ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
2013-YL-035

ÇEŞİTLİ KUANTUM SİSTEMLERİ İÇİN GEL'FAND ÜÇLÜ UZAY YAPISININ KURULMASI

Onur GENÇ

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Onur GENÇ tarafından hazırlanan Çeşitli Kuantum Sistemleri İçin Gel'fand Üçlü Uzay Yapısının Kurulması başlıklı tez, 18.07.2013 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Halil YARANERİ	Adnan Menderes Üniv.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU	Adnan Menderes Üniv.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Fatih ERMAN	İzmir Yüksek Teknoloji Enst.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2013 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

18.07.2013

Onur GENÇ

ÖZET

ÇEŞİTLİ KUANTUM SİSTEMLERİ İÇİN GEL'FAND ÜÇLÜ UZAY YAPISININ KURULMASI

Onur GENÇ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU
2013, 45 sayfa

Kuantum mekaniğinin matematiksel yapısı matrisler ve diferansiyel işlemcilere dayanmaktadır. Bu işlemcilerin etki ettikleri vektör uzayı genellikle Hilbert uzayı olarak seçilmektedir. Ancak Hilbert uzayı, kuantum fiziğinin yaygın olarak kullanılan formülasyonu olan Dirac formülasyonu ve Dirac δ-fonksiyonunun tanımlanması için gerekli matematiksel alt yapıyı sağlayamamaktadır. Dirac formülasyonunun ve δ-fonksiyonunun matematiksel yapısını oluşturmak amacıyla, I. M Gelfand ve N. Ya. Vilenkin 1964 yılında, L. Schwartz tarafından geliştirilen dağılımlar teorisini geliştirerek Gel'fand üçlü uzay yapısını oluşturmuşlardır.

Bu tezde, H. S. Green tarafından kuantum mekaniksel işlemcilerin spektrum ve özvektörlerinin bulunmasında kullanılan faktorizasyon yöntemi kullanılarak, çeşitli kuantum mekaniksel sistemlerin Gel'fand üçlü yapılarının elde edilebileceği gösterilmiştir. Örnek olarak, harmonik salınıcı ve sonsuz kuyu sistemlerinin Gel'fand üçlü uzay yapısı elde edilmiştir. Ayrıca, sonuç kısmında sonsuz kuyu potansiyelinde vektör uzayı olarak Hilbert uzayı seçildiğinde enerjinin karesi ve belirsizlik hesaplarında ortaya çıkan tutarsızlığın, Gel'fand üçlü yapısı seçildiğinde ortadan kaldırılabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Topoloji, sınırlı işlemci, dual uzay, spektrum, yoğun uzay, Cauchy dizisi.

ABSTRACT

CONSTRUCTION OF GEL'FAND TRIPLETS FOR VARIOUS QUANTUM SYSTEMS

Onur GENÇ

M.Sc. Thesis, Department of Physics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Haydar UNCU
2013, 45 pages

The mathematical structure of quantum mechanics depends on matrices and differential operators. The space which these operators act on is chosen as Hilbert space usually. However, the Hilbert space cannot provide the necessary mathematical structure which is needed to define the Dirac formulation and Dirac's δ-function used in quantum mechanics generally. In 1964 I. M Gelfand and N. Ya. Vilenkin invented the Gel'fand triplets by developing the distribution theory developed by L. Schwartz in order to create the mathematical structure of Dirac formulation and Dirac's δ-function.

In this thesis, it has been represented that Gel'fand triplets of various quantum mechanical systems can be achieved by using the factorization method which is used by H. S. Green to determine the spectrum and eigenvectors of quantum mechanical operators. For example, the Gel'fand triplets of harmonic oscillator and infinite potential well has been achieved. Besides that, the fact that the inconsistency that arises during the calculation of energy squared and uncertainty when the Hilbert space is chosen as vector space can be removed if Gel'fand triplets are chosen.

Key Words

Topology, bounded operator, dual space, spectrum, dense space, Cauchy sequence.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada; kuantum sistemlerini betimleyen dalga fonksiyonlarının ait oldukları matematiksel uzay kavramlarının analiz edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda; matematikte yer alan vektör uzayı ve Hilbert uzayları kavramları incelenmiştir. Ayrıca kuantum mekaniğinin üçlü uzay yapısı üzerine kurulan formulasyonu da çalışılmıştır.

Tez çalışmam süresince yardım ve anlayışları için, danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Haydar UNCU'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Fizik Ana Bilim Dalı başkanı Sayın Prof. Dr. Halil YARANERİ'ye ve tez jürimde yer almayı kabul eden Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatih ERMAN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Cenk AKYÜZ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Metin BİLGE'ye de sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Onur GENÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\sum\oplus$	Direkt Toplam
$\|\hat{O}\|$	"$\hat{O}$" İşlemcisinin Normu
$\langle\,.\,\|\,.\,\rangle$	Dirac bra-ket'i
$\mathbb{V}^{\times}$	Dual Uzay
$(\,.\,\|\,.\,)$	İç Çarpım
δ	Delta
$\mathrm{Sp}(\hat{O})$	"$\hat{O}$" İşlemcisinin Spektrumu
$\int_{T.U.}$	Tüm Uzay Üzerinden İntegral

1. GİRİŞ

Gelfand üçlü uzay yapısı; Hilbert uzayı, Hilbert uzayında yoğun bir nükleer uzay ve bu nükleer uzayın dual uzayından oluşan soyut, matematiksel bir vektör uzayı yapısıdır. Bu yapı ilk olarak 1964 yılında Gel'fand tarafından matematiksel olarak kurulmuştur [1]. Fakat kuantum mekaniğinin Hilbert uzayı çerçevesinde çalışılan formu bahsi geçecek olan problemleri bazı kabuller yaparak tolere edebildiği ve büyük ölçüde de deneylerle uyumlu olarak çalışır olduğu için Gelfand üçlüsünden fizik açısından pek fazla yararlanılamamıştır. Ancak sonsuz potansiyel kuyusu içerisindeki parçacık problemi gibi en temel kuantum mekaniği olgularında dahi dalga vektörleri ve onlara etki eden işlemcilerle ilgili olarak fiziksel niceliklerin tutarlılığı bakımından ikilemler olduğu görülmüştür [2]. Bu sebeplerle de kuantum mekaniğinin matematiksel temellerinden biri olan vektör uzayı kavramının incelenmesi gereği ortaya çıkmıştır.

Bu tezde de vektör uzayı yapıları olan Gel'fand üçlü uzay yapıları ve kuantum mekaniğindeki etkilerinin çalışılması amaçlanmaktadır.

2. MATEMATİKSEL GİRİŞ

2.1. Vektör Uzayı

Bir vektör uzayı aşağıdaki dört olguyu içeren matematiksel yapıdır [9];

- Bir skalerler cismi “$\mathbb{F}$”,
- Vektörler olarak adlandırılan objeler kümesi “$\mathbb{V}$”,
- Toplama kuralı “$+$”,
- Skalerle çarpma kuralı “$\cdot$”.

2.1.1. Toplama Kuralı

$\mathbb{V}$ içindeki her v,w vektör çiftini, yine $\mathbb{V}$ içindeki $v+w$ vektörüyle ilişkilendiren ve v ve w’nın toplamı olarak adlandırılan bir kuraldır.

2.1.1.1. Toplama kuralının sağlaması gereken özellikler

(i) Toplama değişme özelliğine sahiptir;

$(v+w) = (w+v)$

(ii) Toplama birleşme özelliğine sahiptir;

$v+(w+u) = (v+w)+u$

(iii) $\mathbb{V}$ içindeki her v için;

$v+0_v = v$

olacak şekilde, yine $\mathbb{V}$ içinde bulunan bir "sıfır vektörü" 0_v vardır.

(iv) $\mathbb{V}$ içindeki her bir v için;

$$v + (-v) = 0_v$$

olacak şekilde, yine $\mathbb{V}$ içinde bulunan bir $-v$ vektörü vardır.

2.1.2. Skalerlerle Çarpma Kuralı

$\mathbb{V}$ içindeki her bir vektör v ile $\mathbb{F}$ içindeki her bir skaler c'yi yine $\mathbb{V}$ içindeki cv ile ilişkilendiren ve c ile v'nün çarpımı olarak adlandırılan bir kuraldır.

2.1.2.1. Skalerlerle çarpma kuralının sağlaması gereken özellikler

$\mathbb{V}$ içindeki her bir v için;

(i) $1v = v$

(ii) $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$

(iii) $c(v+w) = (cv+cw)$

(iv) $(c_1+c_2)v = (c_1v+c_2v)$

2.2. İç Çarpım

Üzerinde bir iç çarpım, $\mathbb{V}$ içindeki her bir v, w vektör çiftini $\mathbb{F}$ içindeki bir $\langle v|w\rangle$ skaleriyle ilişkilendiren ve $\mathbb{V}$ içindeki her v, w, u ve skalerler c için belirli özellikleri sağlayan bir fonksiyondur [9].

2.2.1. İç Çarpımın Özellikleri

(i) $\langle (v+w)|u\rangle = \langle v|u\rangle + \langle w|u\rangle$;

(ii) $\langle v|cw\rangle = c\langle u|w\rangle$;

(iii) $\langle w|v\rangle = \langle v|w\rangle^*$, "$*$" kompleks eşleniği temsil etmek üzere;

(iv) $\langle v|v\rangle > 0$, v sıfırdan farklı ise;

İlk iki koşul biraraya getirilirse;

$\langle v|cw+u\rangle = c\langle v|w\rangle + \langle v|u\rangle$ olarak yazılabilir.

2.3. Metrik

Verilen bir küme için komşu noktalar arasındaki mesafeyi tanımlayan, negatif olmayan bir $g(x,y)$ fonksiyonudur.

2.3.1. Metriğin Özellikleri

(i) $g(x,y)+g(y,z) > g(x,z)$

(ii) $g(x,y) = g(y,x)$, simetri;

(iii) $g(x,x) = 0$ (ya da eğer $g(x,y) = 0$ ise $x = y$'dir)

Not: Eğer $g(x,x)$ sıfıra eşit değilse $g(x,y)$'ye metrik yerine, pseudometrik denir.

2.4. Metrik Uzay

Bir metrik uzay, $\mathbb{S}$ bir küme olmak üzere, $\mathbb{S}$ içinden her iki a,b noktaları için a ve b arasındaki mesafeyi veren negatif olmayan bir mesafe fonksiyonu (metrik g) ile birlikte tanımlanan ve uzay olma şartını sağlayan bir $\mathbb{S}$ kümesidir.

2.5. Cauchy Dizisi

Bir norm ile tanımlanmış uzayın elemanlarından oluşan bir $\{f_n\}$ dizisi, eğer; rastgele bir $\varepsilon > 0$ için her $m,n > N$ olmak üzere $\| f_m - f_n \| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir N var ise, Cauchy dizisidir.

2.6. Tamlık Koşulu

Bir uzay içindeki her Cauchy dizisi gene aynı uzay içindeki bir elemana (vektöre) yakınsıyorsa bu uzaya bir tam uzay denir.

2.7. Banach Uzayları

Üzerinde iç çarpımın tanımlı olduğu tam metrik uzaylara Banach uzayları denir.

2.8. Hilbert Uzayları

Banach uzayı olma koşuluna ek olarak yakınsama koşulu Hilbert uzayı topolojsi ile tanımlanan tam metrik uzaylar Hilbert uzaylarıdır.

2.8.1. Hilbert Uzayı İçin Yakınsama Koşulu

Yakınsamanın $\varphi_n \stackrel{\tau_{\mathscr{H}}}{\to} \varphi \Leftrightarrow \| \varphi_n - \varphi \| \to 0$ şeklinde ifade edilen biçimidir. Aynı zamanda da Hilbert uzayının topolojisini tanımlamaktadır.

2.9. Cebir

$\mathbb{F}$ bir cisim olsun. Bir lineer cebir, lineer vektör uzayının sahip olduğu özelliklere ek olarak vektör çarpımı işlemini de içeren, cisim üzerinde tanımlı bir "$\mathscr{A}$" uzayıdır.

2.9.1. Vektör Çarpımı

"$\mathscr{A}$" içindeki her a ve b çiftini yine "$\mathscr{A}$" içindeki ab vektörüyle ilişkilendiren, a ve b'nin çarpımı olarak adlandırılan bir işlemdir.

2.9.1.1. Vektör çarpımının özellikleri

(i) $v(wu) = (vw)u$

(ii) $v(w+u) = vw+vu \quad (v+w)u = vu+wu$

(iii) $\mathbb{F}$ içindeki her bir skaler c için;

$c(vw) = (cv)w = v(cw)$

2.9.2. Cebirin Üreteçleri

Eğer cebirin herhangi bir $\hat{A}$ elemanı;

$$\hat{A} = \hat{I} + \sum_i c_i \hat{x}_i + \sum_{i,j} c_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j + \sum_{i,j,k} c_{ijk} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k + \ldots \tag{2.9.1}$$

biçiminde yazılabiliyor ise $\hat{x}_i$'lere o cebirin üreteçleri denir.

2.10. Başka Bir Yakınsama Tanımı

Yakınsama, "Φ" uzayı topolojisi ile

$$n \to \infty \Rightarrow \| x_i^m (\varphi_n - \varphi) \| \to 0 \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

ya da

$$\varphi_n \overset{\tau_\Phi}{\to} \varphi \Leftrightarrow \| x_i^m (\varphi_n - \varphi) \| \to 0 \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklinde tanımlanır.

2.11. "Φ" Uzayları

Yakınsama koşulunun "Φ" uzayı topolojisi ile tanımlandığı uzaylardır.

Yakınsama koşullarına bakıldığında görülüyor ki yakınsama koşulu daha kısıtlayıcı olan "Φ" uzayları Hilbert uzaylarının alt kümesidir.

2.12. Fonksiyonel

$\mathbb{V}$, $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere, $\mathbb{V}$'den $\mathbb{F}$ içine bir $\mathfrak{F}$ lineer dönüşümü aynı zamanda da $\mathbb{V}$ üzerinde bir lineer fonksiyonel olarak adlandırılır.

2.13. Dual Uzay

$\mathbb{V}$ üzerinde tanımlı tüm fonksiyoneller doğal olarak bir vektör uzayı oluşturur ve bu uzay $\mathbb{V}^{\times}$ ile gösterilip $\mathbb{V}$'nin dual uzayı olarak adlandırılır.

2.14. Pozitif Tanımlı Bir İşlemci Kullanılarak Tanımlanan İç Çarpım İçin Bazı Eşitsizlikler

"$\hat{K}$" pozitif tanımlı simetrik bir işlemci olsun. Yani $\hat{K}$'nın tanım kümesindeki her ψ ve ϕ vektörleri için ($\psi \in \mathscr{D}(\hat{K})$), $(\psi, \hat{K}\psi) \geq 0$ ve $(\phi, \hat{K}\psi) = (\hat{K}\phi, \psi)$ olsun. Bu işlemci kullanılarak, p pozitif bir tamsayısı için;

$$(\psi, \hat{K}^p \phi) = (\psi, \phi)_p \tag{2.14.2}$$

tanımını yapılsın. İlk olarak Cauchy-Schwarz-Bunyakowski (CSB) eşitsizliğinin bir benzeri olan

$$|(\psi, \phi)_p|^2 \leq (\psi, \psi)_p (\phi, \phi)_p \tag{2.14.3}$$

eşitsizliği gösterilsin [12]. Öncelikle;

$$\theta = \frac{(\psi, \phi)_p}{|(\psi, \phi)_p|} \tag{2.14.4}$$

tanımını yapılsın. "$\hat{K}$", dolayısı ile "$\hat{K}^p$" pozitif tanmlı olduğundan herhangi bir $\lambda = \lambda^*$ gerçel sayısı için;

$$(\theta\psi + \lambda\phi, \theta\psi + \lambda\phi)_p = (\theta\psi + \lambda\phi, \hat{K}^p[\theta\psi + \lambda\phi]) \geq 0 \tag{2.14.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu çarpım açılmadan önce $|\theta|^2 = 1$ olduğu gösterilsin:

$$\theta\theta^* = \frac{(\psi, \hat{K}^p \phi)(\hat{K}^p \phi, \psi)}{|(\psi, \hat{K}^p \phi)|^2} = \frac{|(\psi, \hat{K}^p \phi)|^2}{|(\psi, \hat{K}^p \phi)|^2} = 1 \tag{2.14.6}$$

Şimdi, (2.14.4) ifadesini (2.14.5) denkleminde yerine koyarak

$$
\begin{aligned}
& |\theta|^2(\psi,\hat{K}^p\psi)+\lambda^*(\psi,\hat{K}^p\phi)+\theta(\phi,\hat{K}^p\psi)+\lambda^2(\phi,\hat{K}^p\phi) \\
= \;& (\psi,\hat{K}^p\psi)+\lambda\frac{(\psi,\phi)_p^*(\psi,\phi)_p}{|(\psi,\phi)_p|}+\lambda\frac{(\psi,\phi)_p(\psi,\phi)_p^*}{|(\psi,\phi)_p|}+\lambda^2(\phi,\hat{K}^p\phi) \\
= \;& (\psi,\psi)_p+2\lambda\frac{|(\psi,\phi)_p|^2}{|(\psi,\phi)_p|}+\lambda^2(\phi,\phi)_p \\
= \;& (\psi,\psi)_p+2\lambda\frac{|(\psi,\phi)_p|^2}{|(\psi,\phi)_p|}+\lambda^2(\phi,\phi)_p \geq 0 \qquad (2.14.7)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıda "$\hat{K}$" dolayısıyla da "$\hat{K}^p$" işlemcilerinin simetrik olması kullanılarak elde edilen $(\phi,\hat{K}^p\psi)=(\hat{K}^p\psi,\phi)=(\psi,\hat{K}^p\phi)^*$ eşitliğinden yararlanıldı. (2.14.7) denkleminin sol tarafı her zaman sıfırdan büyüktür. O halde λ değişkenine göre ikinci dereceden bir polinom olan sol tarafın diskriminantı;

$$
4|(\psi,\phi)_p|^2-4|(\psi,\psi)_p|^2|(\phi,\phi)_p|^2 \leq 0 \qquad (2.14.8)
$$

olmalıdır. Burada, (2.14.8) denkleminden pozitif tanımlı simetrik bir işlemci kullanılarak tanımlanan (2.14.2) iç çarpımının da aşağıdaki eşitsizliği sağladığı görülür:

$$
|(\psi,\phi)_p| \leq |(\psi,\psi)_p||(\phi,\phi)_p| \qquad (2.14.9)
$$

Şimdi (2.14.2) iç çarpımının üçgen eşitsizliğini de sağladığı gösterilsin.

$$
\begin{aligned}
||\phi+\psi||_p^2 &= (\phi+\psi,\hat{K}^p[\phi+\psi]) \\
&= (\phi,\hat{K}^p\phi)+(\psi,\hat{K}^p\phi)+(\phi,\hat{K}^p\psi)+(\psi,\hat{K}^p\psi) \qquad (2.14.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\hat{K}$ simetrik olduğu için $(\phi,\hat{K}^p\psi)=(\hat{K}^p\psi,\phi)^*=(\psi,\hat{K}^p\phi^*)$ eşitliği sağlandığından (2.14.10) denklemi

$$
\begin{aligned}
||\phi+\psi||_p^2 &= (\phi,\hat{K}^p\phi)+(\psi,\hat{K}^p\phi)+(\psi,\hat{K}^p\phi)^*+(\psi,\hat{K}^p\psi) \\
&= |(\phi,\phi)_p|^2+2\mathbf{Re}(\psi,\hat{K}^p\phi)+|(\psi,\psi)_p|^2 \\
&\leq |(\phi,\phi)_p|^2+2|(\psi,\phi)_p|+|(\psi,\psi)_p|^2 \\
&\leq |(\phi,\phi)_p|^2+2|(\psi,\psi)_p||(\phi,\phi)_p|+|(\psi,\psi)_p|^2 \qquad (2.14.11)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemde sondan bir üstteki satırdan son satıra geçerken (2.14.9) eşitsizliği kullanılmıştır. (2.14.11) eşitsizliği sadeleştirilerek üçgen eşitsizliği haline getitrilebilir:

$$||\phi + \psi||_p \leq |(\phi, \phi)_p| + |(\psi, \psi)_p \tag{2.14.12}$$

3. BİR BOYUTLU HARMONİK SALINICI

3.1. "$\mathscr{A}$" Harmonik Salınıcı Probleminin Cebiri

Bir boyutlu harmonik salınıcı probleminin cebiri "$\mathscr{A}$";

Enerji özdeğerlerine karşılık gelen Hamilton işlemcisi "$\hat{H}$"

Momentum özdeğerlerine karşılık gelen momentum işlemcisi "$\hat{P}$"

Konum özdeğerlerine karşılık gelen konum işlemcisi "$\hat{Q}$"

aşağıdaki cebirsel bağıntıları sağlamak üzere;

(i) (Lie cebirinin kuralı olan komutasyon ilişkisi)

$$\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P} = -i\hbar\hat{I} \tag{3.1.1}$$

(ii) (Cebirin işlemcilerinin arasındaki bağıntı)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{Q}^2 \tag{3.1.2}$$

"$\hat{H}$", "$\hat{P}$" ve "$\hat{Q}$" tarafından üretilir.

"$\mathscr{A}$" bir boyutlu Harmonik salınıcının "Φ" olarak adlandırılacak bir uzay üzerinde kurulu cebiri olarak öngörülmesine rağmen yukarıdaki (i) ve (ii)'yi sağlayan cebirin, üzerine kurulu olduğu farklı "Φ" uzayları vardır.

Bu açıdan uzayı sabitlemek amacıyla "$\mathscr{A}$" için fazladan koşul gerekmektedir. Bu koşullar bu formulasyonda Hamilton işlemcisinin iki özelliğinin kabulünden başka bir şey değildir [3];

(a) Hamilton işlemcisi "$\hat{H}$", esaslı kendine eşleniktir.

(b) Hamilton "$\hat{H}$" işlemcisinin en az bir tane özvektörü vardır.

Yukarıda Hamilton işlemcisi için yapılan iki kabulden

(a) Nelson teoremine göre [4];

(b) ise basamak işlemcileri gösterimini doğurduğu ve basamak işlemcileri gösteriminin de her zaman integre edilebilir olmasından dolayı [5];

"(i)" ve "(ii)"nin $\hat{H}$, $\hat{P}$ ve $\hat{Q}$ işlemcilerinden üretilen Weyl grubu temsiline integre etmesini sağlamaktadır.

3.2. "Ψ" Sonlu Enerji Durumları Uzayının Kurulması

Harmonik salınıcı probleminin iyi bilinen basamak işlemcileri, yokedici ve yaratıcı işlemciler sırasıyla;

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{Q} + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{P} \tag{3.2.3}$$

$$\hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{Q} - \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{P} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir ve (i) ile (ii)'nin bir sonucu olarak da

$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{I} \tag{3.2.5}$$

sıradeğişme (komütatör) bağıntısını sağlarlar.

"$\hat{N}$" sayı işlemcisi ise;

$$\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a} = \frac{1}{\omega\hbar}\hat{H} - \frac{1}{2}\hat{I} \tag{3.2.6}$$

biçiminde ifade edilmektedir ve

(a)'nın bir sonucu olarak esaslı kendine eşleniktir,

(b)'nin bir sonucu olarak da

$$\hat{N}\phi_n = n\phi_n \tag{3.2.7}$$

şeklinde bir "ϕ_n" özvektörüne sahiptir.

"$\hat{N}$" işlemcisi (3.2.5) de göz önünde bulundurarak takip eden şekilde analiz edilirse;

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}\phi_n) &= \hat{a}^\dagger \hat{a}(\hat{a}\phi_n) = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{I})(\hat{a}\phi_n) = \hat{a}(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{I})\phi_n \\ &= \hat{a}(\hat{N} - \hat{I})\phi_n = \hat{a}(n-1)\phi_n \\ &= (n-1)(\hat{a}\phi_n) = \hat{N}(\hat{a}\phi_n) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}^\dagger \phi_n) &= \hat{a}^\dagger \hat{a}(\hat{a}^\dagger \phi_n) = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{I})\phi_n \\ &= \hat{a}^\dagger (\hat{N} + \hat{I})\phi_n = \hat{a}^\dagger (n+1)\phi_n \\ &= (n+1)(\hat{a}^\dagger \phi_n) = \hat{N}(\hat{a}^\dagger \phi_n) \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Öyleyse;

$(\hat{a}\phi_n)$, $\hat{N}$'nin $(n-1)$ özdeğerine karşılık gelen,

$(\hat{a}^\dagger \phi_n)$ ise $\hat{N}$'nin $(n+1)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri olarak değerlendirilebilir.

Bu durum ise;

$\hat{a}$ işlemcisinin ϕ_n gibi bir özvektörü ϕ_{n-1},

$\hat{a}^\dagger$ işlemcisinin ise ϕ_n gibi bir özvektörü ϕ_{n+1}

şeklinde değiştirdiğini gösterir.

Harmonik salınıcının basamak temsilini oluşturan "$\hat{a}$", "$\hat{a}^\dagger$" ve bu ikisinin çarpımı olan "$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$" işlemcileri (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.6) bağıntılarına göre "$\hat{H}$" Hamilton işlemcisi ile sıradeğişen (komutatif) işlemcilerdir. Bu nedenle de "$\hat{H}$" işlemcisi ile aynı özvektörlere sahiptirler.

Öyleyse enerji öz değerlerinin öz vektörleri basamak temsilinde ifade edilmek istenirse;

$$\begin{aligned}
\langle\phi_n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle &= \int_{T.U.}\phi_n^*(\hat{a}\hat{a}^\dagger)\phi_n dx = \int_{T.U.}\phi_n^*(\hat{N}+\hat{I})\phi_n dx \\
&= \langle\phi_n(\hat{N}+\hat{I})|\phi_n\rangle = (n+1)\langle\phi_n|\phi_n\rangle \\
&= (n+1) = \langle\phi_n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle \\
fakat; & \\
\langle\phi_n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle &= ||\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle||^2 \\
\Rightarrow ||\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle|| &= \sqrt{(n+1)} \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

bu noktada daha önce “ϕ_n" gibi bir özvektörü, “ϕ_{n+1}" gibi bir özvektörle değiştirdiği gösterilen “$\hat{a}^\dagger$” işlemcisi için aşağıdaki özdeğer-özvektör denklemi önerilir;

$$\hat{a}^\dagger\phi_n = \alpha\phi_{n+1} \qquad (3.2.11)$$

ve bu özdeğer-özvektör denklemi “$\hat{a}^\dagger\phi_n$” vektörünün boyuna bölünürse, (3.2.10) ve (3.2.11)’den;

$$\frac{\hat{a}^\dagger\phi_n}{||\hat{a}^\dagger\phi_n||} = \frac{\alpha\phi_{n+1}}{\sqrt{(n+1)}} \qquad (3.2.12)$$

elde edilir.

Ancak (3.2.12) denkleminin sol tarafı bir vektörün, boyuna oranıdır ki bu da o vektör ile aynı yöndeki birim vektörü verir ve birim vektörün normu 1’e eşittir.

Öyleyse (3.2.12) denkleminin sağ tarafının normu da “1” olmak zorundadır. Buradan;

$$\begin{aligned}
1 &= \langle\frac{\alpha}{\sqrt{(n+1)}}\phi_{n+1}|\frac{\alpha}{\sqrt{(n+1)}}\phi_{n+1}\rangle \\
&= \frac{\alpha^2}{(n+1)}\langle\phi_{n+1}|\phi_{n+1}\rangle = \frac{\alpha^2}{(n+1)} = 1 \\
\Rightarrow \alpha &= \sqrt{(n+1)}
\end{aligned}$$

o zaman, “$\hat{a}^{\dagger}$” işlemcisinin özdeğer-özvektör denklemi;

$$\hat{a}^{\dagger}\phi_n = \sqrt{(n+1)}\phi_{n+1} \tag{3.2.13}$$

biçimindedir.

Bu noktada (3.2.13) analiz edilecek olursa harmonik salınıcının özvektörlerinin basamak temsilindeki ifadesinin;

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1} &= \frac{\hat{a}^{\dagger}\phi_{n+1}}{\sqrt{(n+1)}} \\
\Rightarrow \phi_n &= \frac{\hat{a}^{\dagger}\phi_{n-1}}{\sqrt{(n)}} = \frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{(n)}}\frac{\hat{a}^{\dagger}\phi_{n-2}}{\sqrt{(n-1)}} \\
&= \frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{(n)}}\frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{(n-1)}}\frac{\hat{a}^{\dagger}\phi_{n-3}}{\sqrt{(n-2)}} = \ldots = \frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{(n)}}\frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{(n-1)}}\frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{(n-2)}}\cdots\frac{\hat{a}^{\dagger}\phi_0}{\sqrt{(1)}} \\
&= \frac{(\hat{a}^{\dagger})^n\phi_0}{\sqrt{(n!)}} \\
\Rightarrow \phi_n &= \frac{(\hat{a}^{\dagger})^n\phi_0}{\sqrt{(n!)}} \qquad (3.2.14)
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu görülür.

Bu aşamada “ϕ_n”lerin taradığı,

$$\psi = \sum_0^m c_n\phi_n, \qquad c_n \in \mathbb{C}, \quad m < \infty \quad \& \quad \psi \in \Psi \tag{3.2.15}$$

olmak üzere bir “Ψ” kümesi tanımlanır ve “n”inci özenerjiye karşılık gelen “ϕ_n” özvektörünün kompleks sayılarla çarpımlarının oluşturduğu bir boyutlu,

$$\mathscr{R}_n = \{\beta\phi_n \mid \quad \beta \in \mathbb{C}\} \tag{3.2.16}$$

enerji özuzayları da göz önünde bulundurulursa “Ψ”nin

$$\Psi = \sum_{n=0}^{m} \oplus\mathscr{R}_n \tag{3.2.17}$$

biçiminde $\mathscr{R}_n$’lerin cebirsel direkt toplamı olduğu görülür.

Başka bir deyişle "Ψ", $\phi_n \in \mathscr{R}_n$ olmak üzere tüm

$\varphi_l = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots, \phi_{l-1}, \phi_l, 0, 0, \ldots)$

dizilerinin oluşturduğu bir kümedir [3].

Bu noktaya kadar "Ψ" üzerinde bir topoloji belirlenmemiş olup ayrıca bir tam uzay da değildir.

Bundan sonra tam olmayan fakat harmonik salınıcı özvektörlerinin oluşturduğu dizilerin kümesi olan "Ψ" uzayı üzerinden Hilbert uzayı kurulmak istendiğinde Hilbert uzayı topolojisini incelemek gerekir.

3.3. "$\mathscr{H}$" Hilbert Uzayının Kurulması

Hilbert uzayının topolojisinin kuralı;

$$j \to \infty \quad \text{için} \quad \varphi_j \overset{\tau_{\mathscr{H}}}{\to} \phi \Leftrightarrow j \to \infty \quad \text{için} \quad \|\varphi_j - \phi\| \to 0 \tag{3.3.18}$$

şeklindedir.

(3.3.18)'in bir sonucu olması gerektiği üzere Hilbert uzayı kendi topolojisini sağlayan,

$$\varphi_j = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots), \qquad \phi_n \in \mathscr{R}_n \quad \& \quad \forall k,\ \phi_k \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3.19}$$

dizilerini içermektedir ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_k\|^2 < \infty \tag{3.3.20}$$

norm özelliğini taşımaktadır. Buradan;

$$q \to \infty \quad \text{için} \quad \sum_{k=q+1}^{\infty} \|\phi_k\|^2 \to 0 \Rightarrow q \to \infty \quad \text{için} \quad \|\phi_k\| \to 0 \tag{3.3.21}$$

olduğu görülmektedir.

(3.3.21) bağıntısı aslında Hilbert uzayı dahilindeki özvektörlerin ancak sonsuz limitinde sıfır olmaya başladığını, böylelikle de Hilbert uzayı içerisinde yer alan dizilerin sonsuz diziler olması gerektiğini ifade etmektedir.

Öyleyse Hilbert uzayı içerisinde yer alan "φ_j" dizilerini oluşturan özvektörler "ϕ_k"lardan (3.3.21) bağıntısını sağlayanlar "Ψ" içerisinde değildir.

Bu da "Ψ"nin Hilbert uzayı topolojisi "τ_H"e göre tam olmadığı anlamına gelmektedir.

Ancak "Ψ" uzayına ait dizilere "τ_H" kuralına göre tüm limit noktaları eklenir ise normun skaler çarpım ile tanımlandığı tam bir uzay elde edilmiş olur. Bu uzay Hilbert uzayından başka bir şey değildir ve,

$$\mathscr{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathscr{R}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3.22}$$

şeklinde betimlenebilir.

3.4. "Φ" Sonsuz Enerji Durumları Uzayının Kurulması

Bundan sonra iç çarpımın alışılageldiğinin dışında;

$$\langle \phi_s | \psi_s \rangle_r = \langle \phi_s | (\hat{N} + \hat{I})^r \psi_s \rangle \tag{3.4.23}$$

şeklinde olduğu kabul edilirse karşılık gelen norm;

$$\|\phi_s\|_r = \sqrt{\langle \phi_s | (\hat{N} + \hat{I})^r \phi_s \rangle}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4.24}$$

biçiminde tanımlanır.

O zaman bu üzerinde normun farklı biçimde tanımlanmış olduğu uzay yapısı için topolojinin kuralı (3.4.24) denklemine göre;

$$\begin{aligned} s \to \infty \quad \text{için} \quad \varphi_s \quad &\to \quad \phi \Leftrightarrow s \to \infty \quad \text{için;} \\ \|\varphi_s - \phi\|_r \quad &= \quad \sqrt{\langle (\varphi_s - \phi) | (\hat{N} + \hat{I})^r (\varphi_s - \phi) \rangle} \to 0 \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

olarak her $r = 0, 1, 2, \ldots$ için geçerli olmak şartıyla ortaya çıkmış olur.

Öyleyse norm (3.4.24) kuantum mekaniksel durumların olasılığının belirli bir sayı olması gerekliliği de göz önünde bulundurularak incelenirse;

her bir $r = 0, 1, 2, \ldots$ için;

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^r \|\phi_s\|^2 < \infty \tag{3.4.26}$$

koşulunu sağlamak zorundadır.

O zaman (3.4.26) bağıntısına göre yakınsama;

$$\begin{aligned} q \to \infty \quad \text{için} \sum_{s=q+1}^{\infty} \langle \phi_s | (\hat{N} + \hat{I})^r \phi_s \rangle &= \sum_{s=q+1}^{\infty} (n+1)^r \langle \phi_s | \phi_s \rangle \\ &= \sum_{s=q+1}^{\infty} (n+1)^r \|\phi_s\|^2 \to 0 \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

şeklini alır.

Hilbert uzayı durumuna benzer şekilde burada da (3.4.26) bağıntısı, bu bağıntının üzerinde geçerli olduğu uzayın dahilindeki özvektörlerin sonsuz limitinde sıfır olmaya başladığını, böylelikle de bu uzay içerisinde yer alan dizilerin sonsuz diziler olması gerektiğini ifade etmektedir.

Yine benzer şekilde bu uzay içerisinde yer alan "φ_s" dizilerini oluşturan özvektörler "ϕ_s"lerden (3.4.27) bağıntısını sağlayanlar "Ψ" içerisinde değildir.

Fakat "Ψ" uzayına ait dizilere (3.4.25) kuralına göre tüm limit noktaları eklenir ise normun (3.4.24) ile tanımlandığı bir tam uzay elde edilmiş olur ve bu uzay;

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathscr{R}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4.28}$$

şeklinde tanımlanan ve "τ_Φ" topolojisine sahip olan "Φ" uzayıdır.

Bir metrik uzay olan "$\mathscr{M}$"in bir alt kümesi "$\mathbb{S}$", eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ & herhangi $w \in \mathscr{M}$ için, $\mathbb{S}$ içerisinde $d(w, v) < \varepsilon$ şeklinde bir $v \in \mathbb{S}$ var ise, $\mathscr{M}$ içinde yoğundur [6].

Yukarıdaki tanımdan anlaşılacağı üzere sırasıyla "τ_H" ve "τ_Φ" topolojilerine göre limit noktalarının eklenmesi ile tam uzay halini alan "Ψ", aynı zamanda da "$\mathscr{H}$" ve "Φ" içerisinde yoğundur.

Öyleyse;

$$\Psi \subset \mathscr{H} \quad \& \quad \Psi \subset \Phi \tag{3.4.29}$$

yazılabilir.

Bu noktada "$\mathscr{H}$" uzayı ve "Φ" uzayının topolojileri denklem (3.3.18) ve (3.4.25) incelenerek karşılaştırılırsa;

$$\text{tersi geçerli olmamak üzere} \quad s \to \infty \quad \text{için} \quad \varphi_s \overset{\tau_\Phi}{\to} \phi \Rightarrow \varphi_s \overset{\tau_{\mathscr{H}}}{\to} \phi \tag{3.4.30}$$

yazılır ve "τ_Φ", "τ_H"e göre daha güçlü, "τ_H" ise "τ_Φ"ye göre daha zayıf bir topolojidir denir [7].

Ayrıca "τ_Φ" nin her $r = 0, 1, 2, \ldots$ için sağlanması gerektiği,"τ_H"in ise Φ uzayının topolojisinin $r = 0$ gibi özel bir durumuna denk düştüğü söylenebilir.

Öyleyse "τ_Φ", "τ_H"e göre sağlanması daha güç olan bir topolojidir ve doğal olarak da "τ_Φ"ye göre yakınsak olan Cauchy dizilerinin sayısı "τ_H"e göre yakınsak olan Cauchy dizilerinin sayısından azdır. Dolayısıyla;

$$\Phi \subset \mathscr{H} \tag{3.4.31}$$

Buradan da (3.4.29) ve (3.4.32) denklemleri bir araya getirilirse;

$$\Psi \subset \Phi \subset \mathscr{H} \tag{3.4.32}$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki uzayların fizikteki yeri "Ψ" uzayının rastgele yüksek fakat sonlu enerjileri betimlemesi, "$\mathscr{H}$" uzayının sonsuz enerji durumlarını içermesi ve "Φ" uzayının ise sonsuz enerji durumlarının sonsuz küçük karışımlarını içeren durumları içermesidir [3].

3.5. “$\Phi^{\times}$” Fonksiyoneller Uzayının Kurulması

Ψ üzerinde tanımlı bir anti-lineer fonksiyonel aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$F(\beta\phi+\gamma\psi)=\beta^{*}F(\phi)+\gamma^{*}F(\phi) \tag{3.5.33}$$

Anti-lineer fonksiyonellerin bu özelliği fizik literatüründe genellikle kullanılan Dirac notasyonunda

$$\langle\beta\phi+\gamma\psi|F\rangle=\beta^{*}\langle\phi|F\rangle+\gamma^{*}\langle\psi|F\rangle \tag{3.5.34}$$

biçiminde gösterilir. Bu denklemden de görüldüğü gibi Dirac notasyonu kullanılarak anti-lineer fonksiyonellerin durum uzayına etkisi basitçe gösterilebilmektedir. Yukarıdaki (3.5.33) ve (3.5.34) denklemleri ile tanımlanan bir F fonksiyoneli iki anti-lineer fonksiyonel F_1 ve F_2 toplamı ve bir sayı ile çarpımı sırasıyla

$$\langle\phi|F_1+F_2\rangle=\langle\phi|F_1\rangle+\langle\phi|F_2\rangle \tag{3.5.35}$$

ve

$$\langle\phi|\beta F_1\rangle=\beta\langle\phi|F_1\rangle \tag{3.5.36}$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır [10]. Ψ uzayına etkileri bu şekilde tanımlanan fonksiyoneller de lineer bir uzay oluşturmaktadırlar. Bu vektör uzayı “$\Psi^{\times}$” ile gösterilip Ψ’nin dual uzayı olarak adlandırılır [3].

Bir F fonksiyoneli

$$\varphi_s \overset{\tau_\Phi}{\rightarrow} \phi \;\Rightarrow\; F(\varphi_s)\rightarrow F(\phi) \tag{3.5.37}$$

şartını sağlanıyorsa “τ_Φ” normuna göre süreklidir denir. Burada $F(\varphi_s)\rightarrow F(\phi)$ sembolü, karmaşık sayılardaki yakınsaklığı göstermektedir.

“τ_Φ” normuna göre sürekli olan bir F fonksiyoneli kompleks bir sayı ile çarpılır ya da bu norma göre sürekli iki fonksiyonel toplanırsa yine “τ_Φ” normuna göre sürekli bir fonksiyonel elde edilir. Bu özellikleri sağlayan fonksiyoneller tam bir vektör uzayı oluştururlar ve (3.5.37) şartını sağladıklarından dolayı tam bir vektör uzayı olan Φ uzayı üzerine tanımlıdırlar. Diğer bir deyişle hem (3.5.35), (3.5.36) şartlarını sağlayan fonksiyoneller "Ψ" uzayı üzerine tanımlı iken bu şartlara ek olarak (3.5.37) şartını da sağlayan fonksiyoneller Φ uzayı üzerine tanımlı fonksiyonellerdir. "Ψ" uzayı üzerine tanımlı fonksiyonellerin oluşturduğu uzay "$\Psi^{\times}$" ile gösterilirken, "Φ" uzayı üzerine tanımlı fonksiyonellerin oluşturduğu uzay "$\Phi^{\times}$" ile gösterilmektedir [3].

F fonksiyonellerinin sürekliliği "τ_{Φ}" normuna göre değil "$\tau_{\mathscr{H}}$" normuna göre tanımlanırsa $\mathscr{H}^{\times}$ üzerine etki eden fonksiyonellerin uzayı elde edilir.

Frechét Riesz teoreminin bir sonucu olarak

$$\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}^{\times} \tag{3.5.38}$$

olduğu bilinmektedir [10]. τ_H, τ_{Φ}'den daha zayıf bir topoloji olduğundan $\mathscr{H}$ uzayı Φ uzayından daha geniş bir uzaydır. Bu yüzden "Φ" uzayı üzerine tanımlanan fonksiyoneller "$\mathscr{H}$" üzerinde tanımlanan fonksiyonellere göre daha zayıf koşullar sağlarlar. Bir başka deyişle "Φ" üzerinde tanımlı olan her τ_{Φ}-sürekli fonksiyonel "$\mathscr{H}$" üzerinde de tanımlıdır:

$$\mathscr{H}^{\times} \subset \Phi^{\times} \ . \tag{3.5.39}$$

Denklem (3.4.32), (3.5.39) ve (3.5.38) bir araya getirilirse;

$$\Psi \subset \Phi \subset \mathscr{H} \subset \Phi^{\times} \tag{3.5.40}$$

olmak üzere;

$$\Phi \subset \mathscr{H} \subset \Phi^{\times} \tag{3.5.41}$$

Gel'fand Üçlüsü harmonik salınıcı için kurulmuş olur.

Fonksiyonel uzayları, fizikte sıkça kullanılan Dirac notasyonundaki, Dirac ketlerinin matematiksel olarak anlamlandırılması, diğer bir deyişle Dirac ketlerinin matematiksel yapısının kurulmasını sağladıkları için gereklidir [11].

4. BASAMAK İŞLEMCİLERİ TEMSİLİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

4.1. Faktorizasyon Yöntemi

Harmonik salınıcı Hamiltoniyeninin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulmak için kullanılan basamak işlemcileri yöntemi, genelleştirilerek özdeğerleri alttan sınırlı tüm hermitik işlemciler için kullanılabilir.

Hermitik bir $\hat{A}$ işlemcisinin özdeğer ve özvektörlerinin bulunmaya çalışıldığı varsayılsın. $\hat{A}_1 = \hat{A}$ alınıp $\hat{A}_1$ işlemcisi $a^{(1)}$ bir sayı olmak üzere

$$\hat{A}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + a^{(1)}\hat{I} \tag{4.1.1}$$

şeklinde bir işlemcinin eşleniği ile kendisinin çarpımı kullanılarak ifade edilsin. Bunun birden fazla yapılabildiği durumlarda $a^{(1)}$'in değerini en büyük yapan işlemci $\hat{a}_1$ işlemcisi olarak seçilsin. Şimdi

$$\hat{A}_2 = \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger + a^{(1)}\hat{I} \tag{4.1.2}$$

denklemi aracılığı ile $\hat{A}_2$ işlemcisi tanımlansın ve bu işlemci de $a^{(2)}$ bir sayı olmak üzere

$$\hat{A}_2 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + a^{(2)}\hat{I} \tag{4.1.3}$$

biçiminde ifade edilmeye çalışılsın. Bu eşitlikte birden fazla şekilde yapılabiliyorsa $a^{(2)}$ nin değerini en büyük yapan işlemci $\hat{a}_2$ işlemcisi olarak seçilsin. Bu seçim sonucunda $a^{(2)} \geq a^{(1)}$ olacağı açıktır.

Bu şekilde adım adım devam ederek $\hat{a}_j$ ve $a^{(j)}$

$$\hat{A}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + a^{(j)}\hat{I} \tag{4.1.4}$$

ifadesinden bulunmak üzere $\hat{A}_{j+1}$ işlemcisi

$$\hat{A}_{j+1} = \hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger + a^{(j)}\hat{I} \tag{4.1.5}$$

şeklinde iteratif olarak tanımlanabilir. Bütün bu tanımlamalarda $\hat{a}_j$ işlemcisi, $a^{(j)}$ sayısının değerini en büyük yapacak şekilde seçilmelidir. Böylece $a^{(j)} \geq a^{(j-1)} \geq \ldots \geq a^{(2)} \geq a^{(1)}$ olacağı açıktır. Şimdi (4.1.1), (4.1.3) ve (4.1.5) denklemlerinde tanımlanan $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ ve $a^{(j)}$ sayılarının $\hat{A}$ işlemcisinin sırasıyla birinci (taban durumu), ikinci ve j. özdeğerleri olduğu gösterilecektir.

ψ, $\hat{A}$'nın bire boylanmış (normalize) vektörlerinden herhangi biri, α da bu özvektöre karşılık gelen özdeğer olsun. Bu özvektör ve $\hat{a}_j^\dagger$ işlemcileri kullanılarak

$$\phi^{(n)} = \hat{a}_n \hat{a}_{n-1} \ldots \hat{a}_2 \hat{a}_1 \psi \tag{4.1.6}$$

tanımı yapılsın. Bu genel tanım kullanılarak $\hat{A}_1 \psi = \lambda \psi$ ve $\int_{T.U.} \psi^* \psi dx = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\phi^{(1)}, \phi^{(1)}) &= (\psi, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \psi) = \\ (\psi, (\hat{A}_1 - a^{(1)} \hat{I}) \psi) &= (\lambda - a^{(1)}) \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. $(\phi^{(1)}, \phi^{(1)}) \geq 0$ olduğundan $\alpha \geq a^{(1)}$ olur. Buradan, $\hat{A} = \hat{A}_1$ işlemcisinin $a^{(1)}$'den daha küçük bir özdeğerinin olmadığı görülür.

Diğer özdeğerler için benzer eşitsizlikler bulabilmek amacıyla,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{j+1} \hat{a}_j &= (\hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger + a^{(j)}) \hat{a}_j = \\ \hat{a}_j (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + a^{(j)}) &= \hat{a}_j \hat{A}_j \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

eşitliği kullanılır.

Şimdi bu eşitsizlik $j = 2$ ve $j = 1$ için kullanılarak $(\phi^{(2)}, \phi^{(2)})$ ifadesi hesaplansın:

$$\begin{aligned} (\phi^{(2)}, \phi^{(2)}) &= (\psi, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1 \psi) = \\ (\psi, \hat{a}_1^\dagger (\hat{A}_2 - a^{(2)} \hat{I}) \hat{a}_1 \psi) &= (\psi, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 (\hat{A}_1 - a^{(2)} \hat{I}) \psi) = \\ (\alpha - a^{(2)})(\phi^{(1)}, \phi^{(1)}) &= (\alpha - a^{(2)})(\alpha - a^{(1)}) \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

$(\phi^{(2)},\phi^{(2)}) \geq 0$ ve $\alpha \geq a^{(1)}$ olduğundan bu denklemin sonucunda, $\alpha = a^{(1)}$ olmadığı sürece $\alpha = a^{(2)}$ bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(\phi^{(n)},\phi^{(n)}) &= (\psi,\hat{a}_1^\dagger\ldots\hat{a}_{n-1}^\dagger\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n\hat{a}_{n-1}\ldots\hat{a}_1\psi) \\
&= (\psi,\hat{a}_1^\dagger\ldots\hat{a}_{n-1}^\dagger(\hat{A}-a^{(n)}\hat{I})\hat{a}_{n-1}\ldots\hat{a}_1\psi) \\
&= (\psi,\hat{a}_1^\dagger\ldots\hat{a}_{n-1}^\dagger\hat{a}_1(\hat{A}_1-a^{(n)}\hat{I})\psi) = (\alpha-a^{(n)})(\phi^{(n-1)},\phi^{(n-1)}) \\
&= (\alpha-a^{(n)})(\alpha-a^{(n-1)})\ldots(\alpha-a^{(1)}) \qquad (4.1.10)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(\alpha-a^{(n)})(\alpha-a^{(n-1)})\ldots(\alpha-a^{(1)}) \geq 0 \qquad (4.1.11)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten ya $\alpha \geq a^{(n)}$ ya da $(\alpha-a^{(n)})(\alpha-a^{(n-1)})\ldots(\alpha-a^{(1)}) = 0$ elde edilir. O halde $\hat{A}$ işlemcisinin özdeğerleri ya $a^{(1)}$, $a^{(2)},\ldots a^{(n)}$ değerlerinden biridir ya da onların hepsinden büyük olmalıdır. Bu durum tam n ler için geçerli olduğundan ve $a^{(j)} \geq a^{(j-1)}$ olduğundan, $a^{(1)}$, $a^{(2)},\ldots$ dizisinin üstten bir sınırı yoksa α, $a^{(j)}$ değerlerinden birine eşit olmalıdır. $a^{(1)}$, $a^{(2)},\ldots$ dizisi üstten sınırlı ise ve bu üst sınır $a^{(\max)}$ ise, α, ya $a^{(j)}$ değerlerinden birine eşit olur ya da $a^{(\max)}$ tan küçük olmamak kaydıyla herhangi bir değeri alabilir. Her iki durumda da $\hat{A}$ nın özdeğerlerinin tamamı belirlenmiş olur.

Yukarıdaki analiz $a^{(j)}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulmak amacıyla da kullanılabilir. Yukarıdaki denklemlerde kullanılan ψ vektörünün $a^{(j)}$ özdeğerine karşılık gelen $\psi^{(j)}$ özvektörü olduğu varsayılsın. O halde (4.1.10) denkleminden $(\phi^{(j-1)},\phi^{(j-1)}) > 0$ iken $(\phi^{(j)},\phi^{(j)}) = 0$ olduğu görülür. Buradan

$$(\hat{A}_j-a^{(j)})\phi^{(j-1)} = a_j^\dagger a_j\phi^{(j-1)} = 0 \qquad (4.1.12)$$

bulunur. Bu eşitlikten $\phi^{(j-1)}$ vektörünün $\hat{A}_j$ işlemcisinin özdeğeri $a^{(j)}$ olan özvektörü olduğu görülür. Burada

$$\psi^{(j)} = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\ldots\hat{a}_{j-1}^\dagger\phi^{(j-1)} \qquad (4.1.13)$$

şeklinde tanımlanan vektörün, $\hat{A}_j\hat{a}_j^\dagger = \hat{a}_j^\dagger\hat{A}_{j+1}$ eşitliği kullanılarak elde edilen

$$\hat{A}_j\psi^{(j)} = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\ldots\hat{a}_{j-1}^\dagger\hat{A}_j\phi^{(j-1)} = a^{(j)}\psi^{(j)} \tag{4.1.14}$$

denklemini sağladığı görülür. O halde (4.1.13) denkleminde tanımlanan $\psi^{(j)}$ vektörü $\hat{A}$ işlemcisinin $a^{(j)}$ özdeğerli özvektörüdür.

Son olarak, bu yöntemde harmonik salınıcıyı özel kılanın tüm bu potansiyel için $\hat{a}_j$ işlemcilerinin birbirine eşit olması olduğunun hatırlatılmasında yarar vardır.

Bir başka deyişle harmonik salınıcı problemi için $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \ldots = \hat{a}_j = \ldots$ yazılabilir.

5. SONSUZ POTANSİYEL KUYUSU

5.1. Genelleştirilmiş Basamak İşlemcileri Temsili

Bir sonsuz potansiyel kuyusu matematiksel olarak;

(i)

$$V(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left] -\frac{1}{2}L\,,\, +\frac{1}{2}L \right[\tag{5.1.1}$$

(ii)

$$V(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad |\,x\,| \geq \frac{1}{2}L \tag{5.1.2}$$

biçiminde betimlenir.

Bu problemin özdeğerlerine basamak işlemcileri metodunu kullanarak ulaşmak için öncelikle;

$$\hat{A} := 2m\hat{H} = \hat{P}^2 \tag{5.1.3}$$

biçiminde bir "$\hat{A}$" işlemcisi tanımlanır ve;

$$\hat{a}_n = \hat{P} + i\alpha_n \tan(\beta_n \hat{x}), \quad \alpha_n,\, \beta_n \in \mathbb{C} \tag{5.1.4}$$

şeklinde basamak işlemcileri önerilirse;

denklem (5.1.4) içindeki tanjant fonksiyonunun;

$$-\frac{\pi}{2} < \tan(\theta) < +\frac{\pi}{2} \tag{5.1.5}$$

eşitsizliğini sağlaması gerektiği göz önünde bulundurulmalıdır.

Öyleyse $\beta_n x$'in maksimum minimum özdeğerleri $\pm\frac{1}{2}\beta_n L$, tanjant fonksiyonu bu $\pm\frac{\pi}{2}$ değerleri üzerinde veya altında değer almayacak şekilde sınırlandırılmalıdır.

Buradan da β_n'ler için;

$$-\frac{\pi}{L} \leq \beta_n \leq +\frac{\pi}{L} \tag{5.1.6}$$

olması koşulu ortaya çıkar.

Buradan sonra denklem (5.1.4) göz önünde bulundurularak devam edilirse;

$$\begin{aligned}
\hat{a}_n^\dagger &= (\hat{P} - i\alpha_n \tan(\beta_n \hat{x})) \\
\Rightarrow \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n &= (\hat{P} - i\alpha_n \tan(\beta_n \hat{x})(\hat{P} + i\alpha_n \tan(\beta_n \hat{x})) \\
\Rightarrow \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n = \hat{P}^2 &+ i\alpha_n \tan(\beta_n \hat{x}) - i\alpha_n \tan(\beta_n \hat{x}) + \alpha_n^2 \tan^2(\beta_n \hat{x})
\end{aligned}$$

komutasyon ilişkisi hatırlanırsa;

$$\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n = \hat{P}^2 + i\alpha_n [\hat{P}, \tan(\beta_n \hat{x})], \tag{5.1.7}$$

fakat;

$$[\hat{P}, \tan(\beta_n \hat{x})] = \frac{\hbar}{i} \sec^2(\beta_n \hat{x}) \tag{5.1.8}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n &= \hat{P}^2 + \alpha_n^2 \tan^2(\beta_n \hat{x}) + \alpha_n \beta_n \hbar \sec^2(\beta_n \hat{x}) \\
\Rightarrow \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n &= \hat{P}^2 + \alpha_n \beta_n \hbar \hat{I} + \alpha_n (\alpha_n + \beta_n \hbar) \tan^2(\beta_n \hat{x}) \qquad (5.1.9)
\end{aligned}$$

ve

$$\hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger = \hat{P}^2 - \alpha_n \beta_n \hbar \hat{I} + \alpha_n (\alpha_n - \beta_n \hbar) \tan^2(\beta_n \hat{x}) \tag{5.1.10}$$

olarak ifade edilir.

Ancak genel olarak;

$$\hat{A}_n = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \alpha^{(n)} \hat{I} \quad \& \quad \hat{A} = \hat{A}_1 \tag{5.1.11}$$

kabulleri vardır [8].

Öyleyse;

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 &= \hat{P}^2 + \alpha_1 \beta_1 \hbar \hat{I} + \alpha_1 (\alpha_1 + \beta_1 \hbar) \tan^2(\beta_1 \hat{x}) = \hat{A}_1 - \alpha^{(1)} \hat{I} \\
&= \hat{A} - \alpha^{(1)} \hat{I} = 2m\hat{H} - \alpha^{(1)} \hat{I} = \hat{P}^2 - \alpha^{(1)} \hat{I} \\
\Rightarrow \hat{P}^2 - \alpha^{(1)} \hat{I} &= \hat{P}^2 + \alpha_1 \beta_1 \hbar \hat{I} + \alpha_1 (\alpha_1 + \beta_1 \hbar) \tan^2(\beta_1 \hat{x}) \qquad (5.1.12)
\end{aligned}$$

Denklem (5.1.12) incelenirse;

$$\alpha_1(\alpha_1+\beta_1\hbar)=0 \tag{5.1.13}$$

denkleminin sağlanması gerektiği görülür.

Denklem (5.1.13) için $\alpha_1=0$ ve $(\alpha_1+\beta_1\hbar)=0$ gibi iki farklı matematiksel çözüm vardır.

Ancak $\alpha_1=0$ çözümü özdeğerleri bulduran prosedürü ortadan kaldırması sebebiyle bu noktada bu yöntem için bir çözüm olarak görülmez ve;

$$(\alpha_1+\beta_1\hbar)=0 \tag{5.1.14}$$

çözüm olarak kabul edilir.

Öyleyse;

$$\alpha_1=-\beta_1\hbar \tag{5.1.15}$$

denklemi ortaya çıkar.

Fakat denklem (5.1.12) aynı zamanda da;

$$\alpha^{(1)}=-\alpha_1\beta_1\hbar \tag{5.1.16}$$

olmasını gerektirir.

O zaman (5.1.15) ve (5.1.16) denklemleri bir araya getirildiğinde;

$$\alpha^{(1)}=(\beta_1\hbar)^2 \tag{5.1.17}$$

olarak bulunur.

Ancak metodun teorisine göre gerçek özdeğer $\alpha^{(1)}$'in maksimum değeridir ki burada bu denklem (5.1.17)'ye göre β_1'in maksimum olması gerektiği anlamına gelmektedir.

Fakat β_1 için maksimum değer denklem (5.1.6)'ya göre $\frac{\pi}{L}$ olduğundan birinci özdeğer "$\alpha^{(1)}$";

$$\alpha^{(1)} = (\frac{\pi\hbar}{L})^2 \tag{5.1.18}$$

olarak bulunur.

(5.1.9) & (5.1.10) denklemlerinden;

$$\begin{aligned} & \hat{P}^2 \quad +\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\hbar\hat{I} + \alpha_{n+1}(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\hbar)\tan^2(\beta_{n+1}\hat{x}) + \alpha^{(n+1)}\hat{I} \\ = \; & \hat{P}^2 \quad -\alpha_n\beta_n\hbar\hat{I} + \alpha_n(\alpha_n - \beta_n\hbar)\tan^2(\beta_n\hat{x}) + \alpha^{(n)}\hat{I} \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

yazılabilir.

Fakat denklem (5.1.19);

$\beta_{n+1} = \beta_n$ & $\alpha_{n+1}(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\hbar) = \alpha_n(\alpha_n - \beta_n\hbar)$ koşullarını zorlamaktadır.

Öte yandan;

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\hbar) &= \alpha_n(\alpha_n - \beta_n\hbar) \\ \Rightarrow \alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+1}\beta_{n+1}\hbar &= \alpha_n^2 - \alpha_n\beta_n\hbar \\ \Rightarrow \alpha_{n+1}\beta_{n+1}\hbar &= -\alpha_{n+1}^2 + \alpha_n^2 - \alpha_n\beta_n\hbar \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan (5.1.19) denklemi analiz edildiğinde;

$$\alpha^{(n+1)} + \alpha_{n+1}\beta_{n+1}\hbar = \alpha^n - \alpha_n\beta_n\hbar$$

olduğu görülür ve bu eşitliğin sol tarafının ikinci terimi denklem (5.1.20)'den yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \alpha^{(n+1)} \quad -\alpha_{n+1}^2 + \alpha_n^2 - \alpha_n\beta_n\hbar = \alpha^n - \alpha_n\beta_n\hbar \\ \Rightarrow \; & \alpha^{(n+1)} \quad -\alpha_{n+1}^2 = \alpha^{(n)} - \alpha_n^2 = \ldots = \alpha^{(1)} - \alpha_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

elde edilir.

Öyleyse;

$$\alpha^n = \alpha_n^2 \tag{5.1.22}$$

bağıntısı vardır.

Diğer taraftan da;

$$\beta_{n+1} = \beta_n = \ldots = \beta_1 = \frac{\pi}{L} \tag{5.1.23}$$

sağlanır.

Şimdi denklem (5.1.23) çerçevesinde $\alpha_{n+1}(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\hbar) = \alpha_n(\alpha_n - \beta_n\hbar)$ koşulu tekrar incelenirse;

$$\alpha_{n+1}(\alpha_{n+1} + \frac{\pi\hbar}{L}) = \alpha_n(\alpha_n - \frac{\pi\hbar}{L}) \tag{5.1.24}$$

şeklinde yazılabilir.

Yine bu (5.1.24) denkleminin de $\alpha_{n+1} = -\alpha_n$ ve $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\pi\hbar}{L}$ olmak üzere iki farklı çözümü olmasına rağmen $\alpha_{n+1} = -\alpha_n$ tüm özdeğerlerin aynı olması gerekliliğini ortaya çıkarır. Oysa ki bu durum sonsuz kuyu potansiyeli olgusunun fiziğine aykırıdır.

Öyle ise bu iki matematiksel çözümden $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\pi\hbar}{L}$ çözüm olarak kabul edilirse;

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\pi\hbar}{L} = \cdots = (\alpha_1 - n\frac{\pi\hbar}{L}) = -(n+1)\frac{\pi\hbar}{L} \tag{5.1.25}$$

olur ve buradan da;

$$\alpha_n = \frac{-n\pi\hbar}{L} \tag{5.1.26}$$

elde edilir.

Öyleyse denklem (5.1.22) göz önünde bulundurularak "$\hat{A}$" işlemcisinin özdeğerleri;

$$\alpha^{(n)} = (\frac{n\pi\hbar}{L})^2 \tag{5.1.27}$$

biçimindedir.

O zaman (5.1.3) tanımından yola çıkılarak sonsuz potansiyel kuyusu probleminin enerji özdeğerleri;

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{2m}(\frac{n\pi\hbar}{L})^2 \tag{5.1.28}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Bundan sonra;

$\hat{a}_1\xi^{(0)} = 0\hat{I}$ koşulunu sağlayan bir $\xi^{(n)}\hat{I} = \cos^{(n)}(\beta_1\hat{a})\xi^{(0)}$ önerilir ise;

öncelikle $\xi^{(0)}$ üzerine getirilen bu $\hat{a}_1\xi^{(0)} = 0\hat{I}$ koşulundan yola çıkılarak;

$$\begin{aligned} (\hat{P} + i\alpha_1 \tan(\beta_1\hat{x}))\xi^{(0)} &= 0\hat{I} \\ \Rightarrow \hat{P}\xi^{(0)} + i\alpha_1 \tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} &= 0\hat{I} \end{aligned}$$

fakat (5.1.15) denklemine göre;

$$\alpha_1 = -\beta_1\hbar$$

şeklinde yazılabilir ve böylelikle de;

$$\hat{P}\xi^{(0)} - i\beta_1\hbar\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} = 0\hat{I}$$

bağıntısı elde edilmiş olur.

Şimdi "$\hat{a}_n\xi^{(n-1)}$" analiz edilecek olursa;

$$\hat{a}_n\xi^{(n-1)} = (\hat{P} + i\alpha_n \tan(\beta_n\hat{x}))\xi^{(n-1)}$$

fakat (5.1.23) denklemine göre "β_n"ler arasında;

$$\beta_{n+1} = \beta_n = \ldots = \beta_1 = \frac{\pi}{L}$$

bağıntısı vardır.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{a}_n\xi^{(n-1)} &= (\hat{P}+i\alpha_n\tan(\beta_n\hat{x}))\xi^{(n-1)} = (\hat{P}+i\alpha_n\tan(\beta_1\hat{x}))\cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} \\ &= \hat{P}\cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} + i\alpha_n\tan(\beta_1\hat{x})\cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)}\end{aligned}$$

ancak bir boyutta $\hat{P} \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$' dir.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{a}_n\xi^{(n-1)} = -\beta_1\frac{\hbar}{i}(n &- 1)\cos^{(n-2)}(\beta_1\hat{x})\sin(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} + \cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\hat{P}\xi^{(0)} \\ &+ i\alpha_n\tan(\beta_1\hat{x})\cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{a}_n\xi^{(n-1)} = -\beta_1\frac{\hbar}{i}(n &- 1)\cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\frac{\sin(\beta_1\hat{x})}{\cos(\beta_1\hat{x})} + \cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\hat{P}\xi^{(0)} \\ &+ i\alpha_n\tan(\beta_1\hat{x})\cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_n\xi^{(n-1)} = \cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\{\hat{P}\xi^{(0)} - \beta_1\frac{\hbar}{i}(n-1)\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} + i\alpha_n\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)}\}$$

(5.1.26) denklemine göre $\alpha_n = \frac{-n\pi\hbar}{L}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\hat{a}_n\xi^{(n-1)} = \cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\{\hat{P}\xi^{(0)} &+ i\beta_1\hbar(n-1)\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} \\ &- in\beta_1\hbar\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)}\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_n\xi^{(n-1)} = \cos^{(n-1)}(\beta_1\hat{x})\{\hat{P}\xi^{(0)} - i\beta_1\hbar\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)}\}$$

şeklinde çıkar. Ancak yukarıda küme parantezi içerisindeki kısım

$\hat{P}\xi^{(0)} - i\beta_1\hbar\tan(\beta_1\hat{x})\xi^{(0)} = \hat{a}_1\xi^{(0)} = 0\hat{I}$

ifadesinden başka bir şey değildir ve böylece;

$$\hat{a}_n\xi^{(n-1)} = 0\hat{I} \tag{5.1.30}$$

bulunmuş olur.

Ancak eğer bir vektör $\xi^{(n-1)}$, $\hat{a}_n\xi^{(n-1)} = 0\hat{I}$ koşulunu sağlamak şartıyla belirlenebilirse;

$$\psi^{(n)} = \hat{a}_1^*\hat{a}_2^*\hat{a}_3^*\ldots\hat{a}_{n-1}^*\xi^{(n-1)} \tag{5.1.31}$$

eşitliği $\hat{A}$ işlemcisinin $\alpha^{(n)}$ özdeğerine karşılık gelen "$\psi^{(n)}$" özvektörünü tanımlar [8].

Daha sonra bu "$\psi^{(n)}$"ler denklem (5.1.31) bağıntısı aracılığıyla her bir "n" değeri için belirlenebilir.

Ancak açık olduğu üzere bu "$\psi^{(n)}$" özvektörleri direkt olarak sonsuz kuyu potansiyeli için yazılan Hamilton işlemcisinin öz vektörü değil de, $\hat{A} := 2m\hat{H} = \hat{P}^2$ ile tanımlanan "$\hat{A}$" işlemcisinin özvektörleridir.

Öyleyse burada enerji özvektörlerine "$\phi^{(n)}$" denir ise bu enerji özvektörleri;

$$\phi^{(n)} = \frac{\psi^{(n)}}{2m} \tag{5.1.32}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

5.2. "Ψ" Sonlu Enerji Durumları Uzayının Kurulması

Hamilton işlemcisine karşılık gelen enerji özdeğerlerinin özvektörlerinin sonsuz potansiyel kuyusu için bulunmuş olduğu bu noktada harmonik salınıcı durumuna benzer olarak yine bir "Ψ" uzayı kurulmak istenirse;

Sonsuz potansiyel kuyusu enerji özvektörlerinden oluşmak üzere;

$$\psi = \sum_{0}^{m} c_n \phi^{(n)}, \qquad c_n \in \mathbb{C}, \quad m < \infty \quad \& \quad \psi \in \Psi \tag{5.2.33}$$

olacak şekilde bir "Ψ" kümesi belirlenir ve sonsuz potansiyel kuyusunun "n"inci özenerji değerine karşılık gelen "$\phi^{(n)}$" özvektörünün kompleks sayılarla çarpımlarının oluşturduğu bir boyutlu,

$$\mathscr{R}^{(n)} = \{\beta\phi^{(n)} \mid \quad \beta \in \mathbb{C}\} \tag{5.2.34}$$

enerji özuzayları tanımlanırsa "Ψ"nin

$$\Psi = \sum_{n=0}^{m} \oplus \mathscr{R}^{(n)} \tag{5.2.35}$$

biçiminde $\mathscr{R}^{(n)}$'lerin cebirsel direkt toplamı olduğu görülür.

Yani "Ψ" burada, sonsuz potansiyel kuyusu özvektörleri $\phi^{(n)} \in \mathscr{R}^{(n)}$ olmak üzere tüm
$\varphi_s = (\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \ldots, \phi^{(n)}, \ldots, \phi^{(s-1)}, \phi^{(s)}, 0, 0, \ldots)$
dizilerinin oluşturduğu bir kümedir.

Yine harmonik salınıcı problemine benzer şekilde burada da "Ψ" henüz üzerinde bir topolojinin tanımlanmadığı tam olmayan bir uzaydır.

5.3. "Φ" Sonsuz Enerji Durumları Uzayının Kurulması

Topolojileri tanımlayan o topolojiye sahip olan uzay içerisindeki Cauchy dizilerinin birbirlerine yakınsama biçiminden başka bir şey değildir.

Bu durum ise yakınsama norm ile, norm ise iç çarpım ile tanımlanmış olduğundan, topolojisi farklı uzaylar için farklı iç çarpımlar tanımlanmasına denk düşmektedir.

Ancak kuantum mekaniğinde, topolojiyi tanımlayan iç çarpımları farklı kılan, kuantum mekaniğinin cebirinin üreteci olan işlemcilerdir ve olasılık kavramı doğrultusunda bu işlemcilerin sınırlı işlemciler olması gerekir.

Öyleyse burada sonsuz kuyu potansiyeli özvektörlerinin uzay yapılarını belirleyecek olan kuralı oluştururken de yine bu işlemcilerin sınırlı işlemciler olması gerektiği göz önünde bulundurulup birimsiz olmasına da dikkat edilerek;

$$\hat{\Pi}^2 = \frac{L^2}{\pi^2 \hbar^2} \hat{P}^2 \qquad (5.3.36)$$

şeklinde bir "$\hat{\Pi}^2$" işlemcisi tanımlanırsa "$\hat{P}^2$" spektrum açısından incelenmelidir.

Çünkü bu iki işlemci bir sabitle çarpılarak birbirlerinden elde edilebildiği için ya her ikisi de sınırlı işlemcidir ya da her ikisi de sınırsız işlemcidir.

"Ψ" uzayını "Φ" uzayına tamamlamak için gerekli olan topolojinin kuralını belirleyecek olan iç çarpım;

$$\langle \phi^{(s)} | \psi^{(s)} \rangle_p = \langle \phi^{(s)} | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p \psi^{(s)} \rangle \qquad p = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.3.37)$$

olarak tanımlansın.

Şimdi bu $\hat{\Pi}^2$ işlemcisini analiz etmek amacıyla "$\hat{P}^2$"ye bakılırsa; "$\hat{P}^2$" işlemcisinin spektrumunun;

$$\mathrm{Sp}(\hat{P}^2) = \mathrm{Sp}(\frac{\hbar^2\pi^2}{L^2})n^2 = \mathrm{Sp}(n^2) \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{5.3.38}$$

biçiminde olduğu;

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}(\hat{\Pi}^2) = \mathrm{Sp}(n^2) \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{5.3.39}$$

şeklinde ortaya çıktığı görülür.

Ancak $n = 1,2,3,\ldots$ olmasına rağmen $(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p$, iç çarpım içinde "$\Psi$" özvektörlerine etki etmektedir ve (5.2.33) denklemine göre $m < \infty$ olduğundan Ψ içerisinde sonlu sayıda özvektör vardır.

O zaman $\hat{\Pi}^2$ işlemcisi sonsuz potansiyel kuyusu problemi için kurulan "Ψ" durumlarına etki ettiğinde (5.3.39) denklemi için aslında $n = 1,2,3,\ldots,m \quad m < \infty$ geçerlidir.

Böylelikle "$\hat{\Pi}^2$" işlemcisinin spektrumu "$\mathrm{Sp}(\hat{\Pi}^2)$"nin yukarıdaki "Ψ" durumları için sınırlı olduğu ortaya çıkar. "$\hat{I}$" işlemcisinin de spektrumu sınırlıdır. Öyleyse "$(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p$", "$\Psi$" uzayı içerisinde sınırlı bir spektruma sahiptir.

Fakat bir kendine eşlenik işlemci ancak ve ancak spektrumu sınırlı ise sınırlı bir işlemcidir [10].

Öyleyse "Ψ" uzayı için "$(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p$" işlemcisi sınırlı bir işlemcidir.

O zaman;

$$\langle \psi^{(s)} | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p \psi^{(s)} \rangle < \kappa, \qquad \kappa < \infty, \qquad \psi^{(s)} \in \Psi \tag{5.3.40}$$

yazılabilir.

Şimdi $\phi^{(s)} \in \Phi$ olmak üzere $\langle \phi^{(s)} | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p \phi^{(s)} \rangle$ incelenirse;

$$\begin{aligned}\langle \phi^{(s)} | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p \phi^{(s)} \rangle &= \langle (\phi^{(s)} + \psi^{(s)} - \psi^{(s)}) | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p (\phi^{(s)} + \psi^{(s)} - \psi^{(s)}) \rangle \\ &\leq \langle \psi^{(s)} | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p \psi^{(s)} \rangle + \langle (\phi^{(s)} - \psi^{(s)}) | (\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p (\phi^{(s)} - \psi^{(s)}) \rangle\end{aligned}$$

olduğu görülür. Fakat yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim, "$\phi^{(s)}$"ler "$\psi^{(s)}$"lerin "Φ" uzayı içerisindeki limit noktaları olduğundan rastgele bir $\varepsilon > 0$ için, $\langle(\phi^{(s)} - \psi^{(s)})|(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p(\phi^{(s)} - \psi^{(s)})\rangle < \varepsilon$ bağıntısını sağlamaktadır. Eşitsizliğin sağ tarafının ilk terimi ise (5.3.40) denklemine göre sonlu sayı vereceğinden;

$$\langle\phi^{(s)}|(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p\phi^{(s)}\rangle < M, \qquad M < \infty, \qquad \phi^{(s)} \in \Phi \tag{5.3.41}$$

şeklinde yazılabilir.

Öyleyse $(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p$ "Φ" uzayı içerisinde de sınırlı bir işlemcidir.

O zaman sonsuz potansiyel kuyusu problemi için "Φ" uzayının kurulması amacıyla topolojinin kuralını betimlemesi bakımından iç çarpımın (5.3.37) denklemindeki gibi tanımlanmasında bir sakınca yoktur.

Buradan yola çıkarak norm;

$$\|\phi^{(s)}\|_p = \sqrt{\langle\phi^{(s)}|(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p\phi^{(s)}\rangle}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3.42}$$

şeklinde tanımlanırsa;

Sonsuz potansiyel kuyusu için "Φ" uzayı topolojisinin kuralı;

$$\begin{aligned} s \to \infty \quad \text{için} \quad \varphi_s \quad &\to \quad \phi \Leftrightarrow s \to \infty \quad \text{için;} \\ \|\varphi_s - \phi\|_p \quad &= \quad \sqrt{\langle(\varphi_s - \phi)|(\hat{\Pi}^2 + \hat{I})^p(\varphi_s - \phi)\rangle} \to 0 \end{aligned} \tag{5.3.43}$$

biçiminde betimlenir.

Denklem (5.3.43) içindeki "φ_s" dizileri;

$$\varphi_s = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^n, \ldots, \phi^{n-1}, \phi^n, 0, 0, \ldots) \tag{5.3.44}$$

olmak üzere (5.1.32) denklemi ile tanımlanan "$\phi^{(n)}$" özvektörlerinden oluşur ve bu vektörler tarafından yaratılan "Ψ" uzayının elemanlarıdır.

Öyleyse denklem (5.2.33) ile tanımlanan "Ψ" uzayına ait bu φ_s dizilerinin tümüne denklem (5.3.43) topolojisine göre limit noktaları eklenirse, "Ψ" uzayı tam bir uzay yapısı kazanmış ve sonsuz potansiyel kuyusu için;

$\mathscr{R}^{(k)}$ denklem (5.2.34) ile tanımlanmak üzere;

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathscr{R}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3.45}$$

şeklinde "Φ" sonsuz enerji durumlarının karışımları uzayı kurulmuş olur.

5.4. "$\mathscr{H}$" Hilbert Uzayının Kurulması

Yine burada da Hilbert uzayı kurulmak istendiğinde sonsuz potansiyel kuyusu için (5.2.33) denklemine göre tanımlanan "Ψ" uzayını Hilbert uzayına tamamlamak gerekmektedir.

Bu prosedürün "Φ" uzayının kuruluşundan tek farkı ise yakınsamayı tanımlayan topolojinin bu kez Hilbert uzayı topolojisi olmasıdır.

Öyleyse "Ψ" içerisindeki her bir diziye;

$$s \to \infty \quad \text{için} \quad \varphi^s \to \phi \Leftrightarrow s \to \infty \quad \text{için} \quad \|\varphi^s - \phi\| \to 0 \tag{5.4.46}$$

şeklinde tanımlanan Hilbert uzayı topolojisine göre limit noktaları eklenirse "Ψ" Hilbert uzayına tamamlanmış olur.

Böylelikle de sonsuz kuyu potansiyeli için Hilbert uzayı kurulmuş olur.

$$\mathscr{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathscr{R}^{k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.4.47}$$

Ancak bu noktada önemli bir ayrıntıdan bahsetmek gerekir. Farklı kuantum sistemleri için "Φ" uzaylarının topolojileri değiştiği halde anlaşılacağı üzere Hilbert uzayları için Hilbert uzayı topolojisi çalışmaktadır.

O zaman Hilbert uzayları için farklı kuantum sistemleri söz konusu olsa da topolojik olarak eşdeğerdirler.

5.5. “$\Phi^{\times}$” Fonksiyoneller Uzayının Kurulması

Eğer bir anti-fonksiyonelin sürekliliği denklem (5.3.37) ile ifade edilen bir iç çarpımın betimlediği bir norm ile tanımlanıyorsa;

bu fonksiyonel τ_{Φ} topolojisine göre süreklidir denir ve bu durum;

$$\varphi^{s} \stackrel{\tau_{\Phi}}{\to} \phi \;\Rightarrow\; F(\varphi^{s}) \to F(\phi) \tag{5.5.48}$$

şeklinde ifade edilir.

Öyleyse Φ üzerinde tanımlı bu fonksiyonellerden oluşan bir $\Phi^{\times}$ uzayı sonsuz potansiyel kuyusu için Gel’fand üçlüsünün sonuncu uzayı şeklinde ortaya çıkar.

Böylelikle öncelikle $\phi^{(n)}$ özvektörlerinden oluşan ψ uzayı kurulmuş olur. Sonra bu uzay Hilbert uzayı topolojisi ile tamamlanarak Hilbert uzayı elde edilir. Takiben yine ψ uzayının sonsuz kuyu potansiyeli için tanımlanan yeni iç çarpım doğrultusunda tamamlanmasıyla Φ uzayı ortaya çıkar. Son olarak da Φ üzerinde tanımlı fonksiyonellerin uzayı $\Phi^{\times}$’in eklenmesiyle Gel’fand üçlü uzay yapısı elde edilmiş olur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının temelini kuantum mekaniğinin formulasyonunda yer alan dalga fonksiyonlarının Hilbert uzayından seçildiği bazı durumlarda ortaya çıkan aksaklıklar ve bu aksaklıkların üçlü uzay yapısına geçilerek yeniden analiz edilmesi oluşturmaktadır. Çalışma esnasında teori ve bu teori üzerinden yapılan hesaplamalara bağlı olarak aslında her farklı fiziksel sistem için farklı bir yapı halini alan ve farklı cebir yapıları da ortaya çıkaran Gel'fand üçlü uzay yapısı incelenmeye çalışılmıştır.

Örnek olarak sonsuz potansiyel kuyusu probleminde $[0,L]$ aralığında sonsuz kuyu potansiyeli için sınır koşullarını da sağlayan bir normalize dalga fonksiyonu;

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{L^5}}x(x-L) \tag{6.0.1}$$

eşitliği ile ifade edilebilmektedir.

Burada enerjinin beklenen değeri;

$$\langle E \rangle = \frac{5\hbar^2}{mL^2} \Rightarrow \langle E \rangle^2 = \frac{25\hbar^4}{m^2L^4} > 0 \tag{6.0.2}$$

şeklinde çıkmaktadır [2].

Bu noktada $\langle E^2 \rangle$ incelenirse Hilbert uzayındaki "$\psi(x)$" denklem (6.0.1) ile tanımlandığında;

$\langle E^2 \rangle = \langle \psi(x)\ |\hat{H}^2 \psi(x) \rangle = 0$

çıkar çünkü $\hat{H}^2$ dördüncü dereceden türev içermektedir.

Öyleyse $\triangle E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$ kompleks sayı verir ki bu ise fiziksel bir nicelik olan "$\triangle E$" nin kompleks çıktığı anlamına gelir. O zaman burada bir problem vardır.

Ancak "$\psi(x)$" yeniden Φ uzayı içerisinde yer alacak şekilde;

$$\sum_n a_n \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}}_{\varphi_n} \tag{6.0.3}$$

tanımlanırsa bu problem ortadan kalkar çünkü “sin” fonksiyonu burada türevlenerek sıfır vermez.

Öyleyse bu tip büyük fiziksel ikilemler içeren bir durum dahi üçlü uzay yapısına geçildiğinde kolaylıkla ortadan kalkabilmektedir.

Çalışmanın devamında ise yine kuantum mekaniğinin standart formulasyonunda karşılığı olmayan eksponansiyel zaman evrimi gerektiren bozunma süreçlerinin çalışılması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Gel'fand, I. M., Vilakin N. Ya. 1964. Generalized Functions, Vol. 4. In: ACADEMIC PRESS. 1st ed., New York.

[2] Bonneau, G., Faraut, J., Valent G. 2001. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. **Am. J. Phys.**, 69: 322-331.

[3] Bohm. A, Gadella M., 1989. Dirac Kets, Gamow Vectors, and Gel'fand Triplets. In: Springer-Verlag. 1st ed., Berlin Heidelberg.

[4] Nelson E. 1959. **Ann. Math.**, 70: 572.

[5] Doebner H. D. Proceedings of the 1966 Istanbul Summer Instıtude.

[6] Prugovecki, E. 1971. Quantum Mechanics in Hilbert Space. In: ACADEMIC PRESS. 1st ed., New York.

[7] Madrid Modino, R. 2001. Quantum Mechanics in Rigged Hilbert Space Language, Departamento De Fisica Teorica Facultad De Ciencias Universidad De Valladolid, Doctor of Philosophy Thesis, Valladolid.

[8] Green, H. S. 1968. Quantum Mechanics in Hilbert Space. In: Barnes & Noble, Inc. 2nd ed., New York.

[9] Hoffman, K., Kunze, R. 1971. Linear Algebra. In: PRENTICE HALL. 2nd ed., New Jersey.

[10] Thomas, F. J. 1969. Linear Operators for Quantum Mechanics. In: John Wiley Sons , Inc. 1st ed., New York.

[11] Bohm, A. 2001. Quantum Mechanics: Foundations and Applications, In: Springer Verlag, 3rd ed., NewYork.

[12] Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1993 Theory of Linear Operators in Hilbert Space, In: Dover Publications, NewYork.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Onur GENÇ

Doğum Yeri ve Tarihi : ANKARA 02.07.1986

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Fizik Böl.

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Katıldığı Konferanslar

Conferance on "Strings, Branes and Supergravity", 1-5 August 2011, KOÇ University, İstanbul, TURKEY.
(Katılımcı)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü 4 yıl

İLETİŞİM

E-posta Adresi : onur.genc@adu.edu.tr

Tarih : 25.06.2013