ un $s(t) \to A$, $t \to \infty$ un gerektirmesi için gerek ve yeter koşullar gösterilecektir. Bu koşul $s(t)$ yavaş salınımlı ise gerçeklenir. Bu çalışmada yavaş salınımlılık kavramı da açıklanacaktır.

Bu tez çalışmasında daha sonra R₊ da ağırlıklı ortalama toplanabilir integraller için gerek ve yeter Tauber tipi koşullar verilecektir. Burada $0 \neq p(x)$, R₊ $:= [0, \infty)$'da $p(0) = 0$ ve her $\lambda > 1$ için

$$\lim\ \inf_{t\to\infty} p(\lambda t)/p(t) > 1$$

koşullarını gerçekleyen azalmayan bir fonksiyon tanımlanacaktır. Amaç $t \to \infty$ için $\sigma(t) \to A$ mevcut iken $s(t) \to A$ olması için gerek ve yeter koşullar incelemektir. Bu koşulların çoğu eşitsizlik şeklinde ifade edilecektir. Burada da kompleks değerli fonksiyonlarda iki taraflı Tauber tipi koşullar, reel değerli fonksiyonlarda tek taraflı Tauber tipi koşullar gösterilecektir.

Bu çalışmada her bölümde verilen teoremler bölüm sonlarında ispatlanacak olup gerek ve yeter Tauber tipi koşullar bulunacaktır.

2. $(C, 1)$ TOPLANABİLİR İNTEGRALLER İÇİN TAUBER TİPİ KOŞULLAR

$(0, t)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen kompleks değerli f : R₊ → C fonksiyonu $f \in L^1_{loc}$ (R₊) ile gösterilecektir. s ve σ fonksiyonları

$$s(t) := \int_0^t f(x)dx$$

ve

$$\sigma(t) := \frac{1}{t}\int_0^t s(u)du$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Bu çalışmada A sonlu bir sayı olmak üzere $t \to \infty$ için $\sigma(t) \to A$ olduğu varsayılacaktır. İlk olarak, reel değerli fonksiyonlar göz önüne alınacaktır. $s(t) \to A$, $t \to \infty$ olması için gerek ve yeter koşullar bulunacaktır. Özellikle, $s(t)$ fonksiyonu R. Schmidt (1925) anlamında yavaş azalan (artan) ise bu koşullar gerçeklenir. Özellikle, $f(x)$ fonksiyonu Landau (1910)'un tek taraflı Tauber tipi koşullarını gerçeklerse bu koşullar yine gerçeklenir.

İkinci olarak, bu sonuçlar kompleks değerli fonksiyonlar için genişletilecektir. $\sigma(t) \to A$, $t \to \infty$ nın $s(t) \to A$, $t \to \infty$ yı gerektirmesi için gerek ve yeter koşullar verilecektir. Özellikle, bu koşul $s(t)$ yavaş salınımlı ise gerçeklenir. Buna ek olarak, $f(x)$ fonksiyonu Landau (1910)'un iki taraflı Tauber tipi koşulunu gerçeklerse önceki verilen koşullar yine gerçeklenir.

2.1. R_+'da İntegrallerin $(C, 1)$ Toplanabilmesi

Kompleks değerli f : R₊ → C fonksiyonu, $0 < t < \infty$ olmak üzere $(0, t)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durum kısaca $f \in$ L^1_{loc} (R₊) ile gösterilir. $t > 0$ için s ve σ fonksiyonları

$$s(t) := \int_0^t f(x)dx$$

ve

$$\sigma(t) := \frac{1}{t}\int_0^t s(u)du$$

şeklinde tanımlansın.

(2.1.1) $$\int_0^\infty f(x)dx$$

integrali (Titchmarsh, 1937; Hardy,1949) tekrar hatırlanırsa A sonlu bir sayı olmak üzere

(2.1.2) $$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = A$$

ise

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

integraline A sayısına $(C,1)$ toplanabilirdir denir.

Planlanan şudur, eğer;

(2.1.3) $$\lim_{t\to\infty} s(t) = A$$

limiti varsa (2.1.2) limiti de vardır. Fakat genelde tersi doğru değildir.

Bununla birlikte f fonksiyonu R_+'da sabit işaretli ise (2.1.2) ve (2.1.3) limitleri eşittir. Bu sonuç Fubini teoremiyle kolayca elde edilir:

$$\sigma(t) = \frac{1}{t}\int_0^t du \int_0^u f(x)\,dx = \int_0^t \left(1-\frac{x}{t}\right) f(x)dx$$

2.2. Ana Sonuç

İlk olarak, f fonksiyonu reel değerli fonksiyon olarak düşünülecektir. Aşağıdaki tek taraflı Tauber tipi teorem ispatlanacaktır.

Teorem 2.2.1 *$f \in L^1_{loc}(R_+)$ reel değerli bir fonksiyon olsun. (2.1.1) sonlu bir A sayısına $(C,1)$ toplanabilir ise (2.1.3)'ün mevcut olması için gerek ve yeter koşullar*

(2.2.1) $$sup_{\lambda>1} \, lim \; inf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dx \geq 0$$

ve

(2.2.2) $$sup_{0<\lambda<1} \, lim \; inf_{t\to\infty} \frac{1}{t-\lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dx \geq 0$$

gerçeklenmesidir. Ayrıca her λ > 1 için

(2.2.3) $$lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dx = 0$$

ve her 0 < λ < 1 için

(2.2.4) $$lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-\lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dx = 0$$

dır.

Aşağıdaki uyarıları yapmak uygun olacaktır.

(i) Eğer,

(2.2.5) $$\lim_{\lambda\to 1^+} \lim\, \inf_{t\to\infty} \min_{t\le x\le \lambda t} [s(x) - s(t)] \geq 0$$

ise R_+'da tanımlı reel değerli $s(t)$ fonksiyonuna yavaş azalan denir. Eşdeğer olarak bu tanım aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Her $\varepsilon > 0$ için $t_0 < t < x \leq \lambda t$ olduğunda

$$s(x) - s(t) \geq -\varepsilon$$

olacak şekilde $t_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır.

Hardy (1949) tarafından bildirildiğine göre; yavaş azalanlık kavramı reel sayı dizileri için Schmidt (1925) tarafından verilmiştir.

(ii) (2.2.5) koşulu aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

(2.2.6) $$\lim_{\lambda\to 1^-} \lim\, \inf_{t\to\infty} \min_{\lambda t\le x\le t} [s(t) - s(x)] \geq 0\,.$$

Gerçekten; bazı $\lambda > 1$ için, L sonlu bir sayı olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{t\le x\le \lambda t} [s(x) - s(t)] = L$$

ise

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{\lambda^{-1}x\le t\le x} [s(x) - s(t)] \le L\,.$$

Bir önceki lim inf L'ye eşit ise ondan öncekinin L'yi geçemediği ayrıca doğrudur.

Teorem 2.2.1'in aşağıdaki sonucu açıktır.

Sonuç 2.2.1 *$f \in L^1_{loc}(R_+)$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer (2.1.1) sonlu bir A sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ve $s(t)$ yavaş azalan ise (2.1.3) mevcuttur.* (Hardy, 1949)

(iii) Özellikle, $H > 0$ ve $x_0 \ge 0$ sabitleri için $x > x_0$ olduğunda

$$xf(x) \ge -H \tag{2.2.7}$$

ise (2.2.5) gerçeklenir.

Gerçekten, her $x_0 < t < x < \infty$ için

$$s(x) - s(t) = \int_t^x f(u)du \ge -H\int_t^x \frac{du}{u} = -H\log\frac{x}{t} \ge -H\log\lambda$$

dır. Buradan da

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{t\le x\le \lambda t} [s(x) - s(t)] \ge -H\log\lambda\,, \qquad \lambda > 1.$$

elde edilir.

$\lambda \to 1^+$ için (2.2.5) eşitsizliği kolayca elde edilir.

Reel sayı dizileri için benzer koşul Landau (1910) tarafından verilmiştir.

Buradan Teorem 2.2.1'in diğer bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 2.2.2 *$f \in L^1_{loc}(R_+)$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer (2.1.1) integrali sonlu bir A sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ve (2.2.7) koşulu gerçeklenir ise (2.1.3) mevcuttur.*

(iv) (2.2.1) ve (2.2.2) koşullarının simetrik karşıtları aşağıdaki gibidir:

(2.2.8) $$\inf_{\lambda>1} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t-t}\int_t^{\lambda t}[s(x)-s(t)]dx \leq 0$$

ve

(2.2.9) $$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t-\lambda t}\int_{\lambda t}^{t}[s(t)-s(x)]dx \leq 0.$$

Şimdi, eğer Teorem 2.2.1'de (2.2.1) ve (2.2.2) koşulları (2.2.8) ve (2.2.9) koşulları ile değiştirilirse Teorem 2.2.1 yine doğrudur. Özellikle eğer (2.1.1) integrali sonlu bir sayıya $(C,1)$ toplanabilir, (2.2.8) ve (2.2.9) koşulları gerçeklenir ise (2.2.1) ve (2.2.2) koşulları da gerçeklenir ve tersi de doğrudur.

(v)

(2.2.10) $$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\leq x\leq \lambda t}[s(x)-s(t)] \leq 0$$

ise R_+'da tanımlı $s(t)$ fonksiyonuna yavaş artan denir. Eşdeğer olarak bu tanım aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Her $\varepsilon > 0$ için $t_0 < t < x \leq \lambda t$ olduğunda

$$s(x) - s(t) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $t_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır.

(vi) (2.2.10) koşulu da aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \limsup_{t\to\infty} \max_{\lambda t\leq x\leq t}[s(t)-s(x)] \leq 0.$$

Ayrıca, (2.2.5) ⇒ (2.2.7) gerektirmesine benzer şekilde her $x > x_0$ için

(2.2.11) $$xf(x) \leq H$$

olacak şekilde $H > 0$ ve $x_0 \geq 0$ sabitlerinin varlığı (2.2.10)'u gerçeklemek için yeter bir koşuldur.

Bu yolla, Sonuç 2.2.1 ve Sonuç 2.2.2'nin simetrik eşdeğerleri "yavaş artanlık" için "yavaş azalanlık" ve (2.2.7) koşulu için (2.2.11)'in sırasıyla yerine koyulmasıyla yeniden ifade edilebilir.

(vii) Sonuç olarak, Teorem 2.2.1'deki (2.2.1) ve (2.2.2) koşulları birbirinden bağımsızdır.

Bunu görmek için, R_+'da $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$f := \begin{cases} 1 \;, & x \in [2^n - 1, 2^n) \\ -1 \;, & x \in [2^n, 2^n + 1) \quad (n = 1,2, \dots için). \\ 0 \;, & diğer \end{cases}$$

Buradan

$$s(t) = \begin{cases} t - 2^n + 1 \;, & t \in [2^n - 1, 2^n) \\ 2^n + 1 - t \;, & t \in [2^n, 2^n + 1) \\ 0 \;, & diğer \end{cases}$$

elde edilir.

Açıkça, (2.1.2) gerçeklenir. Diğer taraftan, Bölüm 2.3'teki Lemma ile, her $\lambda > 1$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dx = -\limsup_{t\to\infty} s(t) = -1$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dx = \liminf_{t\to\infty} s(t) = 0$$

dır.

İkinci olarak, f'nin kompleks değerli olduğu daha genel durum göz önüne alınacaktır. Şimdi iki taraflı Tauber tipi teorem ispatlanacaktır.

Teorem 2.2.2 *$f \in L^1_{loc}(R_+)$ kompleks değerli fonksiyonu için (2.1.1) integrali sonlu bir A sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ise (2.1.3) limitinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul*

$$\inf_{\substack{0<\lambda<\infty \\ \lambda\neq 1}} \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dx \right| = 0$$

gerçeklenmesidir.

Teorem 2.2.2'nin aşağıdaki iki sonucu verilebilir.

Sonuç 2.2.3 $f \in L^1_{loc}(R_+)$ *kompleks değerli fonksiyonu için eğer (2.1.1) integrali sonlu bir A sayısına* $(C,1)$ *toplanabilir ve*

(2.2.12) $$lim_{\lambda\to 1^+}\, lim\ sup_{t\to\infty}\, max_{t\le x\le \lambda t}|s(x)-s(t)| = 0$$

ise (2.1.3) mevcuttur.

R_+ da tanımlanan kompleks değerli $s(t)$ fonksiyonu (2.2.12) koşulunu gerçeklerse $s(t)$'ye yavaş salınımlı denir. Eşdeğer olarak bu tanım aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Her $\varepsilon > 0$ için $t_0 < t < x \le \lambda t$ olduğunda

$$|s(x) - s(t)| \le \varepsilon$$

olacak şekilde $t_0 \ge 0$ ve $\lambda > 1$ vardır.

(2.2.5) ve (2.2.6) koşullarının eşdeğerlerine benzer olarak (2.2.12) koşulu aşağıdakine eşdeğerdir (Hardy, 1949):

$$\lim_{\lambda\to 1^-}\limsup_{t\to\infty}\max_{\lambda t\le x\le t}|s(t)-s(x)| = 0.$$

Sonuç 2.2.4 $f \in L^1_{loc}(R_+)$ *kompleks değerli bir fonksiyon olsun. (2.1.1) integrali sonlu bir A sayısına* $(C,1)$ *toplanabilir ve* $H > 0$ *sabiti ve* $x_0 \ge 0$ *var iken her* $x > x_0$ *için eğer*

$$|xf(x)| \le H$$

ise (2.1.3) mevcuttur.

2.3. İspatlar

Aşağıdaki Lemma ile ispatlar yapılacaktır.

Lemma 2.3.1 *Eğer (2.1.1) integrali sonlu bir A sayısına* $(C,1)$ *toplanabilir ise, her* $0 < \lambda < \infty, \lambda \ne 1$ *için*

(2.3.1) $$lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x)dx = A$$

dır.

İspat. $\lambda > 1$ durumu. Tanımla,

$$\frac{1}{\lambda t - t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx = \frac{1}{\lambda t}\left(1+\frac{1}{\lambda-1}\right)\int_0^{\lambda t} s(x)dx - \frac{1}{(\lambda-1)t}\int_0^t s(x)dx$$

$$= \sigma(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1}\,[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)]$$

dir. Buradan (2.3.1) kolayca (2.1.2)'den elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ durumu. Tanımla,

$$\frac{1}{t-\lambda t}\int_{\lambda t}^{t} s(x)dx = \frac{1}{(1-\lambda)t}\int_0^t s(x)dx + \frac{1}{\lambda t}\left(1-\frac{1}{1-\lambda}\right)\int_0^{\lambda t} s(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}[\sigma(t) - \sigma(\lambda t)] + \sigma(\lambda t)$$

dir. Buradan (2.3.1) kolayca (2.1.2)'den elde edilir.

Teorem 2.2.1'in ispatı.

Gereklilik.

(2.1.3)'ün sağlandığı düşünülürse Lemma 2.3.1 ile,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda t - t}\int_t^{\lambda t}[s(x)-s(t)]dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda t - t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx - \lim_{t\to\infty} s(t)$$

$$= A - A = 0$$

dır. Bu, $\lambda > 1$ durumunda (2.2.3)'ü ve $0 < \lambda < 1$ durumunda (2.2.4)'ü ispatlar.

Yeterlilik.

(2.1.2), (2.2.1) ve (2.2.2) gerçeklensin. (2.1.3)'ün gerçeklendiği ispatlanacaktır. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (2.2.1) ile

(2.3.2) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1 t - t} \int_t^{\lambda_1 t} [s(x) - s(t)]dx \geq -\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\lambda_1 > 1$ vardır ve

(2.3.3) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda_2 t} \int_{\lambda_2 t}^{t} [s(t) - s(x)]dx \geq -\varepsilon$$

olacak şekilde bir $0 < \lambda_2 < 1$ vardır.

(2.1.2) ve Lemma 2.3.1'den, her $\lambda > 1$ için,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dx = A - \limsup_{t\to\infty} s(t)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dx = \liminf_{t\to\infty} s(t) - A$$

elde edilir.

Böylece, (2.3.2) ve (2.3.3) aşağıdakine eşdeğerdir:

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t) \leq \limsup_{t\to\infty} s(t) \leq A + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2'nin ispatı. Teorem 2.2.2'nin ispatı Lemma 2.3.1 ve Teorem 2.2.1'in ispatından elde edilir.

3. R₊ DA AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLİR İNTEGRALLER İÇİN GEREK VE YETER TAUBER TİPİ KOŞULLAR

$0 \neq p(x)$, $\mathrm{R}_+ := [0, \infty)$'da $p(0) = 0$ ve her $\lambda > 1$ için

$$\lim\,\inf_{t\to\infty} p(\lambda t)/p(t) > 1$$

koşullarını gerçekleyen azalmayan bir fonksiyon olsun.

Reel ya da kompleks değerli $f \in L^1_{loc}$ (R_+) fonksiyonu verilsin. $t > 0$ için

$$s(x) := \int_0^x f(u)du$$

ve

$$\sigma(t) := \frac{1}{p(t)} \int_0^t s(x)dp(x)$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $\lim_{x\to\infty} s(x) = L$ limiti varsa, $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = L$ limitinin de var olduğu biliniyor. Buradaki amaç tersinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşulları bulmaktır. Bu koşulların çoğu eşitsizlik şeklinde ifade edilmiştir.

Kompleks değerli fonksiyonlarda iki taraflı Tauber tipi koşullar, reel değerli fonksiyonlarda tek taraflı Tauber tipi koşullar gösterilmiştir. İyi bilinen Schmidt (1925) anlamında yavaş azalan, Hardy (1910) anlamında yavaş salınımlı Tauber koşulları ve Landau (1910) tipi Tauber koşulları gibi özel durumlar bulunmuştur.

3.1. R₊'da Ağırlıklı Ortalama Toplanabilir İntegraller

$0 \neq p : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$, $p(0) = 0$ ve her $\lambda > 1$ için

(3.1.1) $$\lim\,\inf_{t\to\infty} p(\lambda t)/p(t) > 1$$

koşullarını gerçekleyen azalmayan bir fonksiyon olsun. Buradan $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ limiti elde edilir.

Reel ya da kompleks değerli bir f fonksiyonu verilsin. $0 < t < \infty$ için $(0, t)$ sonlu aralığında $f \in L^1_{loc}$ (R₊) Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. (t yeterince büyük ise (3.1.1)'den) $p(t) > 0$ olmak üzere

(3.1.2) $$s(x) := \int_0^x f(u)du \quad \text{ve} \quad \sigma(t) := \frac{1}{p(t)} \int_0^t s(x)dp(x)$$

dir.

(3.1.2)'deki ikinci integral Riemann-Stieltjes anlamında mevcuttur.

Eğer

(3.1.3) $$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = L$$

limiti mevcut ise $\int_0^\infty f(x)dx$ integraline (p fonksiyonu ile tanımlanan ağırlıklı ortalama ile) toplanabilirdir denir.

Eğer sonlu

(3.1.4) $$\lim_{x\to\infty} s(x) = L$$

limiti varsa (R_+'da f'nin belirsiz integrali yakınsak ise) (3.1.3) limitinin de var olduğunu kontrol etmek kolaydır. Genelde tersi doğru değildir.

Not 3.1.1 Bununla beraber reel değerli bir f fonksiyonu R_+'da sabit işaretli ise (3.1.3) ve (3.1.4) eşittir. Gerçekten bu Fubini teoremiyle (3.1.2)'den elde edilir.

$$\sigma(t) = \frac{1}{p(t)} \int_0^t dp(x) \int_0^x f(u)du = \int_0^t f(u) \left(1 - \frac{p(u)}{p(t)}\right) du$$

dur.

$(C, 1)$ toplanabilmenin özel durumu olan $p(t) = t$ uygun seçiminden Hardy (1949) ve Titchmarsh (1937) söz etmiştir.

3.2. Ana Sonuçlar

İlk olarak, reel değerli f fonksiyonları göz önünde bulundurulacaktır ve aşağıdaki tek taraflı Tauber tipi koşullar ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.1 *$f \in L^1_{loc}$ (R_+) reel değerli bir fonksiyon ve (3.1.3) mevcut olsun. (3.1.4)'ün mevcut olması için gerek ve yeter koşullar*

(3.2.1) $$sup_{\lambda>1} \lim\ inf_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x)-s(t)]dp(x) \geq 0$$

ve

(3.2.2) $$sup_{0<\lambda<1} \lim\ inf_{t\to\infty} \frac{1}{p(t)-p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t)-s(x)]dp(x) \geq 0$$

dır.

Eğer

(3.2.3) $$\lim_{\lambda\to 1^+} \lim\ \inf_{t\to\infty} \min_{t\leq x\leq \lambda t}[s(x)-s(t)] \geq 0$$

ise R_+'da tanımlı reel değerli $s(x)$ fonksiyonuna yavaş azalandır denir. Diğer bir ifadeyle (3.2.3), her $\varepsilon > 0$ için $t_1 \leq t \leq x \leq \lambda_1 t$ olduğunda

$$s(x)-s(t) \geq -\varepsilon$$

olacak şekilde $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 1$ ve $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ vardır.

'Yavaş azalanlık' kavramı reel sayı dizileri için Schmidt (1925) tarafından tanıtılmıştır.

Not 3.2.1 (3.2.3) koşulu eşdeğer olarak aşağıdaki gibi tekrar ifade edilerek doğruluğu kontrol edilebilir.

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \lim\ \inf_{t\to\infty} \min_{\lambda t\leq x\leq t}[s(t)-s(x)] \geq 0$$

dır.

Böylece Teorem 3.2.1'in aşağıdaki sonucu açıktır.

Sonuç 3.2.1 *$f \in L^1_{loc}$ (R_+) reel değerli bir fonksiyon olsun. (3.1.3) mevcut ve $s(x)$ integral fonksiyonu yavaş azalan ise (3.1.4) mevcuttur.*

Not 3.2.2 Eğer $H > 0$ ve $t_1 > 0$ sabitleri mevcut ise (3.2.3) koşulu kesinlikle gerçeklenir. O halde her $t > t_1$ için, (3.2.4) $$tf(t) \geq -H$$

dir. Gerçekten her $t_1 < t < x < \infty$ için

$$s(x) - s(t) = \int_t^x f(u)du \geq -H \int_t^x \frac{du}{u} = -H \ln \frac{x}{t}$$

dir. O zaman $t > t_1$ ve $\lambda > 1$ için

$$\min_{t \leq x \leq \lambda t}[s(x) - s(t)] \geq -H \ln \lambda$$

elde edilir.

λ, 1'e yeteri kadar yakın seçilirse (3.2.3) eşitsizliği gerçeklenir. (3.2.4) koşulunun Landau (1910) tarafından tanıtılan reel sayı dizilerine benzer olduğu görülür.

Not 3.2.3 Teorem 3.2.1'de (3.2.1) ve (3.2.2) koşullarının genelde birbirinden bağımsız olduğunu gösteren bir örnek mevcuttur. (F. Móricz ve Z. Németh, 2000)

Not 3.2.4 Bölüm 3.3'teki Teorem 3.2.1'in ispatı öne sürülen ispat ile kolaylıkla değiştirilebilir. Eğer (3.2.1) ve (3.2.2) koşulları simetrik eşdeğerleriyle değiştirilirse Teorem 3.2.1 yine doğrudur.

$$\inf_{\lambda > 1} \lim\ \sup_{t \to \infty} \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dp(x) \leq 0$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \lim\ \sup_{t \to \infty} \frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dp(x) \leq 0.$$

İkinci olarak, f'nin kompleks değerde olduğu daha genel durumda göz önünde bulunduruldu. Buradan aşağıdaki iki taraflı Tauber tipi teorem ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.2 *$f \in L^1_{loc}$ (R_+) kompleks değerli bir fonksiyon olsun ve (3.1.3) mevcut olsun. (3.1.4)'ün de mevcut olması için gerek ve yeter koşul*

(3.2.5) $$inf_{\substack{0<\lambda<\infty \\ \lambda \neq 1}}\ lim\ sup_{t \to \infty} \left| \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dp(x) \right| = 0$$

dır.

Eğer

(3.2.6) $$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le \lambda t} |s(x) - s(t)| = 0$$

ise R₊'da tanımlı $s(x)$ fonksiyonuna yavaş salınımlıdır denir.

'Yavaş salınımlılık' kavramı reel sayı dizileri için Hardy (1910) tarafından tanıtılmıştır. (3.2.6) koşulunun aşağıdakine eşdeğer olduğunu kontrol etmek kolaydır. (NOT 3.2.1)

$$\lim_{\lambda\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \max_{\lambda t\le x\le t} |s(t) - s(x)| = 0\,.$$

Sonuç 3.2.2 *Eğer $f \in L^1_{loc}$ (R_+) kompleks değerli bir fonksiyon ve (3.1.3) mevcut olsun. $s(x)$' in integral fonksiyonu yavaş salınımlı ise (3.1.4)'te mevcuttur.*

Not 3.2.5 Eğer $H > 0$ ve $t_1 > 0$ sabitleri için her $t > t_1$ olduğunda

$$|tf(t)| \le H$$

ise (3.2.6) koşulu kesinlikle gerçeklenir.

Not 3.2.6 (3.1.1) koşulunun Teorem 3.2.1 ve 3.2.2'nin ispatında önemli olduğu görünmektedir. Örneğin $p(t) := t^{\alpha}(\log(1+t))^{\beta}$ olduğunda eğer $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathrm{R}$ ise (3.1.1) gerçeklenir, ama $\alpha = 0$ ve $\beta > 0$ ise gerçeklenmez. $p(t) := t$ özel durumunda bilinen Cesaro $(C, 1)$ toplanabilirlik tekrar elde edilir. Bu özel durumda Teorem 3.2.1 ve 3.2.2 F. Móricz ve Z. Németh (2000) tarafından ispatlanmıştır.

3.3. İspatlar

Aşağıdaki Lemma ile başlanacaktır. Lemma, eğer (3.1.3) mevcutsa $s(x)$'in ağırlıklı ortalamalarının da aynı limite yakınsadığını belirtir.

Lemma 3.3.1 *Kompleks değerli bir $f \in L^1_{loc}$ (R_+) fonksiyonu için eğer (3.1.3)'teki sonlu limit mevcut ise her $0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$ olmak üzere*

(3.3.1) $$lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)} \int_t^{\lambda t} s(x)dp(x) = L$$

dir.

İspat. $\lambda > 1$ durumu. Tanımla

$$\frac{1}{p(\lambda t)-p(t)}\int_t^{\lambda t} s(x)dp(x) = \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)}[p(\lambda t)\sigma(\lambda t) - p(t)\sigma(t)]$$

$$= \sigma(\lambda t) + \frac{p(t)}{p(\lambda t)-p(t)}[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \tag{3.3.2}$$

dir. (3.1.1) ile her $\lambda > 1$ için

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t)-p(t)} = \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{p(\lambda t)}{p(t)} - 1\right]^{-1} < \infty$$

elde edilir. Buradan (3.3.1), (3.1.3) ve (3.3.2)'den elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ durumu. Tanımla,

$$\frac{1}{p(t)-p(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t} s(x)dp(x) = \frac{1}{p(t)-p(\lambda t)}[p(t)\sigma(t) - p(\lambda t)\sigma(\lambda t)]$$

$$= \sigma(t) + \frac{p(\lambda t)}{p(t)-p(\lambda t)}[\sigma(t) - \sigma(\lambda t)]. \tag{3.3.3}$$

(3.1.1) ile, her $0 < \lambda < 1$ için $\left(\frac{1}{\lambda} > 1\right)$

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{p(\lambda t)}{p(t)-p(\lambda t)} = \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t)} - 1\right]^{-1} < \infty$$

elde edilir. Buradan (3.3.1), (3.1.3) ve (3.3.3)'ten elde edilir.

Teorem 3.2.1'in ispatı.

Gereklilik.

(3.1.4) gerçeklensin. (Buradan (3.1.3) mevcuttur.) $\lambda > 1$ keyfi olsun. Lemma 3.3.1'den

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)}\int_t^{\lambda t}[s(x) - s(t)]dp(x) \tag{3.3.4}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)} \int_t^{\lambda t} s(x)dp(x) - \lim_{t\to\infty} s(t) = L - L = 0.$$

Bu (3.2.1)'i güçlü bir şekilde ispatlar. $0 < \lambda < 1$ durumunda aynı yolla (3.2.2) daha güçlü olan

(3.3.5) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t)-p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dp(x) = 0$$

bulunur.

Yeterlilik.

Burada (3.1.3), (3.2.1) ve (3.2.2) gerçeklensin. (3.1.4) ispatlanacaktır. O halde $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (3.2.1) ile $\lambda_1 > 1$ olduğunda

(3.3.6) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda_1 t)-p(t)} \int_t^{\lambda_1 t} [s(x) - s(t)]dp(x) \geq -\varepsilon$$

dur. (3.2.2) ile $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ olduğunda

(3.3.7) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{p(t)-p(\lambda_2 t)} \int_{\lambda_2 t}^{t} [s(t) - s(x)]dp(x) \geq -\varepsilon$$

dur. (3.1.3), (3.3.6) ve Lemma 3.3.1 ile

$$-\varepsilon < \lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda_1 t} s(x)dp(x) - \limsup_{t\to\infty} s(t)$$

$$= L - \limsup_{t\to\infty} s(t)$$

elde edilir. (3.1.3), (3.3.7) ve Lemma 3.3.1 ile

$$-\varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t) - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t) - p(\lambda_2 t)} \int_{\lambda_2 t}^{t} s(x)dp(x)$$

$$= \liminf_{t\to\infty} s(t) - L$$

elde edilir. Son iki eşitsizlikten

$$L - \varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} s(t) \leq L + \varepsilon$$

dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ε yeterince küçük seçilirse (3.1.4) elde edilir.

Teorem 3.2.2'nin ispatı.

Gereklilik.

(3.1.4) gerçeklensin. Teorem 3.2.1'in ispatının gereklilik kısmına benzer yolla eğer $\lambda > 1$ ise (3.3.4) ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise (3.3.5) hesaplanır.

Yeterlilik.

(3.1.3) ve (3.2.5) gerçeklensin. (3.1.4) ispatlanacaktır. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (3.2.5) ile $0 < \lambda_1 < \infty$, $\lambda_1 \neq 1$ olduğundan

$$L_1 = \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{p(\lambda_1 t) - p(t)} \int_t^{\lambda_1 t} [s(x) - s(t)]dp(x) \right| \leq \varepsilon \tag{3.3.8}$$

dur. Örneğin, $\lambda_1 > 1$ olsun. (3.1.3), (3.3.8) ve Lemma 3.3.1 ile

$$\begin{aligned} &\limsup_{t\to\infty} |L - s(t)| \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \left| L - \frac{1}{p(\lambda_1 t) - p(t)} \int_t^{\lambda_1 t} s(x)dp(x) \right| + L_1 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

hesaplanabilir.

$\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Böylece (3.1.4) elde edilir. (3.3.8) de $0 < \lambda_1 < 1$ durumunda (3.1.4)'ün ispatı benzerdir. (Teorem 3.2.1'in yeterlilik kısmının ispatı)

Not 3.3.1 Teorem 3.2.1 ve 3.2.2'nin ispatlarından elde edilenlerle aşağıdaki hesaplanabilir.

Sonuç 3.3.1 *(i) Reel değerli bir* $f \in L^1_{loc}$ (R_+) *fonksiyonu için (3.1.3), (3.2.1) ve (3.2.2) mevcut ise, her* $\lambda > 1$ *için (3.3.4) ve her* $0 < \lambda < 1$ *için (3.3.5) mevcuttur.*

(ii) Kompleks değerli bir $f \in L^1_{loc}$ (R_+) *fonksiyonu için (3.1.3) ve (3.2.5) mevcut ise her* $\lambda > 1$ *için (3.3.4) ve her* $0 < \lambda < 1$ *için (3.3.5) mevcuttur.*

4. R_+ DA AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLİR İNTEGRALLER İÇİN GEREK VE YETER TAUBER TİPİ KOŞULLAR II

Ağırlıklı ortalama metodu tarafından toplanabilen R_+ üzerinde Lebesgue anlamında yerel integrallenebilen fonksiyonlar için yakınsaklığın elde edilebildiği gerek ve yeter Tauber koşulları ispatlanacaktır. Bu çalışmanın literatürdeki sonuçları bütün ağırlıklı ortalama metotlarını uygulamak ve özel metotlar için birleştirmektir. Teoremlerdeki koşullar reel değerli fonksiyonlar için yavaş azalanlık koşulunun ya da kompleks değerli fonksiyonlar için yavaş salınımlılık koşulunun kolay sonuçlarıdır. Bundan dolayı, bütün klasik tek taraflı ve iki taraflı Tauber koşulları ağırlıklı ortalama metotları için her iki ana teoremin sonuçlarıdır.

4.1. R_+ Üzerinde Ağırlıklı Ortalama Metodu İle İntegrallarin Toplanabilmesi

P, $R_+ := [0, \infty)$ üzerinde tanımlanan,

(4.1.1) $\quad P$; R_+ da azalmayan, $P(0) = 0$ ve $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. P, R_+ üzerinde bir pozitif Borel ölçüsünden dolayı bir ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Her $(0, t)$, $0 < t < \infty$ sonlu aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar $f \in L^1_{loc}$ (R_+) ile gösterilecektir. $f : R_+ \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $P(t) > 0$ olmak üzere

(4.1.2) $\quad s(x) := \int_0^x f(y)dy \quad$ ve $\quad \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x)$

fonksiyonları tanımlanacaktır. $\sigma(t)$ tanımında verilen integral Riemann-Stieltjes integrali anlamındadır.

Şimdi; σ, s integalinin ağırlıklı ortalaması olarak adlandırılır ve

(4.1.3) $\quad \int_0^\infty f(x)dx$

integrali P ağırlık fonksiyonu ile belirlenen ağırlıklı ortalama metodu ile toplanabilirdir denir.

Kısaca

(4.1.4) $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = L$

sonlu limiti mevcut ise (W,P) toplanabilir denir.

Eğer

(4.1.5) $\lim_{x\to\infty} s(x) = L$

limiti mevcut ise (diğer bir ifadeyle: eğer $\int_0^{\to\infty} f(x)dx$ belirsiz integrali yakınsak ise) (4.1.4) limiti de aynı L sayısına yakınsar. Fakat genelde tersi doğru değildir.

Fakat, eğer reel değerli bir $f \in L^1_{loc}$ (R₊) fonksiyonu R₊ üzerinde sabit işaretli ise (4.1.4) ve (4.1.5) limitleri eşittir. Gerçekten bu iddia Fubini Teoremi ve (4.1.2) uygulanarak

(4.1.6) $\sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t \{\int_0^x f(y)dy\} dP(x) = \int_0^t f(y) \left\{1 - \frac{P(y)}{P(t)}\right\} dy$

eşitliği elde edilir. Özellikle $f(t) \geq 0$ durumunda her $t > 0$ için $\sigma(t) \leq s(t)$ dir. $\lim_{t\to\infty} s(t) = \infty$ olduğu düşünülür ise (4.1.1) ve (4.1.6) ile $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$ olması gerekir. Bu da (4.1.4) ve (4.1.5)'in eşit olduğu iddiasını ispatlar.

(4.1.3) integralinin (W,P) toplanabilmesi $0 < x_0 < \infty$ olmak üzere $(0, x_0)$ sonlu aralığındaki $f(x)$ değerlerine bağlı olmadığı da açıktır. Fakat, (4.1.4)'teki L limit değeri (eğer mevcut ise) bütün R₊ yarı ekseninde düşünülen f değerlerine bağlıdır.

Özel bir durum olan birinci mertebeden Cesàro metodu, kısaca: $P(x) := x$ özel seçimi ile Hardy (1949) ve Titchmarsh (1937) tarafından çalışılan $(C,1)$ toplanabilme karşılık gelir. P'nin (kesin) artan ve (4.1.1) ile kesin sürekli bir fonksiyon olduğu durumu Karamata (1937) incelemiştir. Tauber koşulları olarak adlandırılan bu koşulları sadece (4.1.4)⇒(4.1.5) gerektirmesi için bulunmuştur, yani (W,P) toplanabilmesinden (4.1.3) integralinin yakınsaklığı sonuç için sadece yeter koşullardır.

4.2. Temel Sonuçlar

Buradaki amaç verilen ağırlıklı ortalama metoduyla (4.1.3) integralinin toplamından yakınsaklığının elde edileceği gerek ve yeter koşulları bulmaktır.

Bu sonuçlardan ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak verilen üst ve alt kabul edilen fonksiyonlar tanıtılacaktır. $\rho : R_+ \to R_+$ kesin artan ve $\rho(t) \to \infty$ $t \to \infty$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\text{(4.2.1)} \qquad \lim\, \inf_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} > 1$$

ise ρ, P'ye bağlı üst kabul edilen fonksiyon olarak adlandırılır.

Benzer olarak, eğer

$$\text{(4.2.2)} \qquad \lim\, \inf_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t))} > 1$$

ise ρ, P'ye bağlı alt kabul edilen fonksiyon olarak adlandırılır. Sırasıyla üst ve alt kabul edilen fonksiyon sınıfları Λ_u ve Λ_ℓ ile gösterilecektir.

Reel değerli f fonksiyonu için aşağıdaki tek taraflı Tauber teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.1 *P, (4.1.1) koşulunu gerçeklesin ve* $f : R_+ \to R_+$, $f \in L^1_{loc}\,(R_+)$ *olsun.* (W, P) *toplanabilmesinden (4.1.3) integralinin aynı limite yakınsaklığının elde edilebilmesi için gerek ve yeter koşullar*

$$\text{(4.2.3)} \qquad sup_{\rho\in\Lambda_u} lim\ inf_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t))-P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \geq 0$$

ve

$$\text{(4.2.4)} \qquad sup_{\rho\in\Lambda_\ell} lim\ inf_{t\to\infty} \frac{1}{P(t)-P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \geq 0$$

dır.

(4.2.3) ve (4.2.4) koşullarının doğrulanması için sırasıyla uygun $\widetilde{\Lambda_u} \subset \Lambda_u$ ve $\widetilde{\Lambda_\ell} \subset \Lambda_\ell$ alt sınıflarının yeterli olduğu açıktır. Devamında üç önemli özel durumda uygun alt sınıflar gösterilecektir.

(i) Karamata (1937) tarafından bildirildiğine göre;

$0 \leq t_0 \leq \infty$ olmak üzere P, $P(t_0) = 0$ koşulunu gerçekleyen,

(4.2.5) $[t_0, \infty)$ aralığında kesin artan ve sürekli olsun.

P^{-1} ile gösterilen P'nin tersi de mevcuttur ve R₊'da artan ve süreklidir. O zaman bu alt sınıflar

$$\widetilde{\Lambda_u} := \{\rho_\lambda(t) := P^{-1}(\lambda P(t)) : \lambda > -1\}$$

ve

$$\widetilde{\Lambda_\ell} := \{\rho_\lambda(t) := P^{-1}(\lambda P(t)) : 0 < \lambda < 1\}$$

uygundur.

Eğer

(4.2.6) $$T := P^{-1}(\lambda P(t)), \qquad t > 0$$

olacak şekilde

(4.2.7) $$\lim_{\lambda \to 1^+} \liminf_{t \to \infty} \min_{t \leq x \leq T} \{s(x) - s(t)\} \geq 0$$

ise $s : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ fonksiyonuna P'ye bağlı yavaş azalandır denir.

'Yavaş azalanlık' kavramı reel sayı dizileri için Schmidt (1925) tarafından tanıtılmıştır. Reel değerli fonksiyonlar için (4.2.7) tanımı Karamata (1937) tarafından tanıtılmıştır. (4.2.3) koşulunun (4.2.7)'nin aşikâr bir sonucu olduğu açıktır.(4.2.7) koşulunun T, (4.2.6)'da tanımlanmış olmak üzere

(4.2.8) $$\lim_{\lambda \to 1^-} \liminf_{t \to \infty} \min_{T \leq x \leq t} \{s(t) - s(x)\} \geq 0$$

koşuluna eşit olduğuna dikkat edilmelidir.

Bu iddia Bölüm 4.3'te ispatlanacaktır. (Lemma 4.3.1)

Diğer taraftan, (4.2.3) ve (4.2.4) koşulları genelde birbirlerinden bağımsızdır. Bölüm 4.3'te Lemma 4.3.2 den sonra bir örnek verilecektir.

Şimdi Bölüm 4.3'te Lemma 4.3.1 ile birlikte Teorem 4.2.1, Karamata tarafından (1935)'te ispatlanan teoreme karşılık olarak aynı doğru boyunca ispatlanan Karamata'nın teoremini sağlar.

Sonuç 4.2.1 *P, (4.2.5)'i gerçeklesin.* $f : R_+ \to R$ *ve* $f \in L^1_{loc}\ (R_+)$ *olsun. Eğer (4.1.2)'de tanımlanan s, P'ye göre yavaş azalan ise,* (W, P) *toplanabilmeden (4.1.3) integrali de aynı limite yakınsar.*

(ii) P ağırlık fonksiyonu (4.1.1)'i gerçekler ve her $\lambda > 1$ için

(4.2.9) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\lambda t)}{P(t)} > 1$$

ise

$$\widetilde{\Lambda_u} := \{\rho_\lambda(t) := \lambda t : \lambda > 1\} \quad \text{ve} \quad \widetilde{\Lambda_\ell} := \{\rho_\lambda(t) := \lambda t : 0 < \lambda < 1\}$$

alt sınıfları uygundur.

Bu özel durum F. Móricz (2004) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

(iii) Üçüncü örnek,

(4.2.10) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(t^\lambda)}{P(t)} > 1, \quad \text{her } \lambda > 1$$

olacak şekilde P (4.1.1)'i sağlar ise, bu durumda

$$\widetilde{\Lambda_u} := \{\rho_\lambda(t) := t^\lambda : \lambda > 1\} \quad \text{ve} \quad \widetilde{\Lambda_\ell} := \{\rho_\lambda(t) := t^\lambda : 0 < \lambda < 1\}$$

alt sınıflar uygundur.

Bölüm 4.3'te Teorem 4.2.1 in ispatı incelendiğinde (4.2.3) ve (4.2.4) koşullarının yerine simetrik karşıtları olan

$$\inf_{\rho\in\Lambda_u} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \le 0$$

ve

$$\inf_{\rho\in\Lambda_\ell} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \le 0$$

koşulları yazıldığında Teorem 4.2.1 gerçeklenir.

P ağırlık fonksiyonunun (4.2.1)'i sağladığı özel durumda yukarıdaki iki koşul (4.2.6)'da tanımlanan T için

(4.2.11) $$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le T}\{s(x)-s(t)\} \le 0$$

özelliğini gerektirir. (4.2.11) özeliği ile $s : R_+ \to R$ fonksiyonu P'ye göre yavaş artandır denir.

Bu iddia; (4.2.11) koşulunun gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart $(-s)$ nin yavaş azalan olması ve dolayısıyla Lemma 4.3.1 ve özellikten (4.2.11)

$$\lim_{\lambda\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \max_{T\le x\le t}\{s(t)-s(x)\} \le 0$$

koşuluna denktir.

Kompleks değerli f fonksiyonları için aşağıdaki iki taraflı Tauber teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.2 *P, (4.1.1)'i doğrulasın, $f : R_+ \to R$ ve $f \in L^1_{loc}$ (R_+) olsun. (W,P) toplanabilmesinden (4.1.3) integralinin aynı limite yakınsaması için gerek ve yeter koşul*

(4.2.12) $$inf_{\rho\in\Lambda_u}\, lim\ sup_{t\to\infty}\left|\frac{1}{P(\rho(t))-P(t)}\int_t^{\rho(t)}\{s(x)-s(t)\}dP(x)\right| = 0$$

ya da

(4.2.13) $$inf_{\rho\in\Lambda_\ell}\, lim\ sup_{t\to\infty}\left|\frac{1}{P(t)-P(\rho(t))}\int_{\rho(t)}^{t}\{s(t)-s(x)\}dP(x)\right| = 0$$

koşullarından birinin gerçeklenmesidir.

Teorem 4.2.1'deki durum gibi, sırasıyla uygun bazı $\widetilde{\Lambda_u} \subset \Lambda_u$ ya da $\widetilde{\Lambda_\ell} \subset \Lambda_\ell$ alt sınıfları için (4.2.12) ya da (4.2.13) koşullarını doğrulamak yeterlidir.

Örneğin, (4.2.5) koşulu sağlanmak üzere P ağırlık fonksiyonu eğer; T, (4.2.6)'da tanımlanmış olmak üzere

(4.2.14) $$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le T}|s(x)-s(t)| = 0$$

ise $s : \mathrm{R}_+ \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna P'ye bağlı yavaş salınımlıdır denir. 'Yavaş salınımlılık' kavramı Hardy (1910) tarafından sayı dizileri için tanıtılmıştır. Fonksiyonlar için (4.2.14) Karamata tarafından (1937) tanıtılmıştır.

Aşağıdaki Karamata teoremi, Teorem 4.2.2'nin bir sonucudur.

Sonuç 4.2.2 *P, (4.2.5)'i gerçeklesin ve $f : R_+ \to \mathbb{C}$, $f \in L^1_{loc}$ (R_+) olsun. Eğer (4.1.2)'de tanımlanan s, P'ye bağlı yavaş salınımlı ise (W, P) toplanabilmeden (4.1.3) integrali aynı limite yakınsar.*

(4.2.14), aynı yolla

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \lim\, \sup_{t\to\infty} \max_{T\leq x\leq t} |s(t) - s(x)| = 0$$

koşuluna eşit olduğu ispatlanabilir.

4.3. İspatlar

Aşağıdaki Lemma Sonuç 4.2.1'in ispatında önemli bir rol oynar.

Lemma 4.3.1 *Herhangi bir $s : R_+ \to R$ fonksiyonu için (4.2.7) ve (4.2.8) eşittir.*

İspat. İlk olarak, (4.2.7) nin gerçeklendiği düşünülecektir. O halde; her $\varepsilon > 0$ için $t_1 \leq t \leq x \leq P^{-1}(\lambda_1 P(t))$ olmak üzere

(4.3.1) $$s(x) - s(t) \geq -\varepsilon$$

olacak şekilde $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 1$ ve $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ olacak şekilde sayıları mevcuttur.

Buradaki amaç, t_2 yeterince küçük seçildiğinde $P^{-1}\left(\lambda_1^{-1} P(t_2)\right) \geq t_1$ olduğunda

(4.3.2) $$P^{-1}\left(\lambda_1^{-1} P(t)\right) \leq x \leq t \quad \text{ve} \quad t \geq t_2$$

koşulu altında $s(t) - s(x)$ arasındaki minimum farkı hesaplamaktır. Açıkça, (4.3.2)'den

$$t_1 \leq x \qquad \text{ve} \qquad t \leq P^{-1}(\lambda_1 P(x))$$

elde edilir.

Böylece (4.3.1)'den
$s(t) - s(x) \geq \min_{x \leq \tau \leq t}\{s(\tau) - s(x)\} \geq \min_{x \leq \tau \leq P^{-1}(\lambda_1 P(x))}\{s(\tau) - s(x)\} \geq -\varepsilon$

olur. Bu (4.3.2)'deki her t ve x için doğrudur. Sonuç olarak, $t \geq t_2$ iken

$$\min_{P^{-1}\left(\lambda_1^{-1} P(t)\right) \leq x \leq t}\{s(t) - s(x)\} \geq -\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi küçük olduğundan (4.2.8)'de sağlanır.

İkinci olarak, (4.2.8) gerçeklendiği düşünülsün. Yukarıdakilere benzer yolla (4.2.7) elde edilebilir.

Daha sonra, (4.1.3) integrali sonlu bir limite (W, P) toplanabilir ise P'ye göre hareketli ağırlıklı ortalamalar da aynı limite yakınsadığı ispatlanabilir. Bunun için aşağıdaki Lemma verilecektir.

Lemma 4.3.2 *P, (4.1.1)'i gerçeklesin ve* $f: R_+ \to \mathbb{C}$ $f \in L^1_{loc}$ (R_+) *olsun. (4.1.4) teki sonlu L limiti olmak üzere eğer* $\rho \in \Lambda_u$ *ise*

(4.3.3) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} s(x)\,dP(x) = L;$$

$\rho \in \Lambda_\ell$ *ise*

(4.3.4) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} s(x)\,dP(x) = L$$

dir.

İspat. (i) $\rho \in \Lambda_u$ olsun. (4.1.2) ile,

(4.3.5) $$\frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} s(x)\,dP(x) = \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)}\{P(\rho(t))\sigma(\rho(t)) - P(t)\sigma(t)\}$$
$$= \sigma(\rho(t)) + \frac{P(t)}{P(\rho(t)) - P(t)}\{\sigma(\rho(t)) - \sigma(t)\}.$$

(4.2.1) ile,

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t)) - P(t)} = \left\{\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} - 1\right\}^{-1} < \infty$$

dur.

Şimdi, (4.3.3), (4.1.1) ve (4.3.5)'den elde edilir.

(ii) $\rho \in \Lambda_\ell$ olsun. (4.1.2) ile,

$$\frac{1}{P(t)-P(\rho(t))}\int_{\rho(t)}^{t} s(x)dP(x) = \sigma(t) + \frac{P(\rho(t))}{P(t)-P(\rho(t))}\{\sigma(t) - \sigma(\rho(t))\} \tag{4.3.6}$$

dir.

(4.2.2) ile,

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t) - P(\rho(t))} = \left\{\liminf_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t))} - 1\right\}^{-1} < \infty$$

dur. (4.3.4), (4.1.1) ve (4.3.6)'dan elde edilir.

Örnek 4.3.1 Teorem 4.2.1'de birbirinden bağımsız olan (4.2.3) ve (4.2.4) koşullarının $(C,1)$ toplanabilme durumunda basit bir örnek olduğu gösterilmiştir. Aşağıdaki fonksiyona bakılır ise,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad 2^n \leq x < 2^n+1, \\ 0 & , \quad 2^n+1 \leq x < 2^n+2, \\ -1 & , \quad 2^n+2 \leq x < 2^n+3, \\ 0 & , \quad R_+ \text{ üzerinde diğer} \end{cases} \quad n = 2,3,\dots;$$

dir.

İlk hesaplama (4.1.5)'teki limitin olmadığını, fakat (4.1.4)'teki limitin mevcut ve 0 olduğunu gösterir. Bundan dolayı, Lemma 4.3.2 uygulanır. Bu durumda $P(x) := x$, dolayısıyla (4.2.9) koşulu sağlanır; $\rho_\lambda(t) := \lambda t$, $1 \neq \lambda > 0$ için uygun bir seçimdir. Sonuç olarak, her $\lambda > 1$ için

(4.2.3□) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{(\lambda-1)t}\int_t^{\lambda t}\{s(x) - s(t)\}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\lambda-1)t}\int_t^{\lambda t} s(x)dx - \limsup_{t\to\infty} s(t) = 0 - 1 = -1;$$

her $0 < \lambda < 1$ için

(4.2.4□) $$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{(1-\lambda)t}\int_{\lambda t}^{t}\{s(t) - s(x)\}dx$$

$$= \lim\, \inf_{t\to\infty} s(t) - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1-\lambda)t} \int_{\lambda t}^{t} s(x)dx = 0 - 0 = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1'in ispatı.

Gereklilik.

(4.1.3) integrali yakınsak olsun. O halde (4.1.5) koşulu gerçeklenir. Buradan (4.1.4)'te sağlanır. Keyfi $\rho \in \Lambda_u$ olarak alınsın. Lemma 4.3.2 ile

(4.3.7) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t))-P(t)} \int_{t}^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\}dP(x)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t))-P(t)} \int_{t}^{\rho(t)} s(x)dP(x) - \lim_{t\to\infty} s(t) = L - L = 0$$

elde edilir. Bu (4.2.3)'ü güçlü bir şekilde ispatlar.

Keyfi $\rho \in \Lambda_\ell$ durumunda, benzer yolla, (4.2.4)'ten daha güçlü olan

(4.3.8) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t)-P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\}dP(x) = 0$$

elde edilir.

Yeterlilik.

(4.1.3) integrali (W, P) toplanabilir olsun. (4.1.4) koşulu gerçeklenir ve (4.2.3) ile (4.2.4) koşulları da sağlansın. (4.1.5) ispatlanacaktır.

Bunlardan, $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (4.2.3) ve (4.2.4) tarafından

(4.3.9) $$\lim\, \inf_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho_1(t))-P(t)} \int_{t}^{\rho_1(t)} \{s(x) - s(t)\}dP(x) \geq -\varepsilon$$

ve

(4.3.10) $$\lim\, \inf_{t\to\infty} \frac{1}{P(t)-P(\rho_2(t))} \int_{\rho_2(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\}dP(x) \geq -\varepsilon$$

olacak şekilde bazı $\rho_1 \in \Lambda_u$ ve $\rho_2 \in \Lambda_\ell$ mevcuttur. (4.1.4), (4.3.9) ve Lemma 4.3.2 ile

$$-\varepsilon \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho_1(t)) - P(t)} \int_t^{\rho_1(t)} s(x)dP(x) - \limsup_{t\to\infty} s(t) = L - \limsup_{t\to\infty} s(t)$$

elde edilirken; (4.1.4), (4.3.10) ve Lemma 4.3.2 ile

$$-\varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t) - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho_2(t))} \int_{\rho_2(t)}^{t} s(x)dP(x) = \liminf_{t\to\infty} s(t) - L$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik birleştirilerek

$$L - \varepsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t) \leq \limsup_{t\to\infty} s(t) \leq L + \varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi küçük olduğundan (4.1.5) elde edilir.

Teorem 4.2.2'nin ispatı.

Gereklilik.

(4.1.3) integrali yakınsak olsun. Teorem 4.2.1'in ispatının gereklilik kısmına benzer yolla, eğer $\rho \in \Lambda_u$ ise (4.3.7) ve $\rho \in \Lambda_\ell$ ise (4.3.8) sonlandırılır.

Yeterlilik.

(i) (4.1.3) integrali sonlu bir L limitine (W, P) toplanabilir ve olsun ve (4.2.12) gerçeklensin. (4.1.5) ispatlanacaktır. Buradan $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (4.2.12) den

(4.3.11) $$L_1 := \lim\sup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{P(\rho_1(t))-P(t)} \int_t^{\rho_1(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \right| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $\rho_1 \in \Lambda_u$ mevcuttur. (4.1.4), (4.3.11) ve Lemma 4.3.2 ile

$$\limsup_{t\to\infty} |L - s(t)| \leq \lim_{t\to\infty} \left| L - \frac{1}{P(\rho_1(t)) - P(t)} \int_t^{\rho_1(t)} s(x)dP(x) \right| + L_1 \leq \varepsilon$$

şeklinde hesaplanır. Keyfi $\varepsilon > 0$ küçük olduğundan(4.1.5) elde edilir.

(ii) (4.2.3) koşulunun sağlandığı durumda, (4.1.5)'in ispatı (i)'deki durumla aynıdır.

4.4. Ağırlık Fonksiyonunun Özel Seçimleri

(i) Eğer her $x \in \mathrm{R}_+$ için $P(x) := x$ ise ağırlıklı ortalama metodu (W, P), $(C, 1)$ toplanabilme metodudur. Bu durum daha genel olan (4.2.9) durumu F. Móricz (2004) tarafından verilmiştir.

Reel durumda, eğer $H \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sabit olmak üzere her $x > x_0$ için

$$xf(x) \geq -H$$

ise (4.2.7)'de verilen yavaş azalanlık kesinlikle sağlanır. Reel sayı dizileri için, benzer koşul Landau (1910) tarafından tanıtılmıştır. Kompleks durumda klasik Tauber koşulu her $x > x_0$

$$|xf(x)| \leq H$$

(4.2.14)'te verilen yavaş salınımlılık koşulu sağlanır. Reel sayı dizileri için benzer koşulu Hardy (1910) tarafından tanıtılmıştır. Detaylar F. Móricz (2004) tarafından verilmiştir.

(ii) Eğer

$$P(x) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \log x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

ise (W, P) ağırlıklı ortalama metodu, harmonik ortalama metot (1. mertebeden) olarak adlandırılır. Móricz (2004) tarafından bildirildiğine göre; bu sonuçların uygulanamaz olduğu gözlemlenebilir. Çünkü (4.2.9) koşulu gerçeklenmez. Fakat, bu (4.2.10)'un tipik bir durumudur.

Şimdi, yavaş azalanlığın (4.2.7) koşulu

(4.4.1) $$\lim_{\lambda \to 1+} \lim\ \inf_{t \to \infty} \min_{\log t \leq \log x \leq \lambda \log t} \{s(x) - s(t)\} \geq 0$$

dır. Ayrıca, yavaş salınımlılığın (4.2.14) koşulu

(4.4.2) $$\lim_{\lambda \to 1+} \lim\ \sup_{t \to \infty} \min_{\log t \leq \log x \leq \lambda \log t} |s(x) - s(t)| = 0$$

dır. Bu iki koşul $H \geq 0$ ve $x_0 \geq 1$ sabit olmak üzere her $x > x_0$ için sırasıyla

(4.4.3) $$(x\log x)f(x) \geq -H$$

ve her $x > x_0$ için

(4.4.4) $$(x\log x)|f(x)| \leq H$$

lokal koşullarını gerektirir. (4.4.1)'i göstermek için, $\lambda > 1$ ve $1 < t \leq x \leq t^\lambda$ olsun. (4.4.3) ile

$$s(x) - s(t) = \int_t^x f(y)dy \geq -H\int_t^x \frac{dy}{y\log y} = -H\log\left(\frac{\log x}{\log t}\right) \geq -H\log\lambda$$

elde edilir. $\lambda \to 1+$ alındığında, (4.4.1) eşitsizliğini verir. Reel sayı dizileri için bir benzer koşul Kwee (1967) tarafından tanıtılmıştır.

(4.4.4) $\Longrightarrow$ (4.4.2) gerektirmesi benzer yolla yapılır.

(iii) Eğer

$$P(x) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < e \\ \log\log x & , \quad x \geq e \end{cases}$$

ise ağırlıklı ortalama metodu (W, P), ikinci mertebeden harmonik ortalama metodudur. O halde sırasıyla

$$\widetilde{\Lambda_u} := \{\rho_\lambda(t) := \exp(\log t)^\lambda : t \geq e\ , \lambda > 1\}$$

ve

$$\widetilde{\Lambda_\ell} := \{\rho_\lambda(t) := \exp(\log t)^\lambda : t \geq e\ , 0 < \lambda < 1\}$$

Λ_u ve Λ_ℓ alt sınıfları düşünülebilir.

Şimdi, (4.2.7) koşulu ile verilen yavaş azalanlık

$$\lim_{\lambda\to 1+}\liminf_{t\to\infty}\min_{\log\log t\leq\log\log x\leq\lambda\log\log t}\{s(x) - s(t)\} \geq 0$$

tarafından ve $H \geq 0$ ve $x_0 \geq e$ sabit olmak üzere her $x > x_0$ için

$$x(\log x)(\log\log x)f(x) \geq -H$$

lokal koşulundan elde edilir. Ayrıca, (4.2.14) koşulu ile verilen yavaş salınımlılık koşulu her $x > x_0$ için

$$x(\log x)(\log\log x)|f(x)| \leq H$$

lokal koşulu tarafından gerek koşul

$$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{\log\log t \leq \log\log x \leq \lambda \log\log t} |s(x) - s(t)| = 0$$

ile verilir.

(iv) Üçüncü dereceden harmonik ortalama metodu, ağırlık fonksiyonu anlamında tanımlanmıştır,

$$P(x) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < e^e \\ \log\log\log x & , \quad x \geq e^e \end{cases}$$

ve $m = 4,5, \ldots$, iken m. derece yukarıda verilen duruma benzer yolla gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Hardy, G. H. 1910. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. **Proc. London Mat. Soc.**, 2: 310-320 p.

Hardy, G. H. 1949. Divergent Series. Clarendon Press, 396 p., Oxford.

Karamata, J. 1935. Quelques théorèmes de nature Tauberienne relatifs aux intégrales et aux séries. **Bull. Acad. Serbe**, 2: 169-205.

Karamata, J. 1937. Sur Les Théorèmes Inverses des Procédés de Sommabilité. Hermann et Cie, Paris.

Kwee, B. 1967. A Tauberian theorem for the logarithmic method of summation. **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 63: 401-405.

Landau, E. 1910. Über die Bedeutung einiger neuerer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axel. **Prace Mat.-Fiz.**, 21: 97-177.

Móricz, F. 1994. Necessary and sufficient Tauberian conditions, under which convergence follows from summability $(C, 1)$. **Bull. London Math. Soc.**, 26: 288-294.

Móricz, F., Stadtmüller, U. 2001. Necessary and sufficient conditions under which convergence follows from summability by weighted means. **Intern. J. Math. Sci.**, 27: 399-406.

Móricz, F. 2004. Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over R_+. **Math. Ineq. & Appl., Zagreb,** 7: 87-93.

Schmidt, R. 1925. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. **Math. Z.**, 22: 89-152.

Titchmarsh, E. C. 1937. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Clarendon Press, Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Şükran YILDIZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Batman 13.01.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	: Adnan Menderes Üniversitesi
Yüksek Lisans Öğrenimi	: Adnan Menderes Üniversitesi
Bildiği Yabancı Diller	:

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
   -SCI
   -Diğer
b) Bildiriler
   -Uluslararası
   -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:

İLETİŞİM

E-posta Adresi	: sukranyildiz72@gmail.com
Tarih	: