ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2013-YL-043

TERS PROBLEMİ İÇİN VOLTERRA TİPİ İNTEGRAL DENKLEM UYGULAMASI

Nurhan AYBAR

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nurhan AYBAR tarafından hazırlanan "Ters Problemi İçin Volterra Tipi İntegral Denklem Uygulaması " başlıklı tez, 20.08.2013 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK	ADÜ Fen Ed. Fak.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ	ADÜ Fen Ed. Fak.	
Üye :	Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ	CBÜ Fen Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2013 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

20.08.2013

Nurhan AYBAR

ÖZET

TERS PROBLEMİ İÇİN VOLTERRA TİPİ İNTEGRAL DENKLEM UYGULAMASI

Nurhan AYBAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK
2013, 34 sayfa

Bu çalışmada fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemler için başlangıç değer problemi çalışılmıştır. Bu problemlerin çözümleri tekil çekirdeğe sahip 3-D Volterra tipi integral denklemlerini sağladığı ispatlanmıştır. İntegral denklemler yaklaşık ardışıklar yöntemiyle çözülmüştür. Hiperbolik bir denklem için ters problemi çalışmak amacıyla 3-D Volterra integral denklemin uygulaması verilmiştir. Bu tezde integral denklemin çözümü için varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Bu tezin sonuçları Sobolev'in bulduğu fonksiyon hızlı dalga denklemiyle ilgili sonuçları geliştirmiş ve genelleştirmiştir.

Anahtar Sözcükler
Ters problem, integral denklem, yaklaşık ardışıklar metodu.

ABSTRACT

APPLICATION OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATION FOR INVERSE PROBLEM

Nurhan AYBAR

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK
2013, 34 pages

Initial value problems for hyperbolic equations with function coefficients are considered in this thesis. It was proved that the solutions of these problems satisfy the 3-D Volterra integral equations with singular kernels. These 3-D Volterra integral equations were solved by the successive approximations. An application of 3-D Volterra integral equation to study one inverse problem for a hyperbolic equation was given. The existence and uniqueness theorems for the solution of an integral equation were proved in the thesis. The result of the thesis generalize and extend Sobolev's result relative to the wave equation with the function velocity.

Key Words
Inverse problem, integral equation, successive approximations.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince çalışmamın her aşamasında yardım, destek ve anlayışı için, değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam boyunca bana destek olan hocam Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL'e teşekkürlerimi sunarım.

Destek ve sevgileri ile hep benimle olan Eşime, Anneme, Babama ve Kardeşime teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Nurhan AYBAR

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

İntegral denklemler terimi ilk defa Du Bois-Reymoud tarafından 1883 yılında ele alınmıştır. İntegral denklemler bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmaktadır. İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişkene sahip ise Volterra integral denklemi, sınırlarından her ikisi birden sabit olan denklemlere de Fredholm integral denklemi denir. Tek boyutlu Volterra integral denklemi başlangıç değer koşuluna sahip diferansiyel denkleme indirgenmektedir. Örneğin

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u, \tag{1.0.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{1.0.2}$$

(1.0.1)'i x'e göre integralini alırsak

$$u(x) = u_0 + \int_0^x A(t)u(t)dt \tag{1.0.3}$$

olur.

Sabit katsayılı kısmi diferansiyel denklemler teorisinde yapılan çalışmalar oldukça yaygındır ([1], [3], [8], [9]). Sabit katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri aşikardır. Örneğin başlangıç değer koşullu bir D'Alembert denklemi D'Alembert integral denklemine dönüşür ve bu Cauchy problemi Kirchhoff formülü tarafından sunulmuştur fakat; fonksiyon katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümleri o kadar aşikar değildir. Bazı fonksiyon katsayılı diferansiyel denklemler integral denklemler çözümlerine dönüşebilir. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^3$'deki integral denklemlerin indirgenmesi ile ilgili şu iki örneği ele alalım:

İlk örnek aşağıdaki başlangıç değer problemi ile ilgilidir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u(x,\ t) + f(x,\ t), \quad x \in R, \quad t > 0 \tag{1.0.4}$$

$$u(x,\ 0) = \phi(x), \qquad u_t(x,\ 0) = \psi(x) \tag{1.0.5}$$

(1.0.4)-(1.0.5) denklemlerinin çözümü

$$u(x,\ t) = u_0(x,\ t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi,\ \tau)d\xi d\tau \tag{1.0.6}$$

$$u_0(x,\ t) = \frac{1}{2}[\phi(x-t)+\phi(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} F(\xi,\ \tau)d\xi d\tau$$

dür. (1.0.4)'nin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm, yaklaşık ardışıklar yöntemi ile çözülebilir. (1.0.6) denklemi düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t) \tag{1.0.7}$$

serisi ile çözülür.

İkinci örneğimiz dört değişkenli Klein-Gordon-Fock Volterra integral denkleminin indirgenmesi ile ilgilidir.

Kabul edelim ki

$$x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad h(x) \in C^1(\mathbb{R}^3),$$

$$f(x,\ t) \in C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,T]), \quad q(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$$

olsun.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + q(x,\ t)u(x,\ t) + f(x,\ t), \tag{1.0.8}$$

$$u(x,\ 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = h(x)$$

hiperbolik denklemi Kirchhoff integral denklemine dönüşür.

$$u(x,\ t) = G(x,\ t) + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|\xi-x|\le t} \frac{q(\xi)u(\xi,\ t-|\xi-x|)}{|\xi-x|}d\xi \tag{1.0.9}$$

Fonksiyon katsayılı lineer hiperbolik denklemler teorisi çok iyi geliştirilmiştir. Başlangıç değer probleminin zayıf ve klasik çözümleri için varlık ve teklik teoremleri bulunmaktadır ([1], [2]). Hiperbolik denklemlerin bazı özel durumları nümerik metodlar ters problem teorisi ve diğerleri için kullanışlıdır. Daha önce fonksiyon katsayılı Klein-Gordon-Fock denkleminin Volterra tipi integral denkleme indirgenmesini göstermiştik ve bu indirgeme ters problem çalışmasında kullanılmıştır [8]. Genelde fonksiyon katsayılı denklemlerin çözümleri daha karmaşıktır. Bununla birlikte fonksiyon katsayılı denklemlerin çözümleri 3 boyutlu Volterra integral denklemine indirgenebilir. Bu sonuçlar [9] Sobolev tarafından sunulmuştur.

Bu tezdeki temel amaç Sobolev'in ortaya koyduğu sonuçları diğer hiperbolik denklemlerede genellemektir. Bu çalışmadaki temel problem ve sonuçları şu şekilde özetleyebiliriz:

İkinci bölümde sabit katsayılı homojen ve homojen olmayan dalga denklemlerinin Volterra tipi integral denkleme indirgenmeleri, varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Yakınsaklık ve süreklilik durumları incelenmiştir.

Fonksiyon katsayılı homojen dalga denklemlerinin Volterra integral denkleme indirgenmesinde eikonal denklem tanımlanmıştır. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdeki sonuçlar, bu indirgemede ray, Euler sistemi aktif olarak kullanılmıştır. Geçiş denklemi yapılandırılmış, $\sigma(x) \in C^2(\mathbb{R})$ Sobolev fonksiyonunun özellikleri ele alınmıştır.

Fonksiyon katsayılı homojen olmayan hiperbolik denklemin Sobolev Volterra integral denkleme indirgenmesinde şu notasyonlar kullanılmıştır:

$x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, R^3'de bir değişkendir. $j = 1,\ 2,\ 3$ için $b_j(x),\ \ q(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$'de bir fonksiyondur.

$\Delta_x = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ bir Laplace operatörü olmak üzere

$$L_x \equiv \Delta_x + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^{3} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

operatörü L_x^*'ın bir ek operatörüdür.

İkinci bölümde ayrıca

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta_x u + \sum_{j=1}^{3} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x) \frac{\partial u}{\partial t} + f(x,\ t)$$

$$x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$$

denklemi aşağıdaki başlangıç koşulları ile ele alınmıştır.

$$u(x,\ 0) = g(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = h(x)$$

Bu bölümün temel amacı Cauchy probleminin çözümü ile ilgili temel özellikleri çalışmaktır.

Üçüncü bölümde ters problem tanımlanmıştır. Ters problemin temel sonucu aşağıdaki teoremdir:

$h(0,\ 0,\ x_3) \neq 0$, $i = 1,\ 2$ için $G(t)$ 'ye karşılık gelen $q_i(x_3)$ ters problemin çözümü olsun. Öyleyse $x_3 \in X$ olmak üzere $q_1(x_3) = q_2(x_3)$ dür.

2. SABİT VE FONKSİYON KATSAYILI DALGA DENKLEMLERİ

2.1. Sabit Katsayılı Homojen Dalga Denkleminin İndirgenmesi

Hiperbolik denklemler için dalga denklemi temsilci bir denklemdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

denklemine bir boyutlu dalga denklemi denir. x yer, t zamanı göstermektedir. Denklemin karakteristikleri $x \mp ct = sabit$ doğrularıdır. Eğer $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ değişken değişimi yapılırsa (2.1.2) $u_{\xi\eta} = 0$ denklemine dönüşür. Buradan C^2 sınıfından φ ve ψ fonksiyonları için $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$ veya

$$u(x,\ t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct), \qquad \varphi, \psi \in C^2 \tag{2.1.1}$$

elde edilir.

2.1.1. Homojen Dalga Denklemi İçin Başlangıç Değer Problemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t < \infty \tag{2.1.2}$$

$$u(x,\ 0) = f(x), \qquad u_t(x,\ 0) = g(x) \tag{2.1.3}$$

problemine *başlangıç değer problemi* denir. Bu problemin çözümünün var olduğunu varsayarsak bu çözüm (2.1.1) şeklindedir. Öyleyse (2.1.3) başlangıç şartlarının sağlanması için

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \tag{2.1.4}$$

$$u_t(x,0) = c(\varphi'(x) - \psi'(x)) = g(x) \tag{2.1.5}$$

olmalıdır. (2.1.5) kullanılarak

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau + k \tag{2.1.6}$$

elde edilebilir. Burada x_0 ve k keyfi sabitlerdir. (2.1.4) ve (2.1.6) denklemleri kullanılarak $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ bulunursa;

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau + \frac{k}{2}, \tag{2.1.7}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau + \frac{k}{2} \tag{2.1.8}$$

elde edilir ve $\varphi : x \to x+ct$ ve $\psi : x \to x-ct$ değişimi yapılırsa

$$\varphi(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(\tau)d\tau + \frac{k}{2}, \tag{2.1.9}$$

$$\psi(x-ct) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(\tau)d\tau + \frac{k}{2} \tag{2.1.10}$$

bulunur. (2.1.1) kullanılarak homojen dalga denklemi D'Alembert integral denklemine indirgenmiş olur.

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau. \tag{2.1.11}$$

2.2. Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Dalga Denkleminin İndirgenmesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\ u(x,\ t) = F(x,\ t),\ \ -\infty < x < \infty,\ \ 0 \le t < \infty \tag{2.2.12}$$

$$u(x,\ 0) = \phi(x), \qquad u_t(x,\ 0) = \psi(x) \tag{2.2.13}$$

problemine homojen olmayan dalga denklemi için başlangıç değer problemi denir. Burada $F(x,\ t)$, sonsuz uzaklıktaki bir cismi etkileyen dış kuvveti temsil eden bir fonksiyondur. (2.2.12)-(2.2.13) çözümü

$$u(x,\ t) = u_0(x,\ t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi,\ \tau)d\xi d\tau \tag{2.2.14}$$

$$u_0(x,\ t) = \frac{1}{2}[\phi(x-t)+\phi(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} F(\xi,\ \tau)d\xi d\tau$$

dür. Kabul edelim ki $F(x,\ t)$ $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$ yarı düzleminde sürekli olsun. $q(x) \in C(-\infty,\infty)$, $\phi \in C^2(-\infty,\infty)$, $\psi \in C'(-\infty,\infty)$, $F, F_t \in C(\Delta(x_0,\ t_0))$ ise $\Delta(x_0,\ t_0)$ bölgesinde (2.2.12)'in bir tek çözümü vardır ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemi ile çözülebilir. Bu taktirde;

$$\begin{aligned} u_0(x,\ t) &= f(x,\ t), & (2.2.15)\\ u_n(x,\ t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)u_{n-1}(\xi,\ \tau)d\xi d\tau & (2.2.16) \end{aligned}$$

olmak üzere (2.2.14) denklemi düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t) \tag{2.2.17}$$

serisi ile çözülür.

Teorem 2.1 ***(Varlık Teoremi)****:* $f(x,\ t) \in C(\Delta(t))$, $\quad q(x) \in [-T, T]$, $f_0 = max|f(x,t)|$ *koşulları altında* $u(x,\ t) \in C(\Delta(x_0,\ t_0))$ *fonksiyonu (2.2.14)'ün çözümüdür. Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır ([5], [6]).*

Lemma 2.1 *: Kabul edelim ki;*

$$q_0 = max|q(x)|, \qquad x \in [-T, T], \qquad f_0 = max|f(x,\ t)|, \qquad (x,\ t) \in \Delta(T)$$

olsun. O zaman

$$|u_n(x,\ t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^n \frac{1}{n!}$$

olur.

İspat: $n = 0$ için $|u_0(x,\ t)| \leq f_0$ açıktır.

$n = k$ için doğru olsun.

$$|u_k(x,\ t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^k \frac{1}{k!},$$

$n = k+1$ için ;

$$|u_{k+1}(x,\ t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!},$$

$$\begin{aligned}
|u_{k+1}(x,\ t)| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi) u_k(\xi,\ \tau) d\xi d\tau \right|, \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |q(\xi)||u_k(\xi,\ \tau)| d\xi d\tau, \\
&\leq \frac{1}{2} q_0 f_0 (\frac{1}{2}q_0)^k \frac{T^k}{k!} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau^k d\xi d\tau, \\
&\leq f_0(\frac{1}{2}q_0)^{k+1} \frac{T^k}{k!} \int_0^t \tau^k (x + (t-\tau) - x + (t-\tau)) d\tau, \\
&\leq f_0(\frac{1}{2}q_0)^{k+1} \frac{T^k}{k!} \int_0^t \tau^k (2t - 2\tau) d\tau, \\
&\leq f_0(\frac{1}{2}q_0)^{k+1} \frac{T^k}{k!} \int_0^t \tau^k T d\tau, \\
&\leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \qquad (2.2.18)
\end{aligned}$$

Lemma 2.2 *: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t)$ serisi $\Delta(T)$ aralığında düzgün yakınsaktır.*

$$
\begin{aligned}
|u_k(x,\ t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^n\frac{1}{n!}, \quad \forall t\in[0,T], \\
\leq f_0(\frac{1}{2}q_0TT)^n\frac{1}{n!}.
\end{aligned} \tag{2.2.19}
$$

Birinci Weierstrass Teoremi*: $|u_k(x,\ t)| \leq a_k, \quad \forall k\in(0,\ 1,...,\ t), \quad t\in[0,T]$ ve nümerik $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun.*

Öyleyse $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t)$ de düzgün yakınsaktır ([4], [10]).

$$a_k = f_0(\frac{1}{2}q_0TT)^k\frac{1}{k!},$$

ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f_0(\frac{1}{2}q_0T^2)^k\frac{1}{k!}.$$

Lemma 2.3 *: $u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t)$, $[0,T]$'de süreklidir.*

İkinci Weierstrass Teoremi*: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t)$, serisi $[0,T]$ aralığında düzgün yakınsak olsun ve her bir $u_n(x,\ t)$ fonksiyonu $[0,T]$'de sürekli olsun. Öyleyse $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t)$ $[0,T]$'de sürekli fonksiyondur ([4], [10]).*

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\xi,\ \tau)d\xi d\tau$$

Her iki tarafa $u_0(x,\ t) = f(x,\ t)$ eklenirse

$$
\begin{aligned}
u_0(x,\ t)+\sum_{n=1}^{N} u_n(x,\ t) &= f(x,\ t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\xi,\ \tau)d\xi d\tau, \\
u(x,\ t) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{N} u_n(x,\ t), \\
u(x,\ t) &= f(x,\ t)+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\ \tau)d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Lemma 2.4 *: $u(x,\ t)$ fonksiyonu (2.2.14) denkleminin bir çözümüdür.*

İspat:

$$u_n(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)u_{n-1}(\xi,\ \tau)d\xi d\tau,$$

$n=1$'den $n=N$'e her iki tarafın toplamını alırsak ve her iki tarafa

$u_0(x,\ t) = f(x,\ t)$ eklersek

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\xi,\ \tau)d\xi d\tau + f(x,\ t),$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\ \tau)d\xi d\tau + f(x,\ t), \qquad (2.2.20)$$

$N \to \infty$ için limit alınırsa

$$u(x,\ t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\sum_{n=0}^{N} u_n(\xi,\ \tau)d\xi d\tau + f(x,\ t),$$

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{N} u_n(\xi,\ \tau)d\xi d\tau + f(x,\ t),$$

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)u(\xi,\ \tau)d\xi d\tau + f(x,\ t). \qquad (2.2.21)$$

Teorem 2.2 ***(Teklik Teoremi)****: (2.2.14) denkleminin çözümü tektir.*

İspat: $u_1(x,\ t)$ ve $u_2(x,\ t)$ gibi iki farklı çözüm olsun.

$$u_1(x,\ t) = f(x,\ t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)u_1(\xi,\ \tau)d\xi d\tau,$$

$$u_2(x,\ t) = f(x,\ t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)u_2(\xi,\ \tau)d\xi d\tau$$

olsun.

$$\varphi(x,\ t) = u_1(x,\ t) - u_2(x,\ t) \qquad (2.2.22)$$

ise

$$\varphi(x,\ t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,\ t)} q(\xi)\varphi(\xi,\ \tau)d\xi d\tau \qquad (2.2.23)$$

olur.

$$|\varphi(x,\ t)| \leq \frac{1}{2}q_0 \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |\varphi(\xi,\ \tau)| d\xi d\tau, \tag{2.2.24}$$

$$u(x,\ t) = max|\varphi(x,\ t)|$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} |\varphi(x,\ t)| &\leq \frac{1}{2}q_0 \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} u(\tau) d\xi d\tau, \\ &= q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

$$\begin{aligned} u(t) = max|\varphi(x,\ t)| &\leq q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau, \\ u(t) &\leq q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau, \\ &\leq q_0 t \int_0^t |u(\tau)| d\tau \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

olur.

$$u(t) = \int_0^t |\varphi(x,\ \tau)| d\tau \tag{2.2.27}$$

olmak üzere;

$$u'(t) - q_0 t u(t) \leq 0. \tag{2.2.28}$$

Her iki tarafı $e^{-\frac{q_0 t^2}{2}}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t)\right] &\leq 0, \\ \int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t)\right] &\leq 0, \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t) - u(0) &\leq 0, \\ e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t) &\leq 0, \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

olur. $\forall t \in [0,T]$ için $u(t) \leq 0$ tanım gereği $\forall t \in [0,T]$ için $u(t) \geq 0$ olur. Öyleyse $u(t) = 0$ olur.

$$u(t) = max|\varphi(x,\ t)|,$$

$$\varphi(x,\ t) = 0,$$

$$u_1(x,\ t) = u_2(x,\ t) \tag{2.2.31}$$

olur.

2.3. Fonksiyon Katsayılı Homojen Dalga Denklemi

Fonksiyon katsayılı dalga denklemi

$$u_{tt} = c^2(x)\Delta u, \tag{2.3.32}$$

$$u(x,\ 0) = f_0(x), \tag{2.3.33}$$

$$u_t(x,\ 0) = f_1(x) \tag{2.3.34}$$

koşulları altında denklem;

$$u(x,\ t) = F(x,\ t) + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\tau(x,\ t)\leqslant t} u(\xi,\ t-\tau(\xi,\ x))\Delta_\xi \sigma(\xi,\ x)d\xi \tag{2.3.35}$$

Volterra integral denklemine indirgenir.

$$\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3),$$

$$d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$\sigma(\xi,\ x)$ bir Sobolev fonksiyonu olup, K sabit olmak üzere,

$$|\Delta\sigma(\xi,\ x)| \leqslant \frac{K}{\tau(\xi,\ x)},$$

tarafından sağlanır. ξ rayda bir sabit Riemann koordinatları

$$\xi = f(\tau,\ x), \quad \xi = \alpha\tau(\xi,\ x),$$

$$\alpha = (cos\varphi sin\theta, sin\varphi sin\theta, cos\theta),$$

olmak üzere

$$d\xi = \frac{1}{|\frac{\partial f_0(\xi,\ x)}{\partial \xi}|}$$

olur.

2.3.1. Eikonal Denklem

$\tau(x,\ x^0)$ bir fonksiyon, x^0 bir parametre olmak üzere,

$$|\nabla\tau(x,\ x^0)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}, \quad n^2 = \frac{1}{c^2(x)}, \tag{2.3.36}$$

$$\tau(x,\ x^0) = 0(|x - x^0|), \quad x \to x^0, \tag{2.3.37}$$

koşulları altında eikonal denklemi sağlar ([1], [3], [14]).

Lemma 2.5 *: c_0 bir sabit olmak üzere, $\tau(x,\ x^0) = \frac{|x-x^0|}{c_0}$ denklemi (2.3.36) eikonal denklemin bir çözümüdür.*

İspat:

$$|\nabla_x\tau(x,\ x^0)|^2 = \left|\nabla_x(\frac{|x-x^0|}{c_0})\right|^2,$$

$$\left|\nabla_x(\frac{1}{c_0}(\sum(x_i - x_i^0)^2)^{\frac{1}{2}})\right| = \frac{1}{c_0}\left|\frac{(x-x^0)}{|x-x^0|}\right| = \frac{1}{c_0}.$$

2.3.2. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler

Eikonal denklemin eşitliklerini kullanarak $\tau(x,\ x^0)$'ın x_k'ya göre kısmi türevlerini alırsak $(k = 1,\ 2,\ 3)$

$$p = \frac{\partial\tau}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial\tau}{\partial x_2}, \quad r = \frac{\partial\tau}{\partial x_3}, \tag{2.3.38}$$

$$F = p^2 + q^2 + r^2, \tag{2.3.39}$$

olur. $F=0$ hali eikonal denkleme karşılık gelir. Bu denklem için Euler sistemi

$$\frac{dx_1}{ds}=F_p=2p,\quad \frac{dx_2}{ds}=F_q=2q,\quad \frac{dx_3}{ds}=F_r=2r, \tag{2.3.40}$$

$$\frac{d\tau}{ds}=pF_p+qF_q+rF_r=2(p^2+q^2+r^2)=2n^2(x), \tag{2.3.41}$$

$$\frac{dp}{ds}=-(F_\tau p+F_{x_1})=-(-\frac{\partial n^2(x)}{\partial x_1})=\frac{\partial n^2(x)}{\partial x_1},$$
$$\frac{dq}{ds}=\frac{\partial n^2(x)}{\partial x_2},\qquad \frac{dr}{ds}=\frac{\partial n^2(x)}{\partial x_3}, \tag{2.3.42}$$

$$x=(x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s)),\quad P=(p,\ q,\ r),$$

$$\frac{dx}{ds}=2(p,\ q,\ r),\quad \frac{d\tau}{ds}=2n^2,\quad \frac{dP}{ds}=2n(x)\nabla_x(n(x))=2n^2\frac{\nabla_x n}{n}=2n^2\nabla_x(ln(n(x))), \tag{2.3.43}$$

$t=\tau,\quad dt=2n^2ds$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p}{n^2},\quad \frac{dP}{dt}=\nabla_x(ln(n(x))) \tag{2.3.44}$$

sistemine Euler sistemi denir. Yüzey (τ sabit) ise dalga önü olarak adlandırılır.

$$\nabla\tau dx=(p,\ q,\ r)(dx_1,\ dx_2,\ dx_3)=pdx_1+qdx_2+rdx_3=d\tau=0$$

olduğu için $\nabla\tau=(p,\ q,\ r)$ vektörü eğri önünün normalidir. $\tau(x,\ x^0)=t$ denklemi t zamanında x^0 'daki kaynak noktasında ön dalgayı tanımlar. $\tau(x,\ x^0)=t$ yüzeyin karakteristik konoididir. Karakteristik konoid oluşturma metodu çift karakterli denilen farklı çizgiler oluşturmayı içerir. Bu farklı çizgiler konoid üzerine yatar ve ortaklaşa bunu oluştururlar. x boşluğunun üstündeki çift karakterli projeksiyona ışın(ray) denir. Bu ışınlar $\tau(x,\ x^0)=t$ yüzeyine ortogonaldir. Işınları bulabilmek için Euler sisteminin çözülmesi gerekir. $\nabla\tau,\quad t=\tau(x,\ x^0)$ yüzeyine dikey, dalga önü $t=\tau(x,x^0)$ yüzey seviyesi olduğundan,

$$\frac{dx}{ds}=\left(\frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds}\right)=(2p,2q,2r)=2\nabla\tau(x,\ x^0),$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 2\nabla n^2(x),$$
$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 = 4\nabla n^2(x). \tag{2.3.45}$$

Yukarıdaki denklem sistemine *ray denklemleri* denir. σ, ray için eğri uzunluğunu göstermek üzere,

$$d\sigma^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2,$$
$$d\sigma^2 = 4(p^2+q^2+r^2)(ds^2),$$
$$d\sigma = 2nds \tag{2.3.46}$$

olur.

$$\frac{d}{ds} = 2n\frac{d}{d\sigma}. \tag{2.3.47}$$

Dalga boyunca τ'nun değişimi

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = n, \tag{2.3.48}$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\tau}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} n d\sigma,$$

$$\tau(x(\sigma)) = \tau(x(\sigma_0)) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n(x(\sigma))d\sigma. \tag{2.3.49}$$

2.3.3. Geçiş Denklemi

$u(x,\ t)$ fonksiyonu (2.3.32) denklemlerinin bir çözümü olsun.

$$[u(x,\ t)] = u_1(x,\ t) = u(x,\ t-\tau) \tag{2.3.50}$$

dönüşümü ile (2.3.32) denklemi aşağıdaki forma dönüşür:

$$[u_{tt}] = c^2(x)[\Delta u], \tag{2.3.51}$$

$[\Delta u]$ fonksiyonunu elde etmek için öncelikle (2.3.50)'deki eşitliği kullanarak ∇u_1 ifadesini elde edelim:

$$\begin{aligned} \nabla u_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u(x,\ t-\tau), \frac{\partial}{\partial x_2}u(x,\ t-\tau), \frac{\partial}{\partial x_3}u(x,\ t-\tau)\right) \\ &= [\nabla u]-[u_t]\nabla\tau \end{aligned} \tag{2.3.52}$$

elde edilir. Şimdi (2.3.52) denkleminin diverjansını alırsak,

$$div(\nabla u_1) = div[\nabla u] - div([u_t]\nabla\tau) \tag{2.3.53}$$

Burada,

$$div[\nabla u] = [\Delta u] - [\nabla u_t]\nabla\tau, \tag{2.3.54}$$

$$div([u_t]\nabla\tau) = [\nabla u_t]\nabla\tau - [u_{tt}](\nabla\tau)^2 + [u_t]\Delta\tau, \tag{2.3.55}$$

(2.3.52) eşitliğinin t'ye göre türevini alırsak,

$$\nabla(\frac{\partial u_1}{\partial t}) = [\nabla u_t] - [u_{tt}]\nabla\tau \tag{2.3.56}$$

elde ederiz. (2.3.54)-(2.3.55) sonuçlarını (2.3.53) denkleminde yerine yazıp düzenlersek;

$$\Delta u_1 = [\Delta u] - 2[\nabla u_t]\nabla\tau + [u_{tt}](\nabla\tau)^2 - [u_t]\Delta\tau, \tag{2.3.57}$$

(2.3.51) ve (2.3.56) denklemlerini de (2.3.57) denkleminde yerine yazarsak;

$$\Delta u_1 = \frac{1}{c^2}[u_{tt}] - 2(\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t} + [u_{tt}]\nabla\tau)\nabla\tau + [u_{tt}](\nabla\tau)^2 - [u_t]\Delta\tau. \tag{2.3.58}$$

Eikonal denklemi kullanarak (2.3.58) düzenlenirse;

$$\Delta u_1 = -2\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - [u_t]\Delta\tau, \tag{2.3.59}$$

(2.3.59) eşitliği $\sigma(x) \in C^2(\mathbb{R})$ Sobolev fonksiyonu ile çarparsak,

$$\sigma\Delta u_1 = -2\sigma\nabla\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\nabla\tau - \frac{\partial u_1}{\partial t}\sigma\Delta\tau. \tag{2.3.60}$$

(2.3.60) denklemini şöyle düşünelim:

$$\sigma\Delta u_1 = div\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}w\right) = -\frac{\partial u_1}{\partial t}divw - w\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}, \tag{2.3.61}$$

(2.3.60) ve (2.3.61) denklemlerini karşılaştırırsak;

$$w = 2\sigma\nabla\tau, \quad divw = \sigma\Delta\tau$$

bulunur. Öyleyse w fonksiyonunun diverjansını alıp diğer denkleme eşitlersek,

$$2\nabla\sigma\nabla\tau = 0. \tag{2.3.62}$$

Elde edilen bu eşitliğe geçiş denklemi(transport equation)denir.

2.3.4. Çözüm Fonksiyonunun Elde Edilmesi

τ, eikonal denklemin bir çözümü, σ da geçiş denkleminin bir çözümü olsun. O halde

$$\sigma\Delta u_1 = div(-\frac{\partial u_1}{\partial t}2\sigma\Delta\tau) \tag{2.3.63}$$

sağlanır. Bu denkleme Green formülü uygulanırsa

$$\iiint\limits_D (\sigma\Delta u_1 - u_1\Delta\sigma)dv = \iint\limits_S (\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n})dS, \tag{2.3.64}$$

(2.3.64) denkleminde (2.3.63) eşitliği yazılırsa;

$$\begin{aligned} -\iiint\limits_D (u_1\Delta\sigma)dv + \iiint\limits_D div(-\frac{\partial u_1}{\partial t}2\sigma\Delta\tau)dv \\ = \iint\limits_S (\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n})dS. \end{aligned} \tag{2.3.65}$$

(2.3.65) denklemine diverjans teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned} -\iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leqslant t} (u_1\Delta\sigma)dv - \iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} 2\frac{\partial u_1}{\partial t}\sigma\frac{\nabla\tau}{\partial n}ds \\ = \iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} (\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n}). \end{aligned} \tag{2.3.66}$$

Bu denklem düzenlenirse;

$$\iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} (\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1\frac{\partial \sigma}{\partial n} + 2\frac{\partial u_1}{\partial t}\sigma\frac{\nabla \tau}{\partial n})ds + \iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leqslant t} (u_1\Delta\sigma)dv = 0. \qquad (2.3.67)$$

(2.3.50) eşitliği kullanılarak;

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \left[\frac{\partial u_t}{\partial n}\right]\frac{\partial \tau}{\partial n}. \qquad (2.3.68)$$

Bu eşitliği (2.3.67) denkleminde yazarsak,

$$\iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} (\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] + \sigma\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial n} - [u]\frac{\partial \sigma}{\partial n})ds + \iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leqslant t} ([u]\Delta\tau)dv = 0 \qquad (2.3.69)$$

σ fonksiyonu τ ya bağlı olarak (2.3.69) denklemini sağlar.

2.3.5. σ Fonksiyonunun Özellikleri

σ fonksiyonunun x^0 komşuluğunda ikinci mertebeden türevlenebilir olduğunu, x^0 noktasında tekilliğe sahip olduğu ve aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

- $\lim\limits_{x\to x^0}\sigma(x,\ x^0)\tau(x,\ x^0) = \frac{1}{c(x^0)}$,
- $\sigma(x,\ x^0) = \sigma(x^0,\ x)$,
- $|\Delta\sigma(x,\ x^0)| \leqslant \frac{K}{\tau(x,\ x^0)}$, K sabit,
- Eğer S_1 x^0 noktasını içeren bir kapalı yüzey ve n, S_1 yüzeyinin bir normal vektörü ise aşağıdaki denklem S_1 x^0 'a giderken alınan limiti sağlar:

$$\lim_{S_1\to x^0}\frac{\partial\sigma(x,\ x^0)}{\partial n}ds = -4\pi.$$

$u(x,\ t)$ fonksiyonu S yüzeyi ile sınırlı D bölgesinde bir çözüm olsun. D bölgesinin içerdiği x^0 merkezli ε yarıçaplı bir çembersel bölgeyi D'den ayırdığımızı varsayalım ve yukarıdaki özellikleri sağlayan bir $\sigma(x,\ x^0)$ fonksiyonuna sahip olalım. (2.3.69) denklemini kalan D bölgesine uygularsak;

$$\iint\limits_{S}(\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right])dS$$

$$+\iint\limits_{S_\varepsilon}(\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right])dS$$

$$+\iiint\limits_{D'}[u]\Delta\sigma dv=0. \tag{2.3.70}$$

(2.3.70) denkleminin limit altındaki görüntüsü aşağıdaki eşitliği verir:

$$u(x^0,\ t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}(\sigma\left[\frac{\partial f_0}{\partial n}\right]-f_0\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}f_1)dS$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_t}[u]\Delta\sigma dv. \tag{2.3.71}$$

Sağ taraftaki çift katlı integral bilinen bir fonksiyondur ve $F(x^0,\ t)$ ile gösterilir. Böylelikle $u(x,\ t)$ fonksiyonu için bir integral denklem elde edilmiş olunur.

$$u(x,\ t)=F(x,\ t)+\frac{1}{4\pi}\iiint u(x,\ t-\tau(x,\ x^0))\Delta\sigma(x,\ x^0)dv. \tag{2.3.72}$$

2.4. Fonksiyon Katsayılı Homojen Olmayan Dalga Denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta_x u+\sum_{j=1}^{3}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+q(x)\frac{\partial u}{\partial t}+f(x,\ t), \tag{2.4.73}$$

$$x\in\mathbb{R}^3,\quad t>0.$$

Başlangıç koşulları

$$u(x,\ 0)=g(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=h(x). \tag{2.4.74}$$

Burada Δ_x Laplace operatörünü temsil etmektedir. c pozitif sabit sayıdır. $b_j(x),\quad q(x)\in C^2(\mathbb{R}^3),\quad j=1,\ 2,\ 3,\quad g(x)\in C^2(\mathbb{R}^3)\cap H^4(\mathbb{R}^3),$ $h(x)\in C^1(\mathbb{R}^3)\cap H^3(\mathbb{R}^3),\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,\ t)\in C\Big([0,T];H^{4-j}(\mathbb{R}^3)\Big),$

$j=0,\ 1,\ 2; H^m(\mathbb{R}^3)(m=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ Sobolev uzayıdır. Hiperbolik denklemler teorisi (2.4.73)-(2.4.74) denklemlerinin çözümü olan $u(x,\ t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,\ t) \in C\left([0,T]; H^{4-j}(\mathbb{R}^3) \cap C^{2-j}(\mathbb{R}^3)\right), \quad j=0,\ 1,\ 2,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t} \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^3)),$$

sağlamaktadır. $u(x,\ t)$ çözümü 3-D Volterra integral denklemidir. Bunun için Sobolev metodu kullanılacaktır. Farklı bir $u_1(x,\ t)$ fonksiyonu ele alalım:

$$u_1(x,\ t) = u(x, t - \frac{|x-x^0|}{c}), \tag{2.4.75}$$

$$x^0 = (x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0) \in \mathbb{R}^3,$$

L bir diferansiyel operatör olmak üzere

$$L_x u_1 \equiv \left(\Delta_x u_1 + \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right),$$

tanımlansın. (2.4.75) denkleminden

$$\Delta u_1 = \Delta u(x,\ t-\tau) - 2\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - \frac{\partial^2 u(x,\ t-\tau)}{\partial t^2}(\nabla\tau)^2 - \frac{\partial u(x,\ t-\tau)}{\partial t}\Delta\tau, \tag{2.4.76}$$

elde edilir. (2.4.73) denkleminde Δu fonksiyonu yalnız bırakılarak (2.4.76)'de yerine yazılır.

$$\begin{aligned} L_x u_1 = -\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}q(x)\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{c^2}f(x,\ t-\tau) \\ -2\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - \frac{\partial u_1}{\partial t}\Delta\tau \end{aligned} \tag{2.4.77}$$

Elde edilen ifade $\sigma(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ fonksiyonu ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \sigma L_x u_1 = -2\sigma\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - \frac{1}{c^2}\sigma f(x,\ t-\tau) \\ -\sigma\frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\Delta\tau + \frac{1}{c^2}q(x) + \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right), \end{aligned} \tag{2.4.78}$$

bulunur.

$$\sigma L_x u_1 = div\Big(-\frac{\partial u_1}{\partial t} w\Big) - \frac{1}{c^2}\sigma f(x,\ t-\tau), \tag{2.4.79}$$

şeklinde düşünülürse;

$$w = 2\sigma\nabla\tau, \qquad divw = \sigma\Delta\tau + \frac{1}{c^2}\sigma q(x) + \frac{1}{c^2}\sigma\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial\tau}{\partial x_j},$$

olur. w'nin diverjansını alıp karşılıklı eşitlersek;

$$2\nabla\sigma\nabla\tau + \sigma\left(\Delta\tau - \frac{1}{c^2}q(x) - \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{2.4.80}$$

elde edilir. O halde (2.4.79)'u tekrar yazarsak;

$$\sigma L_x u_1 = div\Big(-\frac{\partial u_1}{\partial t} 2\sigma\nabla\tau\Big) - \frac{1}{c^2}\sigma f(x,\ t-\tau), \tag{2.4.81}$$

olur. (2.4.80)'nin çözümü karakteristikler metodu kullanılarak yapılırsa;

$$\sigma(x,\ x^0) = \frac{1}{|x-x^0|} exp\left(\frac{|x-x^0|}{2c}\int_0^1 q(x^0+(x-x^0)z)dz\right)$$
$$\times exp\left(\frac{1}{2c^2}\int_0^1 \sum_{j=1}^{3} b_j(x^0+(x-x^0)z)(x_j-x_j^0)dz\right). \tag{2.4.82}$$

L^* operatörü için σ aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$L^*\sigma(x,\ x^0) = \Delta\sigma(x,\ x^0) - \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\sigma(x,\ x^0),$$

(2.4.81) denklemine Green formülü uygulanırsa;

$$\iiint_{|x-x^0|\le ct} (\sigma(x,\ x^0)Lu_1(x,\ t) - u_1(x,\ t)L^*\sigma(x,\ x^0))dx$$
$$= \iint_{|x-x^0|=ct}\left(\sigma(x,\ x^0)\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial n} - u_1(x,\ t)\frac{\partial\sigma(x,\ x^0)}{\partial n}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)n_j\sigma(x,\ x^0)u_1(x,\ t)\right)dS$$

elde edilir.

$$\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} div\Big(-\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial t}2\sigma(x,\ x^0)\nabla\Big(\frac{|x-x^0|}{c}\Big)\Big)dx$$

$$-\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}\sigma(x,\ x^0)f\Big(x,\ t-\frac{|x-x^0|}{c}\Big)dx-\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}u_1(x,\ t)L^*\sigma(x,\ x^0)dx$$

$$=\iint\limits_{|x-x^0|=ct}\Bigg(\sigma(x,\ x^0)\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial n}-u_1(x,\ t)\frac{\partial\sigma(x,\ x^0)}{\partial n}$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3}b_j(x)n_j\sigma(x,\ x^0)u_1(x,\ t)\Bigg)dS, \qquad (2.4.83)$$

Ostrogradskii formülü (2.4.83) denklemine uygulanırsa,

$$\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}\sigma(x,\ x^0)f\Big(x,\ t-\frac{|x-x^0|}{c}\Big)dx+\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}u_1(x,\ t)L^*\sigma(x,\ x^0)dx$$

$$+\iint\limits_{|x-x^0|=ct}\Big(\sigma(x,\ x^0)\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial n}-u_1(x,\ t)\frac{\partial\sigma(x,\ x^0)}{\partial n}\Big)dS$$

$$+\frac{1}{c^2}\iint\limits_{|x-x^0|=ct}\sum_{j=1}^{3}b_j(x)n_j\sigma(x,\ x^0)u_1(x,\ t)dS$$

$$+\frac{1}{c}\iint\limits_{|x-x^0|=ct}2\sigma\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial t}dS=0, \qquad (2.4.84)$$

σ nın özellikleri ve başlangıç şartlarını kullanarak (2.4.84) denklemi tekrar düzenlenirse

$$u(x,\ t)=F(x,\ t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}u(\xi,\ t-\frac{|\xi-x|}{c})L^*\sigma(\xi,\ x)d\xi. \qquad (2.4.85)$$

Burada

$$F(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|x-\xi|=ct}\Bigg\{\sigma(\xi,\ x)\frac{\partial g(\xi)}{\partial n}-g(\xi)\frac{\partial\sigma(\xi,\ x)}{\partial n}+\Big(\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3}b_j(\xi)n_j\Big)\sigma(\xi,\ x)g(\xi)$$

$$+\frac{\sigma(\xi,\ x)}{c}h(\xi)\Bigg\}dS+\frac{1}{4\pi c^2}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}\sigma(\xi,\ x)f\Big(\xi,\ t-\frac{|\xi-x|}{c}\Big)d\xi.$$

Fonksiyonu Neumann serisi şeklinde ifade edersek

$$u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t),$$

dir ve $u_0(x,\ t) = F(x,\ t)$,

$$u_n(x,\ t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{|x-x^0| \le ct} u_{n-1}\left(\xi,\ t - \frac{\xi - x}{c}\right) L^* \sigma(\xi,\ x) d\xi, \quad n \ge 1.$$

Burada

1. $u(x,\ t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,\ t)$ serisinin $\Delta(T)$ bölgesinde sürekli $u(x,\ t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu,

2. $u(x,\ t)$ fonksiyonunun (2.4.84) integral denkleminin $\Delta(T)$ bölgesinde tek çözümü olduğu gösterilebilir.

$$\Delta(T) = \{(x,\ t) : 0 \le t \le T - \frac{|x|}{c}\}, \quad T > 0$$

3. TERS PROBLEMİN UYGULAMASI

3.1. Ters Problem

$T \geq 0$ olmak üzere $X = [-T/c, T/c]$, $F(x,t)$, $\varphi(x,t)$, $\phi(x,t)$ verilmiş fonksiyonlar, $q(x) \in C^2(X)$ bilinmeyen bir çift fonksiyon olsun. (2.4.73), (2.4.74) denkleminin çözümü

$$u(0,t) = G(t), \tag{3.1.1}$$

verisi ile uyumlu olursa $q(x)$ fonksiyonu bulunur. $G(t)$ de bilinen bir fonksiyondur ([7], [11], [12], [13]).

Teorem 3.1 ***(Teklik Teoremi):***$h(0,\ 0,\ x_3) \neq 0$*, $i = 1,\ 2$ için $G(t)$ 'ye karşılık gelen $q_i(x_3)$ ters problemin çözümü olsun. Öyleyse $x_3 \in X$ olmak üzere $q_1(x_3) = q_2(x_3)$ dür.*

İspat: (2.4.73), (2.4.74) denklemlerinde $q = q_1(x_3)$ ve $q = q_2(x_3)$ yazılıp çıkarılırsa

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \widetilde{u} + \sum_{j=1}^{3} b_j \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j} + q_1(x_3) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{q}(x_3) \frac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial t}, \tag{3.1.2}$$

$$\widetilde{u}(x,\ 0) = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,\ 0) = 0, \tag{3.1.3}$$

$$\widetilde{u}(0,\ t) = 0. \tag{3.1.4}$$

Burada,

$$\widetilde{q}(x_3) = q_1(x_3) - q_2(x_3), \quad \widetilde{u}(x,\ t) = u_1(x,\ t) - u_2(x,\ t).$$

Yukarıdaki Cauchy problemi (2.4.73) ve (2.4.74) denklemlerinin neredeyse aynısıdır. Bulduğumuz $\widetilde{u}(x,\ t)$ çözümü aşağıdaki integral denklemi sağlar:

$$\widetilde{u}(x,\ t) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint\limits_{|x-\xi| \leq ct} \sigma(\xi,\ \tau) \widetilde{q}(x_3) \frac{\partial u_2}{\partial t} \left(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{c} \right) d\xi$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{|x-\xi| \leq ct} \widetilde{u} \left(\xi,\ t - \frac{|\xi - x|}{c} \right) L^\star \sigma(\xi,\ x) d\xi. \tag{3.1.5}$$

Bu denkleme $\frac{\partial}{\partial t}$ türevi uygulanırsa;

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,\ t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-ct}^{x_3+ct} t\left[\sigma(\xi,\ x)\widetilde{q}(\xi_3)\frac{\partial u_2}{\partial t}(\xi,\ 0)\right]_{r=ct,\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu} d\xi_3 d\varphi$$
$$+\frac{1}{4\pi c^2}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-ct}^{x_3+ct} r\left[\sigma(\xi,\ x)\widetilde{q}(\xi_3)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(\xi,\ t-\frac{r}{c})\right]_{r=ct,\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu} d\xi_3 d\varphi dr$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\left(\xi,\ t-\frac{r}{c}\right)L^{\star}\sigma(\xi,\ x)|_{\xi=x+r\alpha} r^2 d\omega dr. \qquad (3.1.6)$$

Bu fonksiyona $(\frac{\partial}{\partial t})^2$ uygulanırsa ve (3.1.1) olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}(x,\ t) \ &= \ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[r\sigma(\xi,\ \tau)h(\xi)]\,\widetilde{q}(\xi_3)\Big|_{\xi_3=x_3-ct}^{\xi_3=x_3+ct}\Bigg|_{r=ct,\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu} d\varphi \\
&+ \ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-ct}^{x_3+ct}\frac{\partial}{\partial t}\left(ct\sigma(\xi,\ x)h(\xi)\Big|_{r=ct,\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu}\right)\widetilde{q}(\xi_3)d\varphi d\xi_3 \\
&+ \ \frac{1}{4\pi c}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-ct}^{x_3+ct}\left(ct\sigma(\xi,\ x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(\xi,\ x)\right)\Big|_{r=ct,\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu}\widetilde{q}(\xi_3)d\varphi d\xi_3 \\
&+ \ \frac{1}{4\pi c^2}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-r}^{x_3+r}\left[r\sigma(\xi,\ x)\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3}(\xi,\ t-\frac{r}{c})\right]\Bigg|_{\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{r^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu}\widetilde{q}(\xi_3)d\xi_3 d\varphi dr \\
&+ \ \frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-r}^{x_3+r}\left[\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}(\xi,\ t-\frac{r}{c})L^{\star}\sigma(\xi,\ x)\right]\Bigg|_{\xi=x+r\alpha} r^2 d\omega dr. \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

Aşağıda yazılan $W(x,t)$ fonksiyonu kullanılarak;

$$W(x,\ t) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,\ t) - \frac{c}{2}\left\{\left(t\sigma(\xi,\ x)h(\xi)\right)\Big|_{\bar{\xi}=\bar{x},r=ct}\right\}\Bigg|_{\xi_3=x_3-ct}^{\xi_3=x_3+ct} \qquad (3.1.8)$$

denklemi düzenlenirse

$$W(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{x_3-ct}^{x_3+ct}\Bigg\{\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\left(t\sigma(\xi,\ x)h(\xi)\right)\Bigg|_{\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu,r=ct}\Bigg]$$
$$+\left(t\sigma(\xi,\ x)\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}(\xi,\ 0)\right)\Bigg|_{\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu,r=ct}\Bigg\}\widetilde{q}(\xi_3)d(\xi_3)d\varphi$$
$$+\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{0}^{ct}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{x_3-r}^{x_3+r}\left[r\sigma(\xi,\ x)\frac{\partial^3u_2}{\partial t^3}(\xi,\ t-\frac{r}{c})\right]\Bigg|_{\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{r^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu}\widetilde{q}(\xi_3)d\xi_3d\varphi dr$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{ct}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Bigg\{\Bigg[W(\xi,\ t-\frac{r}{c})+\frac{1}{2}\Big\{(ct-r)\sigma(\xi,\ x)h(\xi)|_{\bar{\xi}=\bar{x},r=ct}\widetilde{q}(\xi)\Big\}\Bigg|_{x_3-ct+r}^{x_3+ct-r}\Bigg]$$
$$\times L^{\star}\sigma(\xi,\ x)\Bigg\}\Bigg|_{\xi=x+r\alpha}r^2d\omega dr \tag{3.1.9}$$

bulunur. Bu denklemde $x=0$ yazarak ve (2.4.75) ve (3.1.8) denklemlerini kullanarak ve $h,\ f,\ g,\ q_1,\ q_2,\ \tilde{q},\ b_j,\ j=1,\ 2$ ve b_3 ün tekliği ile şunu elde ederiz:

$$\widetilde{q}(ct) = \frac{1}{c}\left[\left(t\sigma(\xi,\ 0)h(\xi)\right)\Big|_{\bar{\xi}=0,\xi_3=ct}\right]^{-1}$$

$$\times\Bigg\{G(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct}\Bigg[\Bigg(\sigma(\xi,\ 0) + t(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_1}\frac{c^2t}{\sqrt{(c^2t^2-\xi_3^2)}}\nu_1 + \frac{\partial\sigma}{\partial\xi_2}\frac{c^2t}{\sqrt{(c^2t^2-\xi_3^2)}}\nu_2)\Bigg)h(\xi)$$

$$+t\sigma(\xi,\ 0)\left(\frac{\partial h}{\partial\xi_1}\frac{c^2t}{\sqrt{(c^2t^2-\xi_3^2)}}\nu_1 + \frac{\partial h}{\partial\xi_2}\frac{c^2t}{\sqrt{(c^2t^2-\xi_3^2)}}\nu_2\right)$$

$$+t\sigma(\xi,\ 0)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(\xi,\ 0)\Bigg|_{\bar{\xi}=\bar{x}+\sqrt{(ct)^2-(\xi_3-x_3)^2}\nu,r=ct}\Bigg]\widetilde{q}(\xi_3)d(\xi_3)d\varphi$$

$$-\frac{1}{4\pi c^2}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_{-r}^{r} r\sigma(\xi,\ 0)\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3}(\xi,\ t-\frac{r}{c})\Bigg|_{\bar{\xi}=\sqrt{r^2-\xi_3^2}\nu}\widetilde{q}(\xi_3)d\xi_3 d\varphi dr$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Bigg\{\Bigg[W(\xi,\ t-\frac{r}{c}) + \frac{1}{2}\Big\{(ct-r)\sigma(\xi,\ x)h(\xi)|_{\bar{\xi}=\bar{x},r=ct-r}\widetilde{q}(\xi)\Big\}\Big|_{\xi=x_3-ct+r}^{\xi=x_3+ct-r}\Bigg]$$

$$\times L^{\star}\sigma(\xi,\ 0)\Bigg\}\Bigg|_{\xi=r\alpha} r^2 d\omega dr\Bigg\}. \tag{3.1.10}$$

$W(x,t)$ fonksiyonu kullanılarak denklemler vektör integral denklemi şeklinde yazılabilir.

$$V(x,\ t) = \int_0^t \frac{t(KV)(x,\ t,\ \xi_3)}{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}d\xi_3.$$

Burada,

$$V(x,\ t) = (\tilde{q}(t), W(x,\ t)),$$

K vektör operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$(KV)(x,\ t,\ \xi_3) = ((K_1V)(x,\ t,\ \xi_3),\ (K_2V)(x,\ t,\ \xi_3)),$$

$$(K_1V)(x,t,\xi_3) = \frac{1}{c}\left[\left(t\sigma(\xi,\ 0)h(\xi)\right)\Big|_{\bar{\xi}=0,\xi_3=t}\right]^{-1}$$

$$\times\Bigg\{G(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg[\sigma(\xi,\ 0)\frac{\sqrt{t^2-\xi_3^2}}{t} + (\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_1}(ct)\nu_1 + \frac{\partial\sigma}{\partial\xi_2}(ct)\nu_2)h(\xi)$$

$$+\sigma(\xi,\ 0)(\frac{\partial h}{\partial \xi_1}(ct)\nu_1+\frac{\partial h}{\partial \xi_2}(ct)\nu_2)$$

$$+\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}\sigma(\xi,\ 0)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(\xi,\ 0)\Big|_{\bar{\xi}=\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}\nu, r=t}\Bigg]\tilde{q}(\xi_3)d\varphi$$

$$+\frac{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}{t}\frac{1}{4\pi c^2}\int_0^{2\pi}\int_{-r}^{r} r\sigma(\xi,\ 0)\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3}(\xi,\ t-\frac{r}{c})\Big|_{\bar{\xi}=\sqrt{r^2-\xi_3^2}\nu}\tilde{q}(\xi_3)d\varphi dr$$

$$-\frac{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}{t}\frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Bigg\{\Bigg[W(\xi,\ t-\frac{r}{c})+\frac{1}{2}\Bigg\{(ct-r)\sigma(\xi,\ x)$$

$$\times h(\xi)|_{\bar{\xi}=\bar{x}, r=ct-r}\tilde{q}(\xi)\Bigg\}\Big|^{\xi=x_3+ct-r}_{\xi=x_3-ct+r}\Bigg]L^{\star}\sigma(\xi,\ 0)\Bigg\}\Bigg|_{\xi=r\alpha} r^2 d\omega dr\Bigg\},$$

ve

$$(K_2V)(x,\ t,\ \xi_3)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg[\sigma(\xi,\ x)\frac{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}{t}$$

$$+\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_1}(ct)\nu_1+\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_2}(ct)\nu_2\Big)h(\xi)+\sigma(\xi,\ x)\Big(\frac{\partial h}{\partial \xi_1}(ct)\nu_1+\frac{\partial h}{\partial \xi_2}(ct)\nu_2\Big)$$

$$+\frac{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}{t}\sigma(\xi,\ x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(\xi,\ 0)\Big|_{\bar{\xi}=\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}\nu, r=t}\Bigg]\tilde{q}(\xi_3)d\varphi$$

$$+\frac{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}{t}\frac{1}{4\pi c^2}\int_0^{2\pi}\int_{x_3-r}^{x_3+r} r\sigma(\xi,0)\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3}(\xi,t-\frac{r}{c})\Big|_{\bar{\xi}=\sqrt{r^2-\xi_3^2}\nu}\tilde{q}(\xi_3)d\varphi dr$$

$$-\frac{\sqrt{(t^2-\xi_3^2)}}{t}\frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Bigg\{\Bigg[W(\xi,t-\frac{r}{c})+\frac{1}{2}\Bigg\{(ct-r)\sigma(\xi,x)$$

$$\times h(\xi)|_{\bar{\xi}=\bar{x}, r=ct-r}\tilde{q}(\xi)\Bigg\}\Big|^{\xi=x_3+ct-r}_{\xi=x_3-ct+r}\Bigg]L^{\star}\sigma(\xi,0)\Bigg\}\Bigg|_{\xi=r\alpha} r^2 d\omega dr\Bigg\}.$$

Bu sistem polar çekirdeğe sahip homojen Volterra tipi denklem olacaktır. Volterra integral denklemler teorisine göre, bu sistem sıfır çözüme sahiptir. Bundan dolayı $x_3 \in [0,X]$ için $\tilde{q}(x_3) \equiv 0$ dır. İspat tamamlanmıştır.

4. SONUÇ

Sabit katsayılı ve fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemler, Volterra integral denklemine dönüşmüştür. Bu integral denklemler yaklaşık ardışıklar yöntemi ile çözülmüştür. İntegral denklemlerin varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Üç boyutlu Volterra integral denkleminin ters problemin tekilliğinin çalışmasına uygulanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Evans, L.C. 1998. Partial Differential Equations. RI: American Society, 662: pp. 241-250.

[2] Ikowa, M. 1997. Partial Differential Equations and Wave Phenomena. Providence RI: American Society.

[3] Işık, A. 2004. Application of the Volterra Type Integral Equations for Problem of Applied Mathematics. Dokuz Eylül Üniversitesi, Ph.D. Thesis, Izmir.

[4] Krasnov, M. 1971. Problems and Exercises in Integral Equations, MIR Publishers, pp: 56-70, Moscow.

[5] Metin, G. 2011. Sobolev'in Bulduğu Fonksiyon Hızlı Dalga Denkleminin Geliştirilmesi ve Genelleştirilmesi, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aydın.

[6] Özkaya, O. 2010. Volterra Integral Denklemlerinin Yaklaşık Ardışıklar Yöntemiyle Çözümlemeleri, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aydın.

[7] Rakesh, R. 2003. An Inverse Problem for a Layered Medium with a Point Source, Problems 19: pp. 489-512, USA.

[8] Romanov, V.G. 1974. Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations, Springer-Verlag Press, 154, pp: 53-62, USA.

[9] Sobolev, S.L. 1933. A Generalization of Krichoff's Formula, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 6: pp. 256-262.

[10] Volterra, V. 1930. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations, Blackie and Son, Ltd., 227, pp: 53-63, London and Glasgow.

[11] Yakhno, V.G. 2001. Inverse Problems in Underwater Acoustics, Multidimensional Inverse Problems for Acoustic Equation in the Ray Statement, Springer-Verlag, pp: 159-184, NewYork.

[12] Yakhno, V.G. 2002. III Posed and Inverse Problem, Multidimensional Inverse Problems for Hyperbolic Equations with Point Sources, VSP, pp: 443-468, The Netherlands.

[13] Yakhno, V.G. and Işık, A. 2003. Volterra Integral Equation Method for Solving Some Hyperbolic Equation Problems, Selçuk Journal of Appl. Math., 4(2): pp. 103-112.

[14] Zauderer, E. 1989. Partial Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley Sons,891, pp: 707-711, NewYork.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER
Adı Soyadı : Nurhan AYBAR
Doğum Yeri ve Tarihi : İzmir 03.09.1988
EĞİTİM DURUMU
Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
BİLİMSEL FAALİYETLERİ
a) Yayınlar
-SCI b) Bildiriler
-Uluslararası c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Söke-Kuşadası VIP Dershaneleri 2 yıl
İLETİŞİM
E-posta Adresi : n.u.r.h.a.n@hotmail.com
Tarih : 18.07.2013