T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİMDALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
2022-YL-012

ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Betül VATANDAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nesrin ÖZSOY BÜR

AYDIN–2022

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimimin başlangıcından itibaren bana daima rehberlik eden ve her konuda daima desteğini sunan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Nesrin Özsoy Bür'e

Yüksek Lisans eğitimim sürecinde dersleri ile bana çok şey katan ve tez süreci boyunca bana her zaman destek olan çok değerli hocam Sayın Dr. Serhan Ulusan'a

Tez dönemimde yardımını hiç esirgemeyen, değerli zamanını ayırıp her zaman bilgilerini benimle paylaşan hocam Sayın Bahattin İnam'a

Yüksek Lisans eğitimim boyunca engin bilgisinden faydalandığım kendisinden çok şey öğrendiğim hocam Sayın Prof. Dr. Ersen Yazıcı'ya

Ayrıca hayatımın en büyük destekçileri sevgili ailem eşim Cem Vatandaş ve kızım Ece Vatandaş'a

Betül VATANDAŞ

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY i

TEŞEKKÜR ii

İÇİNDEKİLER iii

SİMGELER ve KISALTMALAR vi

ŞEKİLLER DİZİNİ vii

TABLOLAR DİZİNİ ix

EKLER DİZİNİ x

ÖZET xi

ABSRTACT xii

1. GİRİŞ 1

1.1. Problem Durumu 1

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi 3

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri 5

1.4. Sınırlılıklar 5

1.5. Varsayımlar 5

1.6. Kısaltmalar 6

1.7. Kavramsal Çerçeve 6

1.7.1. Üstün Yeteneklilik 6

1.7.1.1. Üstün Yetenek Kavramı ve Matematikte Üstün Yeteneklilik 6

1.7.1.2. Matematikte Üstün Yetenekli Bireylerin Özellikleri 11

1.7.1.3. Üstün Yeteneklilik Kuramları 15

1.6.1.4. Üstün Yeteneklilik Alanları 23

1.7.2. İspat 26

1.7.2.1. İspat Kavramı ... 26
1.7.2.2. İspatın Sahip Olduğu Roller ve İşlevler ... 29
1.7.2.3. İspatlama Sürecine Yönelik Kavramsal Çerçeveler ... 31
1.7.2.4. İspatın Sınıflamasına İlişkin Teorik Yaklaşımlar ... 35
1.7.2.5. İspatın Önemi ve İlköğretim Matematik Öğretim Programları ve Uluslararası Standartlardaki Yeri ... 37
1.8. Teorik Çerçeve ... 43
1.8.1. Boero İspat Süreci ... 44
1.8.2. Heinze ve Reiss'in Modeli ... 45
2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR ... 51
3. MATERYAL-YÖNTEM ... 60
3.1. Araştırmanın Deseni ... 60
3.2. Çalışma Grubu ... 62
3.3. Veri Toplama Araçları ... 63
3.3.1. İspat Testi ... 64
3.3.2. İspat Görüşme Formu ... 65
3.4. Uygulama Süreci ... 65
3.4.1. Pilot Çalışma ... 65
3.4.2. Asıl Çalışma ... 66
3.5. Verilerin Analizi ... 66
3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği ... 72
3.7. Araştırmacının Rolü ... 74
4. BULGULAR ... 75
4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular ... 75
4.1.1. Birinci Soruya Ait Bulgular ... 75
4.1.2. İkinci Soruya Ait Bulgular ... 88

4.1.3. Üçüncü Soruya Ait Bulgular 99

4.1.4. Dördüncü Soruya Ait Bulgular 109

4.1.5 Beşinci Soruya Ait Bulgular 116

4.2. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular 126

5. TARTIŞMA 129

5.1. Birinci Alt Problemle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma 129

5.2. İkinci Alt Problemle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma 140

6. SONUÇ ve ÖNERİLER 142

7. KAYNAKLAR 146

EKLER 159

BİLİMSEL ETİK BEYANI 168

ÖZ GEÇMİŞ 169

SİMGELER VE KISALTMALAR

NCTM : (National Council of Teachers of Mathematics: Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi)

MEB : Millî Eğitim Bakanlığı

TDK : Türk Dil Kurumu Bilişim Ağı

EBA : Eğitim Bilişim Ağı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Guilford Zekâ Yapısı Kuramı 17
Şekil 1.2. Sternberg'in Üçlü Sacayağı Kuramı 19
Şekil 1.3. Renzulli'nin Üçlü Çember Modeli........ 20
Şekil 1.4. Sternberg ve Zhang'ın Beşgen Kuramı........ 21
Şekil 1.5. Taylor'un Çoklu Yetenek Kuramı........ 23
Şekil 1.6. İspatın Rolleri........ 29
Şekil 1.7. Boero (1999) İspat Süreçleri 33
Şekil 1.8. Harel Sowder İspat Şemaları........ 35
Şekil 1.9. Balacheff (1988) İspat Şemaları........ 36
Şekil 1.10. 'İki Tek Sayının Toplamı Çift Sayıdır' Önermesi İçin Argüman Örneği..... 41
Şekil 1.11. Genellenebilir Örnek Temsili 1 41
Şekil 1.12. Genellenebilir Örnek Temsili 2 (Şimşek ve Üstün, 2019 s.216) 42
Şekil 1.13. Görsel İspat Temsili 42
Şekil 1.14. Boero İspat Süreci (Boero, 1999; Polat, 2018) 45
Şekil 1.15. Heinze ve Reiss İspat Süreci (Heinze ve Reiss, 2004)........ 47
Şekil 1.16. Varsayımın İspatı İçin Örnek Çizim 49
Şekil 4.1. Ö1 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap 77
Şekil 4.2. Ö2 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap 80
Şekil 4.3. Ö3 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap 83
Şekil 4.4. Ö4 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap 85
Şekil 4.5. Ö5 kodlu öğrencinin birinci soruya verdiği cevap 86
Şekil 4.6. Ö1 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap 89
Şekil 4.7. Ö2 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap 91

Şekil 4.8. Ö3 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap 93

Şekil 4.9. Ö4 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap 95

Şekil 4.10. Ö5 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap 97

Şekil 4.11. Ö1 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap 100

Şekil 4.12. Ö2 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap 102

Şekil 4.13. Ö3 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap 104

Şekil 4.14. Ö4 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap 105

Şekil 4.15. Ö5 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap 107

Şekil 4.16. Ö1 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap 110

Şekil 4.17. Ö2 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap 111

Şekil 4.18. Ö3 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap 112

Şekil 4.19. Ö4 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap 113

Şekil 4.20. Ö5 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap 114

Şekil 4.21. Ö1 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap 117

Şekil 4.22. Ö2 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap 118

Şekil 4.23. Ö3 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap 119

Şekil 4.24. Ö4 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap 121

Şekil 4.25. Ö5 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap 122

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1.1. Gagne'nin Üstün Yetenekli Bireylerin Nüfus İçindeki Seviyelerin Metrik Temelli Sistemi (Gür, 2017) 22

Tablo 1.2. İspatın işlevleri (Dede ve Karakuş, 2014; Pala, 2020) 31

Tablo 3.1. Boero ve Heinze-Reiss İspat Süreç Aşamaları 68

Tablo 4.1. Öğrencilerin Birinci Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları 87

Tablo 4.2. Öğrencilerin İkinci Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları 98

Tablo 4.3. Öğrencilerin Üçüncü Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları 108

Tablo 4.4. Öğrencilerin Dördüncü Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları 115

Tablo 4.5. Öğrencilerin Beşinci Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları 124

Tablo 4.6. Öğrencilerin Geçirdikleri İspat Sürecine İlişkin Genel Tablo 126

Tablo 4.7. Matematik Derslerinde İspatlara Yer Verilmesine İlişkin Öğrenci Görüşlerinin Kodlanması 128

Tablo 5.1. İspat Testi Genel Sonuçlar 129

EKLER DİZİNİ

Ek-1: Resmi İzin Yazıları 159

Ek-2: Veli İzin Formu 162

Ek-3: Öğrenci İzin Formu 164

Ek-4: İspat Testi 165

Ek-5: İspat Görüşme Formu 167

ÖZET

ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Vatandaş B. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi, Yüksek Lisans, Aydın, 2021.

Amaç: Bu çalışmanın amacı üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin derinlemesine incelenmesi, öğrencilerin ispat yapma konusundaki becerilerinin ve bu süreçte yaşadıkları güçlüklerin betimlenmesi ve öğrencilerin ispata ilişkin görüşlerinin ortaya konulması olarak belirlenmiştir.

Materyal-Yöntem: Araştırmanın çalışma grubu 2020-2021 eğitim öğretim yılında Aydın Bilim Sanat Merkezine devam eden 8. sınıf öğrencileri arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilen 10 öğrencidir. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Uygulamada öğrencilerin ispat süreçlerini incelemek amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilmiş İspat Beceri Testi ve İspat Görüşme Formu kullanılmıştır. Öğrencilerin öğretmen görüşüne göre belirlenmesinin ardından pilot çalışma için 5 öğrenci, asıl çalışma için 5 öğrenci ile yaklaşık 60 dk süren klinik görüşme yapılmıştır. Çalışmanın analizinde betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Çalışmanın veri analizinde, Boero'nun ispat safhaları temel alınmış, Heinze ve Reiss (2004)'in Boero ispat süreçlerini okul matematiğine uyarladıkları modele göre veriler analiz edilmiştir.

Bulgular: Üstün yetenekli öğrencilerin genel olarak ispat için strateji geliştirebildikleri fakat ispatı matematiksel standartlarda yazamadıkları bunun yanında matematik derslerinde ispatın kullanılmasına ve gerekliliğine ilişkin olumlu görüş bildirdikleri görülmüştür.

Sonuç: Uygulama sırasında öğrencilerin ispat sürecinde bazı zorluklar yaşadığı fakat ispat konusunda oldukça meraklı ve istekli oldukları görülmüştür. Üstün yetenekli öğrenciler için bu yönde yapılacak öğretimin olumlu etki bırakacağı sonucuna varılmıştır.

Anahtar kelimeler: Matematiksel ispat, İspat süreci, Boero modeli, Üstün yetenekli, Nitel araştırma yöntemi

ABSRTACT

EXAMINATION OF THE PROCESSES OF PROCESSES OF HIGHLY TALENT 8TH GRADE STUDENTS

Vatandaş B. Aydın Adnan Menderes University, Institute of Science and Technology, Mathematics Education, MA, Aydın, 2022.

Purpose: The purpose of this study was determined as an in-depth examination of gifted 8th grade students' proving processes, describing the students' skills in proving and the difficulties they experienced in this process, and revealing the students' views on proof.

Material-Method: The study group of the research is 10 students selected by criterion sampling method, one of the purposive sampling methods, among the 8th grade students attending Aydın Science and Art Center in the 2020-2021 academic year. Case study, one of the qualitative research methods, was used in the study. In the application, the Proof Skill Test and the Proof Interview Form developed by the researcher were used to examine the proof processes of the students. After the students were determined according to the teachers' opinion, clinical interviews were conducted with 5 students for the pilot study and 5 students for the main study, which lasted approximately 60 minutes. Descriptive analysis technique was used in the analysis of the study. In the data analysis of the study, the proof stages of Boero were taken as the basis, and the data were analyzed according to the model in which Heinze and Reiss (2004) adapted the Boero proof processes to school mathematics.

Results: It was observed that gifted students were able to develop strategies for proof in general, but they could not write the proof in mathematical standards, and they also expressed a positive opinion about the use and necessity of proof in mathematics lessons.

Conclusion: During the application, it was observed that the students had some difficulties in the proof process, but they were very curious and willing to prove. It has been concluded that the teaching to be done in this direction for gifted students will have a positive effect.

Keywords: Mathematical Proof, Proof process, Boero model, Gifted, Qualitative research method

1. GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumu, amaç ve önemi, problem cümlesi ve alt problem cümleleri, varsayımları, sınırlılıkları, araştırmadaki tanımlar ve kısaltmalar verilmiştir.

1.1 Problem Durumu

İspat, matematik öğrenmenin temelini oluşturduğundan matematiğin yapısının öğrenilmesi, takdir edilmesi ve matematiksel bilginin ve iletişiminin geliştirilmesi için olmazsa olmazdır (Polya, 1981). Schoenfeld (2009), 'Problem çözme matematiğin kalbi ise ispat ruhudur' diyerek ispatın matematik içindeki önemini vurgular. İspatın, matematik müfredatında ve matematiksel yeterlilikte önemli bir konu olduğu (K. Reiss, A. Renkl, 2002), matematik eğitiminde kullanılması gerektiği her zaman savunulmuştur. Matematiksel ifadeleri ispatlama süreci matematiksel iddiaların altında yatan nedenlerin ortaya çıkarılmasını ve matematiksel kavramlar arasında ilişki kurulmasına imkân sağlar. Böylece matematiği ezberleyerek değil anlayarak öğrenme fırsatı sunar. Yani ispat matematikte öğrenmeyi destekleyen önemli bir araçtır (Uğurel vd., 2020). Pek çok araştırmacı ve öğretim programı, ispat kavramının ve buna karşılık gelen ispat etkinliklerinin öğrenim süreci boyunca öğrencilerin matematiksel deneyimlerinin bir parçası olmasını önermektedir (Stylianides, 2007). Akıl yürütme ve ispatın gerek yurtiçi gerek yurt dışında uygulanan matematik öğretim programlarının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında olduğu görülmektedir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). İspatın matematik öğretimindeki yeri, matematik eğitimindeki reform hareketleri kapsamında okul matematiği içinde içerik olarak daha zengin, öğretim biçiminin ise daha geniş ele alındığı söylenebilir (Uğurel ve Moralı, 2010). Bu nedenle matematiksel ispatın öğretimin merkezinde olması fikri giderek artan bir önem kazanmaktadır (G.J. Stylianides, A.J. Stylianides, G.N. Philippou, 2007).

Matematikte ispatın yeri ve öneminin artmasıyla birlikte alanyazında farklı yaş gruplarında öğretmenlerin, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma becerileri, ispat hakkında görüşleri, ispat süreçleri ve bu konuda yeterlilikleri gibi birçok konuda çalışma yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında çok az öğrencinin ispat öğeleriyle başa çıkabildiği (Heinze ve Reiss, 2004), hem ilköğretim hem de üniversite düzeyi öğrencilerin ispat yapabilme yeterliliklerinin düşük olduğu (Bahtiyari-Albayrak, 2010; Arslan,2007), öğrenciler ispatı anlama ve ispat yapabilme konusunda kendilerini yeterli görmedikleri bulgulanmıştır (İnam, 2014).

Ülkemizde uygulanan öğretim programları incelendiğinde ispat konusu, 2011 öğretim programının, 9. sınıf düzeyinde *'Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir.*', *'İspat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar*' ve 11. sınıf düzeyinde *'Tümevarım yöntemini açıklar ve uygulamalar yapar.*' (MEB, 2011) kazanımlarını içerdiği görülmektedir. 2018 öğretim programında ise sadece 9. sınıf düzeyinde yer verilen ispat konusunun *'Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar. Bir teoremin hipotezi ve hükmü belirtilir'* (MEB, 2018) şeklinde çok temel düzeyde ele alındığı görülmektedir. Ortaokul düzeyinde ise öğretim programında ispat konusuna yer verilmemekte, akıl yürütme becerisi kapsamında ispata yönelik dolaylı çıkarımlara değinilmektedir. Buradan hareketle ülkemizde ispat öğretimine yeterince yer verilmediği görülmektedir. Buna karşın ispatın matematik öğretiminin temel bileşeni olması gerektiği ve her yaş grubunun kendi seviyelerine uygun ispat yapabilecekleri savunulmaktadır (Aylar, 2014). Amerika Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin (NCTM, 2000) yayınlamış olduğu 'Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar' kitabında öğretim programlarının, ana okuldan lise son sınıfa kadar tüm öğrencilerin matematiksel ispatların matematiğin önemli parçası olduğunu fark etmelerini, matematiksel çıkarımlarda bulunup, bu çıkarımların doğruluğunu araştırabilmek için argümanlar üretebilmelerini ve çeşitli ispat yöntemlerini kullanabilecekleri fırsatlar tanımak gerektiğini vurgulamaktadır.

Tüm bu araştırmalara bakıldığında ispat öğretimi matematikte anlamlı öğrenme ve ezberin önüne geçilmesi adına önemli görülmektedir. Öğrencinin doğru bir bilgiyi ezberlemesinden ziyade bilginin neden doğru olduğunu bilmesi önem arz etmektedir. Öğretim sürecine bu bağlamda katkı sunmak adına her yaş grubundaki öğrencilerin ispat konusunda yaklaşımlarını ve yeterliliklerini betimlemek gereklidir. Bu çalışmada ülkemizde 'erken yaş grubu ve ispat' çalışmalarına katkı sunabilmek adına üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma becerilerini betimleyebilmek amaçlanmıştır. Ortaokul öğrencilerinin somut düşünceden soyut düşünceye geçiş aşamasında olması ve öğrencilerin cebir öğrenme alanında sembolik dili daha etkin kullanacakları düşünülerek çalışma 8. sınıf öğrencileri ile tasarlanmıştır. Çalışmanın alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Farklı ülkelerde yapılan güncel eğitim reformları matematiksel ispatların önemine dikkat çekmektedir. Örnek verilecek olunursa İsrail Millî Eğitim Bakanlığı 2009 yılında yaptığı matematik müfredatındaki değişiklikte cebir ve geometri alanında öğrencilerin çıkarım yapma ve ispat yapmanın önemli olduğunu ifade etmiştir (Uğurel vd., 2020). Benzer olarak Türkiye'de 2005 yılında yapılan eğitim reformu kapsamında 'akıl yürütme' öğrencilere kazandırılması gereken becerilerin başında gelmektedir. 2005 öğretim programı matematik dersi özel amaçları içinde 'Mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir' ve 'Matematiksel problemleri çözme süreci içinde kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir' ifadeleri ile akıl yürütmenin önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2009).

Amerika Devlet Ortak Çekirdek Standartlarına göre bir öğrencinin matematiksel düzeyinin yeterli kabul edilebilmesi için kavram, tanım veya doğruluğu ispatlanmış sonuçları kullanarak argüman oluşturabilme becerisine sahip olması gerektiğini ifade eder (Uğurel, 2020). Ayrıca Ross (1998) öğrencilerin 8.sınıfa geldiklerinde;

1. Tümevarımsal ve tümdengelimli akıl yürütmenin farkını bilme ve her birinin ne zaman uygun olduğuna karar verebilme,

2. Mantıksal çıkarımın anlamını bilme özellikle, tümdengelimli bir akıl yürütmede hipotezi ve sonucu tanımlayabilme,

3. Bir iddiayı örneklerle test etme,

4. Bir iddiayı çürütmek için karşıt örneğin yeterli olduğunu bilme,

5. Birkaç durumda doğru olan iddianın her durumda doğru olmayabileceğini kabul etme,

6. Bir ifadenin ispat olup olmadığını anlama,

7. Birden fazla adım içeren akıl yürütme zincirlerindeki mantıksal hataları tanımlayabilme becerilerine sahip olması gerektiğini ifade eder.

Sonuç olarak güncel eğitim reformları önerisinde matematiksel akıl yürütme ve ispat kavramları sadece lise ve üzeri öğretim programları ile özdeşleştirilmemelidir. Bu becerileri geliştirmek için her yaş grubundan tüm öğrencilerin erken yaşlardan itibaren ispat yapma etkinlikleri ile karşılaşması gerektiği (Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007) savunulmaktadır. Alanyazında Türkiye'de yapılan lise öncesi ispat çalışmalarına bakıldığında öğrencilerin matematik başarısı ile ispat seviyelerinin ilişkilendirilmesi (Çalışkan, 2012), öğrencilerin ispat yapma seviyelerinin incelenmesi (Şimşek ve Üstün, 2019), ispata yönelik algı ve ispat yapma becerilerinin irdelenmesi (Aylar, 2014), akademik başarısı yüksek olan öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapma becerileri ve argüman tercihleri (Turan, 2019), öğrencilerin kanıt imajlarının ve kanıt şemalarının incelenmesi (Alpay, 2018; Ercan, 2020), argümantasyon ve kanıt süreci analizi ve karşılaştırması (Güneş, 2013), farklı sınıf düzeyi öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri (İskenderoğlu, 2003), kanıt ve argümantasyon becerilerinin incelenmesi (Pesen, 2018), matematiksel akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi (Öz, 2017), gme çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı (Polat, 2018), muhakeme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi (Arslan, 2007), öğrencilerin tahmin stratejilerinin ve etkili faktörlerin incelenmesi (Boz, 2009), matematiksel düşünme etkinliklerinin öğrenme ortamına etkileri (Bahadır, 2020), gibi çalışmaların olduğu görülmektedir.

Bahtiyari, (2010) 'nin 8. sınıf öğrencileriyle ispat ve muhakeme kavramları ve bunların öneminin farkındalığı konusundaki çalışmasında öğrencilerin gerek ispat ve gerekse muhakeme konusunda eksiklerin olduğunu ve çoğunluğunun ispat yaparken zorlandığını belirtmektedir. Ayrıca NCTM (2000) tarafından yayınlanan 'Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar' kitabında öğrencilerin ispat konusunda kazanması gereken becerilerin tüm öğrenciler için geçerli olması amaçlanmıştır. Bununla birlikte üstün yetenekli öğrencilerin birçok yönden akran gruplarından farklı olduğunu gösteren birçok araştırma mevcuttur. Bu öğrencilerin akranlarına göre hızlı öğrenme kapasitesi, soyutlama ve genelleme becerileri, problem çözme konusunda kararlı ve karar verme yetenekleri olduğu ve önceden ispat ile ilgili çalışma yapmamış olmasına rağmen sezgisel bir ispat kavramına sahip olabilecekleri varsayılmaktadır (Sriraman, 2004).

Bu çalışmanın amacı üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin derinlemesine incelenmesi, öğrencilerin ispat yapma konusundaki becerilerinin ve bu süreçte yaşadıkları güçlüklerin betimlenmesi olarak belirlenmiştir.

İlgili alınyazın incelendiğinde; yurt içinde ispat konusunda ortaokul düzeyindeki üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Öğrencilerin ispat süreçlerinin derinlemesine incelenmesi, süreçte yaşadıkları güçlükleri ortaya çıkarabilmek ve elde edilecek veriler ışığında ispata yönelik öğretim uygulamalarına katkı sağlamasını mümkün kılacağı düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin süreçte yaşadığı zorlukların ortaya çıkarılması ve buna yönelik çözüm önerilerinin ortaya konulması konusunda önemli görülmektedir. Çalışmanın bu sebeplerden ötürü alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Bu araştırma kapsamında üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçleri incelenmiş ve aşağıdaki araştırma problemine yanıt bulunmaya çalışılmıştır.

'Üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma sürecinde ortaya koydukları ispat becerileri nasıldır?'

Bu bağlamda belirlenen alt problemler aşağıda sıralanmıştır.

'Üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma becerileri nasıldır?'

'Üstün yetenekli öğrencilerinin ispata ilişkin görüşleri nasıldır?'

1.4. Sınırlılıklar

● Bu araştırmada toplanan veriler Aydın Bilsem'e devam eden 8. sınıf beş öğrenci ile sınırlıdır.

● Araştırma öğrenciler ile yapılan klinik görüşmeler sonrası elde edilen ispat testi, ispat görüşme formundan elde edilen verilerle sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

● Araştırmada öğrenciler ile yapılan görüşmelerde öğrencilerin doğru ve samimi cevaplar verdikleri varsayılmaktadır.

● Gerek araştırmacının sormuş olduğu sorular gerekse öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar karşılıklı olarak doğru biçimde anlaşıldığı varsayılmıştır.

● Bu çalışmada öğrencilerin ispat süreçlerini daha iyi betimleyebilmek amacıyla uygulanan ispat testinin, öğrencilerin gerçek performanslarını ortaya koyduğu varsayılmıştır.

● Araştırmada üstün yetenek tanısı almış öğrencilerin matematikte üstün yetenekli olduğu varsayılmaktadır.

1.6. Kısaltmalar

NCTM: (National Council of Teachers of Mathematics: Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi)

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

TDK: Türk Dil Kurumu Bilişim Ağı

EBA: Eğitim Bilişim Ağı

1.7. Kavramsal Çerçeve

1.7.1. Üstün Yeteneklilik

1.7.1.1. Üstün Yetenek Kavramı ve Matematikte Üstün Yeteneklilik

Üstün yetenek kavramının ne olduğu bu alanda çalışan birçok uzman tarafından açıklanmaya çalışılmıştır. Üstün yetenek kavramının kısaca tarihsel gelişimine bakılacak olursa tarihte ilk defa M.Ö 6. yy ’da Eski Spartada ortaya çıktığı görülmektedir. O dönemde üstün yetenek, liderlik ve savaş becerisi ile eşdeğer olarak görülmektedir (Bildiren, 2018). Zaman içinde farklı tanımlamalar olsa da buradaki ortak nokta bireyin diğerlerine göre potansiyel farklılığı olarak söylenebilir (Bildiren, 2018). Üstün yetenek, bireyin erken dönemde bulunduğu ortamda dikkat çeken üst düzey başarı ve yaratıcılık göstermesini sağlayan beceriler olarak tanımlanabilmektedir (Gür, 2017). Millî Eğitim Bakanlığı Bilim ve Sanat Merkezleri Yönergesinde üstün yetenekli birey ‘Zekâ, yaratıcılık, sanat, liderlik kapasitesi veya özel akademik alanlarda yaşıtlarına göre yüksek düzeyde performans gösteren öğrenci’ olarak tanımlanmaktadır (Millî Eğitim Bakanlığı Bilim ve Sanat Merkezleri Yönergesi, 2001:1). Türkiye’de üstün yetenekli ve üstün zekalı kavramları ayrı ayrı ele alınmamakta üstün zekâ, üstün yetenek içinde tanımlanmaktadır. T.C Milli Eğitim Bakanlığı Özel Eğitim Konseyi 1991 yılı raporunda üstün zeka ve üstün özel yetenek kavramları tek başlık altında toplanmış ve üstün yetenek kavramı ile ifade edilmiştir.

Üstün yetenekli bireylerin tanılanmasına ilişkin ilk tanımlar zekâ testleri ile yapılan tanımlamalardır. Bu tanılamalara göre zekâ testlerinden 130 ve üstü alanlar üstün zekalı olarak kabul edilmektedir ve bu oran toplumun %1,5-%3'lük dilimine denk gelmektedir (Gür, 2017). Yapılan birçok çalışmada üstün yetenekli çocukları sadece IQ ile belirleme yoluna gidilmiş fakat son yıllarda üstünlüğü açıklamada tek başına IQ kavramının yetersiz kaldığı görülmüştür. Bugün yapılan çoğu araştırma üstün yeteneğin sadece bir sayı ile açıklanamayacağı konusunda hemfikirdir (Özkan, 2013; Winner, 1996). 1921 yılında ABD'li psikolog Terman 1528 üstün yetenek tanısı almış öğrenciler ile uzun süre yaptığı inceleme ve çalışmaların sonucu olarak bu öğrencilerin;

● Bilim testlerinde üstün oldukları,

● Fiziksel açıdan sağlıklı oldukları

● Genel olarak okulda başarılı oldukları

● Okuma, dil öğretimi, matematik, fen, edebiyat ve sanatta iyi oldukları,

● Geniş ve zengin bilgi ağına sahip oldukları

● Üstün zekalı çocukların normal zekalı öğrencilere göre daha dürüst, sadık, istikrarlı ve naif olduklarını ileri sürmüştür.

1978 yılında ise Amerika Eğitim Ofisi daha geniş bir üstün yetenekli tanımı yapmıştır. Bu tanıma göre üstün yetenekli çocukları zihinsel, yaratıcı, akademik yeteneği olan veya liderlik, görsel veya icra gibi alanlarda yüksek kabiliyet gösteren çocuklar olarak tanımlamıştır. Bu tanım IQ sınıflaması dışında farklı üstün yetenek alanlarını ortaya koymuştur. Bu tanımdan sonra eğitimciler altı farklı alanı üstün yetenek olarak kabul etmişlerdir;

1. Genel zihinsel yetenek

2. Özel bir alanı kapsayan akademik başarı

3. Yaratıcılık

4. Liderlik

5. Görsel ve sanatsal alanda beceri

6. Psikomotor alanında beceriler (Bildiren, 2018).

Winner (1996), üstün yetenekli kavramını herhangi bir faaliyet alanında olağanüstü yetenek olarak tanımlar. Üstün zekanın istisna kabul edilen IQ ile eş anlamlı olmadığını çünkü zekanın tek bir alan olduğunu ama bunun istisnai yetenekler için bir ön koşul olmadığını savunmaktadır. Üstün yetenekli bireylerin;

● Erken gelişmişlik: İlgilerini çeken alanlarda yaşıtlarına göre çok daha erken ustalık kazanma (Gür, 2017),

● Tipik gelişim gösteren çocuklara göre niteliksel olarak farklı şekillerde öğrenme,

● İlgili oldukları alanda çok yoğun ilgi ve motivasyon gibi özelliklere sahip olduklarını ifade etmiştir.

Renzulli (1978)'ye göre ise üstün yetenekli tanımını;

1. Ortalamanın üzerinde zekâ: Üst düzey zekâ ve yetenek, genel yetenek ve özel yetenek olarak ele alınabilir. Genel yetenek, soyut düşünebilme, sözel veya sayısal akıl yürütme, yeni bilgileri hızlı öğrenme becerisi olarak ifade edilebilir. Özel yetenek ise belirli bir alanda yüksek düzeyde ilgi, hayranlık, kendini adama gibi durumlara işaret eder (Gür, 2017).

2. Yüksek düzeyde görev bağlılığı: Bu özellik çevresel uyarıcılar ile geliştirilebileceği gibi uygun öğretim ile de desteklenebilir (Gür, 2017).

3. Yüksek düzeyde yaratıcılık: Fikirlerin özgünlüğü, deneyimlere karşı açık olma ve ayrıntı ve estetik özelliklere karşı duyarlı olma durumu olarak ifade edilebilir (Gür, 2017).

Davaslıgil ve Karaduman (2020), üstün yetenekli bireylerin hızlı öğrenme, karışık ve soyut düşünceler ile başa çıkabilme ve geniş bilgi tabanı oluşturabilme özelliklerine sahip olduklarını ifade eder.

Üstün yetenekli bireyler özel yetenekleri açısından bakıldığında birbirinden farklılık gösterebilirler. Genel zihinsel yetenek, özel akademik yetenek, yaratıcılık, liderlik, sanat veya psiko-motor gibi alanların bir veya birkaçında başarı gösterebilirler (Bildiren, 2018). Üstün yetenekli kavramı ile matematiksel olarak üstün yetenekli kavramı birbirinden bağımsız kavramlar olmamakla birlikte üstün yetenekli olan bir kişi matematiksel olarak üstün yetenekli olmayabilir (Dinamit, 2020). Matematiksel üstün yeteneklilik çoğu zaman alana özgü bir üstün yeteneklilik olarak kabul edilmektedir (Assmuss, 2018). Matematikte üstün yeteneklilik konusunda en geniş çalışmalardan birini yapan Rus psikolog Krutetskii, yaklaşık yirmi yıl boyunca öğrencilerin matematiksel yeteneklerini incelemiştir. Bu konuda çalışma yapmış A. Binet, E. L. Thorndike ve G. Révész ve J. Hadamard gibi seçkin matematikçiler matematiksel yeteneklerin araştırılmasına katkı sunmuşlardır (Krutetszkii, 1976). Bu araştırmacılar başta olmak üzere birçok araştırmacının çalışmalarını dikkatle inceleyen Krutetszkii matematiksel yeteneğin farklı farklı tanımlandığını ifade etmiştir (Arıkan, 2019). Örneğin Betz matematiksel yeteneği matematiksel ilişkilerdeki bağlantıların farkında olma ve matematiksel kavramlar ile düşünebilme olarak tanımlarken, A. Wenzl, matematiksel materyalde anlamlı bağlantılar kurma yeteneği olarak ifade etmiştir. Matematiksellik üzerine faktöriyel çalışmasını yayınlayan M. Blackwell matematiksel yeteneğin nicel ilişkiler alanında seçici düşünme, tümdengelimli akıl yürütme ve sayı, sembol ve geometrik formlar gibi durumlara genel ilkeleri uygulayabilme yeteneği olarak tanımlamıştır. Lietzmann ise akıl yürütme becerisi ile matematiksel dilde sembol kullanımına dikkat çeker. Finli psikolog Meinander ise matematiksel yetenekten zekâ, hafıza, ilgi ve istemli faktörleri içeren karmaşık bir nitelik olarak bahsetmektedir. Tanınmış psikolog Révész, deneme olmaksızın matematiksel ilişkileri fark edebilme, uygun bilgileri benzer durumlara uygulama ve mevcut bilgiler ile hemen elde edilemeyecek ilişkileri ortaya çıkarma olarak ifade etmiştir. D. M. Lee ise matematikte başarılı olmayı matematiğin temel kavramlarını anlama ve onları manipüle edebilme yeteneği olarak belirtmiştir (Akt: Krutetszkii, 1976 s. 21).

Krutetszkii (1976), matematiksel olarak yetenekli öğrencilerin matematiksel zihin yapısı olarak adlandırdığı benzersiz bir zihin organizasyonuna sahip olduğunu ifade etmiştir. Genellikle 7 veya 8 yaşlarında ortaya çıkmaya başlayan bu özellik çevre fenomenlerinin matematiksel yönüne dikkat etme, durumların uzamsal ve niceliksel yönlerini fark etme kısaca dünyayı matematiksel gözlerle görme olarak değerlendirilebilir. Bu tip bireyler bir şeyi algılarken matematiksel yönünü ayırt etme çabasındadırlar. Örneğin bir müzik eserindeki sesleri veya akorları matematiksel olarak yorumlama ve öğrenme, ya da astronomiye ilgi duyan bir bireyin çoğunlukla astronomik tablolar oluşturma, ayın evrelerini hesaplama veya gezegenler ve yıldızlara olan uzaklık tablolarını inceleme gibi konunun matematiksel yönü ile daha çok ilgilenme eğiliminde olacaklardır. Coğrafyaya ilgi duyan bireyin daha çok nüfus yoğunluğu tabloları, dağların yükseklikleri, nehirlerin uzunlukları gibi farklı türde grafik ve diyagramları, kimya ile ilgileniyorsa formüllerin ve denklemlerin kimyası, oldukça karmaşık reaksiyon formülleri oluşturma hatta eski bir Maya Kızılderili kabilesinin dilini matematiksel yöntemler ile çözme girişiminde bulunması olayların matematiksel yönüne olan ilgiye örnek olarak verilebilir (Krutetszkii, 1976).

Matematiksel olarak üstün yetenekli bireyler yürüme, okuma, film izleme gibi rutin hayatlarında bile matematiksel problemler kurma ve bunlarla uğraşma eğilimindedirler. Örneğin gördükleri binanın hacmini veya bulundukları stadyumun alanını hesaplama, bindikleri otobüsün hızını hesaplama, bir insanın hayatı boyunca kaç saniye yaşadığını bulma gibi çevreye matematiksel yorum getirme çabasındadırlar. Ayrıca zor problemler yetenekli öğrencilerin çok ilgisini çeker ve zekalarını keskinleştirir. Herhangi bir problem ile uğraşan bu bireyler çevreden kendilerini soyutlayıp problem üzerinde çalışmak isterler. O an çevresi ile meşgul görünseler bile kafalarında sürekli çözmek istedikleri problem ile uğraşırlar ve çözülmemiş bir problem onları rahatsız eder (Krutetszkii, 1976).

Bazı araştırmacılar matematiksel üstün yeteneği, zor matematik problemlerini çözebilme yeteneği olarak değerlendirir. Fakat burada önemli olan belli algoritmik adımlarını kullanarak problemi çözme olarak değil matematiksel akıl yürütme yolu ile çözüme ulaşmanın önemi vurgulanmaktadır. Matematiksel olarak üstün yetenekli bir öğrencinin ortalama bir öğrenciden farkı, probleme odaklanma, problemi tanımlama ve ilerleme aşamasında daha geniş strateji yelpazesi ile hareket edebilme, problemi tamamlama ve sonrasında değerlendirmek için fazlaca zaman ayırma eğiliminde olmalarıdır (Niederer, Irwin, Irwin and Reilly, 2003).

Sheffield (1994), matematiksel yeteneklerin genel olarak hızlı öğrenme, gözlem becerileri, sorgulama becerisi, akıl yürütme kapasitesi, yaratıcılık gibi özellikleri barındırdığını ifade eder. Matematiksel üstün yetenekli bireylerin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu ifade eder,

- Nicel bilgiler konusunda merak ve erken farkındalık,
- İlişkileri algılama, görselleştirme ve genelleme yeteneği,
- Analitik, tümdengelimsel ve tümevarımsal akıl yürütme becerisi,
- Matematiksel kavramları esnek ve yaratıcı kullanabilme,
- Zor problemleri çözmede sabır ve isteklilik,
- Bilgileri yeni durumlara transfer edebilme,
- Verileri organize edebilme ve gereksiz verileri göz ardı edebilme,
- Matematiksel soruları (sadece cevaplamak için değil) formüle etme eğilimi

Burada dikkat edilmesi gereken, sayılan özelliklerin arasında hızlı ve doğru işlem becerisinin yer almamasıdır. Bazı matematikte üstün yetenekli öğrenciler bu özelliğe sahip olsalar da matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerde olması gereken gerekli ve yeterli bir özellik olarak sayılmamaktadır.

1.7.1.2. Matematikte Üstün Yetenekli Bireylerin Özellikleri

Üstün yetenekli öğrenciler için genelleme yapılabilecek ve onları ayırt etmeyi sağlayabilecek bazı özellikler bulunmaktadır. Üstün yetenekli tanısı almış öğrencilerin hepsinin tüm özellikleri göstermesi beklenemez çünkü bu öğrenciler arasında da bireysel farklılıklar mevcuttur. Aynı zekâ puanı alan iki üstün yetenekli öğrencinin belirgin olarak gösterdikleri özellikler farklı olabilmektedir. Yapılan araştırmalar sonucu tek tip bir üstün yetenek olmadığını bu bireylerin birbirinden farklı özellikler sergilediğini göstermiştir. Tüm bireylerde olduğu gibi üstün yetenekli bireyler de birbirinden farklı kendilerine özgü özelliklere sahiptir (Gür, 2017).

Matematiksel üstün yetenekli araştırmalarını önemli yapan nedenlerden biri de üstün yetenekliliğin matematiğe özgü özelliklerini geliştirebilmektir. Matematik alanında üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerini tanımlayan bu konuda çığır açan araştırmacılardan birisi Rus psikolog Krutetskii'dir (Assmuss, 2018). Krutetszkii (1976), matematiksel yeteneklerin çok erken yaşlarda şekillenebileceğini ve çoğunlukla hesaplama ve sayılarla işlem yapma yeteneği olarak kendini gösterebileceğini ifade eder. Hesaplama yeteneğinin matematiksel yetenek olarak görülmese de bunun temelinde akıl yürütme, materyalden bağımsız düşünebilme, ispatlama yeteneği gibi yeteneklerin oluştuğunu belirtir. Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin şu özellikler geliştirdiğini göstermiştir.

● Matematiksel materyali genelleştirme yeteneği (Dışsal olarak farklı veya izole olanda geneli keşfetme yeteneği)

● Zihinsel süreçlerde esneklik (Bir işlemden veya düşünce dizisinden diğerine hızlıca geçme yeteneği)

● Bir problemin en kolay, en net ve en ekonomik yoluna ulaşma çabası

● Genelleştirilmiş ilişkileri, akıl yürütme şemalarını hatırlama yeteneği

● Akıl yürütme sürecini kısaltma

● Çevrenin belirli bir "matematiksel" algısının temel biçimlerinin oluşumu (Birçok gerçek ve fenomenin bir matematiksel ilişkiler prizmasından kırılıyormuş gibi) (Krutetszkii, 1976 s.222-223).

Alman matematik eğitimcisi Käpnick (1998), üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencileri ile yaptığı araştırmada matematik alanında üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerini araştırmıştır. Çalışma sonucunda, aşağıdaki matematiğe özgü yetenekleri karakteristik olarak tanımlamıştır.

● Matematiksel gerçekleri hatırlama,

● Matematiksel gerçekleri yapılandırma,

● Matematiksel duyarlılık,

● Matematiksel yapıları aktarma,

● Farklı modlar arası aktarım

● Düşünceleri tersine çevirebilme

Käpnick (1998), yukarıda verilen özelliklerin her bireyde eşit gelişmediğine bireysel yeteneklerin oldukça farklı olabileceğine dikkat çekmektedir (Kapnick, 1998'den Akt: Assmuss, 2018, s.149).

Matematikte üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerini dönemlere göre araştıran araştırmacılardan biri olan Straker (1983), matematikte üstün yetenekli okul öncesi çocuklarının genellikle öykü ve tekerlemelerde geçen sayılar dahil olmak üzere genel olarak sayıların beğenilmesi, mantıksal bağlaçlar kullanarak tartışabilme, sorgulama ve akıl yürütebilme, örüntü, denge ve simetriyi ortaya çıkarma, oyuncakların sıralanmasında hassaslık, büyüklük veya küçüklüğe göre sıralama, yapboz gibi yapısal oyuncaklardan keyif alma gibi özellikler gösterdiğini gözlemlemiştir (Akt: Arıkan, 2019).

Benzer olarak Bicknell (2009), çocuklarının matematiksel yeteneklerini erken yaşta fark eden ebeveynler tarafından tanımlanan okul öncesi çocukların özellikleri arasında, etkileyici şekilde odaklanma ve belirli bir görev üzerinde uzun süre çalışabilme becerisi olduğunu ifade eder. Ayrıca çocukların yapı blokları ile inşa etme, simetrik desenler oluşturma, nesnelere sıralama, sıra dışı yollar ile bulmaca tamamlama, sayıların olduğu zorlu oyun tasarımı, büyük sayılara ve uzay kavramına karşı ilgi gibi matematik ile ilgili etkinlik türlerinden keyif aldığını belirtir.

Wagner ve Zimmermann (1986), matematiksel üstün yeteneği bireyin test edilebilir yetenekler dizisi olduğunu belirtir. Bu yetenekleri aşağıdaki gibi sıralamıştır,

● Materyalleri organize edebilme,

● Kuralları ve kalıpları tanıma,

● Problemin temsilini değiştirebilme ve yeni temsildeki kural ve kalıpları tanıma,

● Karmaşık yapılarda çalışabilme,

● Süreçleri tersine çevirebilme,

● İlişkili problemler kurabilmedir.

Şahin vd. (2015), matematikte üstün yetenekli öğrencilerin akranlarından ayıran en belirgin özelliklerin;

● Sayılara ilişkin erken görülen ilgi ve farkındalık,

● Olay veya durumlarda analitik düşünme becerisi

● Muhakeme yapabilme becerisi

● Zor problemlere karşılaştıklarında çözmek için istek ve sabır

● Bilgileri yeni durumlara transfer edebilme becerisi

● Genelleme yapabilme becerisi

● Bilgiyi organize edebilme ve gereksiz bilgiyi eleme becerisi

● Problemlere karşı çok fazla alternatif yol üretebilme becerisidir.

Yukarıda belirtilen özelliklerin hepsini matematiksel üstün yetenekli öğrencilerin göstermesini beklemenin doğru olmayacağını çünkü her bireyin kendine özgü davranışları ve bunların dışavurumunun farklı olabileceğini ifade etmiştir.

Benzer olarak Johnson (2000), üstün yetenekli öğrencilerin özellikle matematikte öğrenme hızı, anlayışlarındaki derinlik ve sahip oldukları ilgi olmak üzere üç temel alanda akranlarından ayrıldığını ifade eder. Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin ise genel öğrenci grubundan aşağıdaki yetenekler açısından farklılık gösterdiğini belirtir.

● Kendiliğinden problem oluşturma

● Verilerin işlenmesinde esnek davranabilme

● Fikirlerde akıcılık ve zihinsel olarak çeviklik

● Verileri düzenleme becerisi, özgün yorum yapabilme becerisi

● Fikirleri aktarabilme ve genelleme yeteneği.

Ayrıca matematik alanında üstün yetenekli bireylerin özellikleri arasında hesaplama yeterliliğinin sayılmayacağını ifade eder.

Matematik alanında üstün yeteneklilik matematikte çok başarılı olma veya aritmetik hesaplamalar yönünden yüksek kabiliyet göstermekten ziyade matematiksel fikir ve matematiğin mantığını anlamak olarak görülmelidir. Başka bir deyişle dünyayı matematiksel bir bakış açısıyla görme olarakta ifade edilebilir. Genel olarak bu alandaki üstün yetenekli kavramının genel özelliklerine bakıldığında hızlı öğrenme, sorgulama becerisi, sebep sonuç ilişkilerini merak etme ve kavrama, yaratıcılık ve genelleme olduğu görülmektedir (Karaduman, 2010).

Yim, Song and Kim (2008), matematiksel üstün yetenekli tanısı almış ve üstün yetenekli olmayan öğrencilerin problem çözme davranışlarında önemli ölçüde farklılık gözlemlendiğini ifade etmiştir. Üstün yetenekli öğrencilerin problem durumunu anlamaya, varsayımları net bir şekilde ifade etmeye ve bir plan tasarlamaya çalışmak için önemli miktarda zaman harcadıklarını belirtmiştir. Ayrıca matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin yansıtıcı düşünme yoluyla daha üst düzey akıl yürütme becerisine ulaşabilme eğiliminde olduklarını ifade etmiştir.

Sriraman (2004), matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin birçok yönden akran gruplarından farklı olduklarını ifade etmiştir. Örneğin daha hızlı öğrenme kapasiteleri, kavramsal olarak anlama becerileri, soyutlama ve genelleme yapabilme, bilgiyi işleme ve verileri yönetebilme, problem çözmede kararlılık ve karar verme becerileri açısından akranlarına göre farklılık göstermektedir. Bu öğrencilerin ispat ile ilgili önceden herhangi bir çalışmaya tabi tutulmasalar bile sezgisel olarak ispat kavramına ulaşabileceklerini ifade etmiştir.

Bu bilgilere dayanarak bu çalışmanın üstün yetenekli öğrenciler ile yapılması uygun görülmüştür. Bilsem ’de üstün yetenekli tanısı almış öğrenciler arasından öğretmen görüşüne göre seçilen üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel olarak üstün yetenekli oldukları varsayılmıştır.

1.7.1.3. Üstün Yeteneklilik Kuramları

Üstün yetenekli kavramı genel olarak ‘çok zeki ve başarılı olan bireyler’ gibi kalıplaşmış bir düşüncenin aksine bu konuda çalışan bilim insanları tarafından üstün yeteneğin ne anlama geldiği ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ortaya konulan her kuram üstün yetenek kavramını incelemiş ve bunun özelliklerini açıklamaya çalışmıştır. Kuramlar ile üstün yetenek kavramı genel olarak IQ sınırlamasından çıkarılıp, içerisinde birçok faktör barındıran yapılar ile açıklanmaya çalışılmıştır (Bildiren, 2018). Birbiri ile ilişkili olan zekâ ve yetenek kavramlarının tanımlarına bakılırsa;

Zeka: İnsan beyninin karmaşık yeteneği olan zeka kavramı en çok tartışılan ve konuşulan kavramlardan olmasına rağmen açık olarak tanımlanamadığı görülmektedir. Bazı psikologlar zekayı, öğrenme yeteneği olarak tanımlarken bazıları bireyin daha önce karşılaşmadığı problemleri çözebilme yeteneği olarak tanımlar. Fakat tanımların ortak noktalarının beceri ve yetenek kavramları üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir.

Yetenek: Yetenek kavramı genellikle zekâ ile birlikte anılmaktadır. Üstün yetenek sadece bazı kişilerde gözlenilen bir özellik olmaktan çok insanların tümünde var olan yeteneklerin var olma derecesinden, görülme sıklığından, ortaya çıkma zamanınından kaynaklı bir özellik olarak ele alınabilir. Kısaca üstün yetenekli bireyler bazı özellikleri dolayısıyla dağılımı, sıklığı, zamanlaması ve birleşimi açısından farklılık gösteren bireylerdir (Yılmaz Demirel, 2021).

Çift Faktör Kuramı (Spearman)

Üstün yetenek ile ilgili ilk tanımlar zekâ temelinde geliştirilmiştir. Spearman, zekanın ‘g’ yani genel yetenek ve ‘s’ özel yetenek olmak üzere iki temel faktörden oluştuğunu ifade eder. Burada g faktörü zekaya işaret eder ve kişiden kişiye değişmektedir. Zekanın ölçülmesi genel yetenekleri ölçme anlamına gelmektedir. S faktörü ise özel yani kişiye özgü yetenekleri belirlemede kullanılır ve kişinin performans seviyesini belirlemede küçük bir role sahiptir. Fakat birçok araştırmacı zekanın sadece g faktörü ile belirlenmesini yetersiz görmektedir. Bu kişilerin başında gelen araştırmacı Thorndike olmuştur (Gür, 2017).

Çok Faktör Kuramı (Thorndike)

Thorndike, Spearman’ın aksine zekanın, tek bir faktör ile açıklanan genel zekâ ile ölçülemeyeceğini, bunun aksine birbirinden bağımsız çoklu faktörler ile açıklanabileceğini savunmuştur. Thorndike’a göre zekâ; düzey, genişlik ve hız olmak üzere üç yönlüdür. Burada düzey işin zorluk kısmına, genişlik farklı işlerin yapılabilirliğine ve hız ise işin ne kadar çabuk yapıldığına işaret eder (Gür, 2017).

Zihinsel Yetenekler (Grup Faktör) Kuramı (Thurstone)

Thurstone, zekanın birbirinden farklı çok sayıda beceriyi kapsadığını ifade eder. Zekayı tanımladığı bu yedi farklı beceriler,

● Sözel kavrama,

● Sözel akıcılık,

● Sayısal yetenek,

● Hafıza,

● Algılama hızı,

● Tümevarımsal ve tümdengelimsel akıl yürütme,

● Görsel yetenek (Karaduman ve Davaslıgil, 2020).

Yukarıdaki yedi farklı temel beceri Thurstone'un Temel Yetenek Testlerinin temelini oluşturmaktadır. Zekâ ve üstün yetenekli kavramı bu beceriler ve bireylerin bu becerilerde farklılaşmış olduklarının keşfi ile önemli biçimde geliştirilmiştir (Gür, 2017).

Zekâ Yapısı Kuramı (Guilford)

Guilford 'un zekâ yapısı kuramı, üç temel başlık ve bunların alt başlıklarından oluşmaktadır. İşlemler boyutu beş alt başlık olan;

● Tanıma,

● Bellek,

● Iraksak Düşünce,

● Yakınsak Düşünce,

● Karar verme

Ürünler boyutu; altı alt başlık olan,

● Birimler,

● Sınıflar,

● İlişkiler,

● Sistemler,

● Dönüşümler,

● Uygulamalardan

İçerik boyutu ise,

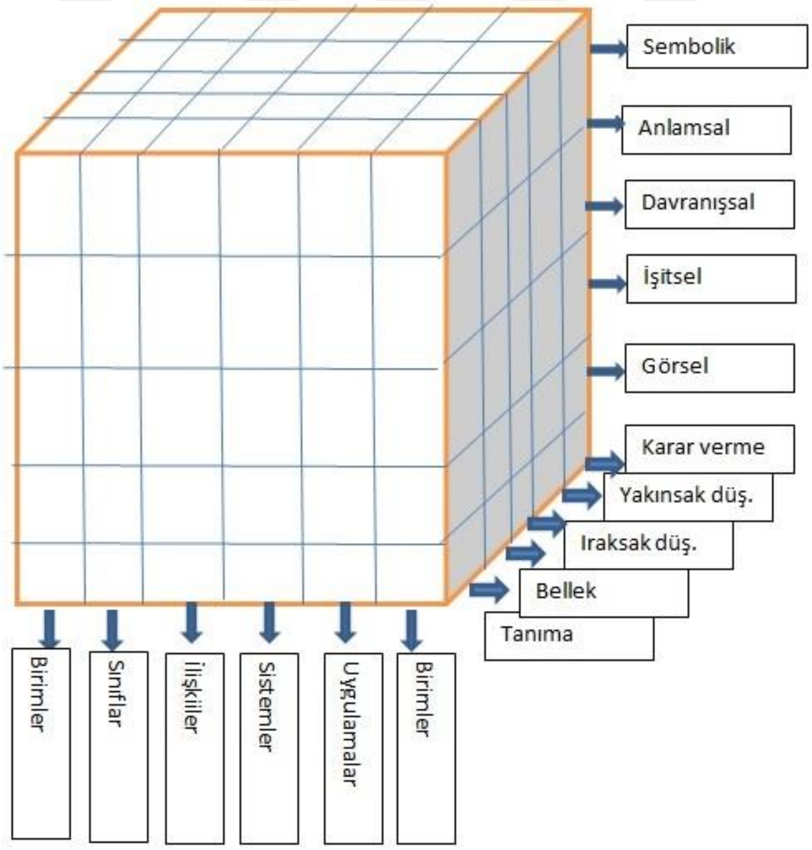
● Sembolik,

● Anlamsal,

● Davranışsal,

● İşitsel,

● Görsel olmak üzere beş alt başlıktan oluşmaktadır. 150 (5x5x6) küçük küp şeklinde ifade edilen yapıda her bir küp birbirinden bağımsız ve farklı yeteneklere işaret eder (Gür, 2017).



Şekil 1.1. Guilford Zekâ Yapısı Kuramı

Akıcı Zekâ-Kristalize Zekâ Kuramı (Cattell ve Horn)

Bu kurama göre zekâ, akıcı ve kristalize olmak üzere iki boyuttan oluşmaktadır. Zekanın genetik ile belirlenen (akıcı) yönü ve öğrenme fırsatları ile sonradan kazanılmış (kristalize) yönü vardır. Akıcı zekâ, kişinin çevreden bağımsız problem çözme becerisini, kristalize zekâ ise öğrenilmiş ve özümsenmiş bilgilerin kazanılmasını ifade eder (Gür, 2017).

Çoklu Zekâ Kuramı (Gardner)

Gardner zekanın tek bir faktör ile açıklanmayacak kadar farklı yetenekler içerdiğini savunmuş ve zekayı;

● Bir veya daha fazla kültürde değer gören bir ürün ortaya çıkarabilme

● Bireyin gerçek hayatta karşılaştığı problemlere etkili çözüm bulabilme

● Yeni ve karmaşık olan bir problemi keşfetme becerisi olarak tanımlamaktadır.

Gardner çalışmalardan yola çıkarak öne sürdüğü zekanın bu dokuz yönü ise;

● Mantıksal-matematiksel zekâ (Problem çözme becerisi ve problemlerden keyif alma)

● Sözel-dilsel Zekâ (Okuduğunu anlama, dil bilgisi, cümle bilgisi gibi beceriler)

● Bedensel- Kinestetik Zekâ (Herhangi bir alanda performans sergilemek için bedeni kullanma becerisi)

● Görsel-uzamsal Zekâ (Zihinde yaratılan herhangi bir şeklin özelliklerini kavrayabilme, canlandırma becerisi)

● Müziksel Zekâ (Müzikal performans gösterme becerisi)

● İçsel Zekâ (Kişinin duygularını, becerilerini, güçlü ve zayıf yönlerini tanıma becerisi)

● Sosyal Zekâ (Günlük hayattaki sosyal ilişkilerimizi yönlendiren, kişinin etrafındaki bireyleri anlayabilme becerisi)

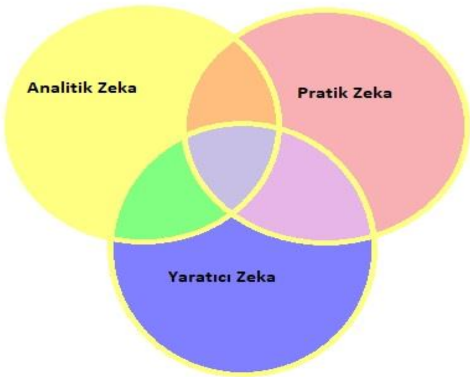
● Doğacı Zekâ (Çevreye karşı duyarlı olma)

● Varoluşsal Zekâ (Varoluşun temel sorunlarını düşünebilme becerisi)

Bireysel farklılıkların önem kazandığı okullarda ve öğretim programlarında yer bulan Gardner'ın zekâ kuramı öğrencilerin bireysel ve güçlü yönlerini ortaya çıkarmada önde gelen kaynaklardandır. Öğrencilerin bireysel ihtiyaçlarının saptanabilmesi ve belli bir alanda dikkat çeken öğrenciye ulaşılabilmesi açısından yol gösterici olmuştur (Karaduman ve Davaslıgil, 2019).

Üçlü Sacayağı Kuramı (Sternberg)

Sternberg, zekayı sadece IQ puanı ile açıklamanın yetersiz kaldığını savunmuş bunun yerine zekayı birbiri ile etkileşim halinde olan üç bileşen çerçevesinde açıklamıştır. Bu üç bileşene sahip olan bireyler üstün yetenekli sayılabilmektedir. Bu bileşenler analitik zekâ, pratik zekâ ve yaratıcı zekadır. Analitik zekâ analiz yapma, karşılaştırma yapma becerisi, yaratıcı zekâ senteze dayalı orijinal fikirler çıkarabilme, yeni bir durumla karşı karşıya kalındığında baş edebilme becerisi, pratik zekâ ise fikirlerin günlük hayatta kullanılabilirliği veya mevcut bilgileri duruma uyarlama ve kullanabilme becerisi olarak ifade edilebilir. Sternberg kişilerin bu zekalardan sadece birine sahip olmasından çok üç zekanın da farklı karışımlarına sahip olduğunu ve bunların zaman içinde değişebileceğini öne sürmüştür (Gür, 2017; Dinamit, 2020).



Şekil 1.2. Sternberg'in Üçlü Sacayağı Kuramı

Üçlü Çember Modeli (Renzulli)

Birçok üstün yetenekli kuramında üstün yetenekliliğin sadece genel zihinsel beceriler ile açıklanamayacağını bunun yanında göreve adanmışlık, azim veya motivasyon gibi bireysel özelliklerin ve çevresel etkenlerin de önemli olduğu vurgulanmaktadır (Tortop, 2016). Renzulli üçlü çember modeli ile üstün yetenekliliği; göreve adanmışlık, yaratıcılık ve genel veya özel yetenek üstünlüğü özellikleri üzerinden tanımlamıştır (Akkaş ve Tortop, 2015). Burada bahsedilen genel yetenek üstünlüğü, sözel veya görsel yetenek ve kuvvetli hafıza olarak ifade edilebilir. Soyut düşünebilme becerisi, sözel veya sayısal muhakeme, sözcük akıcılığı ve bilgilerin hızlı hatırlanabilmesi buna örnek olarak verilebilir. Özel yetenek sınırlı alanlarda örneğin resim, müzik, tiyatro, matematik veya fen gibi özel alanlarda bireyin üstün yetenek göstermesidir. Yaratıcılık ise, bir problem üzerinde sıra dışı fikirler denemesi yeni ve farklı ürünler ortaya koyabilmesidir. Göreve adanmışlık görev aşkı veya işe adanmışlık yani bireyin tamamlaması gereken görevde istekli olması ve verilen görevde kendisine güvenmesi, problemi çözebilme inancının yüksek olması ve bu konuda yetenekli davranabilmesidir (Bildiren, 2018).

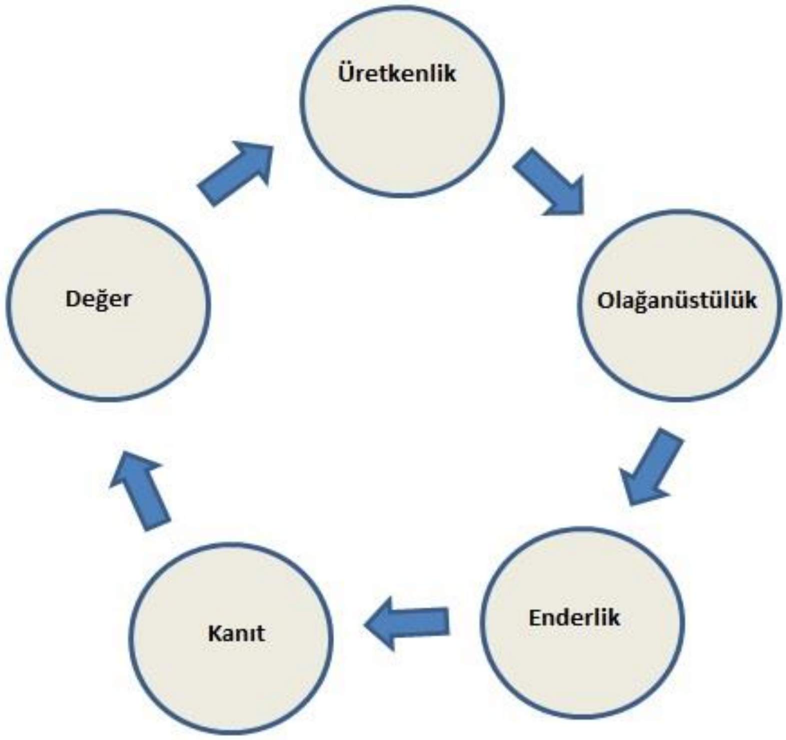
Birbiri ile etkileşimin gerekli görüldüğü bu özellikler doğrultusunda bireyin üstün yetenekli olarak tanımlanabilmesi için bu üç özelliğin bir arada olması beklenmektedir. Her bir özelliğin çember ile ifade edildiği aşağıdaki şekilde üstün yeteneklilik üç çemberin kesişim alanı olarak ifade edilebilir. Bu özelliklerin birinin olmaması veya daha az bulunması durumunda birey üstün yetenekli kabul edilmemektedir. Bu kurama göre üstün yeteneklilik doğuştan gelen özelliklerin yanında çevresel etmenlere de bağlı olarak görülmektedir (Gür, 2017).

Şekil 1.3. Renzulli'nin Üçlü Çember Modeli

Beşgen Kuramı (Sternberg ve Zhang)

Sternberg ve Zhang’ın ortaya koyduğu bu kuramda bireyin üstün yetenekli kabul edilebilmesi için gerekli olan bazı kriterler bulunmaktadır. Bunlar; mükemmellik, nadirlik, üretkenlik, kanıt ve değerdir. Mükemmellik kriteri bireyin akranlarından bir veya birkaç alanda çok iyi performans göstermesi enderlik kriteri, bireyin az görülen ve nadir rastlanan bir yetenek sergilemesi, kanıt kriteri bireyin toplum tarafından üstün yetenekli olarak tanımlanması ve belli alanda yeteneğini göstermesi, üretkenlik kriteri bireyin üstün yetenek gösterdiği alanda bir ürün ortaya koyabilmesi ve değer kriteri ise bireyin toplum tarafından değerli görülen alanda yetenek sergilemesi ve performans göstermesidir (Gür, 2017; Bildiren, 2018).

Bu kurama göre bireyin sadece IQ değerlendirmenin yetersiz olduğu, bunun yanında fen, matematik, resim, müzik gibi bazı alanlarda olağanüstü yetenek sergilemesi gerektiği vurgulanmaktadır. Bireyin bu üstün yeteneğini bir ürün ortaya koyarak kullanabilmesi ve bu ürünün toplum tarafından değerli bulunması gerekmektedir. Örneğin kutuplarda yaşayan bir bireyin güneşin zararlı ışınlarından koruyan krem icat etmesi toplum tarafından çok değerli bulunmayacaktır (Bildiren, 2018).



Şekil 1.4. Sternberg ve Zhang'ın Beşgen Kuramı

Ayrımsal Üstün Zekâ ve Üstün Yetenek Modeli (Gagne)

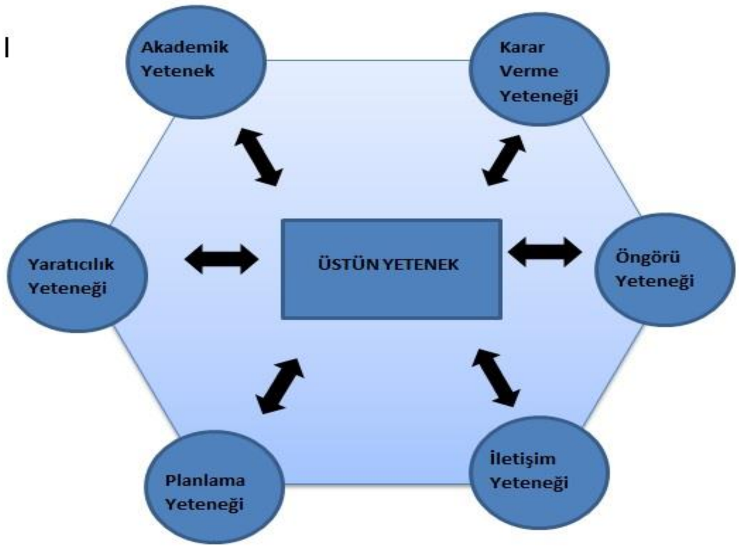
Francoys Gagne, üstün statüsündeki çocukların potansiyelleri ile ilgilenmiş ve üstün zekâ ve üstün yetenek kavramlarını birbirinden ayırmıştır. Bu iki terimi birbirinden ayırması kuramın temeli olmuştur. Gagne 'ye göre üstün zekâ genetik olup doğuştan gelmekte ve yetenek alan(lar)ında akranları arasında en az üst %10'luk kısımda sayılabilecek üstün performans göstermesidir. Üstün yetenek ise doğuştan var olan yeteneğin eğitim gibi çevresel etmenlerle geliştirilmesidir. Üstün yetenekli birey akranları arasında var olan potansiyelini kullanabilen ve onu geliştirebilen kişidir. Yeteneğini sergilemeyen veya bir ürün olarak ortaya koyamayan bireyler üstün yetenekli olarak kabul edilse de üstün davranış sergileyen bireyler olarak değerlendirilmez. Yeteneğin varlığının göstergesi potansiyel olmasından ziyade sergileniyor olmasıdır. Bu bağlamda üstün yetenekli birey üstün zekalı olarak değerlendirilirken üstün zekalı olan bireyler üstün yetenekli olmayabilir. Bireylerde var olan potansiyel her zaman yeteneğe dönüşmeyebilir. Yetenek gelişim süreci var olan potansiyelin yetenek alanında ustalaşıp beceriye dönüşmesidir. Gagne'ye göre var olan potansiyel yeteneğin ortaya çıkması ve beceriye dönüşebilmesi gelişimsel bir süreç gerekir ve şans, çevre ve içsel gibi etmenler önemli rol oynar. Bireysel özellikler olan motivasyon, kişilik, özyönetim veya bireyin yaşadığı yer, sosyo ekonomik düzey, aile gibi çevresel faktörler potansiyelin yeteneğe dönüşmesinde etkilidir. Gagne bireylerin ortaya koyduğu becerileri beş farklı şekilde gruplandırmıştır (Gür, 2017; Bildiren, 2018).

Tablo 1.1. Gagne'nin Üstün Yetenekli Bireylerin Nüfus İçindeki Seviyelerin Metrik Temelli Sistemi (Gür, 2017)

Seviye	Etiket	Genel Nüfus İçindeki Oran
5	Aşırı Derecede Yüksek	1:100000
4	Olağanüstü	1:10000
3	Yüksek	1:1000
2	Orta	1:100
1	Hafif	1:10

Taylor'un Çoklu Yetenek Kuramı

Taylor'a göre bireyin üstün yetenekli tanısı alabilmesi için sadece IQ değil bunun yanında altı farklı yeteneğinin incelenmesi gerekmektedir. Bunlar akademik yetenek, yaratıcılık, planlama yeteneği, iletişim yeteneği, öngörü yeteneği, karar verme yeteneğidir. Akademik yetenek karışık fikirleri anlama ve hatırlamayı, planlama yeteneği görevleri organize etme ve sistematik yaklaşımı, iletişim yeteneği dili etkili kullanabilmeyi, öngörü yeteneği olayları önceden doğru bir şekilde tahmin edebilmeyi, karar verme yeteneği ise doğru yargılarda bulunmayı ifade eder.



Şekil 1.5. Taylor’un Çoklu Yetenek Kuramı

Bu kadar farklı üstün yetenekli kuramının yanında üstün yetenekli kavramındaki anahtar kelime ‘farklılık’tır. Bireyin akranları arasında dikkat çekecek genel zihinsel veya herhangi bir özel yetenek alanında ileri düzey olağanüstü bir performansa sahip olması olarak ifade edilebilir (Bildiren, 2018).

1.6.1.4. Üstün Yeteneklilik Alanları

Yaygın kabul edilen görüşe göre üstün yetenekli bireyler sadece genel zihinsel yetenek olan IQ puanı ile değil farklı alanlardaki başarıları incelenerek tanılanmalıdır. Bu bireyler farklı alanların bir veya birkaçında yetenek gösterebilmektedir. Bu alanların bir veya birkaçında yetenek gösteren bireylerin tüm alanlarda yetenek göstermesi beklenen bir durum değildir. Bireylerin üstün yetenek alanları aşağıda ayrıntılı olarak incelemiştir (Gür, 2017).

Genel Zihinsel Yetenek

Genel zihinsel yeteneği yüksek olan bireyler geçerli ve güvenilir zekâ testlerinden yüksek puan alan bireylerdir. Üstün zihinsel yeteneğe sahip olan bireylerin özellikleri;

● Akranlarına göre iyi düzeyde sözcük dağarcığına sahip olma

● Kolay ve hızlı öğrenme

● Kuvvetli hafıza

● Soyut kelimeleri kullanma becerisi

● Meraklı olup neden-sonuç ilişkisi kurma ve ilişkiyi kavrama

● Geniş bilgi birikimi

● İlgi duyulan alanda merak ve yoğun dikkat

● Dikkat süresinin yaşıtlarına göre uzun olması

● Rutin işlerden sıkılma, yeni fikirlerden ve keşif tipi etkinliklerden hoşlanma ve yaratıcılık

● Dış kontrole daha az ihtiyaç duymadır.

Özel Akademik Yetenek

Matematik, Fizik, Bilim, Dil gibi belli bir alanda yetenek gösteren bireylerdir. Bu bireyler belli bir alanda üstün yetenekli olup diğer alanlarda ortalama yetenek göstermektedir. Özel akademik alanda yetenek gösteren bireylerin özellikleri;

● İlgili olduğu alanda uzun dikkat süresi, hızlı ve kolay öğrenme

● Yetenek alanında zamanını ayırmaya ve çalışmaya istekli olma

● Yetenek alanında sorumluluğu dışında, derinlemesine çalışmaya istekli olma

● Yetenek alanında bilgisini artırmak için çalışmalar yapma ve bu konuda destek almaya istekli olmadır.

Yaratıcılık Alanında Üstün Yetenek

Bireyin sıra dışı fikirler ve ürünler ortaya koyması bunu yaparken farklı yollar denemesidir. Yaratıcılık alanında üstün yetenekli bireylerin genel özellikleri;

● Yeni, orijinal ve yaratıcı fikirler ortaya koyma

● Meraklı olması

● Yalnız çalışmaya istekli ve deneyimlere açık olma

● Aktif, akıcı ve maceraperest bir hayal gücüne sahip olma

● Bağlantısız görünen fikirler arasında bağlantı kurma ve farklı yollar denemeye istekli olma

● Estetik ve ayrıntıya duyarlı olma olarak ifade edilebilir.

Liderlik Alanında Üstün Yetenek

Grup içinde yönlendirici ve sevilen bireylerdir. Başkalarını etkileme becerisine sahiptirler. Grup içinde oyun kurucu ve lider vasfında olmaktan hoşlanırlar. Liderlik alanında üstün yetenekli bireylerin genel özellikleri;

● Akranları arasında karar alıcı ve popüler olma

● Başarılı ve sürdürün sosyal ilişki

● Empati ve dinleme becerisi

● Girişken olma

● Otoriter olmaktan ziyade karar alırken objektif ve adaletli davranma

● Grup içerisinde fikirlerinin değerli bulunması

● Kendini çok iyi ifade edebilme

Görsel Sanatlarda Üstün Yetenek

Resim, müzik, tiyatro gibi alanlarda üstün yeteneğe sahip olmayı işaret eder. Herkes tarafından beğenilen ve takdir edilen ürünler ortaya koyar. Bu alanda üstün yeteneğe sahip olan bireylerin genel özellikleri üstün yetenekli oldukları alana göre değişmektedir.

Müzik

● Müzikle uğraşmaktan hoşlanma bu alanda akranlarından daha ilgili olma

● Melodi, ritmi kolay hatırlama ve orijinal ürünler ortaya koyma

● Ses ve notaları çıkarma konusunda beceri

● Duygularını ifade ederken müziği kullanma

● Müzik aleti çalma konusunda istekli olma

Görsel Sanatlar

● Bu alana zaman ayırmaktan ve bilgi edinmekten hoşlanma ve uzun dikkat süresi

● Akranlarına göre ayrıntılı ve zengin çizimler yapma

● Çizim konusunda oldukça iyi hayal gücü kullanma

● Çevresini iyi gözlemleme

● Sanatta kompozisyonel çalışma

● Farklı materyal kullanımında istekli olma

● Sanatsal problemlerde orijinal fikirler sunma

Drama

● Rol Yapma, canlandırma konusunda yetenekli olma

● Jest ve mimikleri etkili kullanma

● Özgün oyunlar ortaya çıkarma

● Duygularını jest, mimik ve vücut hareketleriyle yansıtma becerisi

● Karşıdaki insanların duygusal tepkilerinden hoşlanma

Psikomotor Alanında Üstün Yetenek

Farklı spor alanlarına üstün yeteneğe işaret eder. Vücudun tamamını veya bir bölümünü üst düzey kullanma becerisi, güç, hız, denge konusunda başarılı performans gösterme olarak ifade edilebilir. Psikomotor alanında üstün yetenek gösteren bireylerin genel özellikleri;

● Enerjik, ritmik ve atletik olma

● Fiziksel etkinliklerde dengeli ve koordineli olma

● Spor etkinliklerine dahil olmakta istekli olma

● Büyük ve küçük kas becerilerine yönelik yüksek performans gösterme

● Yarışa dayalı oyunlarda başarılı ve azimli olma

● Bu konudaki yayın araçlarını takip etmede hevesli olma

● Yarışmalardan hoşlanma

1.7.2. İspat

1.7.2.1. İspat Kavramı

İnsan uygarlığının antik Yunanistan'dan miras aldığı en önemli armağanlardan biri matematiksel ispat kavramıdır. Öklid'in Elementler kitabının temel şeması binlerce yıldır geçerliliğini korumanın yanında hala matematiksel iletişim kalıplarına rehberlik etmektedir

(Harel and Sowder, 2007). İspat kavramının matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olması ve çalışmaların ispat üzerinde önemli vurgusuna rağmen ispatın ne anlama geldiği hala belirsizdir. Matematik eğitimi araştırma alanyazında açık bir ispat tanımı verilememektedir (Stylianides, 2007). Tüm bilim alanlarında bilimsel bilgilerin doğruluğundan emin olmak ortak bir amaçtır. Bazı bilim dallarında bilgilerin doğruluğunun gösterilmesinde gözlem ve deney sonuçları yeterli olurken matematik için bireysel gözlemleri kullanmak ve bunları açıklamak yeterli olmamaktadır. Gözlem sonuçlarını açıklamak, nedenini anlamaya çalışmak, buna yardımcı olacak kurallar geliştirmek hatta yapılmamış gözlem sonuçlarını tahmin etmek için kısaca teorik bir çerçeve ihtiyacı ortaya çıkmıştır. (Hanna ve Barbeau, 2002). İşte bu noktada devreye ispat kavramı girmektedir (Dede ve Karakuş, 2014).

Türk Dil Kurumu (TDK) ispatı, “Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt’ şeklinde tanımlamaktadır. Matematiksel ispat kavramına yönelik tanımlar incelendiğinde formal ve sosyokültürel olmak üzere iki kategoride tanımlandığı göze çarpmaktadır. Formal boyut, bir matematiksel bilginin doğrulanması için doğruluğu önceden kabul edilmiş tanım, önerme, aksiyom veya postulat gibi öncüller kullanmayı, sosyo kültürel boyut ise kullanılan işlem ve yöntemler ifade etmektedir.

Bell (1976), ispatı başlangıç noktası kabul edilmiş gerçekler veya ilkeler olan ve varış noktası ise sonuç olan birbiri ile bağlantılı ifadeler zinciri olarak tanımlar.

Balacheff (1998)’e göre ispat ise doğruluğu önceden kanıtlanmış savlar üzerine mantıksal adımlarla inşa edilmiş adımlar serisidir. Balacheff bu tanımla hem ispatlama sürecinde kullanılan öncüllere hem de bu öncüllerin hangi adım ve sırada kullanıldığına vurgu yapmaktadır (Uğurel vd., 2020).

Stylianides (2007) ise ispatı aşağıdaki özelliklere sahip matematiksel bir iddianın lehine veya aleyhine bağlantılı bir iddia dizisi olarak tanımlar.

● Sınıf topluluğu tarafından doğruluğu kabul edilen ifadeleri kullanır.

● Sınıf topluluğu tarafından geçerli olan veya onun kavramsal erişimi içinde bilinen akıl yürütme biçimlerini (tartışma modları) kullanır.

● Sınıf topluluğu tarafından ya da onun kavramsal erişimi dahilinde uygun ve bilinen ifade biçimleriyle yani argüman temsilinin modları iletilir.

Thurston (1994), ispatın yapısını ve formal boyutunu vurguladığı tanım-teorem-ispat modelini şu şekilde açıklamaktadır.

T (Tanım): Matematikçiler birkaç temel matematiksel yapıdan ve bu yapılar hakkında verilen bir aksiyom veya postulat koleksiyonundan yola çıkarlar.

T (Teorem): Formel matematiksel önermeler olarak ifade edilebilecek bu yapılar hakkında cevaplanması gereken çeşitli önemli sorular mevcuttur.

İ (İspat): Matematikçinin görevi ise, aksiyomlardan önermelere onların kabul veya reddine giden tümdengelimli bir yol aramaktır.

Thurston ortaya koyduğu bu model ile hem matematiğin yapısını hem de matematikçinin görevine ve ispatın formal yapısına vurgu yapmıştır.

İspatın formal boyutunun yanında sosyo kültürel boyutuna vurgu yapan Harel ve Sowder (2007), ispat şemasına dayandırdığı üç temel bileşenden, ispatın sosyo kültürel boyutuna vurgu yaptığı maddesinde, 'tespit etmeye karşı ikna etme' yani tespit etmeyi, kendi şüphelerini ortadan kaldırdığı, ikna etme ise başkalarının şüphelerini ortadan kaldırmak için kullandığı süreç olarak tanımlar.

Hersh (1993)'ün ispatın sosyo kültürel boyutuna vurgu yaptığı tanımında ispatı 'Kalifiye yargıçlar tarafından değerlendirilen ikna edici argüman' olarak tanımlayarak ispatın bireysel eylem olmaktan ziyade başkaları tarafından kabul görmesi gereken bir eylem olarak tanımlar. Buradan da anlaşılacağı üzere ispatlama süreci bireysel olmanın yanında sosyal bir süreç olarak değerlendirilmesi gerekmektedir (Uğurel vd., 2020). Bu anlamda doğruluğu gösterilen bir içerik, matematikçiler tarafından tanımlanırsa ispat olarak değerlendirilir (Dede, 2013).

Tüm bilim alanlarında bir içeriğin doğruluğunu ortaya koyma aşamasında kullandıkları ispatlama yöntemlerinde farklılıklar bulunmaktadır. İspat aşamasında kullanılan bu yöntemler tümdengelim ve tümevarım olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Kısaca tümevarım yöntemi deney ve gözlemler ile sonuca varma yani olaydan yasa çıkarma, tümdengelim ise genel bir önermeden özel bir önerme çıkarma işi olarak ifade edilebilir. Matematiğin aksiyomatik yapısı gereği başlangıç noktası olarak kabul edilen küme, 'tanımsız terim' ve 'aksiyomlardan' oluşur. Tanımsız terimlerin kabulünün ardından doğru olduğu varsayılan aksiyomlar ortaya konulur. Aksiyomlar ispatsız kabul edilen ifadelerdir. Tanım ve aksiyomlar dışında kalan her önerme ispat edilmelidir. Matematik, kabul edilen bu tanım ve aksiyomların üzerine bunları kullanarak yeni bilgiler elde etmek için akıl yürütme ve mantık kuralları çerçevesinde inşa edilmiş bir bilimdir (Aylar, 2014). Aylar (2014)'ın belirttiğine göre matematiğin bu aksiyomatik yapısından ötürü matematik Sarı ve diğerlerince (2007) ‘kanıtlama disiplini’ olarakta adlandırılır.

Matematik tarih içerisinde aksiyomatik sistem adını verdiğimiz mükemmel bir sisteme dönüşmüş ve bu sistem içinde matematik öğrenme süreci, ispat ve ispatlamanın da dahil olduğu birçok düşünme becerisini geliştirmektedir (Uğurel vd., 2020).

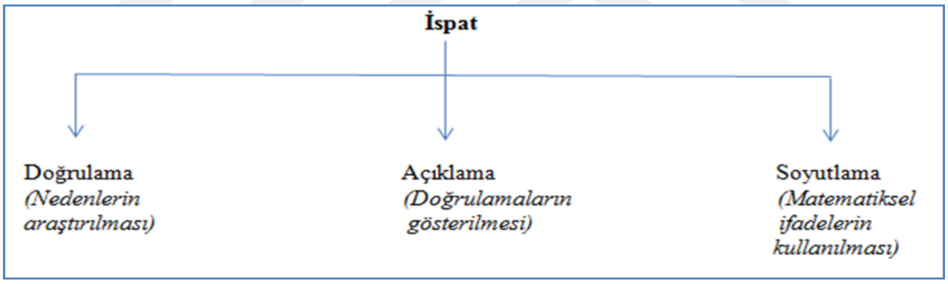
1.7.2.2. İspatın Sahip Olduğu Roller ve İşlevler

Bell (1976), ispatın üç matematiksel anlamı olduğunu ifade etmiştir.

1. Doğrulama

2. Açıklama

3. Sistematikleştirme



Şekil 1.6. İspatın Rolleri

Bunlardan ilki olan doğrulama bir önermenin doğruluğu ile ilgili gerekçelendirmeyi ifade eder. İyi bir ispatın önermenin neden doğru olduğuna dair bir açıklama sunması beklenir. Son olarak ise ana kavram ve teoremlerden türetilen sonuçların tümdengelimli bir aksiyon sistemi içerisinde düzenlenmesi gerekmektedir.

Hemmi (2010), ispatın fikirler sistemi olduğunu ve fikirleri iletmek için kullanıldığından entelektüel ve sembolik bir araç olarak görülebileceğini ifade etmiştir. İspatın çeşitli yönlerini ifade eden anlamı hakkında aşağıdaki fonksiyonlarını tanımlamıştır.

● Doğrulama/inanma (Bir ifadenin doğruluğunu ifade etme)

● Açıklama (Neden doğru olduğunu anlama)

● Sistemleştirme (Sonuçların tümdengelimli bir aksiyom sistemi içinde organizasyonu)

● İletişim (Matematiksel ifadelerin anlamı ve aktarılması)

● Estetik

● Entelektüel meydan okuma

● Aktarım (İspatların diğer problemlerin çözümünde yol gösterici olabilmesi)

Alanyazında ispatın işlevine dönük diğer bir araştırma Hanna (2000) tarafından yapılmıştır. Hanna (2000), bir ispatın doğrulanmasından ziyade neden doğru olduğunun anlaşılması ispatlanan teoremin anlamının anlaşılması ve daha fazla keşiflere yol açması bakımdan önemli olduğunu ifade eder. Hanna (2000), ispat ve işlevlerini sekiz madde ile ifade etmiştir.

● Doğrulama (Verification): Bir ifadenin doğru ve geçerli olduğunu çeşitli denemeler ile gösterilmesidir.

● Açıklama (Explanation): İddianın neden doğru olduğunun ve altında yatan gerçeklerin araştırılmasıdır.

● Sistematikleştirme (Systematisation): Sonuçların tümdengelimli bir aksiyomlar, ana kavramlar ve teoremler sistemi halinde düzenlenmesidir.

● Keşif (Discovery): İddianın ispatı yeni iddiaların keşif ve icadına zemin hazırlayabilmektedir.

● İletişim (Communucation): Matematiksel bilgilerin aktarılmasıdır.

● Deneysel bir teorinin inşası: Üzerinde çalışılabilecek yeni teorilerin ortaya konulmasıdır.

● İnceleme (Exploration): Bir tanımın anlamının veya bir varsayımın derinlemesine araştırılmasıdır.

● Birleştirme (Incorporation): İyi bilinen bir gerçeği yeni bir çerçeveye dahil etmek ve böylece ona yeni bir perspektiften bakabilmektir.

İspatların yukarıda örnekleri verilen fonksiyonları ispatı yapan veya okuyan kişiye göre değişiklik gösterebilmektedir. Aşağıda bazı ispat fonksiyonlarının detaylı açıklaması verilmiştir.

Tablo 1.2. İspatın işlevleri (Dede ve Karakuş, 2014; Pala, 2020)

Doğrulama	**Matematikçilerin en iyi bildiği ispat fonksiyonlarından olan doğrulama bir iddianın doğruluğunun gösterilmesi olarak ifade edilebilir. Bir iddia doğruluğu gösterilmediği sürece teorem olarak ifade edilemez. Burada doğrulama ile ispat arasındaki ilişkiye de dikkat çekmek gerekir. Her ispat bir doğrulama olmakla beraber, her doğrulama bir ispat olarak değerlendirilemez.**
Açıklama	**İspatın amacı bir iddianın doğru olmasından çok niçin doğru olduğunu açıklamaya yönelik olmalıdır. Doğrulama ile bir iddianın geçerliliği sağlanabilse de neden doğru olduğu hakkında güveni sağlamak için açıklama fonksiyonu önem kazanmaktadır.**
Sistematikleştirme	**İspatın bu fonksiyonuna Euclid'in Elements kitabı örnek olarak verilebilir. Euclid geometrisi, yeteri kadar oluşturulan tanım, aksiyom ve postulat üzerine inşa edilmiştir. Yani sistematikleştirme, sonuçların tanım, teorem, postulat gibi kavramlar ile tümdengelimsel sistem içinde düzenlenmesidir.**
Keşif	**Bir iddianın ispatı yeni keşiflere zemin hazırlayabilir. Örneğin Euclid'in beşinci postulatında düzlem yerine eğrisel yüzeylerde tanımlanan şekillerin geometrisini tanımlayan teoremler ile Euclid dışı gibi yeni geometriler ortaya çıkmıştır.**
İletişim	**İspatın iletişim fonksiyonu ispatın insanlar tarafından okunmasını ve yazılmasını belirtmektedir. Bu fonksiyona göre ispatlar, matematiksel sonuçların insanlar arasında iletilmesine bir aracıdır. Üstelik ispatlar, yeni bir yaklaşıma fırsat verip böylece başka matematikçilerin farklı teoremleri geliştirmeleri için olanak sağlar.**
Bir teorinin inşası	**İspat sürecinde yapılan gözlem ve denemeler sayesinde yeni teorilerin ortaya çıkmasına fırsat verilebilir.**
İnceleme	**İspat sayesinde bir kavram veya iddianın anlamı derinemesine açıklanabilir**
Birleştirme	**İspatlar sayesinde bilinen gerçekler farklı bir çerçeveden veya perspektiften incelenebilir.**

1.7.2.3. İspatlama Sürecine Yönelik Kavramsal Çerçeveler

Öğrencilerin ispatlama becerisini geliştirebilmek bu süreçte yaşadıkları güçlükleri ortaya çıkarabilmek için öncelikle ispatı oluşturma sürecinde nasıl düşündüklerini ve davrandıklarını, bu süreçte neler olduğunu belirlemek önemlidir. Bu amaçla öğrencilerin ispatlama sürecinde düşüncelerini, davranışlarını ve ispatlama biçimlerini tanımlamaya yönelik çerçeveler ortaya çıkmıştır. Bu bölümde bu çerçevelerden söz edilecektir.

İspat Süreci

Bir ispatın amacı, bilginin doğruluğunu ortaya koymanın yanında neden doğru olduğunun ve bunun altında yatan sebepleri ortaya çıkarmaktır (Hanna, 2000). Griffiths (2000), ispat sürecini bir dizi aksiyomla başlayıp, mantıksal adımlarla sonuca giden akıl yürütme çizgisi olarak ifade eder. Doğa bilimcileri gerçeği deney ve gözlemle doğrularken matematikçiler, Yunanlılardan bu yana ispatı kullanmıştır. Almeida (2003) ispatı, (i) bir iddiayı doğrulamak; (ii) diğerlerini ikna etmek; (iii) iddiayı keşfetmek ve (iv) sonuçları bir tümdengelim sistemine sistematize etmek olarak ifade eder. Ayrıca matematiği anlama sürecinin sırasıyla; sezgi, deneme-yanılma, varsayım ve ispat aşamalarından geçtiğini vurgular. İspatı bir ürün olarak değerlendirdiğimizde bunun bir süreç sonunda ortaya çıktığı söylenebilir. Bu bağlamda ispat sürecinin aşamalarına odaklanılması gerektiği fikri öne çıkmaktadır. Weber (2005), kanıtlamayı mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutlarını kapsayan karmaşık bir matematiksel aktivite olarak ifade etmiştir. Bu süreçte ispat yapan kişinin tanımlar ve aksiyomlar gibi önceki bilgilerini kullanarak varsayımlar oluşturup çıkarımlar yapması beklenmektedir (Pala, 2020). Öğrencilerin matematiğin soyut yapısını anlamalarında için ispat kavramını, ispatın amacını ve ispat süreçlerini bilmeleri önem arz etmektedir (Sarı, Uzun ve Bülbül, 2013). Cheng ve Lin (2006), matematiksel bir argümantasyon oluşturmayı elde edilen bilgilerden, çıkarım kuralları ile yeni bir bilgi elde etme olarak ifade etmektedir. Geçerli bir ispat oluşturma sürecinin verilen koşullarda gerekli tüm bilgileri bilmeleri ve gerekli bilgileri öncül olarak kullanarak tümdengelimsel adımlara göre düzenlemeleri gerektiğini ifade eder. Bell (1976), ispat sürecinin üç farklı aşamasına dikkat çeker. Bunlardan ilki iddianın doğruluğu ile ilgili gerekçelendirme, ikincisi iddianın neden doğru olduğunun açıklanması üçüncüsü ise sonuçların tümdengelimsel bir sistem içinde düzenlenmesidir. Baki (2008)'e göre ispat süreci; ilk aşama bir iddianın doğruluğunun araştırılması, ikinci aşama iddianın niçin doğru olduğunun araştırılması son aşama ise matematiksel dil kullanılarak genelleme ve soyutlamadır. Ancak açıklama ve genelleme aşamalarının tamamlanmaması ispatın geçerliliğini etkilememekle birlikte bu aşamalar ispatın estetik yönüyle ilişkilendirilir (Akt: Güler, 2013).

Edwards (1997), resmi bir ispatın sonucuna ulaşma aşamasında öğrencilerin ve matematikçilerin dahil olduğu süreçleri beş adımda kategorilendirmiştir.

● Farkına varma ve/veya inşa etme: Bu süreç matematiksel durumlardaki değişmezliklerin aranmasını ve tanınmasını içermelidir.

● Modelin tanımlanması: Düzenlilik veya kuralı matematiksel olarak gösterme veya resim/diyagram gibi temsil biçimleri ile ifade etmektir.

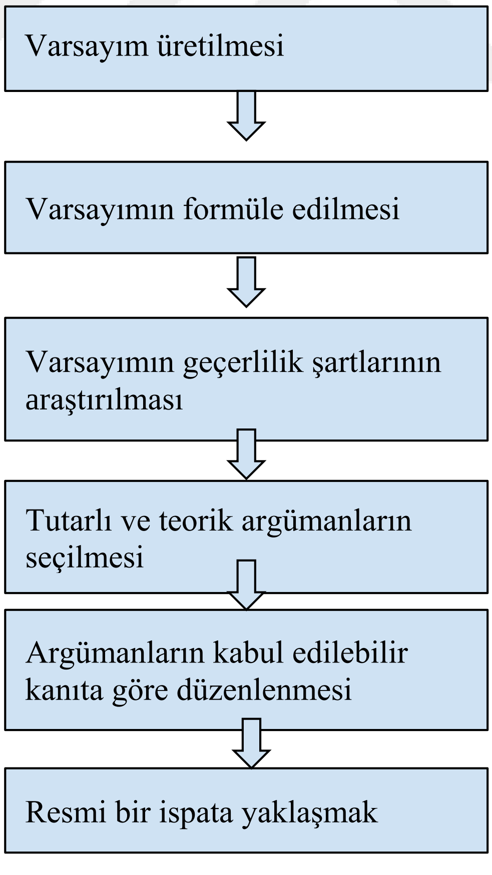
● Varsayımda bulunma: Bir iddianın doğru olduğuna dair tahminde bulunmaktır.

● Tümevarımsal akıl yürütme: Modelin geçerli olup olmadığını görmek için belirli durumları kontrol etme.

● Tümdengelimli akıl yürütme: Varsayımın neden geçerli olması gerektiğinin gösterilmesidir.

Bu süreci, ispatı yapan kişilerin önsezilerini takip etmek, fikirlerini test etmek ve varsayımlara dönüşebilecek genellemeleri formüle etmek için kullandıklarını belirtir.

Boero (1999) ise ispat oluşturma süreçlerini altı aşamada ifade etmiştir. Bu aşamaların doğrusal olmadığını herhangi bir aşamada fark edilen hatanın problemin tekrar keşfini ve yeni bir ifade ile güçlendirilmesini gerektirebileceğini ifade etmiştir. Boero (1999)'nun tanımladığı bu altı aşama;



Şekil 1.7. Boero (1999) İspat Süreçleri

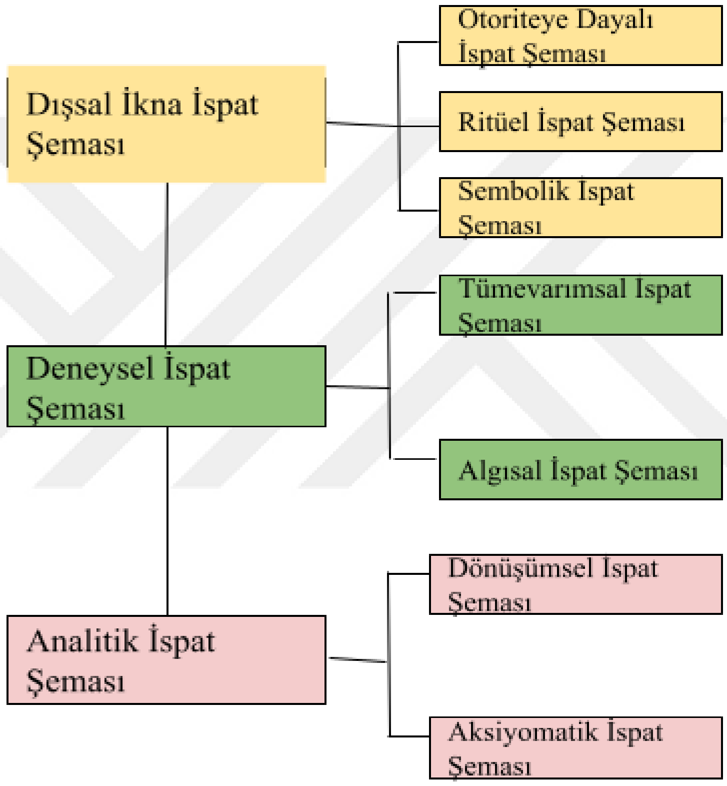
Boero (1999)'a göre bir ispatın oluşturulması varsayım oluşturma ile başlar. İkinci adımda varsayımın formüle edilmesi beklenir. Üçüncü adım varsayımın içeriğinin ve geçerlilik şartlarının araştırılması varsayımın doğruluğunun test edildiği, uygun argümanların ve bunlar arasında olası bağlantıların tasavvur edildiği aşamadır. Bu aşama genellikle matematikçilerin çalışmalarının özel tarafıdır. Dördüncü aşama seçilen tutarlı ve teorik argümanların tümdengelimsel zincirde sunulmasıdır. Beşinci aşama yayınlanmak üzere bir ispat metninin oluştuğu aşamadır. Bir önceki aşamadaki zincirlenmiş argümanlar matematiksel standartlarda kabul edilebilir bir kanıta göre düzenlenir. Son aşama ise formal ispat yapısında sunulur.

Uzman bir matematikçi için ispatın iki temel yönü bulunmaktadır. Bunlardan ilki kişisel yönü olan tümdengelimsel zincirde fikirlerin mantıksal yapısını göstermektir. İkincisi ise ispatın sosyal yönüdür ki bu kısım diğer matematikçilerin düşünceleri ve fikirlerini içermektedir. Fakat okul matematiğinde ispatın oluşma aşamasında öğrencilerin katılımlarına fırsat verilmemesi, ispatın bitiş ürünü olarak sunulması öğrencilerin ispatı fonksiyonel bulmamasına neden olmaktadır. Dolayısıyla ispat öğretimi doğrudan ispat ürününün sunulması olarak değerlendirilmemeli, ispatın sürecine vurgu yapılmalıdır (Polat, 2018). İspatın öğretilmesi ve öğrenilmesi doğru bir sonucun sunulması ile sınırlı olmaması gerekmektedir. Matematikçiler, ispatın oluşumunda yalnızca tümdengelimli akıl yürütmenin değil keşfetmenin de baskın rol oynadığını yani ispatın prosedürel yönüne de vurgu yapılması gerektiğini belirtir (Reiss, Heinze, Renkl and Gross, 2008). Weber ve Alcock (2004), ispat yaparken uzman matematikçilerin ve öğrencilerin ortak amaçlarının ispat için mantıklı geçerli argüman üretmek olduğunu ifade eder. Ama ispatı oluştururken kullandıkları süreçler büyük ölçüde değişiklik gösterebilmektedir. Bu tip farklılıkların daha iyi tahlil edilebilmesi için sonuç odaklı değil ispat süreçlerini incelemeye yönelik süreç odaklı bakış açısı benimsenmelidir.

Öğrencilerin ispat konusunda yaşadığı zorlukları, zorlukların kökenini, ispata yönelik kavram ve tutumlarını geliştirmek için ihtiyaç duyulan öğretim müdahalelerini tahmin edebilmek için ispata yönelik kapsamlı bakış açısına ihtiyaç vardır (Harel ve Sowder, 2007). Bireylerin ispat süreçlerinin analizi ile dikkat edilmesi gereken faktörler detaylandırılabilir. Bu bağlamda bireylerin ispat oluşturma süreçlerin hem bilişsel hem de duyuşsal yönden inceleyecek çok boyutlu araştırmalar önem kazanmaktadır (Pala, 2020).

1.7.2.4. İspatın Sınıflamasına İlişkin Teorik Yaklaşımlar

Bir kişinin veya topluluğun kanıt kavramını açıklayabilmek için kanıt şeması terimi kullanılmaktadır. Kanıt şeması bir kişinin herhangi bir konuda kendini veya başkalarını ikna etmek için kullandığı argümanlardır (Sarı, Altun ve Aşkar, 2007). Alanyazın incelendiğinde öğrencilerin ispat şemalarını inceleyen birçok çalışma olduğu görülmektedir. Bunlardan bazıları ayrıntılı olarak aşağıda incelenmiştir. Harel ve Sowder (1998)'e göre öğrencilerin ispat şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana kategoriye ayrılmaktadır.



Şekil 1.8. Harel Sowder İspat Şemaları

Dışsal ikna şemaları sınıfında ispat üç kategoriye ayrılmaktadır.

● Otoriteye Dayalı İspat Şeması: Kişi öğretmen, kitap veya herhangi bir otoriteye dayalı olarak ikna olur.

● Ritüel İspat Şeması: Bireyin ikna olması argümanın görünümüne bağlıdır. Örneğin, bireyin geometrideki ispatların iki sütunlu bir formata sahip olması gerektiğini düşünmesidir.

● Sembolik İspat Şeması: Bireyin anlamını bilmeden sembolik manipülasyonlar ile ikna olmasıdır (Harel and Sowder, 2007).

Deneysel İspat şemaları iki kategoriye ayrılmaktadır.

● Tümevarımsal İspat Şeması: Bireyler önermenin doğruluğunu göstermek için örnekleri yeterli bulur. Özel durumlar üzerinden genel çıkarımlara ulaşılır (Pala,2020; Sarı vd.,2007).

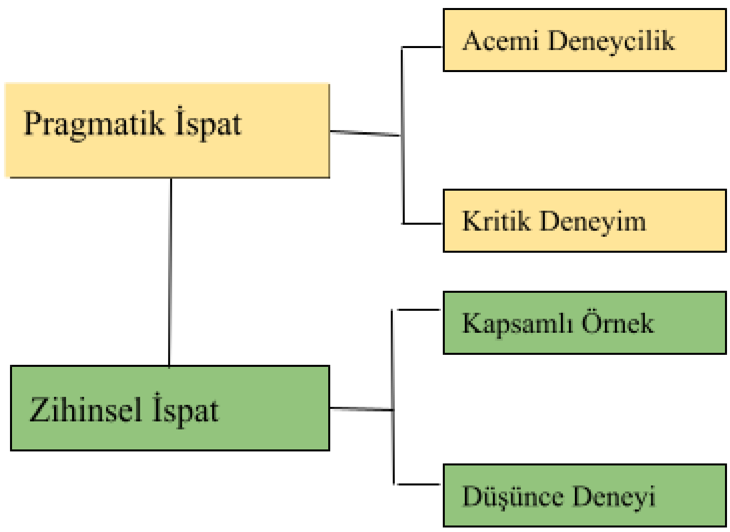
● Algısal Kanıt Şeması: Yeterli inceleme ve sorgulamadan geçmemiş, tümdengelim sağlanmamış çıkarımları ikna edici olduğunu düşünür (Pala,2020; Sarı vd.,2007).

Analitik ispat şeması ise ikiye ayrılmaktadır.

● Dönüşümsel İspat Şeması: Dönüşümsel ispat şemasının genellik, mantıksal çıkarım ve operasyonel düşünce olmak üzere üç temel özelliği vardır. Genellik özelliği, bir bireyin amacı sadece kendisini ikna etmek için değil herkes için geçerli bir argüman üretmektir. Operasyonel düşünce bireyin kanıtlama sürecinde hedefler ve alt hedefler doğrultusunda kendi sonuçlarını tahmin etmeye çalışmasıdır. Son olarak mantıksal çıkarım bireyin gerekçelendirmesini mantıksal çıkarım kurallarına dayandırmasıdır (Harel and Sowder, 2007).

● Aksiyomatik İspat Şeması: Dönüşümsel ispat şemasını tanımlayan üç özelliği kapsamakla beraber ispat sürecinin aksiyom, tanımsız terim gibi kabul edilmiş ilkeler ile başlaması gerekir (Harel and Sowder, 2007).

İlgili alanyazın incelendiğinde sık karşılaşılan diğer bir şema ise Balacheff (1988) tarafından ortaya konulmuştur. Balacheff (1988) dört tür ispat yaklaşımı tanımlar;



Şekil 1.9. Balacheff (1988) İspat Şemaları

Acemi Deneycilik: Önermenin rastgele birkaç örnek ile doğrulandıktan sonra geçerli kabul edilmesidir.

Kritik Deneyim: Önermenin belirli bir durumda rastgele olmayan örnekler ile doğrulandıktan sonra kabul edilmesidir (Coe and Ruthven, 1994). Örneğin, bireyin "Çokgenin köşegen sayısı n(n-3) /2" varsayımını ispatlarken varsayımın her durumda doğru olup olmadığını esas alarak yirmigen ile kontrol etmesidir (Miyazaki, 2000).

Kapsamlı Örnek: Bir iddianın doğruluğunun nedenlerinin prototip bir durumda genel argümanlar oluşturularak açıkça ifade edildiği durumdur. Matematiğin yapısal özellikleri yani kavramsal ilişkiler, tümdengelimsel çıkarımlar kullanılarak önerme doğrulanır. Özel örneklere dayanarak genellemeler yapılmaz (Coe and Ruthven, 1994; Pala, 2020).

Düşünce Deneyi: İspatın işlemleri ve temel ilişkilerinin, kullanılması ile önermenin ispatlanmasıdır (Coe and Ruthven, 1994). Karmaşık bilişsel süreçler, çoklu temsil ve sembolik dil kullanılır (Pala, 2020). Bireyin "Çokgenin köşegen sayısı n(n-3) /2" varsayımını ispatlarken her bir köşeden çizilen köşegen sayısının neden (n-3) ve n(n-3)'ün 2'ye bölünmesinin nedenini açıklamasıdır (Miyazaki, 2000).

Balacheff için bu farklı seviyeler aynı zamanda öğrenme sürecindeki aşamaları temsil etmektedir. Pragmatik ispatlar kavramsal ilişkiler içermeyen fiili eyleme ve gösterimlere veya formüle dayandırılmaktadır. Daha soyut bir ispat kavramına yani eylemler dünyasından ilişkiler ve işlemler dünyasına geçiş ise zihinsel ispatlardır. Zihinsel ispat basit örneklemenin ötesinde sistematik ve kavramsal ilişkilerin kullanıldığı girişimlerdir (Coe and Ruthven, 1994; Pala, 2020). Miyazaki (2000), Balacheff ispat seviyeleri için öğrencilerin mevcut bir seviyeden daha ileri bir seviyeye geçebileceklerini veya ulaşılması istenilen bazı seviyeler tasarlamanın mümkün olduğunu ifade etmiştir.

1.7.2.5. İspatın Önemi ve İlköğretim Matematik Öğretim Programları ve Uluslararası Standartlardaki Yeri

Schoenfeld (2009), 'Problem çözme matematiğin kalbi ise ispat ruhudur' diyerek keşif ve doğrulamanın ayrılmazlığını matematiğin can damarı olarak ifade eder. Mudaly (2013)'ye göre ispatı değerli yapan şeyin bize 'kesinlikle emin olmanın' bir yolunu sağlamış olmasıdır. Yani ispat kesindir, tartışılmazdır ve nesneldir. İyi bir ispatın iddianın neden doğru olduğuna açıklık getirmesi beklenir. Bu durum her ne kadar ispatın geçerliliğini etkilemese de ispatın estetiği ve zarifliği açısından olması gereken bir durumdur (Bell, 1976). Bu sebeple ispat sadece bilgileri anlamayı arttırmakla kalmaz aynı zamanda yeni bilgilerin keşfine fırsat vermektedir. Bu yönüyle ispatın, matematik çatısı altındaki bilginin gelişmesinde önemli katkısı vardır. İspat sayesinde yeni bilgiler üretilir, doğrulanır ve üretilen bilgiler organize edilir (Herbst, 2002). Kısaca ispat matematiği ilerletmek ve geliştirmek için önemli bir araçtır. Matematiksel bilginin yapısını, doğasını, geliştirilme yollarını algılamada yani matematik yapma ve anlamada kilit role sahiptir (Cansız Aktaş ve Aktaş, 2013). İspat aynı zamanda okul matematiğinde de önemli bir yer tutar (Herbst, 2002). Matematik yapmanın önemli bir bileşeni olarak kabul edilen ispatın amacının disiplinde okul matematiğine kıyasla genellikle farklı olduğu düşünülür. Birçok bilim adamı, disiplindeki ispatın önemli bir amacının matematiksel ifadeleri doğrulamak veya başkalarını ikna etmek olmasına rağmen, okul matematiğinde ispatın önemli bir amacının açıklamak, iç görü sağlamak ve anlama ve anlamlı öğrenmeyi ilerletmek olduğunu iddia etmektedir (Dolev and Even, 2015). Okul matematiği bağlamında ispatın, öğrencilerin sınıf içinde ve dışında mantıksal düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmek, ders kitabı veya öğretmen gibi dış otoritelere sorgulamadan, koşulsuz şartsız güvenmekten alıkoyma gibi amaçlara hizmet ettiği söylenebilir (Dickerson ve Doerr, 2014). Öğrencilerin problem çözme becerilerinin gelişmesi için ispat gerekli bir araç olarak görülmektedir. Çünkü eski Yunan medeniyetinden miras kalan insan uygarlığına armağan olarak görülen ispat (Harel ve Sowder, 2007) öğrencilerin matematiksel kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri nedenleri ile birlikte öğrenmelerine fırsat tanımaktadır (Güler, 2013). İspat, öğrencilerin kavramları anlamalarına ve varılan sonuçlara ikna olmalarına yardımcı olur (Tucker, 1999).

Tall (1998), matematiksel ispat sürecinin iki farklı anlamından bahsetmektedir. Bunlardan ilki varsayımın bir dizi mantıksal adım ile istenilen sonuca ulaştığını göstermek, ikincisi ise bu süreçte varsayımın altında yatan nedenleri anlamlandırmaktır. İspatı bir ifadenin doğruluğunu göstermenin yanında neden doğru olduğunun da gösterilmesi olarak düşünüldüğünde matematiksel ispat bir ifadenin neden doğru olduğunun mantıklı açıklaması olarak ifade edilebilir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Çünkü bir kavramın veya iddianın "nasıl" şekillendiğini bilmek aynı zamanda bunu anlamayı gerekli kılmaktadır (Pala, 2020). Keşfetme, araştırma ve neden, niçin sorularına yanıt arama bireylerin doğasında bulunmaktadır. İnsanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yeteneği uygun stratejiler ile geliştirilmeli çünkü ispat, öğrencilerin düşünmelerini desteklemekte, kavramlar arasında bağlantı kurmalarına, ezberlemeyen, kavramların altında nedenleri sorgulayan, yaratıcı düşünebilen ve karşılaştığı problemlere farklı çözümler üretebilme becerisi kazandırmaktadır (Altıparmak ve Öziş, 2005; Tall, 1998). Knuth (2002), ispatın matematiğin ayrılmaz bir parçası olduğunu, matematiksel bilginin anlaşılması ve iletişiminin gerçekleşmesinde temel bir bileşen olduğunu ifade etmiştir. Bu sebeple öğrencilerin ispat deneyimlerini sadece geometri ile sınırlandırmamak aksine her düzeyde müfredata yerleştirilmesi gerektiğini savunmaktadır.

Son yıllarda matematik eğitiminde ispatın rolüne ve doğasına olan ilginin artmasıyla ispatın tüm sınıf seviyelerindeki öğrencilerin matematik eğitiminin bir parçası olması gerektiği savunulmaktadır (Schoenfeld, 2009). Bu ilginin güncel matematik eğitim reformlarına da yansıdığı görülmektedir (Knuth and Sutherland, 2004). Okul matematiği standartlarında (NCTM), son on yıllık zamanda öğrencilerin matematiksel düşünme, matematiksel argüman üretme, akıl yürütme ve ispat fikirleri ile ilköğretimin erken kademelerinden itibaren tanışmalarının önemi vurgulanmaktadır. Amerika Birleşik Devletleri'nde kabul gören matematik standartlarında (The Common Core State Standards for Mathematics (CCSSI), 2010) tüm sınıf seviyelerinde 1) soyut düşünme 2) uygulanabilir matematiksel argümanlar üretme 3) diğer bireylerin argümanlarını kritik edebilme 4) açıklığa dikkat etme gibi ispat etkinliklerini standart kabul etmiştir (Uğurel vd., 2020).

NCTM (2000), 'Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar' kitabında anaokulundan 12. sınıfa kadar her öğrencinin akıl yürütme ve kanıtlama sürecinde yapabilmesi gereken;

● Akıl yürütme ve ispatın temel yönlerini kabul etme

● Matematiksel varsayımlar oluşturup, araştırma

● Matematiksel argümanlar ve ispatlar geliştirip değerlendirebilme

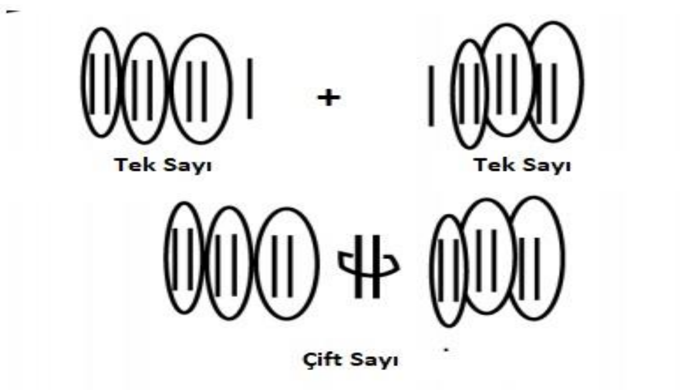
● Çeşitli akıl yürütme türleri ve ispat yöntemleri arasında seçim yapıp kullanabilme gibi beceriler yer almaktadır.

Farklı ülkelerde yapılan eğitim reformları kapsamında da ispatların önemi vurgulanmaktadır. 2009 yılında İsrail Eğitim Bakanlığının uygulamaya koyduğu yeni ortaokul müfredatında tüm öğrenciler için problem çözme, düşünme ve akıl yürütme, öğrencilerin hem cebir hem de geometride tahmin etme, açıklama, doğrulama ve ispatlama becerilerini geliştirmenin önemi belirtilmiştir (Dolev and Even, 2015). Ülkemizde 2005 yılında yapılan eğitim reformu kapsamında matematik amacının genel amaçları içerisinde '*Mantıksal tümevarım ve tümden gelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir.' ve 'Matematiksel* *problemleri çözme süreci içinde kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir'* (s.9) ifadeleri ile akıl yürütme ve ispatın altı çizilmiştir (MEB, 2005). 2018 yılı itibari ile uygulamaya konulan güncel öğretim programı incelendiğinde *'Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir.'* (S. 9) ifadelerinde ispat ile ilişkili olduğu kabul edilen akıl yürütmeye vurgu yapıldığı görülmektedir. Matematik eğitiminde artan bir ilgi olsa da araştırma sonuçlarına bakıldığında öğrencilerin matematiksel ispatları anlama ve oluşturmadaki düşük seviyeleri dikkat çekmektedir (Recio ve Godino, 2001). Bu sebeple müfredatta, ders kitaplarında, öğretimde mevcut durumun iyileştirmeye ihtiyaç duyduğu açıktır (Harel and Sowder, 2007).

İlköğretim müfredatında ispat konusu incelendiğinde yapılan çalışmalar öğrencilerin erken yaşlardan itibaren akıl yürütme becerisini kullanarak bir ifadenin doğru veya yanlışlığını kanıtlayacak uygun argüman oluşturma becerilerinin sınıf ortamlarında geliştirilebileceğini kanıtlamıştır (Uğurel, 2020). Ball ve Bass (2003) akıl yürütmenin matematiksel anlamanın ve matematiği kullanmanın temeli olduğunu savunmaktadır. Çünkü matematiksel akıl yürütme unutulmuş bilgiyi tekrar yapılandırabilme becerisi kazandırmaktadır. Örneğin kesirlerde bölme algoritmasını unutan bir öğrenci bölme ve kesirlerin anlamını kullanabilirse, unuttuğu bilgiyi yeniden oluşturabilmektedir.

Ball ve Bass (2003) akıl yürütmeyi iki temele dayandırmaktadır. Bunlardan ilki belirli bir bağlam ve topluluk içinde kabul edilebilir kamu bilgilerinin bütünü, diğeri ise matematiksel dil (semboller, terimler ve diğer temsiller) ve iddiaları formüle etmede kullanılan söz dizim kurallarıdır. Akıl yürütmenin dayandığı ilk temel olan kamusal bilgiler bütünü ispat etkinliklerinde başlangıç noktası olarak kabul edilen ve kanıtlanacak ifadeyi kanıtlama sırasında kullanılacak olan bilgilerdir. Bu kamusal bilgiler bir matematikçi için aksiyom ve postulat olabilirken bir öğrenci için farklılaşabilir (Uğurel, 2020).

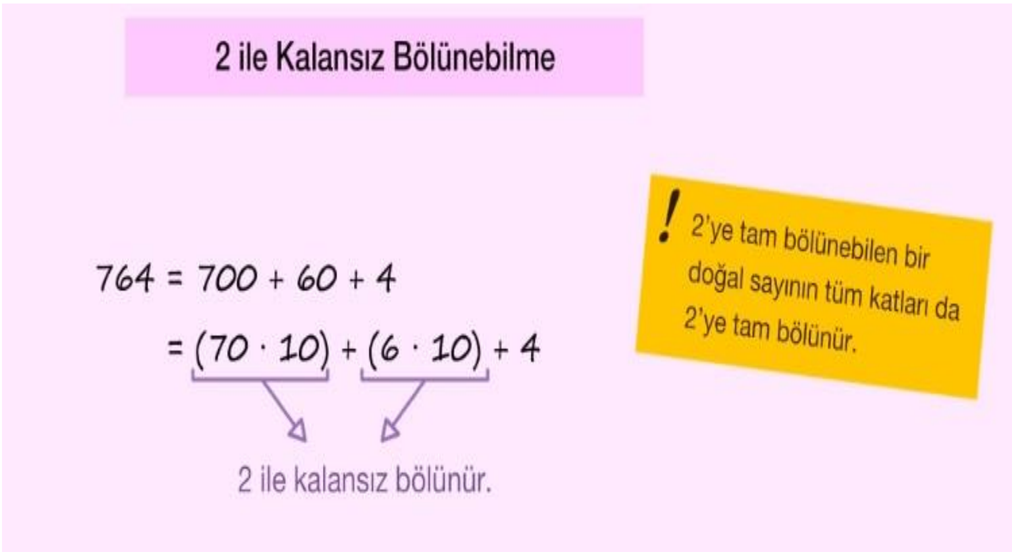
Ball, Hoyles, Jahnke, Movshovitz-Hadar (2002), 3. sınıf öğrencisinin 'iki tek sayının toplamı çift sayıdır' önermesi için sunduğu argüman örneği verilmiştir.



Şekil 1.10. 'İki Tek Sayının Toplamı Çift Sayıdır' Önermesi İçin Argüman Örneği

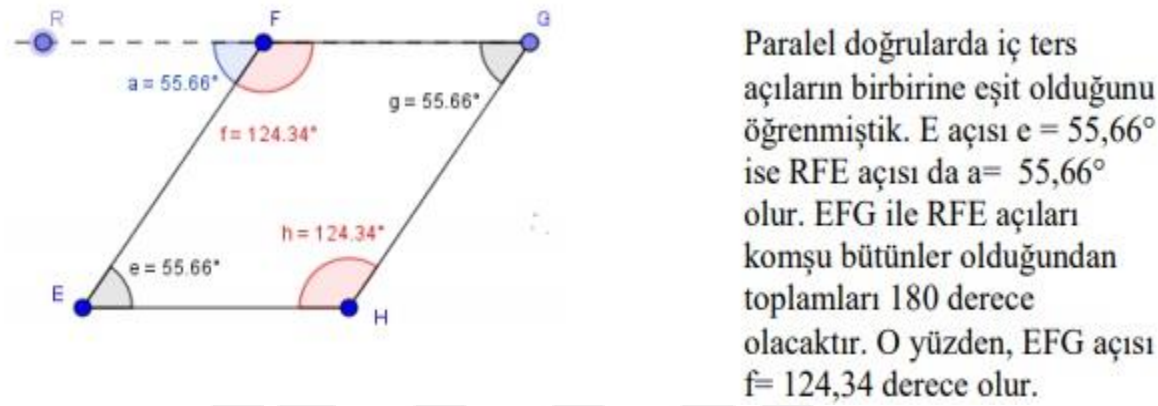
İlköğretim düzeyi ispat temsili (Ball, Hoyles, Jahnke, Movshovitz-Hadar, 2002 s.910)

Yukarıdaki örnek resimde sunulan argüman belirli sayılar kullanılmasına rağmen genellenebilir bir düşüncenin ifade edilmesini sağladığı için örnek ile ispat iç içe geçmiş haldedir (Uğurel, 2020). Harel (2001), öğrencilerin ispat yaparken kullandığı örnekleri ikiye ayırır. Bunlardan ilki öğrencilerin rastgele seçtikleri örnekler ile bir genellemeye varmaya çalışması ikincisi ise dedüktif düşünmeye varan genellenebilir bir süreç başlatmasıdır. Genellenebilir örnek ispatı bünyesinde barındıran örnek olarak tanımlanabilir veya örneği mantıksal açıklama için kullanma olarak da ifade edilebilir. Genellenebilir örnek duruma özel herhangi bir şey içermediğinden bu tip örneklerde ispat kavramı öne çıkmaktadır (Şimşek ve Üstün, 2019). Aşağıda Millî Eğitim Bakanlığı Eba konu anlatım videolarından bir kesit sunulmuştur (Millî Eğitim Bakanlığı Eğitim Bilişim Ağı [EBA], 2021)



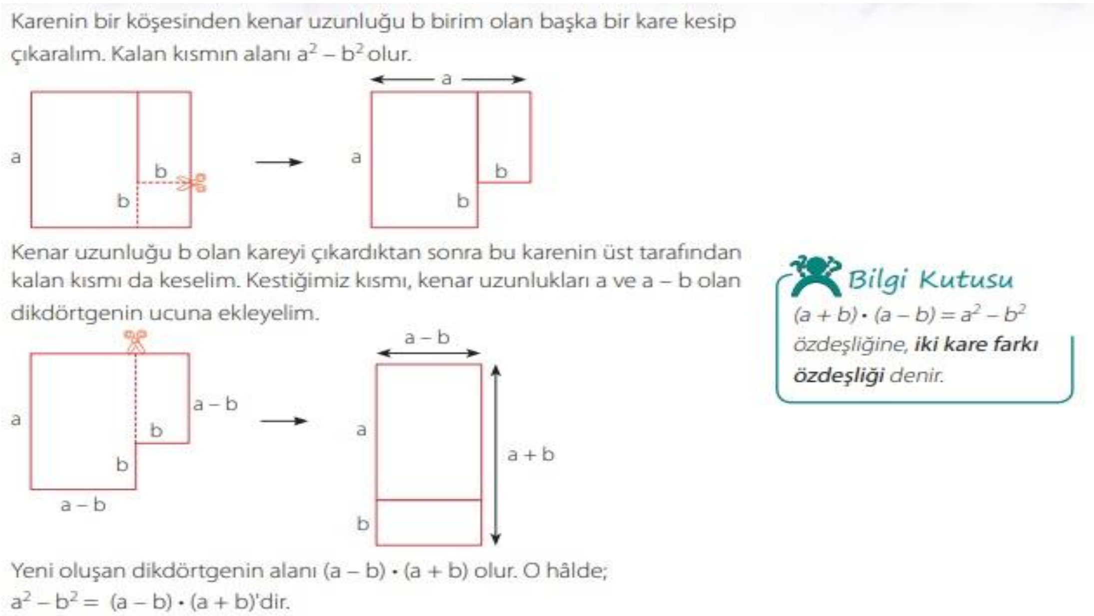
Şekil 1.11. Genellenebilir Örnek Temsili 1

Millî Eğitim Bakanlığı Eğitim Bilişim Ağı ders anlatım videolarında bir sayının 2 ile tam bölünebilmesi için son basamağının çift olma durumu açıklanmaktadır. Yukarıda verilen örnek genellenebilir örnek olarak kabul edilebilir (Uğurel, 2020). Benzer şekilde Şimşek ve Üstün (2019) 7. sınıf öğrencilerin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerini incelemeye yönelik yaptıkları çalışmada genellenebilir örneğe uygun olarak vermiş oldukları argüman sunulmuştur.



Şekil 1.12. Genellenebilir Örnek Temsili 2 (Şimşek ve Üstün, 2019 s.216)

İspat olarak diyagram kullanımının önemi de vurgulanmaktadır (Uğurel, 2020). Millî Eğitim Bakanlığı 8. sınıf ders kitabında bulunan iki kare farkı özdeşliğini kavramaya yönelik gösterim temelli bir görsel ispat örneği verilmiştir (Serfiçeli ve Atmaz 2021 s.129).



Şekil 1.13. Görsel İspat Temsili

Sonuç olarak güncel eğitim reformlarının önerileri doğrultusunda ispat kavramı sadece lise Öklid geometrisi ile sınırlı kalmamalı, öğrencilerin ispat ve akıl yürütme konusunda becerilerini geliştirebilmek için ilköğretimin erken kademelerinden itibaren fırsatlar sunmak gerekmektedir (Uğurel, 2020).

1.8. Teorik Çerçeve

Çalışmanın bu bölümünde teorik çerçeve olarak benimsen Boero (1999)'un ortaya koymuş olduğu ispat süreci aşamaları ve bu çalışmadan uyarlanan öğrencilerin ispat sürecini ölçmeye yönelik geliştirilen Heinze ve Reiss (2002)'in ispat süreci aşamaları detaylandırılacaktır.

Tarihçiler genel olarak modern görüş ile yakından ilişkili bir formdaki ispat kavramının Yunanlılar ile başladığı konusunda hemfikirdirler. Bunun en eski ve önemli örneği Öklid'in Elementler adlı eseridir. Yüzyıllar boyunca Öklid'in Elementler kitabı, matematiksel ifadelerin doğruluğunu belirlemek amacıyla temel argümantasyon modeli olarak kullanılmıştır. Öklid'in ispata temel teşkil eden eseri incelendiğinde bir dizi varsayım ve aksiyomu ifade etmek için kullanılan yirmi üç tanımdan oluşan bir koleksiyon ile başladığı görülmektedir. Önermeler daha sonra tümdengelimsel akıl yürütme süreci ile tanımlardan, varsayımlardan ve aksiyomlardan türetilir (Boero vd., 2012). Bir ispatın amacı, bilginin doğruluğunu ortaya koymanın yanında neden doğru olduğunun ve bunun altında yatan sebepleri ortaya çıkarmaktır (Hanna, 2000). İspatı bir ürün olarak değerlendirdiğimizde bunun bir süreç sonunda ortaya çıktığı söylenebilir. Bu bağlamda ispat sürecinin aşamalarına odaklanılması gerektiği fikri öne çıkmaktadır. Öğrencilerin matematiğin soyut yapısını anlamalarında için ispat kavramını, ispatın amacını ve ispat süreçlerini bilmeleri önem arz etmektedir (Sarı, Uzun ve Bülbül, 2013). Bu süreçte ispat yapan kişinin tanımlar ve aksiyomlar gibi önceki bilgilerini kullanarak varsayımlar oluşturup çıkarımlar yapması beklenmektedir (Pala, 2020). Almeida (2003), matematiği anlama sürecinin sırasıyla; sezgi, deneme-yanılma, varsayım ve ispat aşamalarından geçtiğini vurgulamaktadır.

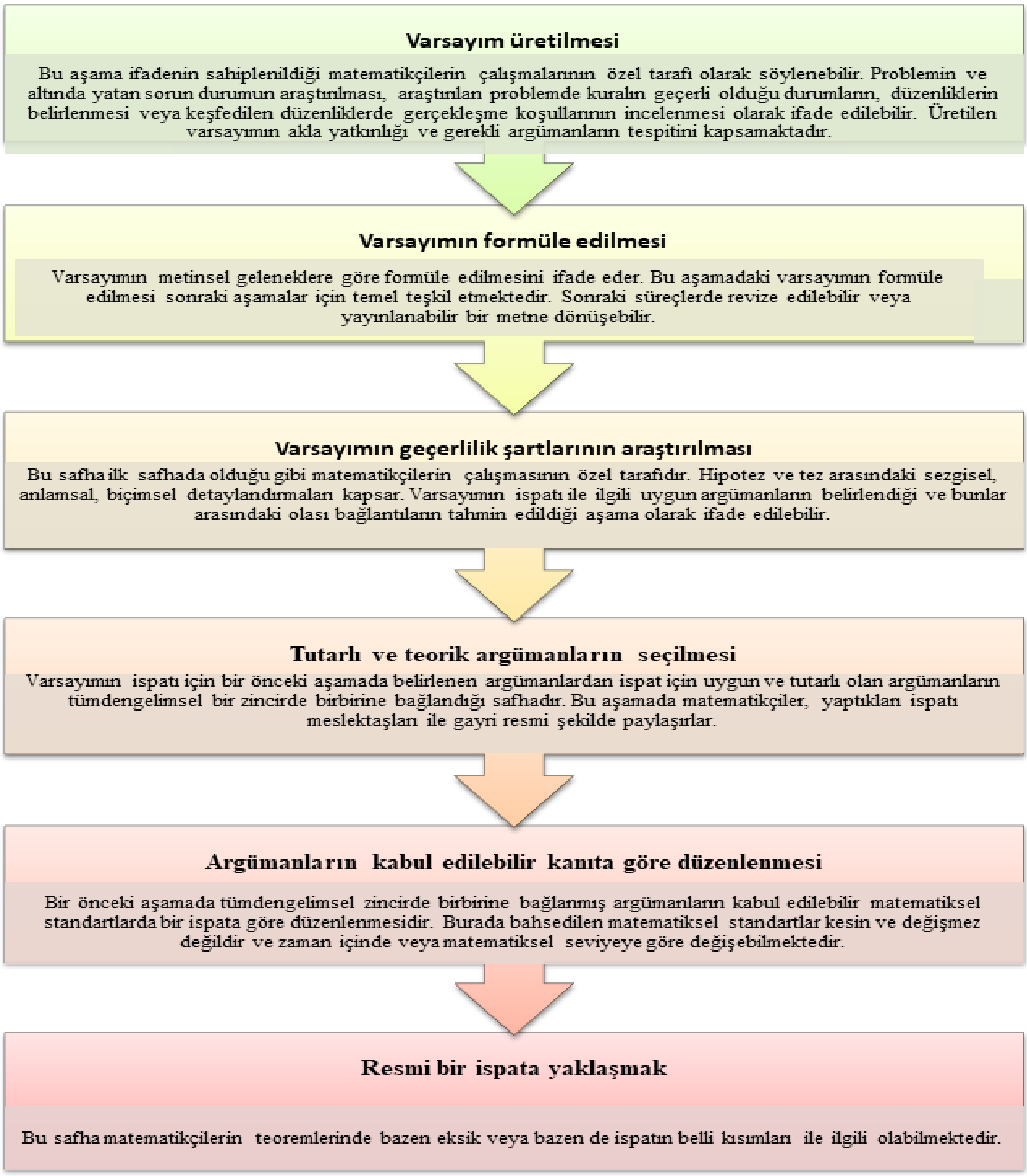
1.8.1. Boero İspat Süreci

Bir teoremin "ifade", "kanıt" ve "referans teorisi" bileşenlerinden oluştuğu düşünülürse matematiksel ispata yaklaşım yani teoremlerin kültürüne girmek genel bir kültürel ve bilişsel çıraklığa ait olduğu söylenebilir. Teoremlerin kültürüne girmek, teorik bilginin unsurları göz önüne alınarak varsayım üretilmesine ve üretilen varsayımların ispatlanması için beceri ve yeterlilik geliştirilmesi olarak ifade edilebilir. İspat yapmada henüz yeni olan öğrencilerin karşılaştıkları teoremleri yönetebilmeleri, varsayım üretebilmeleri ve ispatın temel unsurlarını kullanabilmeleri için epistemolojik ve bilişsel analizlere ihtiyaç duyulmaktadır. Böylelikle öğrenciler için ispat sürecine girmek daha erişilebilir ve matematiksel açıdan bakıldığında ise anlamlı olacaktır (Boero, 1999).

Yukarıda özetlenen çerçevede Boero (1999), matematikçilere yönelik ortaya koyduğu ispat sürecini aşamalar halinde tanımlamıştır. Boero (1999)'un tanımladığı bu altı aşama;

- Varsayım üretilmesi
- Varsayımın formüle edilmesi
- Varsayımın geçerlilik şartlarının araştırılması
- Tutarlı ve teorik argümanların seçilmesi
- Argümanların kabul edilebilir kanıta göre düzenlenmesi
- Resmi bir ispata yaklaşmak

Boero ispat süreçlerinde bahsedilen bu altı aşama doğrusal olmayan bir sırada takip edilmektedir. Örneğin beşinci aşamada fark edilen bir hata tekrar ilk aşamalara dönüp problem durumunun yeniden keşfedilmesine ve kurulan hipotezlerin güçlendirilmesini gerektirebilir. Boero (1999), ilk iki aşamada problem durumunun analizi, durum ile ilgili keşfedilen düzenliklerin geçerliliğini ve anlamlılığını sorgulama, hipotezleri rafine etme ve olası formülasyonları tartışma olarak ifade eder. Üçüncü aşamaya gelindiğinde doğrulama için argümanlar üretmede deneysel argümanlar ölçümler veya çizimler, görsel kanıtlar yararlıdır ve kullanabilir. Ancak dördüncü aşamadan itibaren deneysel argümanlar kabul edilemez ve bu aşamada mutlaka referans teorisine ait "teorik" argümanlara da başvurulmalıdır. Üçüncü ve dördüncü aşamanın doğası tartışmaya dayalı olmalıdır. Beşinci aşama, üretim aşamasındaki metnin titizlikle metinsel organizasyonunu içerir (Boero, 1999). Boero ispat aşamaları detaylı olarak aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.



Şekil 1.14. Boero İspat Süreci (Boero, 1999; Polat, 2018)

1.8.2. Heinze ve Reiss'in Modeli

Boero (1999), teoremler ile ilgili faaliyetler söz konusu olduğunda matematikçiler ile öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin önemli ölçüde farklılaştığını ifade eder. Matematikçilerin ispat sürecinde zengin argümantasyon yapabilme ve ispatın kabul edilebilirliği konusundaki katı kurallara hâkim olma becerisine sahipken, öğrencilerin ispat yapmanın yollarını bilme ve özgürce argümantasyon üretebilme konusunda zorluklar yaşadığını belirtir. Benzer şekilde Heinze ve Reiss (2004), Boero modelinin uzmanların ispat sürecine yönelik olduğunu ve bu süreçlerin bazı açılardan okul matematiğindeki ispat süreçlerinden farklı olduğunu ifade etmiştir. Bu sebeple öğrencilerin ispat süreçlerini analiz etmek ve değerlendirmek için Boero modelinde gerekli olan bazı değişiklikler yapmıştır. Boero'nun altı aşama olarak ifade ettiği ispat sürecini beş aşama olarak okul matematiğine uyarlamıştır. Heinze ve Reiss (2004) ispat süreçleri;

● Problem durumunun araştırılması

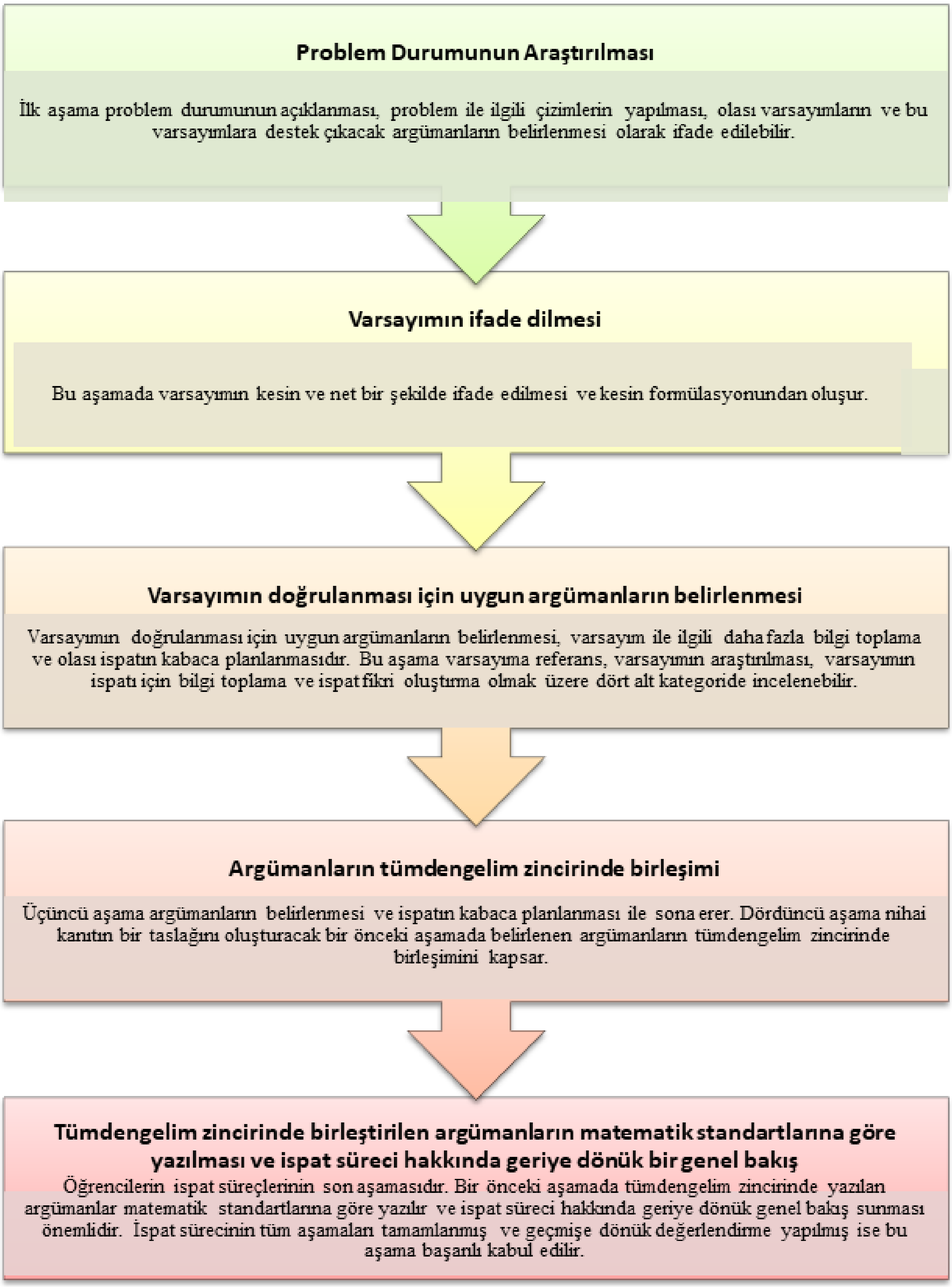
● Varsayımın ifade dilmesi

● Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi

● Argümanların tümdengelim zincirinde birleşimi

● Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre yazılması ve ispat süreci hakkında geriye dönük bir genel bakış

● Biçimsel ispata yaklaşım öğrencilerin ispat süreçlerinde oluşmaz



Şekil 1.15. Heinze ve Reiss İspat Süreci (Heinze ve Reiss, 2004)

Heinze ve Reiss ispat sürecinin daha iyi anlaşılabilmesi için yukarıda verilen ispat aşamalarına örnek olabilecek bir çalışma sunulmuştur. Reiss ve Renkl (2002)'in öğrencilere genel olarak ispatın çeşitli yönlerini göstermeye yardımcı olmak için sezgisel çalışılmış örnek üzerinden oluşturdukları ispat süreç aşamaları aşağıda verilmiştir.

Problem: Alex ve Chris farklı üçgenler çizdiler ve sırasıyla üç açılarının toplamını ölçtüler. Her ikisi de bu toplamın tüm üçgenler için 180 ° olduğunu keşfettiler. Alex ve Chris bunun tesadüfi bir sonuç olmadığından emindi. Varsayımları şöyleydi: "Her üçgende, iç açılarının toplamı 180 ° 'dir."

1) Problem durumunun araştırılması:

Ekipman: Makas, İletki ve kâğıt

(a) ABC üçgenini çiziniz ve açılarını α, β ve γ olarak işaretleyin. Bu açıları iletki yardımı ile ölçünüz. α, β ve γ'nin toplamı nedir? Aşağı not ediniz.

……………………………………………………………………………………..

Deneyi üç veya dört kez tekrarlayınız. Aldığınız tüm açıların sonuçları not ediniz.

……………………………………………………………………………………....

(b) Bir ABC üçgenini çiziniz ve α, β ve γ açılarını işaretleyiniz. Makas ile üçgenin açılarını kesiniz ve doğrusal bir açı oluşturacak şekilde açıları bir araya getiriniz. Bu açının ölçüsü hakkında ne düşünüyorsunuz?

……………………………………………………………………………………....

Deneyi üç veya dört kez tekrarlayınız. Aldığınız tüm açıların sonuçları not ediniz.

……………………………………………………………………………………....

2) Varsayımın ifade dilmesi

Bütün üçgenlerin iç açılarının toplamı 180 ° 'dir.

Yukarıda ifade edilen varsayımın ispatlanma sürecinde aşağıdaki adımlar takip edilmelidir.

- Açılar ve üçgenler hakkında bilgi toplamak, bu konuda bildiklerini netleştirmek,
- İspat için önemli olabilecek argümanları belirlemek,
- Doğru argümanları mantıksal bir sıraya koymak.

3) Açılar ile ilgili hangi bilgileri hatırlama

Varsayım ile ilgili bilgi toplama kısmında açılar konusundaki aşağıdaki bilgiler hatırlanabilir.

● Doğrusal açı 180°'dir.

● İki doğrunun paralel olduğu durumda iç ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.

● İki doğrunun paralel olduğu durumda yöndeş açıların ölçüleri birbirine eşittir.

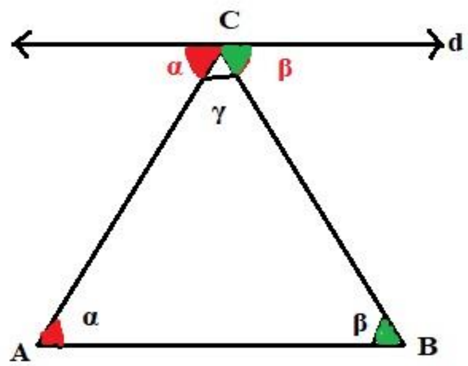
Konu ile ilgili hatırlanan bu bilgiler ispat için uygun argümanların belirlenmesi olarak kabul edilebilir.

4) İspat Fikri

Doğrusal açının ölçüsü 180°'dir. Herhangi bir üçgende tüm açıların ölçüleri toplamı doğrusal açının ölçüsüne eşittir.

5) Varsayımın İspatı

Bir ABC üçgeninde C noktasından BC doğrusuna paralel çizildiğinde oluşan iç ters açıların ölçüleri birbirine eşittir. Bu durumda üçgenin açı ölçülerinin toplamı doğrusal bir açının ölçüsüne eşit olmaktadır. Bu nedenle 'Üçgenin iç açılarının toplamı 180°'dir.' sonucuna varılabilir.



Şekil 1.16. Varsayımın İspatı İçin Örnek Çizim

6) Geriye Dönük Genel Bakış

Problem çözme sürecinin bir sonucu olarak tüm üçgenlerde iç açılarının ölçüleri toplamının 180 ° olduğu ispatlanmıştır.

Bu çalışmada Heinze ve Reiss (2004)'in analiz süreci aşamaları göz önünde bulundurularak klinik görüşmeler analiz edilmiştir.

Birinci aşamada öğrencilerden problem durumunun doğru bir şekilde açıklanması ve araştırılması beklenmektedir. Problem ile ilgili çizimlerin yapılması, varsayıma destek çıkacak argümanların belirlenmesi ve olası varsayımların üretilmesi bu aşamanın başarılı geçtiğini göstermektedir.

İkinci aşamada öğrencilerden varsayımı ifade etmeleri beklenmektedir. İfade edilen varsayım sonraki süreçlerde revize edilebilir veya varsayımın net ve kesin hali sonraki aşamaların sonucunda ortaya çıkabilir. Bu aşama öğrencilerin ezbere bildiği kuralların sebeplerini araştırması neden öyle olduğunu merak edip bilgiyi anlamlandırabilmesi yönünden önemlidir.

Üçüncü aşamada öğrencilerden oluşturdukları varsayımın geçerliliğini araştırmaları beklenmektedir. Bu aşamada öğrencilerden varsayım ile ilgili bilgi toplamaları, konu ile ilgili bilgilerini hatırlamaları, varsayıma destek olabilecek uygun argümanları belirlemeleri ve kabaca bir ispat fikrine sahip olmaları beklenmektedir.

Dördüncü aşama, bir önceki aşamada toplanan veya hatırlanan bilgilerin, varsayıma destek olabilecek argümanların arasından ispata taslak oluşturabilecek tutarlı argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi beklenmektedir. Bu aşama, öğrencilerin öğrenmiş oldukları bilgilerden yola çıkarak akıl yürütme yolu ile yeni bilgiler keşfetmesi yönünden önemli görülmektedir.

Beşinci ve son aşamada ise bir önceki aşamada tümdengelim zincirinde yazılan argümanların matematiksel standartlara göre ifade edilmesi ve öğrencilerden yaptıkları işlemleri özetlemeleri beklenmektedir. Öğrencilerin geçirdikleri aşamaları geriye dönük olarak özetlemesi, sürecin tamamında yaptıklarını değerlendirilmesi ve bütünsel açıdan görebilmesi açısından önemlidir. Ayrıca geçirdikleri süreçlerde mantıksal örgüyü görmeleri, kavramlar arasındaki neden sonuç ilişkisini daha net fark etmelerini sağlayabilir.

2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde alanyazında yer alan; ortaokul seviyesinde yapılan matematiksel ispata ilişkin çalışmalardan bahsedilecektir. Çalışmalar incelendiğinde matematiksel ispat sürecine ilişkin sınırlı sayıda çalışmanın olduğu görülmektedir. Erken yaş grubunda matematik öğretiminde ispata yer verilmemesi buna sebep olarak görülebilir. Fakat yakın dönemde yapılan çalışmalar incelendiğinde ispatın matematik öğreniminin temel bir bileşeni olduğu ve tüm yaş gruplarının kendi düzeylerine uygun ispat yapabileceklerini savunan yaklaşımlarda artış olduğu gözlemlenmektedir. Bu metnin yazıldığı süreçte ortaokul düzeyinde ispatı konu alan çalışmalar aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir.

Yurt İçinde Yapılan Araştırmalar

Turan (2019), matematik dersinde akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerisi ve argüman tercihlerini incelemeyi amaçlamıştır. Yıl sonu başarı puanı, genel yıl sonu ortalaması, cinsiyet ve gönüllülük gibi belli ölçütler çerçevesinde seçilen altı 7. sınıf, altı 8. sınıf ve bu okulda görev yapan dört matematik öğretmeni ile gerçekleştirdiği bu çalışmada araştırma yöntemi olarak nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. İlk olarak öğrencilere ve matematik öğretmenlerine ispat yapabilme becerilerini belirlemeye yönelik araştırmacı tarafından geliştirilen ispat beceri testi ve argüman tercihlerini belirlemeye yönelik test uygulanmıştır. Daha sonra öğretmen ve öğrenciler ile yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin verilen önermeleri ispatlarken formal ve informal ispat yöntemlerini kullanabilmeleri beklenmiş fakat en fazla deneysel argüman kullandıkları görülmüştür. Buna ek olarak örnek vererek doğrulama yapan öğrencilerin verilen örnek sayısı arttıkça daha ikna edici buldukları gözlemlenmiştir. Öğretmenlerin ise cebirsel argüman kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin deneysel argümandan sonra en çok kullandıkları argüman çeşidinin anlatımsal-sözel argüman olduğu görülmüştür. Cebirsel argümanları tercih eden öğrenci sayısının oldukça az olduğu ve görsel argümanların öğrenciler tarafından hiç tercih edilmediği bulgulanmıştır. Ayrıca öğrencilerin en fazla anlatımsal-sözel argümanları ikna edici buldukları gözlemlenmiştir. Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerin ispat oluşturma becerilerinin benzeşmediği fakat argüman değerlendirme becerilerinin yarı yarıya benzeştiği görülmüştür.

Alpay (2018), 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerini incelemeyi amaçladığı çalışmasında Balacheff (1988)'in ortaya koyduğu ispat düzeylerini göz önünde bulundurarak Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajı çatısı çerçevesinde araştırmıştır. Çalışma betimsel türde nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Araştırmacı tarafından hazırlanan "İspatlama Düzeyi Belirleme Formu" 8. sınıf 100 ortaokul öğrencisine uygulanmış, uygulama sonunda ispat yapma düzeyinde olan kişiler arasından gönüllü üç öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir. Yapılan görüşmeler ile öğrencilerin ispat imajları derinlemesine incelenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin ispat kelimesinden korktukları ve verilen ifadeyi ispatlamak için sıklıkla örnek vermeyi tercih ettikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin büyük çoğunluğunun Balacheff'in ortaya koyduğu ispat seviyelerinden pragmatik ispat seviyesinde olduğu ve en üst düzey olan Demonstrasyon seviyesine hiçbir öğrencinin ispat yapamadığı görülmüştür. Araştırmaya katılan öğrencilerden çok az bir kısmı zihinsel ispat düzeyinde ispat yapabilmiş bunun sebebi olarak ise öğrencilerin cebirsel ifadeleri kullanamadıkları ve ispat yapmaya yatkın olmadıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajının bilişsel ve duyuşsal bileşenlerinin özelliklerine sahip oldukları görülmüştür.

Pesen (2018), 8. sınıf öğrencilerinin ispat ve argümantasyon becerilerini ve bu beceriler arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamıştır. 242 tane 8. sınıf öğrencisi ile yapılan çalışma betimsel, istatistiksel ve nitel olmak üzere karma yöntem olarak tasarlanmıştır. Araştırmanın bulguları incelendiğinde öğrencilerin çoğunlukla deneysel ispatları kullandıkları ve bu ispatı en ikna edici ispat olarak gördükleri bulgulanmıştır. Geometri alanında öğrencilerin ispat üretemedikleri ve bu alanda en ikna edici ispat olarak analitik ispatları gördükleri gözlemlenmiştir. Argümantasyon çalışmasının bulgularına göre en çok oluşturulan argümantasyon seviyesinde öğrenciler bir iddia ve gerekçelendirme sunmuşlardır. Yapılan analizler sonucu ispat ve argümantasyon arasında anlamlı bir ilişki olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin ispat yapma becerilerinin içerik bilgilerinden etkilendiğini, argümantasyon becerilerinin öğrencilerin içerik bilgilerinden, kavram yanılgılarından ve delilleri kullanma biçimlerinden etkilendiğini ortaya çıkmıştır.

Aylar (2014), 7. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmada öğrencilerin ispatı algılama düzeyleri ve ispat yapabilme becerilerini betimleyebilmeyi amaçlamıştır. Bu bağlamda 7. sınıf öğrencilerine ispatın öğretilebilirliğini irdelemiş ve bu düzeyde ispat öğretiminin ne oranda ele alınabileceğini araştırmıştır. İspat kavramı ile birlikte "doğrudan ispat", "durum yoluyla ispat", "aksine örnek vererek ispat" ve "tüketerek ispat" yöntemleri de ele alınmış, bu yöntemlerin öğrenciler tarafından algılanma düzeylerini ve bu süreçte öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri betimlemeyi hedeflemiştir. Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden eylem araştırması olarak tasarlanmıştır. 14 haftalık ispat öğretimi sürecinin ardından üç ayrı sınavdan oluşan ispat testleri öğrencilere uygulanmış ve bu testlerin sonucuna göre seçilen 16 öğrenci ile konu ile ilgili daha derinlemesine inceleme yapabilmek için yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Bu çalışmada ulaşılan bulgular aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Öğrencilerin ispat yapma becerilerine yönelik yapılan öğretim sonucu öğrencilerin ispata yönelik algı ve becerilerinde gelişme olduğu gözlemlenmiştir. Doğru bir önermenin ispatında öğrencilerin çoğunlukla örnek vererek ispat yapma eğiliminde olduğu görülmüştür. Buna sebep olarak öğrencilerin ispat kavramına ilişkin mantığı anlamamalarına ya da bunun ispat olmadığına dair fikir sahibi olmalarına rağmen başka yöntem geliştiremediklerinden kaynaklı olduğu görülmüştür. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin ispat yapma yöntemlerinden uygun olanı seçmekte zorlandıkları görülmüştür. En başarılı oldukları ispat yöntemi karşı örnek vererek ispat yöntemi olup, en başarısız oldukları ispat yöntemi ise durum yolu ile ispat yöntemi olduğu bulgulanmıştır. Ayrıca öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlama ve uygulama konusunda sorun yaşadığı ve bunun ispat yapma performansını olumsuz etkileyen faktörlerden biri olduğu ifade edilmiştir.

Çalışkan (2012), 8.sınıf öğrencilerinin matematik başarısı ile ispat yapabilme seviyelerini incelemeyi amaçladığı çalışmasını iki yönlü olarak tasarlamış ilk aşamada ilköğretim 6, 7, 8. Sınıf matematik ders kitaplarındaki etkinlikler doküman analizi tekniği ile Balacheff'in ispat seviyelendirmelerine göre analiz edilmiştir. Araştırmanın nitel olarak tasarlanan diğer aşamasında ise 110 8. sınıf öğrencisine yönelttiği iki ispat sorusu Balacheff'in ispat seviyelerine göre analiz edilmiştir. Çalışmanın bulgularına göre ders kitabında yer olan örneklerin çoğunluğunda öğrencilerin tek örnek üzerinden genellemeye varmaları beklenmekte ve ders etkinliklerinin alt ispat seviyelerinden üst seviyelere doğru ardışıklık sırası güdülmeden hazırlanmış olduğu görülmüştür. Türkiye'de müfredat değişikliği kapsamında yeniden düzenlenen ders kitaplarında tümdengelim ispat yöntemi uygulanmaya çalışılmış fakat öğrencinin keşfetmesinden ziyade ispatlanması gereken durum açıkça verilerek öğrencinin doğrulama yapması istenmiştir. Öğrencilerin başarı durumları ile ispat becerileri arasındaki ilişkinin incelendiği ikinci aşama bulgularına göre öğrencilerin matematik başarıları ile ispat düzeyleri arasında pozitif ve aynı yönde ilişki tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin matematiksel kavramları bilmedikleri, yeterince somutlaştıramadıkları ve kavram yanlışlarına sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin çoğunun ispat, doğrulama, kanıtlama gibi kavramları bilmedikleri elde edilen bulgular arasındadır.

Zaimoğlu (2012), 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme süreçlerini ve ispat temsil şekillerine eğilimlerini tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme çerçevesinde incelemeyi amaçlamıştır. Çalışma grubunu 8. sınıf 154 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmacı tarafından 6. ve 7. sınıf geometri konu kazanımlarına uygun sekiz açık uçlu soru hazırlanmıştır. Veri analizinde yüzde ve frekans tablolarından faydalanılmıştır. Veri analizinde Bell' in (1976) ortaya koyduğu matematiksel anlamanın üç boyutu olan doğrulama, açıklama ve sistematikleştirme kategorileri, bunun yanında alt problemlere yönelik Stylianides (2007)'nin ispat yolları ve temsil şekilleri göz önünde bulundurulmuştur. Öğrencilerin yanıtlarında kullandıkları ispat yolları ve ispat temsil şekilleri kodlanmış ve kodların yüzde frekans analizi yapılmıştır. Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin bilinen doğrulardan yeni bir doğruya ulaşabilme becerilerinin az da olsa gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Öğrencilerin geçerli bir ifadenin doğrulamasını yapabilmelerine rağmen olmayana ergi ve çelişki bulma yöntemlerini ve geçersiz ifadeyi çürütmede ters örnek bulma, çelişki bulma yöntemlerini bilmedikleri ve hiç kullanmadıkları görülmüştür. Öğrencilerin en çok tercih ettiği ispat türünün sayısal örnekleme ve görsel ispat olduğu, en az tercih ettikleri yöntemin ise cebirsel ispat olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin örnek vererek, deney gözlem ve ölçme yollarını kullanarak ispat yoluna gitmeleri tümevarımsal muhakeme yapmaya eğilimli olduklarını ortaya koymuştur. Cebirsel ispat kategorisinden elde edilen bulgulara göre ise öğrencilerin cebirsel ifade ve işlemleri tam kavrayamadıkları gözlemlenmiştir.

Albayrak İhtiyari (2010), 8. sınıf öğrencilerinin matematik eğitiminde ispatın önemi hakkındaki görüşlerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın çalışma evrenini beş farklı ilköğretim okulunda 8. sınıfa devam eden 340 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmacının geliştirdiği 42 maddelik 5'li likert tipi anket öğrencilere uygulanmış ve SPSS programı ile analiz edilmiştir. Çalışmanın bulgularına göre 8. sınıf öğrencilerinin ispat ve muhakeme konusunda eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin ispat ile ilgili matematik deneyimlerinin ve bilgilerinin eksik olduğu bulgulanmıştır. Öğrencilerin matematiksel bir doğru açık ve doğru ise bunu ispatlamanın anlamsız olduğu ve sadece örnekler ile doğrulayarak bunu ispat edilebileceklerini düşündükleri görülmüştür. Ayrıca ispat ve muhakeme kavramlarının anlamını bilmedikleri ve gerekliliğinden emin olmadıkları gözlemlenmiştir. Genel olarak öğrencilerde akıl yürütme becerisinin düşük olduğu ve kusurlu akıl yürütme gözlemlendiği görülmektedir. Bunun yanında öğrencilerin büyük çoğunluğunun ispat yaparken zorlandığı ve konu anlatımında düz anlatımdan ziyade farklı yöntemler kullanılmasını istedikleri tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin matematik derslerinde muhakemenin ve farklı bilgi ve teknolojilerin kullanılması gerektiği konusunda hemfikir oldukları görülmüştür.

Arslan (2007), ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıflar ile yaptığı çalışmasında öğrencilerde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimini incelemeyi amaçlamıştır. 679 öğrenci ile gerçekleştirdiği çalışmasında tarama modelini kullanmış, çalışmayı zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeyini belirlemek için nicel, yargıların altında yatan sebepleri araştırmak için nitel olarak tasarlamıştır. Çalışmanın bulgularına göre ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme düzeylerinin düşük olduğu ve süreçte kullanılması beklenen stratejileri yeterli düzeyde kullanamadıkları bulgulanmıştır. Ayrıca 8. sınıf öğrencilerinin 6. ve 7. sınıf seviyesindeki öğrencilere göre cebirsel ispatı tercih etme ve kullanma düzeylerinde anlamlı farklılık gözlemlenmiştir. Öğrencilerin yüksek oranda örnek ile doğrulama yaparak ispat yaptıkları görülmüş bunun yanında örnek ile doğrulama ve görsel ispatı daha anlaşılır buldukları fakat cebirsel ispatın da matematikteki yeri ve öneminin farkında oldukları bulgulanmıştır.

İskenderoğlu (2003), ilköğretim 5, 6, 7, 8. ve 9.sınıf öğrencilerinin matematik problemlerinde buldukları sonuçlardan nasıl emin olduklarını ve öğrencilerin sınıf seviyelerine göre kullandıkları ispat şemalarını araştırmayı amaçlamıştır. Nitel araştırma türlerinden klinik görüşme olarak tasarlanan çalışma, her sınıf seviyesinden iki kız, iki erkek olmak üzere 4'er öğrenci ve toplam 20 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bulguları incelendiğinde öğrencilerin genellikle dışsal ispat şemalarımdan otoriteyi kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları işlemlerin doğruluğunu ispatlarken, ispatlarını öğretmenin söylediği veya kitapta yazan ifadeler gibi dışsal bir otoriteye dayandırdıkları görülmüştür. Deneysel şemayı kullanan öğrencilerin temel örnekleri kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. İspat şemalarının en üst düzeyi olan analitik ispat şemasının ise öğrenciler tarafından daha az kullanıldığı bulgulanmıştır. Sınıf seviyesi arttıkça öğrencilerin kullandığı ispat şemalarının düzeyinin de arttığı görülmüştür.

Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar

Reyes-Hernandez (2021), ortaokul öğrencilerinin (5-8. Sınıflar) akıl yürütmelerini gerektiren üç matematiksel göreve ilişkin gerekçelerini incelemeyi amaçlamıştır. Beşinci sınıftan sekizinci sınıfa kadar olan 198 öğrenciye üç farklı matematik görevi verilmiştir. Öğrencilere yöneltilen

1. Ammy 1 ile 10 arasında bir sayı seçer seçer. Bu sayıyı 10'a ekler ve cevabı yazar. Başlangıç sayısını 10'dan çıkarır ve cevabı yazar. Sonra ilk iki adımdaki iki yanıtı toplar. Stephan 1 ile 10 arasında bir sayı seçer. Bu sayıyı 10 ekler ve cevabı yazar. Başlangıç numarasını 10'dan çıkarır ve cevabı yazar. Sonra ilk iki adımdaki iki yanıtı toplar.

Son iki cevap hakkında ne fark ettiniz?

Başlangıç sayınız ne olursa olsun, her zaman aynı nihai cevabı alacak mısınız?

Her zaman aynı cevabı alacağınıza bir sınıf arkadaşınızı nasıl ikna edersiniz?

2. Herhangi üç tek sayıyı toplarsanız, cevabınız her zaman tek midir? İkna edici bir açıklama yapınız.

3. Bir dikdörtgen alın. Sağ üst köşeden dikdörtgen bir parça kesin. Dikdörtgenin çevresi ile yeni şeklin çevresi arasındaki ilişki nedir?

Araştırmanın analizinde Balacheff ‘in Matematiksel Kanıt Taksonomisi kullanılmıştır. Çalışma sonuçları incelendiğinde öğrenci yanıtlarının neredeyse yarısının hiçbir gerekçeye sahip olmadığını veya geçerli bir gerekçe sağlamadığını bulunmuştur. Gerekçelerin yaklaşık dörtte biri örneklere dayalı olduğu, yaklaşık dörtte birinin ise temel olarak matematiksel akıl yürütmeye dayalı olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin gerekçelerini tam olarak iletemedikleri yanıtların %90'ından fazlasında bir gerekçenin eksik veya yetersiz olduğu bulgulanmıştır.

Cooper ve diğerleri (2011), ortaokul öğrencilerinin varsayımların doğruluğunu değerlendirmek için hangi yaklaşımları kullandığı sorusuna odaklanmış, 20 ortaokul öğrencisi (7 tane 6. sınıf, 7 tane 7. sınıf ve 5 tane 8. sınıf) ile yarı yapılandırılmış, videoya kaydedilmiş görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Her öğrenciden görüşmenin ilk 20 dakikasında iki matematiksel varsayımın geçerliliğini araştırmaları istenmiştir. İlk olarak, öğrencilere her sayı için her varsayımın doğru olduğuna inanıp inanmadıkları, gerçeği nasıl bildikleri ve gerçeği nasıl anlayacakları sorulmuştur. Ayrıca öğrencilerden varsayımları test etmek için örnekler üretmelerini istenmiş, öğrenciler varsayımın doğruluğuna ikna olduktan sonra, varsayımın neden her zaman doğru olduğunu ve bunu başkalarına nasıl göstereceklerini tekrar açıklamaları istenmiştir. Katılımcılardan test etmeyi seçtikleri örneklerin niteliklerini tartışmalarını istenmiştir. Sonuçlar incelendiğinde öğrencilerin genellikle matematiksel bir varsayımın doğruluğunu gösterme girişimleri, örnekler aracılığıyla, tümevarımsal akıl yürütme ve tümdengelimsel olarak geçerli kanıt argümanları dahil olmak üzere çeşitli yaklaşımları kullandıkları görülmüştür. Deneysel yaklaşımların öğrenciler tarafından en fazla kullanıldığı ve varsayımların yarısından daha azının geçerli kanıtlarla desteklendiği görülmüştür. Beş öğrenci her iki varsayım için de geçerli kanıtlar üretmiştir. Toplam 18 kanıt için sadece bir geçerli kanıt üreten 8 öğrenci olduğu görülmüştür. Anlatısal ispatların öğrencilerin en yaygın kullandığı ispat stratejisi olduğu, bunu görsel ve cebirsel ispatların izlediği bulgulanmıştır.

Knuth, Choppın ve Bieda (2010), öğrencilerin kanıtlamanın çeşitli yönlerine ilişkin anlayışlarını incelemeyi hedefleyen çalışmalarını iki yıl boyunca, aynı okula devam eden 400 tane ortaokul öğrencisi (6. sınıftan 8. sınıfa kadar) ile gerçekleştirmişlerdir. Verilerin analizinde yine Waring'in (2000) kodlama sisteminden yola çıkarak, dört seviyeden oluşan bir ispat oluşturma süreci tanımlamışlardır. Seviye 0 olan öğrenciler bir önermenin veya ifadenin doğruluğunu göstermek için matematiksel bir gerekçe sağlama ihtiyacının farkında değillerdir. Bu öğrenciler bir önermeyi öğretmen, ebeveyn veya kitap doğru olduğunu "söylediği" için doğru kabul edebilmektedirler. Seviye 1 olan öğrenciler matematiksel bir gerekçe sağlama ihtiyacının farkında olup, gerekçeleri ampirik temellidir. Bu gerekçeler arasında, birkaç durumu kontrol etme, birkaç durumu kontrol etme ve uç durumları veya "rastgele" durumları kontrol etme olarak farklılaşmaktadır. Seviye 2 olan öğrenciler genel bir argümana ihtiyaç duyulduğunun farkında olup argümanları üretmeye çalışmaktadırlar. Bununla birlikte, argümanlar kabul edilebilir kanıtlar olmaktan uzaktır. Seviye 3 olan öğrenciler genel bir argümana duyulan ihtiyacın farkında olup, bu tür argümanları kendileri başarıyla üretebilmektedirler. Elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin ispatta ve özellikle de genel argümanlar üretmekte zorlandıkları ve çoğunlukla 1. düzeyde kaldıkları bulgulanmıştır. Öğrencilerin genel olarak örnekle doğrulama eğiliminde oldukları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin 6. sınıftan 8. sınıfa ilerledikçe gerekçelendirme girişimlerinde genel bir artış olduğu gözlemlenmiştir.

Knuth ve Sutherland (2004), ortaokul öğrencilerinin gerekçelendirme ve kanıtlama konusundaki becerilerinin gelişimi konusunda çalışma gerçekleştirmiştir. Reform temelli Müfredat Bağlantılı Matematik Programının benimsendiği bir okulda 394 tane 6-8. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmada ispatın bir ifadenin doğruluğu veya sonucuna ilişkin garanti sunması ve deneysel ispatın kanıt için yeterli olmadığı konusu hedef alınmıştır. Veri toplama aşamasında öğrencilere bir ifadenin doğruluğunu gösteren biri örnek temelli diğeri genel (yani ispat) olmak üzere iki argüman verilmiştir. Daha sonra öğrencilerden hangi argümanın her zaman tüm sonuçlar için doğru olduğunu gösterdiğine karar vermeleri ve kararlarının nedenini açıklamaları istenmiştir. İkinci maddede öğrencilere bir ifade verilmiş ve bu ifadenin verilen sayı kümesi için doğru olup olmadığı sorulmuştur. Daha sonra öğrencilere gerekçelerinin aynı zamanda ifadenin herhangi bir sayı için doğru olduğunu gösterip göstermediği sorulmuştur. Öğrencilerin değerlendirme maddelerine verdikleri yanıtlar analiz edilmiştir. Öğrencilerin cevapları aşağıdaki genel kodlama tanımları kullanılarak kodlanmıştır.

● Öğrenciler birkaç vakayı kontrol etmeyi yeterli görürler;

● Öğrenciler birkaç vakayı kontrol etmenin yeterli olmadığının farkındadır, ancak genel bir argümana ihtiyaç olduğunun farkında değil gibidirler;

● Öğrenciler genel bir argümana duyulan ihtiyacın farkındadır, ancak genel argümanları sınırlı olarak algılar (örneğin, örneklerin hala doğrulanması gerekir);

● Öğrenciler genel bir argümanın yeterli olduğunu bilirler.

Sonuçlar incelendiğinde genel bir argüman ile örneğe dayalı bir argüman arasında seçim yapıldığında, öğrencilerin önemli bir bölümünün, tüm durumlar için verilen ifadenin doğruluğunu gösteren genel argümanı seçtiğini göstermektedir. Bu nedenle, birçok öğrenci genel argümanları kendileri üretemese de genel argüman ile örneğe dayalı argüman arasındaki farkı anladıkları ve genel argümanı bir kanıt olarak görebilmektedirler. Bazı öğrencilerin genellik anlayışına sahip olsa da birçok ortaokul öğrencisinin genelleme anlayışından yoksun olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin az bir kısmının genel argümanlar üretip seçtikleri, örneklerin sınırlılığını ispat olarak kabul ettikleri ve ispatı doğru bir şekilde kullandıkları görülmüştür.

Healy ve Hoyles (2000), yüksek başarı gösteren öğrenciler (14-15 yaş arası) tarafından kanıt olarak kabul edilen argümanların özelliklerini, yargılarının arkasındaki nedenleri ve kendileri için kanıt oluşturma yollarını araştırmayı hedeflemiştir. Verileri toplamak için iki anket kullanılmıştır. İlk olarak, öğrencilerin bir ispatı neyin içerdiğine, rolüne ve genelliğine ilişkin görüşlerine genel bir bakış sağlamak ve ikinci olarak öğrencilerin ispat oluşturmadaki yeterliliklerinin bir göstergesini sağlamak için tasarlanmıştır. Çalışmanın bulgularında öğrencilerin çoğunluğunun geçerli kanıtlar oluşturamadıkları, genel ve açıklayıcı argümanlara değer verdiklerini gözlemlenmiştir. Ek olarak, öğrenciler ağırlıklı olarak kendi kanıtları için ampirik argümanlar kullansalar da bunların düşük statüye sahip olduklarının farkında oldukları görülmüştür. Ancak örneklerin bir ifadenin doğruluğu hakkında kanaat kazanmanın güçlü bir yolunu sunduğunu kabul ettikleri, bunun yanında ispatlarında cebiri nadiren kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel dönüşümleri varsayımlar için potansiyel kaynaklar, yeni ispatlar için yapı taşları veya matematiksel fikirlerini açıklamak ve iletmek için bir araç olarak görmedikleri bulgulanmıştır.

Zack (1999), 5. sınıflarda etkileşimli matematik dersinin nasıl mümkün olabileceği üzerinde çalışmış ve çocukların günlük konuşmalarında matematiksel bir yapının gömülü olduğunu ifade etmiştir. Zack (1999), çalışmasında 5. sınıf öğrencilerinin ispat ile ilgili kavramlarını araştırmıştır. Çalışmada öğrenciler ile ikna etme ve ispatlama kavramları hakkında çalışma yapılmadan üç öğrencinin bir önermenin doğru olmayacağı konusunda birbirlerini ikna etme durumları incelenmiştir. Çalışmanın sonucunda önermenin yanlış olduğuna dair beş tür açıklama öğrenciler tarafından getirilmiştir. Bu açıklamaların öğrencilerin matematiği kavramalarına olanak sağladığı ve öğretmenler için ise yeni fikirlere kapı araladığı görülmüştür.

Yapılan çalışmalar farklı yaş grubundaki öğrencilerin ispat yapmakta zorlandığı ve yaygın güçlükler yaşadığını ortaya koymaktadır. Lise ve üzeri eğitim düzeyindeki öğrencilerin yaşadığı bu güçlüklerin sebeplerinden birisi de bu öğrencilerin bu öğretim kademelerinde aniden ispatla karşılaşması olarak tespit edilmiştir. Bu nedenle erken yaşlardan itibarem öğrencilere bu konuda fırsatlar sunmak gerekmektedir. Buna karşın erken yaş grubu sınıflarda, uygulanan ispat etkinlikleri ile öğrencilerde ispat düşüncesinin gelişimi ve ispat yapmaya yönelik becerilerinde artış gözlemlenebilmektedir. Yapılan araştırmanın amacı ülkemizdeki erken yaş grubundaki ispat çalışmalarına katkı sağlamak amacıyla üstün yetenekli 8. Sınıf öğrencilerin ispat yapma konusunda becerilerinin ortaya çıkarılması ve bu süreçte yaşadıkları güçlüklerin betimlenmesidir.

3. MATERYAL-YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışmaya dahil edilen katılımcıların özellikleri ve seçilme kriterleri, veri toplama araçları, araştırmacının rolü, veri toplama süreci ve verilerin analizinde kullanılan teorik çatıdan bahsedilmiştir. Ayrıca veri toplama araçlarının geçerliği ve güvenirliğini sağlamak için göz önünde bulundurulan tedbirlere yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden betimsel analiz yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırma, nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, genelleme ile anlaşılması zor olan algı ve olayların doğal ortamlarında gerçekçi, detaylı ve bütüncül bir yöntem izlenerek gerçekleştirilen veri toplama yöntemidir. (Yıldırım, Şimşek 2013). Nitel araştırmaların ortak özellikleri olgu ve olayların doğal ortamında çalışılması, verilere doğrudan kaynağından ulaşılması, olgu ve davranışların nasıl ve neden gerçekleştiğine odaklanması, veri analizinin tümevarımcı yöntem ile sentezlenerek ikna edici genellemelere varılması, zengin betimlemelere dayanması gibi özellikler sıralanabilir. (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2019). Betimsel analiz tekniğinde ise elde edilen veriler önceden belirlenmiş temalara dayanarak yorumlanır ve özetlenir. Betimsel analizde elde edilen verileri çarpıcı biçimde yansıtmak için doğrudan alıntılara sıklıkla yer verilir. Bu tür bir çalışma dört aşamadan oluşur. İlk aşamada verilerin analizi için betimsel bir çerçeve oluşturulur. İkinci aşamada önceden belirlenen çerçeveye göre veriler düzenlenir. Üçüncü aşamada düzenlenen veriler doğrudan alıntılar ile desteklenerek bulgular tanımlanır. Son aşamada ise tanımlanan bulgular açıklanır, anlamlandırılır ve neden sonuç ilişkisi kurularak bulguların yorumlanır (Yıldırım, Şimşek 2013).

Araştırmada öğrencilerin ispat süreçlerinin detaylı ve derinlemesine incelenip var olan durumu ortaya koymak için nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Alanyazındaki bazı durum çalışması tanımlarına yer verilerek çalışmada neden durum çalışması kullanıldığına açıklık getirilmeye çalışılmıştır. Durum çalışmasının en önemli özelliği bir ya da daha fazla durumun detaylı ve derinlemesine araştırılmasıdır. Bir duruma ilişkin ortam, birey, kişiler vb. gibi etmenler bütüncül bir şekilde ele alınır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri veya ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerinde durulur (Yıldırım, Şimşek 2018). Alanyazında durum çalışmasının tanımlarına bakılacak olursa McMillan (2000), bir ya da daha fazla durumun, birey ya da sosyal grubun, ortamın yani birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak ifade edilir (Büyüköztürk vd. 2019).

Bassey'e göre durum çalışması birey, grup veya kültür durumunu anlamayı, tanımlamayı, tahmin veya kontrol etmeyi amaçlayan bir araştırma yöntemidir. Yin (2014) 'e göre ise durum çalışması bir olay ve bağlam arasında sınırlar açık olmadığında güncel olan bir durumu gerçek yaşam alanında irdelemektir. Gray (2009) ve Yin'e (2014) göre durum çalışmasında araştırmacının kontrolü dışındaki güncel bir olay ile ilgili nasıl ve neden sorularına odaklanarak bilgi edinilir (Akt: Saban, Ersoy vd., 2019). Creswell (2021) 'e göre durum çalışması özel bir zaman ve yer gibi belirli parametreler ile tanımlanabilir durumun belirlenmesi ile başlar. Burada tek bir durum seçilebileceği gibi karşılaştırma için çoklu durumlarda tanımlanabilir. Durum çalışmasının amacı seçilen problemi ya da meseleyi en iyi şekilde anlamaktır. İyi bir nitel durum çalışmasının özelliği derinlemesine yapılması ve mülakat, gözlem, görsel işitsel materyal gibi birçok veri çeşidi ile desteklenmesidir. Toplanan verilerin analizinde ise söz konusu durumun iyi bir betimleme içermesi önemlidir ve araştırmacının durum (lar)dan çıkardığı genel anlam çerçevesinde elde ettiği sonuçlar ile son bulur. Yin (1994), amaçlarına göre durum çalışmasını üçe ayırmaktadır. Bunlar keşfedici örnek olay araştırmaları, açıklayıcı örnek olay araştırmaları, tanımlayıcı örnek araştırmalarıdır. Tanımlayıcı durum çalışması teoriye göre seçilen araştırma soruları ile belli bir teorik çerçeve takip edilir (Güler, Halıcıoğlu ve Taşğın, 2015).

Yapılmış olan bu çalışmada önceden belli olan bir teoride ispat süreci aşamalarına göre üstün yetenekli tanısı almış öğrencilerin bir ispatı oluşturma süreçleri detaylı ve derinlemesine incelemek esas alındığından tanımlayıcı durum çalışması ve seçilen grubun aynı durumda olması sebebiyle bütüncül ve tek durum çalışması kapsamında incelenebileceği söylenebilir. Bütüncül tek durum çalışması tek bir birey, kurum, okul gibi tek bir analiz biriminden oluşmaktadır. Çok iyi formüle edilmiş bir kuramın teyit edilmesi veya çürütülmesinde, genel standartlara çok fazla uymayan aykırı durumların çalışılmasında veya hiç kimsenin çalışmadığı ve ulaşılamayan durumlarda tek durum çalışması kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

3.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu 2020-2021 eğitim öğretim yılında Aydın Bilim Sanat Merkezine devam eden 8. sınıf öğrencileri arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilen 5 öğrencidir. Maxfield ve Babbie (1998), amaçlı örneklemeyi araştırmacının evren ile alakalı kendi bilgi ve çalışmanın amacına bağlı olarak seçtiği örneklem türü olarak ifade eder. Araştırmacı önce evrende amacına uygun varyasyonlardan birini belirler ve bu varyasyona uygun örneklem seçer (Güler vd., 2015). Ayrıca amaçlı örnekleme çalışmanın amacına göre bilgi açısından zengin durumların seçilerek derinlemesine araştırma yapmaya fırsat verir (Büyüköztürk vd., 2019). Çalışma üstün yetenekli tanısı almış öğrenciler ile yapılmıştır. Clark (2008), üstün yetenekli öğrencilerin bilişsel olarak meraklı olmaları, ilgi duydukları konuda yaşlarının üzerinde konsantrasyon ve problem çözme azmi ve üst düzey problem çözme becerisine sahip olduklarını belirtmiştir. Bu öğrenciler neden sonuç ilişkisini merak etmekte, öğrendiklerini kolay hatırlamakta ve karşılaştığı durumların nedenlerini öğrenmeye ihtiyaç duymakta ve karşılaştığı problemlere alternatif çözümler getirebilmektedir (Gür,2017). Çalışmanın konusu olan ispatın ise akıl yürütmenin özel bir formu olduğu (Arslan, 2007) ve bu sürecin keşfetme, stratejiler geliştirme, varsayımda bulunma, soyutlama ve genelleme gibi üst düzey beceriler barındırması (Almeida, 1996) sebebiyle üstün yetenekli öğrenciler çalışma grubu olarak seçilmiştir. Çalışmada ölçüt örnekleme, konu ile ilgili belirlenen niteliklere sahip öğrenci seçimine fırsat verdiği için tercih edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin sınıf düzeyi ilerledikçe (6. sınıftan 8'e doğru) cebir kullanarak doğru sonuca ulaşma yeterliliklerinde artış olduğu bulgulanmıştır (Arslan 2007; Çalışkan 2012). Bu sebeple katılımcı grup 8. sınıf öğrencileri ile yapılması uygun görülmüştür. Ölçüt örneklemede temel nokta önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan durumlarla çalışılmasıdır. Bahsedilen ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir veya daha önceden hazırlanmış bir liste kullanılabilir (Yıldırım, Şimşek 2018).

Çalışmanın konusu olan ispat oluşturma; akıl yürütme, genelleme, soyutlama, kavramlar arasındaki ilişki kurma, önceki bilgileri kullanma gibi beceriler gerektirdiğinden öğrenci seçimi öğretmen görüşü ve çalışmaya katılmak için gönüllü olmak ölçütlerine göre yapılmıştır. İlgili kurumda çalışan ve öğrencileri uzun süredir tanıyan iki matematik öğretmeninin görüşü doğrultusunda altı öğrenci belirlenmiş ve gerekli izinler alındıktan sonra çalışmaya gönüllü olan beş öğrenci ile çalışma gerçekleştirilmiştir. Nitel araştırmalarda örneklem büyüklüğünü belirlemek için bir kural yoktur ve örneklem büyüklüğü araştırmanın amacı, bilinmek istenen durumlara, güvenirliğin ne olacağına ve mevcut durum ve kaynaklara göre değişmektedir (Patton, 2018). Çalışma üst düzey ispat beceri soruları içerdiğinden ve yanıtların uzun olması ve derinlemesine bir araştırma amaçlandığından katılımcı sayısı beş kişi ile sınırlı tutulmuştur.

Çalışmaya katılan öğrencilerin isimleri gizli tutulmuş olup öğrenciler Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö5 olarak kodlanmıştır. Katılımcılar ile ilgili bazı bilgiler aşağıda sunulmuştur.

Ö1: Öğrenci devlet okulunda öğrenimine devam etmektedir. Bilsem'e 4. sınıfta katılmıştır. En sevdiği dersin matematik olduğunu ve okulda matematik öğretmeni tarafından tübitak projeleri için sıklıkla seçildiğini belirtmiştir. En son katıldığı projede 'Topolojik Düğümler' konulu proje hazırladıklarını ifade etmiştir.

Ö2: Öğrenci özel bir okulda öğrenim görmektedir. 4. sınıftan itibaren Bilsem'e devam etmektedir. En sevdiği dersin matematik olduğunu, matematik ile uğraşmaktan keyif aldığını ve Bilsemdeki matematik öğretmeni tarafından matematik olimpiyatlarına katılmak için seçildiğini ifade etmiştir.

Ö3: Öğrenci özel okulda öğrenim görmektedir. Bilsem'e 2. sınıftan beri devam etmektedir. Daha çok bilime yönelttiğini düşündüğünden felsefe ve fen derslerini sevdiğini ifade etmiştir. Aslında matematiği sevdiğini ancak LGS sürecinde matematikten soğuduğunu buna sebep olarak matematik sorularının çok zor olduğunu düşündüğünü ve matematiğe çok çalışıp her seferinde fazla yanlış çıkardığı için kendine olan güvenini kaybettiğini belirtmiştir.

Ö4: Öğrenci öğrenimine özel okulda devam etmektedir. Bilsem'e 4. sınıftan beri devam etmektedir. En sevdiği dersler arasında matematik ve fen olduğunu ifade etmiştir. Bilsemdeki matematik öğretmeni tarafından matematik olimpiyatlarına katılmak için seçildiğini belirmiştir.

Ö5: Öğrenci özel bir okulda öğrenim görmektedir. 2. sınıftan beri Bilsem'e devam etmektedir. En sevdiği dersin matematik olduğunu ifade etmiştir. Daha önce katıldığı Türkiye Zekâ Vakfı satranç turnuvasında il ve ilçe birinciliği elde ettiğini belirtmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Çalışma nitel araştırma kapsamında ele alınmıştır. Veri toplama araçları olarak İspat Testi ve İspat Görüşme Formu kullanılmıştır. Çalışmada kullanılan veri toplama araçları detaylı olarak aşağıda açıklanmıştır.

3.3.1. İspat Testi

Verilerin toplanmasında klinik görüşme tercih edilmiştir. Görüşme en az iki kişi arasında sözlü olarak sürdürülen bir süreçtir. (Büyüköztürk vd., 2019). Merriam (1998), nitel görüşmenin asıl amacının katılımcıların fikirlerini derinlemesine incelemek olduğunu ifade etmiştir. Patton (2002), katılımcıların duygu, düşünce ve niyet gibi bilgilerini elde etmede gözlemin yetersiz olduğu, bunun için görüşme yönteminin daha uygun olduğunu ifade eder (Ersoy, 2016). Çalışmada öğrencilerin ispat oluşturma süreçlerini derinlemesine inceleme amaçlandığından klinik görüşme tekniği tercih edilmiştir. Çalışmanın katılımcı grubu belirlendikten sonra gönüllü olan öğrencilerin velilerinden görüşme izni alınıp öğrencilerin uygun gördüğü yer ve zamanda görüşmeler yapılmış ve ses kaydı için veli ve öğrenci onayı alındıktan sonra görüşmelerin ses kayıtları alınmıştır.

İspat Testi soruları hazırlanırken Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıf ders kitapları incelenmiş ve MEB'in hazırlamış olduğu Eğitim Bilişim Ağı (EBA) ders konu anlatım videoları izlenmiş, sorular kitaplardan ve Eba platformundan ispatı ile anlatılan konulardan seçilmiştir. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), hazırladığı raporda her kademeden tüm öğrencilerin matematiksel ispat yapma yeteneğinin ve muhakeme etme becerisinin geliştirilmesi gerektiği üzerine odaklanmıştır. Ortaokul matematik müfredatında 'teorem', 'aksiyom' gibi kavramların olmaması sebebiyle ispat konusuna ilişkin kazanım bulunmamaktadır (Güler ve Dikici, 2012) fakat MEB 2009 öğretim programı incelendiğinde doğrudan ispat konusu olmasa da ispat ile ilişkilendirilebilecek;

'Mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir',

'Matematiksel problemleri çözme süreci içinde kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir',

'Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminoloji ve dili doğru kullanabilecektir',

'Model kurabilecek, modelleri sözel ve matematiksel ifadelerle ilişkilendirebilecektir' gibi kazanımlara yer verilmiştir. Üstün yetenekli öğrencilerin yaşıtlarına göre kavrama, anlama, soyut düşünme gibi özelliklerinin daha ileri düzey olduğu bilindiğinden öğrencilerin performansını daha üst düzeye çıkarabilecek zorlayıcı etkinlikler ile karşılaştırılması gerektiği bulgulanmıştır (Türk, 2018). İspat oluşturma sürecinin üst düzey bilişsel beceri gerektirdiği düşünülürse, çalışmada kullanılan İspat testinin öğrenciler için uygun bir etkinlik olduğu

düşünülebilir. Öğrencilerin İspat sürecini incelemeye yönelik altı soru hazırlanmış ve konuda uzman iki öğretim üyesi ve danışman hocadan uzman görüşü alınmıştır. Pilot çalışma sonrası çalışmadan bir soru çıkarılmış ve toplam beş soru ile asıl çalışmaya geçilmiştir.

3.3.2. İspat Görüşme Formu

Öğrencilerin ispat ile ilgili deneyimleri ve ispat yapmanın önemi hakkında ne düşündüklerini irdeleyebilmek için iki sorudan oluşan İspat Görüşme Formu kullanılmıştır. İspat Görüşme Formunun amacı öğrencinin daha önceden ispat etkinlikleriyle karşılaşıp karşılaşmadığı, karşılaştıysa nerede karşılaştığı ve ispat yapma ile ilgili ne düşündükleri, ispat yapmanın önemi ve onlara ne kazandırabileceği ayrıca İspat Testi ile ilgili ne düşündükleri, soruları nasıl buldukları hakkında bilgi edinilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin ispat ile ilgili görüşlerinin alınması ispat oluşturma süreci hakkında derinlemesine ve ayrıntılı bilgi edinmek için tamamlayıcı ve önemli görülmektedir.

3.4. Uygulama Süreci

3.4.1. Pilot Çalışma

Uygulama sürecine, 2020-2021 eğitim öğretim yılı ikinci döneminde araştırma izninin Aydın İl Milli Eğitim tarafından onaylanması ile başlanmıştır. Öncelikle çalışma grubunun belirlenmesi için Aydın Bilsem okul müdürü ve 8. sınıf öğrencilerini uzun süredir tanıyan iki matematik öğretmeninin katıldığı toplantı yapılmıştır. Toplantının başında çalışmaya dair bilgiler araştırmacı tarafından öğretmenlere aktarılmış ve öğrenci seçimine başlanmıştır. Okul müdürü tarafından 8. sınıf tüm öğrencilerin listesi çıkarılmış öğretmen görüşüne göre asıl çalışma için altı öğrenci ve pilot çalışma için sekiz öğrenci belirlenmiştir. Öğrenciler belirlendikten sonra belirlenen öğrenci ve velileri aranarak çalışma için onay istenmiştir. Asıl çalışma için beş öğrenci, pilot çalışma için beş öğrenci çalışmaya katılmak için gönüllü olmuştur.

Öğrenci ve velilerden çalışma için onay alındıktan sonra pilot çalışmaya geçilmiştir. Öğrenciler ile görüşülüp çalışma için uygun yer ve zaman belirlendikten sonra yaklaşık 60 dk süren klinik görüşme yapılmıştır. Pilot çalışma sırasında ses kaydı için öğrenci ve velilerden izin alınmıştır. Her öğrenci görüşmesinden sonra ses kayıtları dinlenmiş, bir sonraki çalışmanın daha iyi yönetilebilmesi için eksiklikler ve hatalar tespit edilmeye çalışılmıştır. Pilot çalışma sonunda öğrencilerin seviyesinin üstünde olduğu ve ispat sürecini ortaya çıkarmadığı düşünülen bir soru testten çıkarılmıştır. Çalışma esnasında tespit edilen ve anlamayı güçleştiren küçük kelime hataları da düzeltildikten sonra üç geometri ve iki cebir olmak üzere toplam beş soru ile asıl çalışmaya geçilmiştir.

3.4.2. Asıl Çalışma

Asıl uygulama 2020-2021 eğitim öğretim yılı ikinci döneminde Aydın Bilim Sanat Merkezine devam eden beş öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrenciler ile görüşme için zaman belirlenmiş ve yaklaşık 60 dakikalık klinik görüşme yapılmıştır. Görüşme başında öğrencilere çalışma ile ilgili kısa bilgi verilmiş ve öğrenciler ile velilerin izni dahilinde konuşmalar ses kaydına alınmıştır. Bazı öğrencilerin talebi üzerine üç görüşme liselere giriş sınavından sonraya bırakılmıştır. Her görüşme sonrası alınan ses kayıtları o gün transkript edilmiş böylelikle veri kaybetmenin önüne geçilmeye çalışılmıştır. Görüşmede İspat testi ve İspat Görüşme Formu uygulandıktan sonra öğrencilere sorular hakkında ne düşündükleri ve daha önce bu tip sorular ile karşılaşıp karşılamadıkları sorulmuştur. Böylelikle öğrencilerin ispat süreçleri bir bütün olarak incelenmeye çalışılmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Nitel analiz, verileri bulgulara çevirme işlemidir. Başka bir deyişle verinin anlamını dışarı aktarma sürecidir ve bu işlemin herhangi bir formülü yoktur (Patton, 2002/2014, s. 432). Nitel araştırmada veri analizi, verilerin hazırlanması, metinlerin ve görsel verilerin organize edilmesi, kodlanması daha sonra kodların bir araya getirilip temalara indirgenmesi ve son olarak verilerin şekiller, tablolar veya tartışma şeklinde sunulmasını içerir (Creswell, 2021). Çalışmada betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Betimsel analiz tekniği ile analiz edilen veriler önceden belirlenmiş temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Bu teknikte elde edilen verileri çarpıcı bir biçimde sunmak için doğrudan alıntılara sıklıkla yer verilir. Elde edilen veriler önce sistematik bir şekilde betimlenir daha sonra betimlemeler açıklanır, yorumlanır, neden-sonuç ilişkileri irdelenip sonuçlara ulaşılır. Çalışmanın nitel veri seti, ses kayıtları, İspat Testi ve İspat Görüşme Formundan elde edilmiştir.

Çalışmanın veri analizinde, Boero'nun ispat safhaları temel alınmıştır. Heinze ve Reiss (2004), Boero modelinin uzmanların bilimsel matematikteki ispatlarına atıfta bulunduğunu ve bu aşamaların öğrencilerin ispat aşamalarından farklı olacağını ifade etmişlerdir. Bu nedenle öğrencilerin ispat süreçlerini inceleyip değerlendirmek için aşağıda verilen kodlama ve kategorilere göre uyarladıkları Boero modeli veri analizinde kullanılmıştır.

Tablo 3.1. Boero ve Heinze-Reiss İspat Süreç Aşamaları

Boero Modeli	Heinze ve Reiss Modeli
Varsayımın Üretilmesi · Sorun durumunun araştırılması · Düzenliklerin belirlenmesi · Belirlenen düzenliklerin gerçekleştiği koşulların belirlenmesi · Üretilen varsayımın akla yatkınlığı için argümanların belirlenmesi	Problem durumunun araştırılması · Olası bir varsayım üretilmesi · Derslere destek veren farklı argüman türlerinin tanımlanması · Problem durumu ile ilgili çizimlerin ve ölçümlerin yapılması
Varsayımın metinsel paylaşımlara göre formüle edilmesi · Tam olarak formüle edilmiş bir varsayım sağlamayı amaçlar ve daha sonra revize edilebilir · Bu aşama genellikle yayınlanabilir bir metne götürür	Paylaşılan metinsel geleneklere göre varsayımın ifade edilmesi ve kesin formülasyonu ·Yapılan formülasyon ileriki süreçlerde revize edilebilir
Varsayımın içeriğinin ve geçerlilik sınırlarının araştırılması · Tezler ve hipotezler arasında sezgisel, anlamsal, biçimsel detaylandırmalar · Varsayımı doğrulama için uygun argümanların belirlenmesi ve bunlar arasındaki olası bağlantıların tasarımı	Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması · Varsayım ile ilgili geniş bilgi toplama · Varsayım hakkında iyi bilinen gerçekleri hatırlama · Bilginin deneysel verilerle karşılaştırılması
Tutarlı ve teorik argümanların seçilmesi ve kombinasyonu · Tutarlı ve teorik argümanların sıklıkla benzeşik durum veya uygun özel durum rehberliğinde tümdengelimsel zincir içinde birbirine bağlanması	Bir önceki aşamanın varsayıma kanıt sağlayabilecek unsurları birleştirilir. · Tümdengelim zincirinde ispatın taslağını oluşturabilecek tutarlı argümanların birleştirilmesi · İspatın kaba planının matematiksel argümanlar ile yapılması
Bir önceki aşamada zincirlenmiş argümanların mevcut matematiksel standartlara göre kabul edilebilir bir kanıta göre düzenlenmesi · Bu aşama yayınlanabilir bir metnin üretilmesine fırsat verir · Bu aşamada argümanların zincirlenmesinde farkedilen hata problem durumunun yeniden keşfedilmesini gerektirir.	Öğrencilerin ispat sürecinin son aşamasıdır · Bir önceki aşamadaki argümanalar matematik standartlarına göre yazılması · İspat süreci hakkında geriye dönük genel bakış sunma
Resmi bir kanıta yaklaşma	Biçimsel kanıta yaklaşma okul matematiğinde oluşmaz

Çalışmada elde edilen veriler, yukarıda kodlamaları verilen süreçlere göre analiz edilmiştir. Aşağıda uygulama sürecinde elde edilen veriler doğrudan alıntılama yapılarak karşılık geldiği süreç ile birlikte verilmiştir. Burada A araştırmacıyı, Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5 katılımcıları temsil etmektedir. Koyu yazılmış kısımlar öğrencinin modele uygun olarak geçirmiş olduğu aşamaları temsil etmektedir.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö4: Mesela dört kenarlı bir çokgenin iç açıları toplamını nasıl bulabiliriz ya da kaç kenarlı ise iç açıları toplamını nasıl bulabiliriz. Bunun bir formülü var mı? Varsa ifade ediniz diyor. **(Problem durumunun araştırılması)**

Ö4: Şimdi şöyle bakınca her kenar artınca 180^0 artış var. O zaman başlangıçta üç tanesi için, (n-1) x180^0 gibi bir şey olabilir mi? **(Varsayımın ifade edilmesi ve kesin formülasyonu)**

A: İstersen çizimlerde yapabilirsin

Ö4: Tamam. (Üçgen, dörtgen ve beşgen çizer). Şimdi üç kenar 180, dört kenar 360, beş kenar 540. Şimdi burada (çizdiği üçgenin bir kenarını gösterir) 60 oluyor, dörtgende 90, beşgende 108 oluyor. Düzgün bir şekil olduğunda bunlar oluyor, ama düzgün olmak zorunda değil ama daha rahat görmek için düzgün diye adlandırdım. **(Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

Acaba bir sayıdan çıkarıp mı 90 ile çarpsak?

A: Peki altıgenin iç açı toplamı ne olur?

Ö: Altıgenin 720^0 olur.

A: Peki nasıl buldun 720^0'yi?

Ö4: 3,4,6,8 yaptım ama bunun bir formülü olması lazım. Onun formülü şu an aklıma gelmiyor duymuştum aslında formülü ama….

Üç tane üçgenin üç tane 60 derece...İç açıları toplamı 180 oluyor. Dört tanesi 360, 90+90+90+90'dan...Kenar sayısı ile şeyi çarpıp kaçı çarpıp işte olmuyor öyle olunca da…. **(Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

Üçgenin içinde kaç tane üçgen oluştuğuna mı baksam acaba?

Mesela dörtgende iki üçgen oluşur ve üçgenin iç açı toplamı 180 derece olduğundan 360, beşgende üç tane üçgen oluyor 180+180+180=540… Galiba çıktı. **(Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

A: Genel formüle edebilir misin?

Ö4: O zaman kenara göre kaç üçgen oluştuğunu bulayım. Üç kenarda bir üçgen, dört kenarda iki, beş kenarda üç üçgen oluşuyor. O zaman (n-2) x180^0 oluyor**.** Yani kenar sayısından iki çıkardığımızda bu bize o üçgenin içinde ne kadar üçgen olduğunu gösteriyor. Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180^0 olduğuna göre böylece şeklin iç açılarının toplamının kaç derece olduğunu biliyoruz. **(Tümdengelim zincirinde ispatın taslağını oluşturabilecek tutarlı argümanların birleştirilmesi ve varsayımın genel bir gösterim ile ifade edilmesi)**

A: Soruyu okuyup ne istediğini anlatır mısın?

Ö1: (Soruyu okur) Bizden eşkenar bir dörtgenin alanını hesaplamamızı istiyor ve sadece köşegen uzunluklarını kullanarak. (**Problem durumunun araştırılması)**

Ö1: Köşegen uzunlukları eşit mi oluyordu? Olmuyordu sanırım. Eşkenar, kenarları hepsi eşittir.

A: Kareden farkını biliyor musun

Ö1: İç açıları mı eşit değildi. Açılar ile alakalıydı sanırım. Sanırım bunların uzunlukları eşit değil. (**Problem durumunun araştırılması)**

Şimdi eşkenarı çizdiğimizde bunlar (köşegenlerden bahseder) birbirini dik keser. Benim bildiğim köşegen uzunluklarını çarpıp ikiye böldüğümüzde alanını bulabiliriz**. (Varsayımın ifade edilmesi ve kesin formülasyonu)**

Bunun nedeni köşegenlerden iki tane üçgen elde ederiz. İki üçgenin alanını toplayacağız**. (Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

Ö1: Normalde bunun formülü köşegen uzunlukları çarpımı bölü 2 yapıyorduk. Köşegenlerin ayırdığı iki tane ayrı ayrı üçgen olarak düşünürsek alanları toplamından bulabiliriz**.** (Köşegenleri gösterir) Buna 2a desek buna 2b diyelim. (Üçgenin birini gösterir) Burası a.2b/2 olur. Diğeri de aynı. Toplarsak aynı sonuç çıkar. **(Tümdengelim zincirinde ispatın taslağını oluşturabilecek tutarlı argümanların birleştirilmesi ve varsayımı genel bir gösterim ile ifade edilmesi)**

A: Soruyu okuyup bana ne sorduğunu söyler misin?

Ö3: Sayının 5'e tam bölünüp bölünmeyeceğine nasıl karar verilebilir. Kuralı bilmiyor olsam**…. (Problem durumunun araştırılması)**

A: Kuralı biliyor musun?

Ö3: Evet. Sonu 5 veya 0 olacak. (**Varsayımın ifade edilmesi ve kesin formülasyonu)**

Kuralı bilmiyor olsam önce basit sayılar ile kuralı anlamaya çalışırdım. Çünkü sınavlarda da böyle yaparım...5-10-15-20… diye giderdim. Yani son basamaklarının 0 veya 5 olduğunu fark etmek çok uzun sürmez. Buradan çıkarırdım. (**Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

A: Sonsuz sayı olduğunu düşünürsek... Hepsinin 0 veya 5 ile bittiğinden nasıl emin olabilirsin?

Ö3: Çünkü doğrusal gidiyor.

A: Doğrusaldan kastın nedir?

Ö3: Yani mesela hepsi 5 artıyor diye yazsam. O zaman y=5x olur. Çünkü hep 5 artmış ve 5 ten başlıyor. Doğrusal gitmek zorunda ve hep aynı sayıyı ekliyorum. Doğrusal grafikten çıkartırdım. Sürekli 5 eklediğim için doğrusal bir grafik olur. (**Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

A: Büyük bir sayı düşünelim. Bölme işlemi yapmadan 5 ile bölünüp bölünmediğini nasıl anlarsın?

Ö3: 10 un 5 ile bölünebildiğini biliyoruz, 100 ün 10 ile bölündüğünü biliyoruz, 1000 in 100'e bölündüğünü, 10000 in 100'e bölündüğünü zaten biliyoruz. Mesela 87 540 olsa benim sayım direk 10'un 5'e bölündüğünü biliyorum, 10 un yüze ve 1000'e bölündüğünü de biliyorum. 80000 de 10000'e bölünür. Yani yüzler, binler ve on binler basamağının çok bir önemi yok. Geriye 40 kalır. 40 da 10 bölünür ve 5 de 10 ile bölünür. (**Tümdengelim zincirinde ispatın taslağını oluşturabilecek tutarlı argümanların birleştirilmesi)**

A: Bunu genel bir formül ile gösterebilir misin?

Ö3: Onu nasıl yapabilirim? Birazcık içine sözcük katsam…Nasıl yazacağımı tam olarak bilmiyorum da...Baya sözcük karıştı içine nasıl formül ile yazacağımı bilemedim… Bunu nasıl formüle edebilirim? n basamaklı bir sayıdan 5 in katı olduğunu bildiğim sayıyı çıkartarak sayıyı sayıyı küçültür ve bölünüyor mu bakarım. n-5k=5k olur… **(Öğrencinin bir önceki aşamadaki argümanlarını matematik standartlarına göre yazıp, formüle edemediğini gösterir)**

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu söyler misin? **(Öğrenci problem durumunu açıklamadan varsayımı ifade etme aşamasına geçiyor)**

Ö2: Mesela 2'den yola çıkarsak, 2^6 ile 2^9'u çarptığımda direkt üslerini toplarım. Sayıların değerlerini bulmama gerek yok yani. **(Varsayımın ifade edilmesi)**

A: Peki üsleri neden topladın?

Ö2: Bunu kural olarak öğretiyorlar ama kurala vurmayacak olursak yine küçük sayılarla ben bunu şey yapardım bence.

A: Nasıl yapardın?

Ö2: Mesela $2^2 \times 2^3 = 2^5$ yapar. Bunların değerlerini biliyorum 4 ve 8 olduğunu ve sonuç olarak

$32 = 2^5$ olduğunu biliyorum. Daha küçük sayılar ile doğru mu diye kontrol edebiliyorum. **(Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

A: Şu an kuralı kontrol ettin. Kuralı bilmeseydin peki?

Ö2: Kuralı bilmeseydim eğer bunu 3 veya 5 ile de denerdim. 3 ile denediğimizde yine aynı şey çıkar. 3 ile 9 un çarpımı 27 yapar. $3^1 \times 3^2 = 3^3 = 27$ olur. **(Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi ve olası ispatın kabaca planlanması)**

A: Peki yazdığın 2^6' nın anlamını biliyor musun?

Ö2: 6 tane 2'nin çarpımı. Aslında asal çarpanlarına da ayırabiliriz. 4, iki tane 2'nin çarpımı; 8, üç tane 2'nin çarpımı toplamda 5 tane 2'nin çarpımı olur. **(Tümdengelim zincirinde ispatın taslağını oluşturabilecek tutarlı argümanların birleştirilmesi)**

A: Genel bir ifade ile gösterebilir misin?

Ö: $x^y \cdot x^z = x^{y+z}$ olur. (x.x.x…x) y tane. (x.x.x…x) z tane= x^{y+z} olur. **(Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet)**

3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Bilimsel araştırmanın en önemli ölçütlerinden birisi sonuçların inandırıcılığıdır. Geçerlik ve güvenirlik bu yüzden bir çalışmada en önemli ölçütlerdendir. Bunun için çalışmada iç ve dış geçerliğin ve güvenirliğin sağlanmasına özen gösterilmiştir. Nitel araştırmada geçerlik araştırmacının olguyu olabildiğince yansız ve tarafsız gözlemesi anlamına gelir (Yıldırım, Şimşek 2018). Güler vd. (2015), nitel çalışmalarda iç geçerliğin sağlanmasında amaca yönelik örneklem seçiminin önemli olduğunu ve katılımcıların çalışmayı en iyi temsil edebilecek kişilerden oluşması gerektiğini ifade etmiştir. Çalışmada örneklem seçiminde objektiflik ön planda tutulmuş katılımcıların seçimi çalışmadaki ölçütlere göre yapılmıştır. Ayrıca nitel çalışmaların dış geçerliğini yükseltmek için transfer edilebilir olması önemli görülmektedir. Transfer edilebilir olmanın başında detaylı tanımlamalar gelmektedir (Güler vd., 2015). Çalışmanın okuyucular tarafından eksiksiz anlaşılabilmesi için çalışmanın safhaları ve katılımcı özellikleri detaylı biçimde açıklanmıştır. Ayrıca ölçme aracının geçerliği ölçmek istediği özelliği ne derece doğru ölçtüğü ile ilgilidir (Büyüköztürk vd.,2019). Çalışmada kullanılan ölçme aracı uzman görüşleri doğrultusunda hazırlanmıştır. Bir araştırmada güvenirlik ise elde edilen verilerin tekrar toplanıp aynı sonuçlara varacak işlemlerden geçmesiyle ilgilidir (Ersoy, Saban 2019). Bunun yanında araştırmacının verileri ve ulaştığı sonuçları teyit etmesi için yardımcı yöntemler kullanması gerekir. (Yıldırım, Şimşek 2018). Bu sebeple klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde kodlayıcı güvenirliğine bakılmıştır. Kodlama güvenirliğinin sağlanması amacıyla araştırmacı ve matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapan ve 10 yıllık mesleki tecrübeye sahip bir matematik öğretmeni kodlayıcı olarak belirlenmiştir. Kodlayıcılar araştırma verilerini birbirinden bağımsız biçimde kodlamışlardır. Ortaya çıkan kodlar ‘benzeşen kodlar’ ve ‘ayrışan kodlar’ şeklinde gruplandırılmıştır. Miles ve Huberman’a (1994) göre, kodlayıcı güvenirliği için “Uyuşma Yüzdesi = Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)” şeklinde hesaplanmaktadır. Bu araştırma kapsamında verilen formüle göre hesaplanan Miles ve Huberman uyum yüzdesi %85 olarak elde edilmiştir. Buna göre iki kodlayıcı arasındaki genel uyumun yüksek olduğu ortaya çıkarılmıştır. Bu sayede araştırmada kodlayıcı güvenirliği sağlanmıştır. Ayrıca nitel bir çalışmada ses ve görüntü kayıtların alınması, araştırmacı tarafından doğru ve detaylı bilgi sağlanması ve alıntıların ekleme yapılmadan doğrudan verilmesi güvenirliği arttırmaktadır (Büyüköztürk vd., 2019). Çalışmanın güvenirliğini arttırmak için çalışmanın ses kayıtları alınmış ve çalışmada elde edilen veriler olabildiğince doğrudan alıntılar verilerek sunulmaya çalışılmıştır.

3.7. Araştırmacının Rolü

2020-2021 eğitim öğretim yılı ikinci dönemini kapsayan çalışma gerekli izinler alındıktan sonra araştırmacı tarafından planlanmış ve yürütülmüştür. Araştırmada kullanılan yarı yapılandırılmış İspat Testi ve İspat görüşme Formu uzman görüşü alınarak araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Çalışma grubunu belirlemek için yapılan toplantıda katılımcıların amaca uygun ve doğru bir şekilde seçilebilmesi için araştırmacı tarafından toplantı başında gerekli olan bilgilendirme yapılmıştır. Klinik görüşmeleri yapmak üzere katılımcılar ile görüşme zamanı ve yeri katılımcıların istekleri doğrultusunda araştırmacı tarafından ayarlanmıştır. Pilot çalışmadan sonra gerekli düzeltmeler danışman hocanın görüşleri doğrultusunda araştırmacı tarafından yapılmıştır. Klinik görüşme öncesi katılımcılara gerekli bilgiler araştırmacı tarafından verilmiş, alınan ses kaydı için veli ve öğrencilerden izni alınmıştır. Devamında hem pilot çalışmalar hem de asıl uygulama araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Görüşme sırasında, araştırmacı katılımcıların çalışmanın amacına hizmet eden düşüncelerini ortaya çıkarmaya çalışmış, katılımcıların cevaplarına müdahale veya herhangi bir yönlendirme yapmamıştır. Son olarak verilerin toplanması, transkript edilmesi, düzenlenmesi ve saklanması araştırmacı tarafından yapılmıştır.

4. BULGULAR

Bu çalışmada üstün yetenekli tanısı almış 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin ve ispata yönelik görüşlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde araştırmanın alt problemlerine ait bulgular ayrı ayrı sunulmuştur. Tüm katılımcılardan klinik görüşme yöntemi ile elde edilen veriler yorumsuz bir şekilde doğrudan alıntı yapılarak aktarılmış, ispat süreci ve ispata yönelik görüş verilerinin sunulmasının ardından ispat süreçlerine dair analizler paylaşılmıştır.

4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular

Birinci alt problem, 'Üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma becerileri nasıldır?' şeklinde belirlenmiştir. Bu alt probleme yönelik bulgular, beş öğrenciyle gerçekleştirilen İspat Testi görüşmelerinden elde edilen bilgilerden yararlanılarak ortaya konulmuştur.

Öğrencilerin ispat yapma sürecine göre geçirmiş olduğu aşamalar her soru sonunda tabloda '✓' işareti ile gösterilmiştir. (A: Araştırmacı; Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5: Öğrenciler)

4.1.1. Birinci Soruya Ait Bulgular

Birinci soruda öğrencilere 'Bir üçgenin iç açıları toplamının 180°, bir dörtgenin 360°, bir beşgenin ise 540° olduğu bilinmektedir. Bu bilgilerden hareketle çokgenin kenar sayısını ile iç açılarının toplamı hakkında ne söylenebilir? Bir çokgenin kenar sayısını bildiğimizde iç açıları toplamını bulabilir miyiz? Varsayımınızı (tahmininizi) genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.' sorusu yöneltilmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, iki öğrencinin varsayımın ispatı için geçerli argüman geliştirebildiği fakat argümanlarını matematiksel standartlarda yazamadığı, üç öğrencinin ise varsayımın geçerliliği için uygun iddiaların belirlenmesi aşamasında kaldığı görülmüştür. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Problemi okuyup ne istediğini bana anlatır mısın?

Ö1: Tamam (Soruyu okur). Şimdi üçgenin üç, dörtgenin dört, beşgenin beş kenarı var. Kenar sayısına n dersek. Altıgenin altı kenarı ve altı köşesi vardır. Köşe sayısına n dersek köşegen sayısı da üç olur. Geçen sene bu konular tam kapanmaya geldi. Eba Tv'den olduğu kadar.

A: Şu an ne yaptığını bana anlatır mısın?

Ö1: Şu şekilde. Dörtgenin veya altıgenin iç açı toplamını bulmaya çalışıyorum. Köşegenlerden yararlanmaya çalışıyorum. Altıgende dört tane üçgen çıktı mesela,

4x180˚= 720˚. Altıgenin 720˚ mesela. 720˚:6=120˚ oluyor bir açısı. Sağlamasını da yaparsam dış açıların toplamı 360˚, 360˚:6=60˚ 180˚-60˚=120˚ oluyor.

A: Peki bunu genel bir formüle dökmek istersek nasıl yaparız?

Ö1: n koyuyorduk ama onu tam olarak hatırlayamadım.

A: Çizdiğin şekilden genellemeye ulaşmak istersen?

Ö1: n acaba köşegen mi kenar sayısı mıydı acaba? (n-2) /n midir?

A: Soruda sana neyi soruyordu?

Ö1: Kenar sayısını bildiğimizde iç açı toplamını bulabilir miyiz?

A: Kenar ve iç açı toplamı arasındaki ilişki evet.

Ö1: Kenar sayısına n dersek köşe sayısı da n olur. (n-2) x180^0'dir.

A: Peki neden 2 çıkarıyoruz?

Ö1: Köşegen sayısını bulmak için diyecektim…Pardon……

A: Şekillerden de yararlanabilirsin?

Ö1: Üçgen çizelim…. Kenarla nasıl bağlantı kuracağımı bilmiyorum.

A: Dörtgen özelinde düşünürsen neden 360˚ olabilir?

Ö1: Çünkü içinden iki tane üçgen çıkıyor. Kenar ile bağlantı kuramadım.

A: Nasıl bir bağlantı kurmak istiyorsun?

Ö1: İçinde kaç üçgen çıkar diye bulmaya çalıştım. Üçgenin iç açılarından yararlanıyoruz.

A: Peki kenar sayısına göre içine kaç üçgen çizebilirsin?

Ö1: Kenar sayısının 2 eksiği kadar.

A: Peki neden iki eksiği kadar acaba?

Ö1: Onu bilmiyorum.

A: Peki bütün çokgenlerde bu geçerli midir?

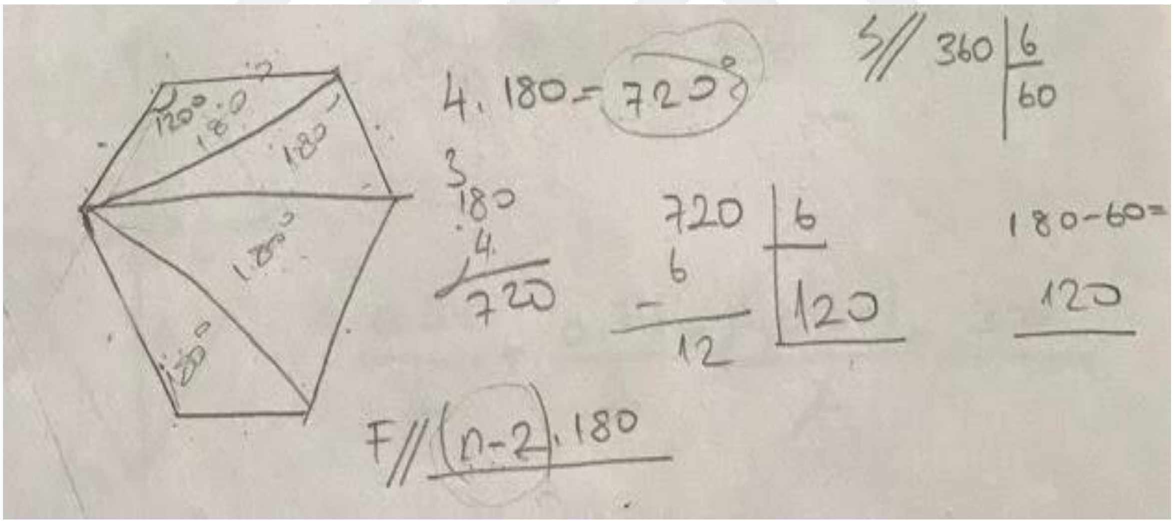
Ö1: Eş olması lazım…Kenar ve açıların bence….

A: Bana özetler misin ne yaptığını

Ö1: Altıgende (n-2) x180˚ dedim. Köşegenlerine ayırdım. Dört tane üçgen çıktı. Dört üçgen her biri 180˚. Onu da dört ile çarparsak toplam iç açısıdır. Her bir açısını bulmak istersek altıya böleriz 120˚ olur.

A: Yazdığın formülü açıklar mısın?

Ö1: n kenar sayısı dersek ya da köşe de olur. İki çıkarıp içindeki üçgen sayısını buluruz.



Şekil 4.1. Ö1 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu okuduktan sonra problem durumu ile ilgili çizimler yapmış fakat problemi kendi cümleleri ile ifade etmeden ispat sürecine başlamıştır. Önceden bildiği köşe-kenar sayısı arasındaki ilişki ve yaptığı çizim üzerinden köşe-köşegen arasındaki ilişkiye odaklanarak varsayım üretmeye çalışmıştır. Öğrencinin ispat sürecine ilişkin kullandığı sezgisel adımlara bakıldığında ilk olarak çizdiği şekil ve bildiği tanımlar üzerinden varsayım üretmeye çalıştığı görülmektedir. Çizdiği düzgün altıgeni kullanarak çokgenin içine çizilebilecek üçgen sayısını fark etmiş bunu kullanarak altıgenin iç açı toplamına ulaşmıştır. Kuralını bildiği dış açı formülü ile bulduğu sonucu doğrulamıştır. Öğrenci varsayım geliştirme aşamasında daha çok önceki bilgilerini hatırlamaya dönük bir çabaya girmiş ve hatırladığı yanlış bir varsayımı öne sürmüştür. Öğrencinin varsayım üretmekten ziyade sürekli olarak öğrendiği bilgiyi hatırlama çabası ezbere öğrendiği bilgilerinin varsayım geliştirmesine ve bunun yanında ispat yapmasına engel olduğu düşünülebilir. Öğrenci ispat süreci aşamalarını farklı sırada geçirmiş geliştirdiği yanlış varsayımın ardından problem durumunu tekrar keşfetmeye çalışmış ve varsayımını revize etmiştir. Varsayımını ispatlamaya yönelik sunduğu argümana bakıldığında yaptığı çizim üzerinden çokgenlerin kenar sayısı ile içine çizilebilecek üçgen sayısı ilişkisini ortaya koymuş tümevarımsal bir çıkarım yapmıştır. Ayrıca öğrencinin, genellediği formülü sadece düzgün çokgenlerde geçerli olduğunu düşündüğü görülmektedir. Bu durum öğrencinin problem durumunu tam anlayamadığı veya ortaya koyduğu varsayımın kapsamını kavrayamadığı olarak düşünülebilir. Son olarak ispatını çokgenlerin iç açı toplamı ve içine çizilebilecek üçgen sayısı ilişkisine dayandırarak varsayımını genel bir gösterim ile ifade etmiş fakat ispatını matematik standartlarında yazamamıştır.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö2: Bunları öğretmişlerdi ama formülleri hatırlamıyorum. Bir çokgenin kenar sayısı ile iç açı toplamı hakkında ne söylenebilir?

A: Kenar sayısını bilirsen iç açı toplamını bulabilir misin?

Ö2: Buluruz. Karşılaştırmayı deneyeceğim.

A: Şekil üzerinde de inceleyebilirsin

Ö2: Dışarıdaki açılar ile ilgili diye hatırlıyorum ama….

A: Mesela dörtgen özelinde düşünürsek neden 360˚ olabilir?

Ö2: Hepsi 90˚ çünkü.

A: Her dörtgenin açıları 90˚ midir?

Ö2: Evet. Öyle değil mi? Öyle olması gerekir. Düşündüğümüzde başka nasıl bir dörtgen olabilir ki? Hala dış açılardan gidiyorum ama…

A: Beşgen özelinde düşünürsek neden 540˚ olabilir?

Ö2: 108˚ mi olur açıların hepsi?

A: Altıgeni bulabilir misin?

Ö2: O da 120˚x6 olur. 720˚ oluyor.

A: 720˚'yi nasıl buldun?

Ö2: Ezberimde vardı. İç açıları bulurken dış açıları da kullanıyorduk diye biliyorum ama…

A: Peki yedigenin iç açı toplamı kaç olur?

Ö2: Bu artık ezberimde olmayan bir şey.

3 kenarlı...180˚

4 kenarlı...360˚

5 kenarlı 540˚

6 kenarlı 720˚'dir.

Yedigen 900˚ mi?

4 kenarlıda üçgenin 2 katı, 5 kenarlıda üçgenin 3 katı, 6 kenarlıda 4 katı…Yedigende 5 katı olur.

A: O bulduğun şey ne?

Ö2: Neye dayanarak böyle gider. n kenarlı diye düşünürsem belki oralardan bir şey çıkarabilirim. Oranlarda aynı değil oradan çıkarmaya çalışsam…

Ö2: Sonra tekrar baksam…

A: Tamam

Ö2: Şey diye düşünsem…Dış açılardan bir şey çıkarmaya çok kararlıydım. Ne olabilir? İç açılarını bilmediğim bir şey deneyeyim. Aklıma gelen her şeyi denemeye çalışıyorum.

(Sekizgen çizer) Sekiz kenarım var kenar sayısını biliyorum açılarını nasıl bulabilirim. Aslında üçgenin iç açı toplamını bilsem, o zaman zaten belli bir katta ilerliyor.

A: O zaman bütün çokgenleri örüntüyü ilerleterek bulabilir misin?

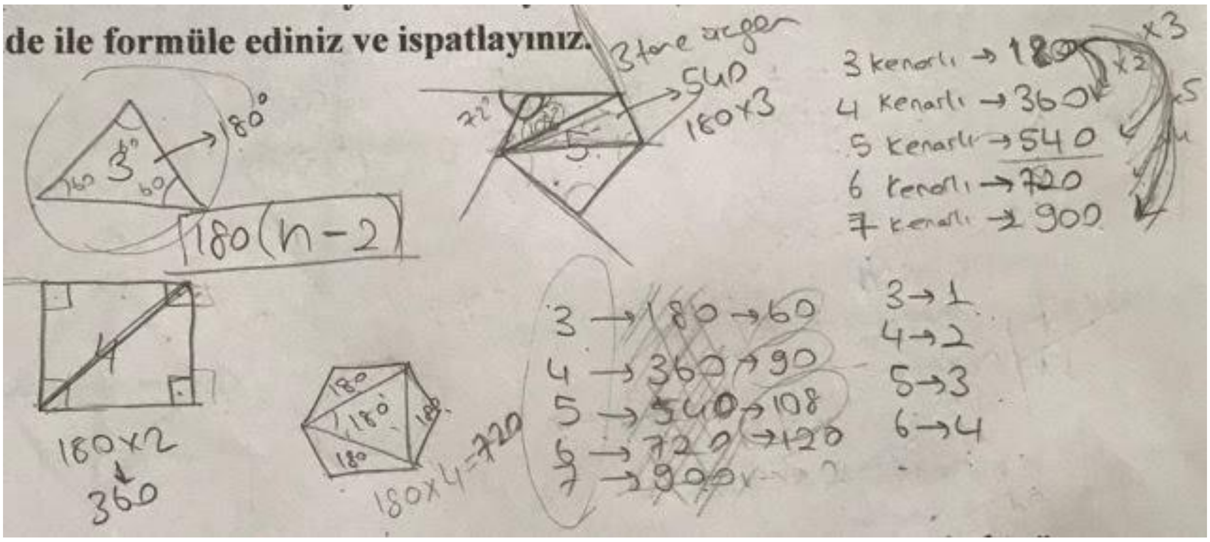
Ö2: Evet o saçma olur. Üçgenler çıkarmaya çalışsam. (Beşgeni gösterir) Üç tane üçgen var içinde o zaman 540˚ =180˚x3 yani, (Dörtgeni gösterir) Bunda iki tane var 180˚x2=360˚, (Altıgeni gösterir)4x180˚=720˚ Evet oluyor.

A: Genel formüle edebilir misin?

Ö2: Her birinde kaç üçgen var? Üçgende bir, dörtgende iki, beşgende üç, altıgende dört yani n kenarlı bir çokgende (n-2) x180˚ olur.

A: Yaptıklarını özetler misin?

Ö2: Bir üçgenin eğer iç açı toplamını biliyorum. Çokgenlerde üçgenler var. Karede iki tane, Beşgende üç tane, altıgende dört tane, böyle gidiyor. Kaç tane üçgen varsa o sayıyı 180˚ ile çarpmamız gerek.



Şekil 4.2. Ö2 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin ispat sürecinin başında problem durumunu kendi cümleleri ile ifade edip netleştirmeden ispat sürecine başladığı problem durumunu keşfetmek yerine probleme ilişkin öğrendiği bilgiyi hatırlamaya odaklandığı görülmüştür. Öğrencinin ilk aşamada varsayım geliştiremediği ve varsayım geliştirme girişiminde ise yine problem durumu üzerinden değil hatırlamaya çalıştığı bilgiler üzerinden argüman geliştirmeye odaklandığı görülmektedir. Bu durum öğrencinin daha önce karşılaştığı durumun varsayım geliştirmesine ve problem durumunu sorgulamasına engel olduğu olarak düşünülebilir. Öğrenci varsayım için argüman geliştirme aşamasından problem durumunu keşfetme aşamasına geri dönmüş ve problem durumunu tekrar ele almıştır. Problem durumunun tekrar gözden geçirmesinin ardından tüm dörtgenlerin her bir açısının 90˚ olduğunu aksi takdirde dörtgen olamayacağını ifade etmesi bu konuda kavram yanılgısına sahip olduğu olarak düşünülebilir. Ayrıca varsayım üretme aşamasında düzgün çokgenleri kullanarak argüman geliştirmesi problem durumunu tam kavrayamadığı anlamına gelebilir. Daha sonra farklı çokgenlerin iç açı toplamı örüntüsünü keşfetmiş ve bunu kullanarak probleme ilişkin bir varsayım ortaya koymuştur. Sonraki süreçte varsayımı ispatlamaya yönelik sunduğu örüntü argümanının kullanışlı olmadığını fark etmiş, varsayımını desteklemek için kendi çizimlerinden yola çıkarak çokgenlerin içine çizilebilecek üçgen sayısı ile kenar sayısı ilişkisini ispata dayanak olarak sunmuştur. Üçgenin iç açı toplamı ve çokgenlerin içine çizilebilecek üçgen sayısı ilişkisini kullanarak tümevarımsal bir çıkarım ile bir sonuca varmıştır. Varsayımını genel bir gösterim ile ifade etmiş fakat ispatını matematik standartlarında yazamamıştır.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö3: Öncelikle bazı cisimlerin iç açılarının toplamını vermiş. Bunların toplamı ile ilgili ne söylenebilir. Kenar sayısı ile arasındaki ilişkiyi soruyor.

A: Tam olarak ne sorduğunu tekrar söyler misin?

Ö3: Kenar sayısı ile iç açıların arasındaki ilişkiyi soruyor. Yeteri kadar kenarla böyle iki boyutlu şekil yapılabildiği andan itibaren iç açıları toplamı 180˚ oluyor, her bir kenar artışında 180˚'lik bir artışla karşılaşıyoruz.

A: İstersen çizebilirsin

Ö3: Üçgen oluşturulabilecek en küçük iki boyutlu şekil ve iç açılarının toplamı 180˚. Bunun kenar sayısı 3 olduğu için buraya (iç açı toplamından bahseder) 3x tarzı bir şey diyebiliriz. O zaman x=60˚ olur ve kenar sayısına x diyecek olursak, her biri (iç açılarından bahseder) 60˚ olur, bu formülün yeterince yanlış olduğunu göstermiş olur bize. Peki, başka ne yapılabilir? (Düşünür. Dörtgen ve beşgen çizer)

A: Dörtgenin iç açı toplamı nedir?

Ö3: 360˚

Ö3: Beşgenin 540˚, sonrasında 720˚.

(Üçgen, dörtgen ve beşgeni düzgün üçgen varsayıp iç açılarını bulur)

Kenar sayısı arttıkça bir açı 30˚ artmış oluyor. Mesela bunun bir eşkenar üçgen olduğunu varsayarsak, (üçgeni gösterir) bunun açısı 60˚, bir dikdörtgende 90˚, bir düzgün beşgende ise 120˚. O yüzden 30'ar 30'ar arttığı için,

A: Düzgün olmak zorunda mı?

Ö3: Bir kenarın sabit kalabilmesini istiyorsak evet ama iç açıları toplamı sorulduğu için böyle olmak zorunda değil ama böyle daha kolay oluyor. Düzgünlerle açıklamak daha kolay olduğu için böyle yapıyorum. Yani şimdi o zaman üçgen en küçük parça olduğu için x alabiliriz, sonrasında her bir kenar eklendiğinde 30˚'lik bir artış oluyor.

(Çokgenlere yazdığı her bir açıya bakar) bir 30˚ arttı, bir 18˚ arttı, 12˚ arttı,

A: Aslında biraz önce bir şey demiştin. Her kenar arttığında bir şey artıyor dedin. Bir kenar arttığında kaç artıyor dedin?

Ö3: Toplamda 180˚ artıyor. Bir saniye…

Bunlardan 30˚ fazla (Dörtgenin bir iç açısının üçgenin bir açısından fazlasına dikkat çeker), bu ayrı bir doksan (Dörtgenin dördüncü açısını gösterir) yine bir 180˚ etti. (Beşgeni gösterir) Bunlardan dört tanesi 18 arttı 72˚ eder, bir tane daha 108˚ var. Bir 180˚ daha etti.

A: Buradan nasıl bir sonuç çıkar?

Ö3: Her kenarla gelen yeni bir açı ve bir iç açının değerinin artması mesela, burada üç var, üçün bir katı şeklinde artıyor, sonrasında 18, sonrasında 12 artıyor. Yani ya 3 ya da 2 ile bir alakası olmalı ya da 6 ile. Ya bulacak gibiyim ama….

A: İstersen bir altıgen çiz.

Ö3: Evet bir altıgen ile devam edelim. Bu etti 720˚ (altıgenin iç açı toplamından bahseder). Her biri 120˚.

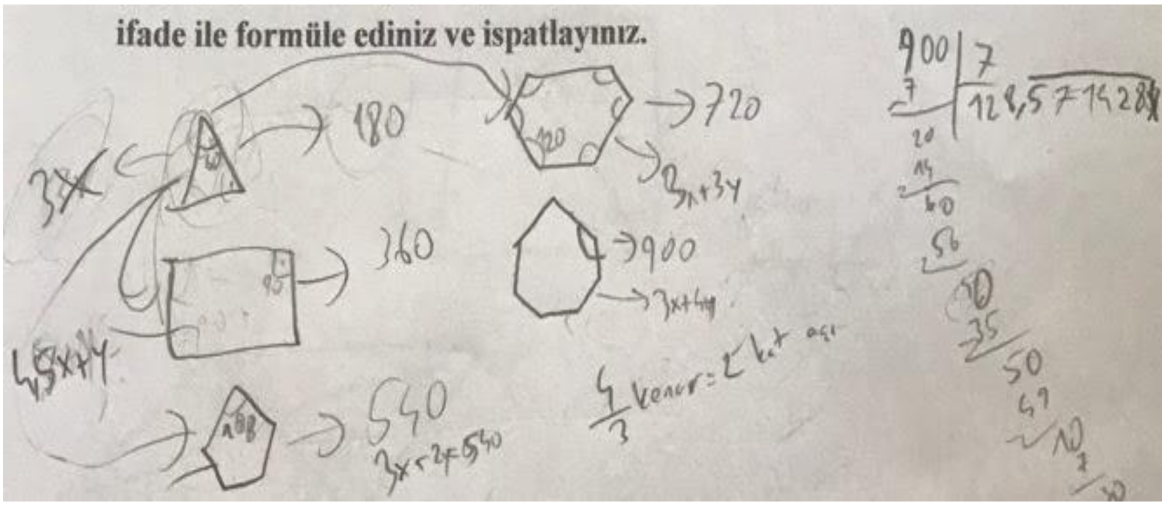
A: Dörtgen 360˚, ya da beşgen neden 540˚ olabilir?

Ö3: Ya da neden altıgenin kenar sayısı üçgenin iki katı iken açıları toplamı 4 katı oluyor?

Sanki ulaşıyorum buradan bir yerlere ama...

(Düzgün olduğunu varsayıp çizdiği üçgen ve dörtgenin iç açılarını oranlar) 3/2 etti. (Düzgün olduğunu varsayıp çizdiği beşgen ve altıgenin bir iç açılarını oranlar) 4/3. Bununla nereye varılır bilmem ama üçgenin iç açılar toplamı dörtgenin 1/3'ü, dörtgenin iç açı toplamı beşgenin 2/3'ü, altıgenin iç açı toplamı beşgenin ¾'ü. Oran yapmayı denedim ama…

Şimdi ben yedigenle devam etmek istiyorum. Bunun bir açısı ne kadar etmeli eğer düzgün olduğunu varsayarsak… 900'ü 7'ye böler. Gelelim asıl sıkıntımıza 900 7'ye tam bölünebilen bir sayı değil. Hiç olmazsa küsuratlı kaç çıkacağına bakacağım…(Bölme işlemine devam eder) Fazla düzensiz devam ediyor. Ben bu işin içinden nasıl çıkıcam devirli olmasını hiç beklemiyordum. Bunlarla bir sonuca varamıyorum.



Şekil 4.3. Ö3 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin varsayımının ispatı için geçerli argüman üretemediği ve ispat sürecini tamamlayamadığı görülmektedir. İspat sürecinin başında problem durumunu kendi cümleleri ile açıklamış, istenen durumu ifade etmiş fakat problem durumundaki iki boyutlu şekilleri cisim olarak ifade ettiği görülmüştür. İspat sürecinin başında, önceden bildiği üçgenin iç açılar toplamına ilişkin teoreme dayanarak varsayım ortaya koymuş fakat ortaya koyduğu varsayım elindeki veriler ile doğrulanmayınca varsayımının yanlış olduğunu ifade etmiştir. Bu durumdan öğrencinin varsayımını desteklemek için önceden öğrenmiş olduğu bilgiyi kullandığı görülmektedir. Öğrencinin ortaya koyduğu varsayımın doğrulanmaması üzerine varsayım geliştirme aşamasına geri döndüğü ve yeni bir varsayım ortaya koymaya yönelik argüman geliştirmeye çalıştığı görülmektedir. Öğrencinin argüman geliştirme aşamasındaki çokgen seçiminde düzgün çokgenleri kullanması problemin özel bir durumundan yararlanmaya çalıştığını göstermektedir. Problemin tüm çokgenler için geçerli olduğunu bilmesine karşın özel bir durum ile çalışmasını daha kolay işlem yapma olarak açıklamıştır. Bu durum öğrencinin kısıtlı bir varsayım üretebileceğinin farkında olmadığı anlamına gelebilir. Yeni bir varsayım ortaya koymak için argüman geliştirme aşaması incelendiğinde düzgün çokgenlerde her bir açının artış oranına odaklanmış fakat argümanını desteklemeyen örnek ile karşılaşıp ispata devam etmediği ve farklı bir argüman geliştirme çabasına girmediği görülmüştür. Öğrencinin tek bir stratejiye odaklandığı fakat sonuç alamayınca farklı strateji geliştirme çabasına girmediği ve ispatı sonlandırdığı görülmüştür. Aynı öğrencinin görüşme formunda bu tip sorular ile hiç karşılaşmadığını, oldukça zorlandığını ve LGS sürecinde matematikten soğuduğunu ifade etmesi ispat yapmaya karşı isteksiz davranmasını açıklayabilir.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö4: (Soruyu okur) Mesela dört kenarlı bir çokgenin iç açıları toplamını nasıl bulabiliriz ya da kaç kenarlı ise iç açıları toplamını nasıl bulabiliriz. Bunun bir formülü var mı? Varsa ifade ediniz diyor. Şimdi şöyle bakınca her kenar artınca 180 artmış. O zaman başlangıçta üç tanesi için (n-1) x180˚ gibi bir şey olabilir mi?

A: İstersen çizimlerde yapabilirsin

Ö4: Tamam. (Üçgen, dörtgen ve beşgen çizer). Şimdi üç kenar 180, dört kenar 360˚, beş kenar 540˚. Şimdi burada (çizdiği üçgenin bir kenarını gösterir) 60˚ oluyor, dörtgende 90˚, beşgende 108˚ oluyor. Düzgün bir şekil olduğunda bunlar oluyor, ama düzgün olmak zorunda değil ama daha rahat görmek için düzgün diye adlandırdım. Acaba bir sayıdan çıkarıp mı 90 ile çarpsak.

A: Peki altıgenin iç açı toplamı ne olur?

Ö4: Altıgenin 720˚ olur.

A: Peki nasıl buldun 720˚'yi?

Ö4: 3,4,6,8 yaptım ama bunun bir formülü olması lazım. Onun formülü şu an aklıma gelmiyor duymuştum aslında formülü ama….

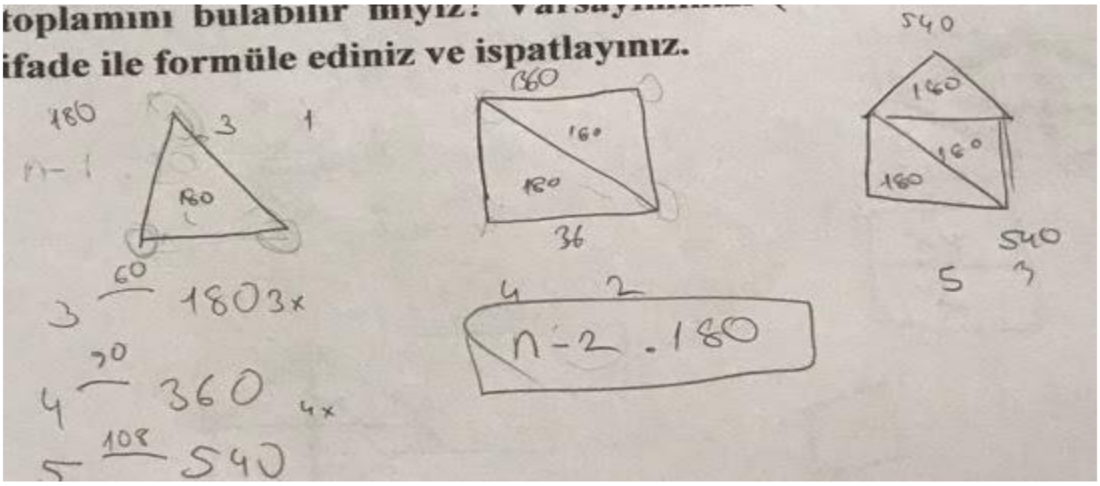
Üç tane üçgenin açısı üç tane 60˚. İç açıları toplamı 180˚ oluyor. Dört tanesi 360˚, 90+90+90+90'dan…...Kenar sayısı ile şeyi çarpıp kaçı çarpıp işte olmuyor öyle olunca da….

Üçgenin içinde kaç tane üçgen oluştuğuna mı baksam acaba?

Mesela dörtgende iki üçgen oluşur ve üçgenin iç açı toplamı 180˚ olduğundan 360˚, beşgende üç tane üçgen oluyor 180+180+180=540˚… Galiba çıktı.

A: Genel formüle edebilir misin?

Ö4: O zaman kenara göre kaç üçgen oluştuğunu bulayım. Üç kenarda bir üçgen, dört kenarda iki, beş kenarda üç üçgen oluşuyor. O zaman (n-2) x180˚ oluyor yani kenar sayısından iki çıkardığımızda bu bize o üçgenin içinde ne kadar üçgen olduğunu gösteriyor. Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180˚ olduğuna göre böylece şeklin iç açılarının toplamının kaç derece olduğunu biliyoruz.



Şekil 4.4. Ö4 kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci ispat sürecinin başında problemi kendi cümleleri ile ifade etmiş, verilen ve istenen koşulları belirtmiştir. Probleme ilişkin çizimler yapmış ve yaptığı çizimlere dayanarak varsayımını ortaya koymuştur. Ortaya koyduğu varsayımı herhangi bir argüman geliştirmeden kuralı hatırlamaya odaklı ve tahmini bir şekilde genelleştirmeye çalıştığı görülmektedir. Varsayımını destekleyecek argümanlar geliştirme aşamasında çokgen seçimi olarak düzgün çokgenleri kullanması özel durumlardan yararlanmaya çalıştığını göstermektedir. Problemin tüm çokgenler için geçerli olduğunu bilmesine karşın özel bir durum ile çalışmasını daha net çıkarımda bulunma olarak açıklamıştır. Öğrencinin düzgün çokgenlerde geçerli olacak varsayımı tüm çokgenler için genelleyebileceğini düşünmesi çokgen-düzgün çokgen kavramlarında kavram yanılgısına sahip olduğu anlamına gelebilir. Varsayım için argüman geliştirme aşamasında öğrencinin ısrarla koşulları sağlayacak genel bir ifade aradığı ve formülü hatırlamaya odaklandığı görülmektedir. Bu öğrencinin daha önce karşılaştığı durumun varsayım geliştirmesine ve problem durumunu sorgulamasına engel olduğu olarak düşünülebilir. Öğrencinin yaptığı çizimleri kullanarak çokgenlerde kenar sayısı ile içine çizilebilecek üçgen sayısı arasında ilişkiyi fark etmiş bu ilişkiye dayalı varsayımını revize ettiği görülmektedir. Son olarak ispatını çokgenlerin iç açı toplamı ve çokgenlerin içine çizilebilecek üçgen sayısı ilişkisini genel bir gösterim ile ifade etmiş fakat ispatını matematik standartlarında yazamamıştır.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu söyler misin?

Ö5: Bize çokgenler ve bunların iç açı toplamını vermiş. Bu çokgenlerin kenar sayısı ile iç açıları arasındaki ilişkiyi bir formül ile ispatlamamızı istiyor. (Üçgen dörtgen ve beşgen çizer). Üçgenin iç açı toplamı 180˚, dört kenar 360˚, beş kenar 540˚'dir. Bir düşüneyim…Öncelikle iç açılarını bulsam 60-90-108-120... şeklinde çıkabilir. Çokgenler daireye yaklaştıkça iç açı arttı. İç açıları 180˚ artıyor zaten...O zaman açıyı 180˚ ile bölersem kenar sayısını bulmam mantıklı olabilir. Ama ben bunların düzgün olduğunu farz ediyorum.

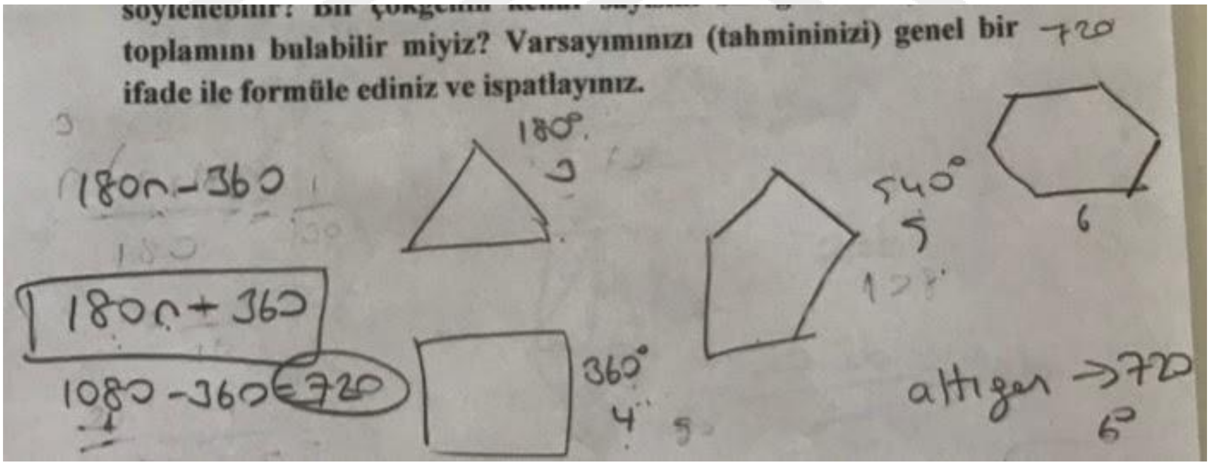
A: Düzgün olmak zorunda mı?

Ö5: Hayır değil. O zaman bunları bölmek pek akıllıca değil. (Düşünür)

Buldum galiba. Ben öncelikle burada örüntü formülü kurmaya çalıştım. Örüntünün birinci terimi 180˚, sonra 360˚-540˚-720˚... Şeklinde giden bir örüntü olduğunu farz etsek, 180˚ artmış. Kenar sayısına n dersem, beşgende 540˚ olması için 180n-360 olması gerekir bunu da diğer üçünde bulduğumda çıkıyor. Yani işe yarıyor.

A: Ne yaptığını bana özetler misin?

Ö5: Öncelikle şekilleri yazdım başta bunların düzgün olduğunu varsaydığım için yanlış bir yola girdim. Daha sonra bunları örüntü şekline döktüm. 180-360-540-720... şeklinde. Örüntü formülünü bulurken kaçar arttığını ve ilk adımı sağlaması için uyarlıyoruz. Burada 180˚ iç açılar artmış. İlk terime ulaşmak için ise bundan 360˚ çıkarmam gerekiyor. Öyle olduğunu düşünüyorum.



Şekil 4.5. Ö5 Kodlu Öğrencinin Birinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu kendi cümleleriyle ifade etmiş, verilen ve istenen koşulları belirlemiş ve çizimler yapmıştır. Öğrencinin bir varsayım ortaya koyabilmek için önceden bildiği bir bilgiyi ortaya attığı ve bir varsayım geliştirdiği görülmektedir. Ortaya koyduğu varsayımın problemin özel bir durumuna yönelik olmasını fark ederek tekrar problem durumunu keşfetmiş ve yeni bir varsayım geliştirme sürecine geri dönmüştür. Öğrencinin bu süreçte karşılaştığı engelin problem durumunu tam kavrayamaması olduğu düşünülebilir. Öğrencinin ikinci geliştirdiği varsayımın ispatına dayanak olarak okulda öğrendiği bir kuralı kullandığı görülmektedir. Öğrenci ispata yönelik tümdengelimsel bir çıkarım ile argüman ortaya koyamamış ispatını önceden ezbere bildiği bir kurala dayandırdığı için ispat sürecini tamamlayamamıştır. Bu durum öğrencinin ispat kavramını bilmediği, bir argümanın ispat kabul edilmesi için sağlaması gereken koşullara hâkim olmadığı olarak düşünülebilir.

Tablo 4.1. Öğrencilerin Birinci Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları

Ana Safhalar	Alt Safhalar	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problem durumunun araştırılması	Problem durumunun doğru bir şekilde açıklanması			✓	✓	✓
	Problem durumu ile ilgili çizimlerin ve ölçümlerin yapılması	✓	✓	✓	✓	✓
Varsayımın ifade edilmesi	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmesi					
	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmemesi	✓	✓	✓	✓	✓
Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi	Önceki tanım ve teoremleri kullanma	✓	✓	✓	✓	✓
	Görsel ve şekilsel modeller Kullanma	✓	✓	✓	✓	✓
	Deneysel ve kurala dayalı argümanlar kullanma					✓
Uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi	Çokgenin içine çizilebilecek üçgen sayısı ile iç açı arasında ilişkisi	✓			✓	
Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet	Teorem1: n kenarlı çokgenin bir köşesinden (n-2) tane üçgen çizilebilir. Teorem2: Bir üçgenin iç açılar toplamı 180^0'dir. Çokgenlerin iç açı ölçüsü, $(n-2).180^0$'dir.					

Birinci soruya ait tablo incelendiğinde iki öğrencinin varsayımın ispatı için geçerli argüman geliştirebildiği fakat argümanlarını matematiksel standartlarda yazamadığı, üç öğrencinin ise varsayımın geçerliliği için uygun iddiaların belirlenmesi aşamasında kaldığı görülmüştür. İki öğrenci varsayımın ispatı aşamasında çokgenlerin iç açı toplamı ile çokgenlerin içine çizilebilecek üçgen sayısı arasındaki ilişkiye dayalı argüman geliştirmiştir. Öğrencilerin formal ispata ulaşmak için kullandığı sezgisel adımlara bakıldığında öğrencilerin probleme ilişkin şekiller çizdiği ve önceden öğrendiği tanımları kullandığı görülmektedir. Bir öğrencinin geçerli varsayım üretebilmek için argüman geliştiremediği, bir öğrencinin ise ispatını ezbere bildiği kurala dayandırdığı görülmektedir. Bazı öğrencilerin varsayım üretmek yerine önceden bildikleri kuralı hatırlamaya odaklandıkları bundan yola çıkarak bu durumun varsayım ve argüman geliştirmelerine engel olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin ispata dayanak olarak sunduğu argümanlara bakıldığında, yaptıkları çizimlerden yola çıkarak önceden bildikleri bilgileri kullandıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin problem durumunun daha özel haline odaklandıkları görülmüştür. İspat sürecinde düzgün çokgenleri kullanmaya eğilimli olması bunun sebebi olarak ise daha kolay işlem yapabildiklerini ifade etmeleri buna örnek olarak verilebilir. Bu durum öğrencilerin problem durumunu tam kavrayamadıkları veya çokgen-düzgün çokgen kavram yanılgısı sebebiyle sınırlı bir varsayım ürettiklerinin farkında olmadıkları olarak düşünülebilir. Son olarak öğrencilerin varsayımlarını matematiksel standartlarda ifade etmede, matematiksel dil ve notasyon konusunda eksik oldukları söylenebilir.

4.1.2. İkinci Soruya Ait Bulgular

İkinci soruda öğrencilere ‘Bir doğal sayının diğer bazı doğal sayılar ile tam (kalansız) bölünüp bölünmeyeceğini, bölme işlemi yapmadan bulmak mümkündür. Bu iş için belirlenmiş bölünebilme kuralları vardır. Peki, verilen bir doğal sayının 5 ile tam bölünüp bölünemeyeceğine, bölme işlemi yapmadan karar verilebilir mi? Hangi şartlarda sayı 5 ile tam bölünebilir? Hangi şartlarda tam bölünemez? Varsayımınızı (tahmininizi) gerekçelerini belirterek genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.’ sorusu yöneltilmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde hiçbir öğrencinin ispat süreçlerini tamamlayamadığı görülmüştür. İki öğrencinin varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi aşamasında, üç öğrencinin ise uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi aşamasında kaldığı görülmektedir. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Soruyu okuyup ne istediğini anlatır mısın?

Ö1: İki basamaklı veya üç basamaklı ise sonunda sıfır varsa veya birler basamağı 5 ise o zaman bölünebilir.

A: Bu kuralı nasıl öğrendin?

Ö1: Okulda bize öğrettiler. Altıya bölerken 2 ve 3'e bölünmesi gerekiyor. 5 ile bölerken 0 veya 5 ile bölünmesi gerekiyor.

A: Peki bunu öğrenmeseydin keşfedebilir miydin?

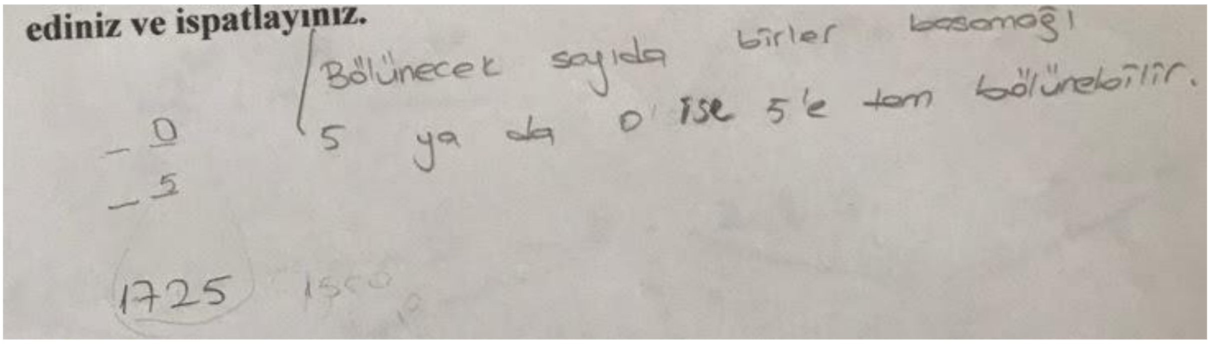
Ö1: 5'i zaten herkes bilir. Küçükken bom diye bir oyunumuz vardı. 10 gelince bom derdik falan…5 tahmin edilebilir. Hep 5 ile veya 0 ile biter.

A: Peki bunu ispatlayabilir misin?

Ö1: 5'in katları hep 5-0 olarak gittiği için mi? Bence öyle. Sürekli 5-0-5-0-5-0… olarak gidiyor. Ondandır.

A: Peki kuralı bilmeseydin çok büyük bir sayıyı beşe bölmeden beş ile bölünebildiğini nasıl bilebilirsin?

Ö1: Bildiğim en büyük 5'in katını düşünürdüm. 10'un kaç katı olabileceğini düşünürdüm. Algoritma tarzı bir şey yapardım belki...Ama yine de o bölme olur. 1500 mesela 150 ile 10 un çarpımıdır. 10 da 5 in katıdır. O yüzden beşe bölünür. 1725 olsun bunda ne yapardım bilmiyorum mesela. Pek bir şey gelmedi aklıma. 5'li kümeler diyeceğim. Aklıma gelmedi.



Şekil 4.6. Ö1 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu kendi cümleleri ile ifade etmeden ve verilen istenen koşulları belirlemeden ispat sürecine başlamıştır. Öğrenci ortaya koyduğu kuralı ilkokulda oyun aracılığı ile öğrendiğini ayrıca bu formülasyonun çok kolay tahmin edilebilir olduğunu söylemiştir. Varsayım üretmek için argüman geliştirmemiş, ezbere bildiği kurala dayanarak varsayımı oluşturmuştur. Varsayımın geçerliliği için sunduğu argümanlara bakıldığında 5'in katlarındaki birler basamağı örüntüsüne odaklandığı görülmektedir. Verdiği deneysel örnekler üzerinden 5'in katlarının hep 0 veya 5 ile bittiğini ifade etmiştir. Varsayımın zaten çok açık olduğunu ifade etmiş, deneysel örneklere dayanarak ispat yapmaya çalışmıştır. Ezbere bildiği durumun öğrencinin argüman geliştirmesine engel olduğu söylenebilir. İfadenin açık olduğunu söyleyerek ispat sürecini kısa sürede sonlandırması çok açık olarak ifade ettiği bazı durumlarda ispata gerek duyulmayacağını düşündüğü ve ispatın önemini bilmediği olarak düşünülebilir.

A: Soruyu okuyup bana ne sorduğunu söyler misin?

Ö2: 5'e tam bölünüp bölünmeyeceğine karar verilebilir? Kuralı bilmiyor olsam…

A: Kuralı biliyor musun?

Ö2: Evet. Sonu 5 veya 0 olacak. Kuralı bilmiyor olsam önce basit sayılar ile kuralı anlamaya çalışırdım. Çünkü sınavlarda da böyle yaparım...5-10-15-20… diye giderdim. Yani son basamaklarının 0 veya 5 olduğunu fark etmek çok uzun sürmez. Buradan çıkarırdım.

A: Sonsuz sayı olduğunu düşünürsek. Hepsinin 0 veya 5 ile bittiğinden nasıl emin olabilirsin?

Ö2: Çünkü doğrusal gidiyor.

A: Doğrusaldan kastın nedir?

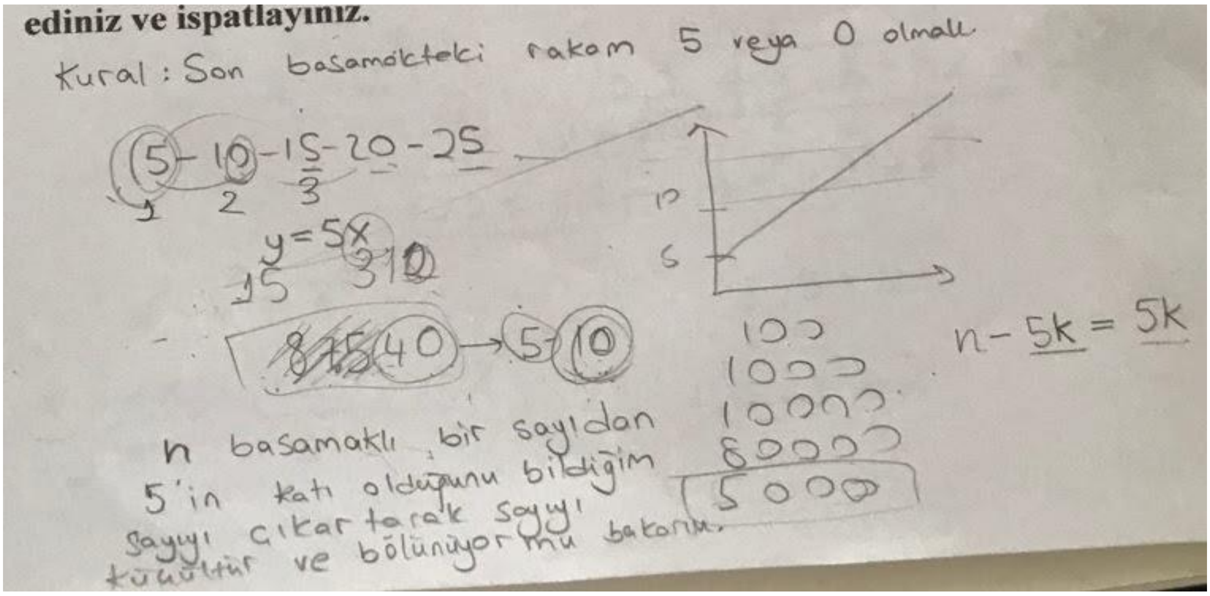
Ö2: Yani mesela hepsi 5 artıyor diye yazsam. O zaman y=5x olur. Çünkü hep 5 artmış ve 5'ten başlıyor. Doğrusal gitmek zorunda ve hep aynı sayıyı ekliyorum. Doğrusal grafikten çıkartırdım. Sürekli 5 eklediğim için doğrusal bir grafik olur.

A: Büyük bir sayı düşünelim. Bölme işlemi yapmadan 5 ile bölünüp bölünmediğini nasıl anlarsın?

Ö2: 10'un 5 ile bölünebildiğini biliyoruz, 100'ün 10 ile bölündüğünü biliyoruz, 1000'in 100'e bölündüğünü, 10000'in 100'e bölündüğünü zaten biliyoruz. Mesela 87540 olsa benim sayım direk 10'un 5'e bölündüğünü biliyorum, 10'un 100 ve 1000'e bölündüğünü de biliyorum. 80000 de 10000'e bölünür. Yani yüzler, binler ve on binler basamağının çok bir önemi yok. Geriye 40 kalır. 40 da 10'a bölünür ve 5 de 10 ile bölünür.

A: Bunu genel bir formül ile gösterebilir misin?

Ö2: Onu nasıl yapabilirim? Birazcık içine sözcük katsam. Nasıl yazacağımı tam olarak bilmiyorum da. Baya sözcük karıştı içine nasıl formül ile yazacağımı bilemedim. Bunu nasıl formüle edebilirim? n basamaklı bir sayıdan 5'in katı olduğunu bildiğim sayıyı çıkartarak sayıyı sayıyı küçültür ve bölünüyor mu? Bakarım. n-5k=5k olur.



Şekil 4.7. Ö2 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başlamış, ezbere bildiği kurala dayanarak varsayımını oluşturmuştur. Varsayımın geçerliliği için sunduğu argümanlara bakıldığında öncelikle küçük sayılardan yola çıkarak birler basamağında örüntü olduğunu fark edebileceğini söylemiştir. Bu sebeple öğrencinin ispat için deneysel örnekleri kullandığı fakat bunun ispat için yeterli olmayacağının farkında olmadığı yani ispat kavramını bilmediği sonucuna ulaşılabilir. Araştırmacının tüm sayılar için nasıl emin olabileceğine ilişkin verdiği ipucu üzerine doğrusallık kavramı üzerine bir argüman geliştirmiştir. Öğrenci ortaya koyduğu örüntünün tüm sayılar için geçerliliğini doğrusal ilişkiye dayandırmıştır. Varsayımın ispatı olarak sunduğu diğer argümanlardan biri de basamak çözümlemesidir. Öğrenci çok büyük sayıların 5'e bölünebilirliğini genellenebilir örnek üzerinden basamak çözümlemesi ile açıklamıştır. Öğrencinin ispat süreci incelendiğinde varsayımın ispatı için argümanlar üretmiş, argümanların arasından ispat olabilecek argümana ulaşmış fakat sunduğu argümanı matematik standartlarına göre kabul edilebilir bir ispat formatı ile ifade edememiş bunun yerine sözel açıklamalar ile ispatı tamamlamaya çalışmıştır.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö3: 5 ile tam bölünebilen sayılar nasıl bölme yapmadan fark edilebilir ve yapılamayanlar da nasıl fark edilir yapılamadığı? Şimdi orada da işte basamakların 0 veya 5 olması lazım çünkü 5-10-15-20…şeklinde gidiyor. Mesela x=5 dersek diyelim ki 105'i 5'e bölmeye çalışıyoruz, 105 sonunda bir 5 var. O yüzden eninde sonunda şu son basamağa gelecek ve 5'e bölünüyor olacak.

A: Sadece sonu 5 olunca mı bölünür?

Ö3: Yok. 100 de olabilir sonunda 0 var sonuçta.

A: O zaman 5'e bölünüp bölünmeyeceğine nasıl bakıyorsun?

Ö3: Birler basamağının ya 5 ya da 0 olması gerekir.

A: Peki bu dediğin şeyi nereden biliyorsun?

Ö3: İlkokulda öğrendim.

A: Bu kuralı bilmeseydin, bunu keşfedebilir miydin?

Ö3: Sanırım çıkarabilirdim çünkü (100'ü gösterir) bu 5'in çift katı şeklinde elde edilebiliyor, (105'i gösterir) bu da 5'in tek katı olarak elde edilebiliyor. Yani 15=3x ise 20=4x oluyor. Tek çift durumu var ama bunun şimdi 5 ile bölünüp bölünemeyeceği ile ne alakası var?

Bilmem… Bölmeden bulabilir miydim?

Diyelim ki 1297, bunun 5'e bölünebilirliğini bulmaya çalışıyoruz değil mi? Şu son basamaktaki sayı 5'ten iki fazla, (sayının 129 kısmını gösterir) şurada ne yaparsam yapayım önemli olmayacak.

A: Neden önemli olmaz?

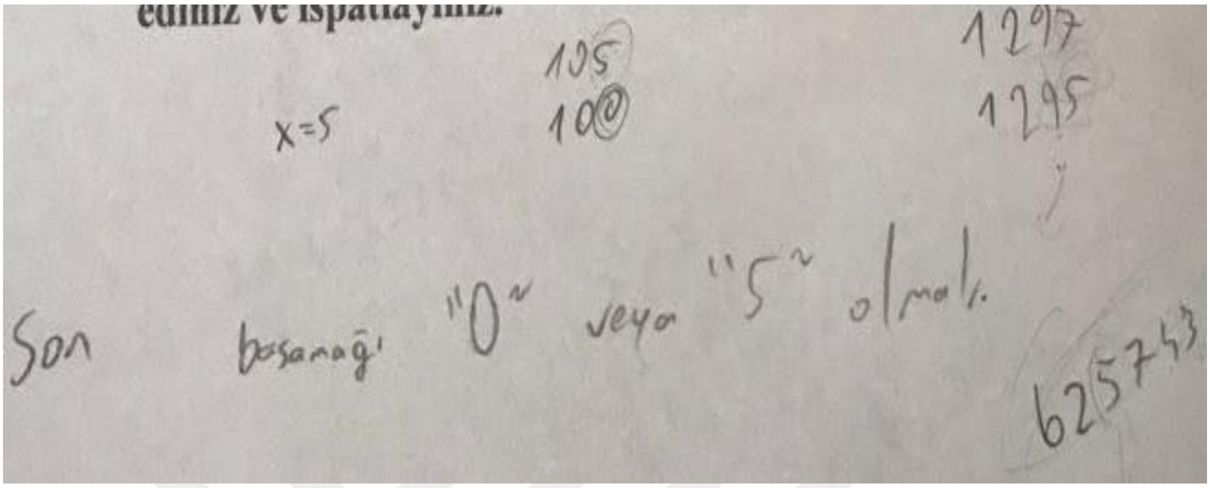
Ö3: Çünkü birler basamağındaki sayı 5'ten iki fazla oluyor. 5'te ya kendisinin beş fazlası ve beş eksiği ile gidebiliyor. Bu da ne demek oluyor? İki fazlası onun için yeterli olmayacak 5 ile tam bölünebilmesi için.

A: Biraz önce sayının 129 kısmın bir önemi yok demiştin. Niye öyle dedin?

Ö3: Çünkü orada ne olursa olsun mesela bunun 1295 olarak denesek, eninde sonunda şuradaki 5 var ya, sonunda 5 olan sayılar 5'in bir katı olduğu için, oraya hangi sayı gelirse gelsin sondaki 5 sayesinde bölünebilir olacak.

A: Sonunda 5 olursa bölünebilir kuralını bilmediğini düşünürsek peki?

Ö3: Kural olmasa nasıl yapacağımı aklımda canlandıramıyorum. Kural olmasına o kadar alışmışım ya, öncelikle karmaşık bir sayı yazayım böylelikle bir şeylerin farkına varabilirim. Mesela şöyle bir sayı çıktı karşıma (625743 yazar, düşünür...). Şurada 5 var bu 5'e bölünebilmesini sağlıyor. Bütün bu basamaklara tek tek bakarak devam ettirirdim. Eninde sonunda 5'e bölünemeyen bir şey çıkardı. Her bir basamaktan tek tek gidip 5'e bölünüp bölünemeyeceğine bakardım. 6 ya baktık 5’e bölünemiyor. 62 olarak bakalım, o da 5’e tam bölünemiyor, 625 beş kendisine tam bölünebiliyor, 6257 hayır bölünemiyor, 62574 bölünemiyor, 3 sayısı 5’e bölebileceğimiz bir şey değil, sonuna geldik ve 5’e bölünemiyor, demek ki bu sayı 5’e bölünemiyor, bu şekilde 5’e bölünemediğini anlardım.



Şekil 4.8. Ö3 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin problem durumunu kendi cümleleri ile ifade ettiği ve ezbere bildiği kurala dayanarak varsayımını oluşturduğu görülmektedir. Varsayımın geçerliliği için sunduğu argümanlara bakıldığında ilk olarak 5’in küçük katlarını örnek göstererek birler basamağında örüntü olduğunu ifade etmiş, deneysel örnekler üzerinden ispat yapmaya çalışmıştır. Öğrencinin sunduğu argümanları ısrarla bildiği kurala dayandırdığı görülmüş, kural olmasına çok alışkın olduğunu kural olmadığı zaman nasıl yapacağını kafasında canlandıramadığını söylemiştir. Bu durum ezbere verilen kural bilgilerin ispat sürecini olumsuz etkilediği olarak görülebilir. Araştırmacının kuralı bilmeseydin nasıl keşfederdin sorusu üzerine sayıları 5’in tek ve çift katı olarak yazabileceğini söylemiş bu durumu örnek verdiği iki sayı üzerinden cebirsel olarak yazmıştır. Yine örnek verdiği sayı üzerinden son basamağın 5’ten fazla olduğu için 5 ile bölünemeyeceğini kuralı gerekçe göstererek iddia etmiştir. Son olarak büyük bir sayı kullanarak bu sayının 5 ile bölünebilirliğini göstermek için tek tek basamaklara bakabileceğini ifade etmiştir. Öğrencinin ispatlama sürecinde varsayıma destek çıkacak ispat için geçerli argüman üretemediği, argüman üretme aşamasında ezbere bildiği kuraldan sıyrılamadığı ve bu sebeple ispat sürecini tamamlayamadığı görülmektedir.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö4: Şimdi şöyle düşünecek olursak, sayıların son basamakları 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ile bitiyor. Direkt bu son basamaktaki 5 ile bölünenleri bulacağız. 5 ve 0 yani 5’in katları 5, 10, 15, 20… Yani böyle devam edince 5 ve 0 yani son basamağı 5 ve 0 olan sayılar 5'e tam bölünebilir.

A: Peki yazdığın dört sayıdan çıkardın bunu. Bunun tüm sayılarda böyle devam ettiğini nasıl bilebilirsin?

Ö4: Yani şöyle. Zaten sayıların son basamağı 0 olduğunda 10'ar 10' ar artarak gidiyor, 10 zaten 5'e bölünebildiği için bu sayının 5'e bölünebildiğini bulabiliriz. Şimdi bazı sayıları 5'e bölünce kalan oluyor 1, 2, 3, 4 diye. Mesela 104 5'e bölünemez çünkü kalan 4 olur. 5'e bölünebilmesi için ya sonunun 5 veya 0 olması lazım. Son basamağı 4 ise kalan 4 olur, 9 ise yine kalan dört olur. Çünkü o 5'in üstüne 4 eklenmiş. Yani küçük sayılara baktığımızda 5'in katlarının hep 0 ve 5 olduğunu biliyoruz. Bu düzende hep 5 ve 0 diye tekrarlanıyor. Böyle olunca sonu 0 ve 5 olan sayılar 5'e bölünebiliyor.

A: Bu kuralı ne zaman öğrendin?

Ö4: 5. sınıfta olması gerekir.

A: Peki bu kuralı hiç öğrenmeseydin çıkarabilir miydin?

Ö4: Şöyle çıkarırdım. Zaten dediğim gibi yani görerek de yapabiliyoruz. En basit yöntemi deneyip görerek mesela küçük sayılar belirlerim kendime 100 belirlerim bir de 25 belirlerim. Bunlar bölünebiliyor derim. Son basamağı 5 ve 0 olmayan başka hiçbir sayı bölünemiyor. O zaman son basamağı 5 ve 0 olan tüm sayılar bölünebilir diye bir çıkarım yapardım.

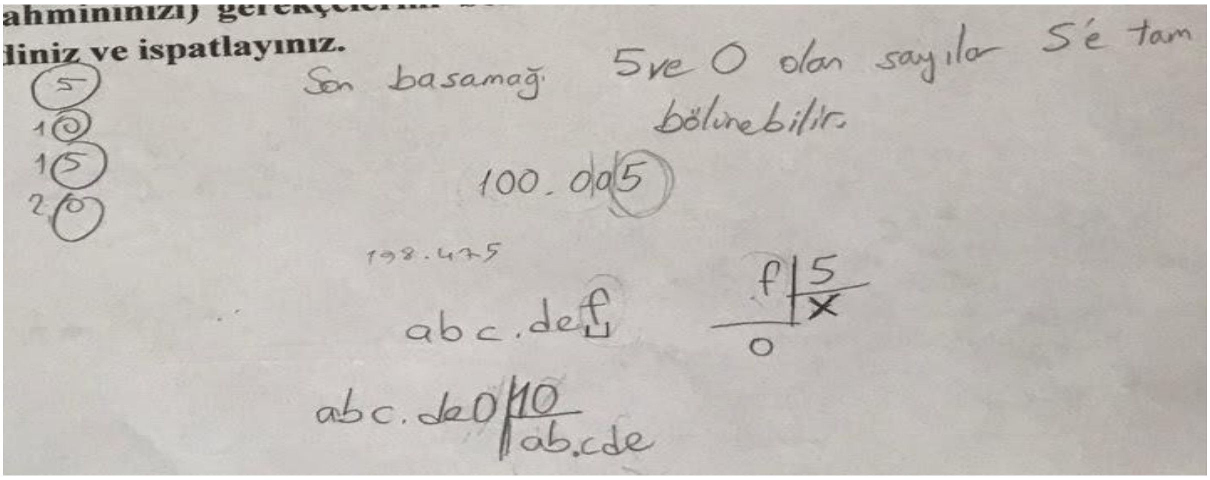
A: Peki birkaç örnek ile bir kural çıkarılabilir mi?

Ö4: Çıkarılmaz aslında. Mesela çok büyük bir sayı olduğunu düşünelim. 1 milyon 5 gibi bir şey. Direkt son iki basamağına bakabiliriz. Çünkü diğerleri 5'in tam katı 10 yani 5'in sonu 0 ile biten katlarını düşünürsek 1000, 10000, 100000...Bunlar nasıl devam ederse etsin 5'e bölünür. Bunlar 10 hatta 100'ün katları. Birler basamağı haricindeki tüm basamaklar 10 ile bölünebilir. Kalan kısımda zaten birler basamağıdır.

A: Cebirsel ifade edebilir misin?

Ö4: abcdef sayısı olsun. Buradaki f'nin 5 ile bölünebilmesi gerekir.

abc.de0 sayısı 10 ile bölünür. Çünkü son basamağı 0'dır.



Şekil 4.9. Ö4 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci ispat sürecinin başında problem durumunu açıklamamış, verilen ve istenen koşulları ifade etmemiştir. Ezbere bildiği kurala dayanarak varsayımı ifade etmiş, deneysel örnekler kullanarak varsayımını ispatlamaya çalışmıştır. Daha sonra araştırmacının birkaç örnek üzerinden çıkarım yapılıp yapılmayacağı sorusu üzerine genelleme yapamayacağını söylemiştir. Bu da öğrencinin deneysel örnekler ile ispat yapılamayacağının farkında olduğunu gösterir. Varsayımın geçerliliği için sunduğu diğer argümanlara bakıldığında sonu 0 olan sayıların 10'a bölünebildiğini, 10'a bölünebilen her sayının ise 5 ile bölünebileceğini böylece son basamağı 0 olan sayıların 5 ile bölünebileceğini ifade etmiştir. Daha sonra iddiasını bir sayının 5 ile bölümünden kalan ile açıklamaya çalışmış fakat öğrencinin ürettiği argümanları sürekli başta ifade ettiği kurala dayandırdığı görülmektedir. Ortaya koyduğu son argümanda öğrencinin 5 ile bölünebilme kuralı ile basamak çözümlemesi arasında ilişki kurduğu görülmektedir. Öğrenci çok büyük sayılar için düşünüldüğünde birler basamağının önemli olduğunu çünkü diğer basamakların zaten 10'un kuvveti olarak yazılabileceği için 5 ile bölünebileceğini genellenebilir örnek üzerinden ifade etmiştir. Öğrencinin ispat süreci incelendiğinde varsayımın ispatı için geçerli argüman üretmiş, fakat sunduğu argümanı matematiksel standartlarda yazamamıştır. Öğrencinin matematiksel dil ve notasyon konusunda eksik olduğu düşünülebilir.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu bana söyler misin?

Ö5: Bize demiş ki hangi şartlarda sayı 5 ile tam bölünebilir ve bölme işlemi yapmadan. 5'in katı ise bölünür.

A: Ne demek istedin?

Ö5: Mesela 15 sayısı 5'in üç katıdır o zaman bölünür. Mesela 5255 sayısını 5'in katı olup olmadığını bilmediğimi farz edeyim, son basamağında 5 veya 0 da olsa 5 ile bölünür yani 5'in katlarını yazdığımda 5-10-15-20… şeklinde yazdığımda son basamağa 2, 3, 7, 8 girmiyor.

A: Örüntünün sürekli bu şekilde devam ettiğini nasıl bilebilirsin?

Ö5: Örnekleri arttırabilirim aslında. 55-95-105-115… olsa bunların hepsini 5'er 5'er arttırdığımda ulaşacağım sayılar. Ama ben burada 1133 sayısına ulaşamam.

A: Zannedersem kuralı ezbere biliyordun. Bilmeseydin keşfedebilir miydin?

Ö5: Evet biliyordum. Dediğim gayet mantıklı arttırarak bir genelleme yapabiliriz. Ben sayıları (sayıyı a=5 ile temsil eder) daima 5 arttırırsam 5-10-15-20…sonu daima 5 ve 0 oluyor. O zaman sonu 5 ve 0 olan sayıları 5 ile tam bölebilirim. Özelden genele varmış oldum.

Ya da ;

Bir sayı belirleyeyim sayı a olsun. Bir sonraki sayı a+5 olsun, diğeri a+10, a+15 olsun. Kısaca sayıları arttırdım a ve 5'in katı şeklinde. Burada ben a= 1 dersem,

a+5 te kalan 1, a+10 kalan 1, a+15 kalan 1… O zaman a kadar kalan olacak. Daha doğrusu a'yı 5 ile böldüğümde çıkan kadar kalan olacak. Bir sayıyı 5'er 5' er arttırdım zaten onlar sabit 5 ile bölünebiliyor, o zaman sadece a'nın bölünüp bölünmemesi benim için yeterli

A: a dediğin nedir?

Ö5: En baştaki ilk basamak. 5'er arttırarak diğer sayıları oluşturuyorum aslında.

A: Gösterebilir misin ne demek istediğini?

Ö5: 1133 olsun 1133-3=1130 yani 226 adet 5 eklemişim.

A: Çok büyük bir sayıda da bu kadar rahat bulabilir misin kaç adet 5 eklediğini?

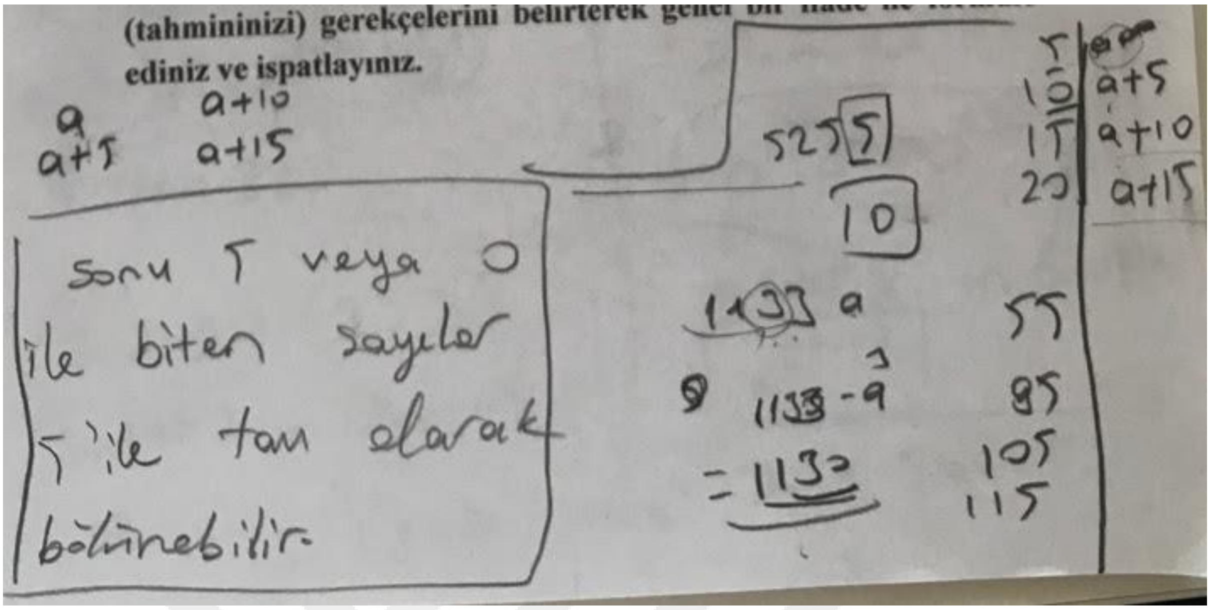
A: Bulamam belki ama kaç tane eklediğimin hiçbir önemi yok çünkü 5'ler 5'e bölünecek. O zaman sadece a'yı hesaba katmam yeterli olur.

A: Diğer basamakların 5 ile bölündüğünü nerden anladın?

Ö5: 100, 1000, 1000000'un 5 ile bölündüğünü bilebilirim.

A: Özetler misin dediklerini?

Ö5: Ben birler basamağındaki sayıya a dedim ve sayıları 5'er 5' er arttırdım. Bu 5'er arttırdıklarım zaten 5 ile bölünür yani 5'er arttırdığım için 5 ile bölünmeleri ile ilgili bir sorunları yok. O zaman bunları atabilirim ve elimde ilk basamak olan a kalır. O zaman a, 5 ile bölünürse sayının 5 ile bölündüğünü söylerim.



Şekil 4.10. Ö5 Kodlu Öğrencinin İkinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci ispat sürecinin başında problem durumunu kendi cümleleri ile ifade etmiştir. Ezbere bildiği kurala dayanarak varsayımı ifade etmiş, deneysel örnekler kullanarak varsayımını ispatlamaya çalışmıştır. Öğrencinin sonraki soruda birden fazla örneğin ispat için yeterli olmayacağını belirttiği halde bu soruda örnek verdiği birkaç sayı üzerinden '*Özelden genele vardım.*' cümlesi deneysel örnekleri ispat yöntemi gibi algılamadığı fakat ilk etapta problemin ispatına ilişkin farklı argüman geliştiremediği anlamına gelebilir. Kullandığı deneysel örneklerin yeterli olup olmayacağı sorusu üzerine öğrencinin daha büyük ve rastgele örnekler vermesi ispat sürecinde bu tip örnekleri varsayımı doğrulamak için daha güçlü bir argüman gibi algıladığı anlamına gelebilir. Varsayımın ispatı için ürettiği geçerli argümana bakıldığında modüler aritmetik kavramını kullandığı görülmektedir. Bu kavramın lise düzeyinde bir kazanım olduğu ve bu kavramı henüz bilmediği düşünüldüğünde öğrencinin bunu keşfetmesi, bildiği kavramlar üzerinden ilişki kurarak yeni kavramlara ulaşabildiği anlamına gelebilmektedir. Öğrencinin ispat süreci incelendiğinde varsayımın ispatı için geçerli argüman üretmiş, fakat sunduğu argümanı matematiksel standartlarda yazamamıştır.

Tablo 4.2. Öğrencilerin İkinci Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları

Ana Safhalar	Alt Safhalar	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problem durumunun araştırılması	Problem durumunun doğru bir şekilde açıklanması			✓		✓
	Problem durumu ile ilgili çizimlerin ve ölçümlerin yapılması					
Varsayımın ifade edilmesi	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmesi	✓	✓	✓	✓	✓
	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmemesi					
Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi	Önceki tanım ve teoremleri kullanma		✓		✓	✓
	Görsel ve şekilsel modeller Kullanma		✓			
	Deneysel ve kurala dayalı örnekler kullanma	✓	✓	✓	✓	✓
Uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi	Basamak çözümlemesi ve 5 ile bölünebilme kuralı arasında ilişki kurma		✓		✓	
	Bölünebilme kuralı ile Modüler aritmetik arasında ilişki kurma					✓
Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet	Teorem1: 10’a bölünen sayılar 5 ile bölünebilir. Teorem2: ABCD sayısı için ABCD= 1000A+100B+10C+D ABCD=5.(200A+20B+2C) +D D sayısı 5 ile bölünebilirse sayı 5 ile bölünebilir.					

İkinci soruya ait tablo incelendiğinde hiçbir öğrencinin ispat sürecini tamamlayamadığı görülmüştür. İki öğrencinin varsayımın doğrulaması için uygun argümanların belirlenmesi aşamasında kaldığı, üç öğrencinin ise ispat için uygun argümanları belirleyebildiği halde argümanlarını matematik standartlarına göre ifade edemediği görülmüştür. Öğrencilerin tamamı problem durumuna ait varsayımı ifade etmiş fakat varsayım üretme aşamasında hiçbir öğrenci argüman üretmeden, varsayımı ezbere bildikleri kurala göre ortaya koymuştur. Ayrıca öğrencilerin varsayımın doğrulanması aşamasında bildikleri kuraldan sıyrılamadıkları, geliştirdikleri argümanları çoğunlukla kurala dayandırdıkları ve varsayımın çok açık olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Varsayımın çok açık olduğunu ifade etmeleri ispata gerek duyulmayacağını düşündükleri anlamına gelebilir. Ayrıca bu durumun öğrencilerin ezbere bildikleri kuralların argüman üretmelerine engel olduğu ve ispata gerek duymadıkları olarak düşünülebilir. Bir öğrencinin, kuralı ezbere bildiği için ispata yönelik strateji geliştiremediği ifadesi bu durumu doğrular nitelikte kabul edilebilir. Öğrencilerin ispat süreçlerine bakıldığında tüm öğrencilerin deneysel örneklerden yola çıkarak genellemeye varma eğiliminde olduğu fakat yine bazı öğrencilerin bunun ispat için yeterli olmadığının farkında olduğu tespit edilmiştir. İki öğrencinin 5 ile bölünebilme ile basamak çözümleme arasında ilişki kurduğu, bir öğrencinin ise bölünebilme kuralı ile modüler aritmetik arasında ilişki kurduğu fakat hiçbir öğrencinin ispat için geçerli argümanlarını matematiksel standartlarda yazamadığı görülmüştür.

4.1.3. Üçüncü Soruya Ait Bulgular

Üçüncü soruda öğrencilere 'Farklı özelliklere sahip dörtgenlerin alanları, verilen uzunluk ve açı değerlerine göre farklı yöntemlerle hesaplanmaktadır. Buna göre sadece köşegen uzunluklarını bildiğimiz bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilir miyiz? Başka bir veriye ihtiyaç var mıdır? Varsayımınızı (tahmininizi) gerekçelendirerek genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.' sorusu yöneltilmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde bir öğrencinin 3. aşama olan varsayımın doğrulanması için uygun iddiaların belirlenmesi aşamasında, dört öğrencinin ise 4. aşama olan ispat için uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi aşamasında ispat yaptığı görülmüştür. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Soruyu okuyup ne istediğini anlatır mısın?

Ö1: Bizden eşkenar bir dörtgenin alanını hesaplamamızı istiyor ve sadece köşegen uzunluklarını kullanarak. Şimdi eşkenarı çizdiğimizde bunlar (köşegenlerden bahseder) birbirini dik keser benim bildiğim köşegen uzunluklarını çarpıp ikiye böldüğümüzde alanını bulabiliriz. Bunun nedeni köşegenlerden iki tane üçgen elde ederiz. İki üçgenin alanını toplayacağız.

A: Dediğini genel bir ifade ile gösterebilir misin?

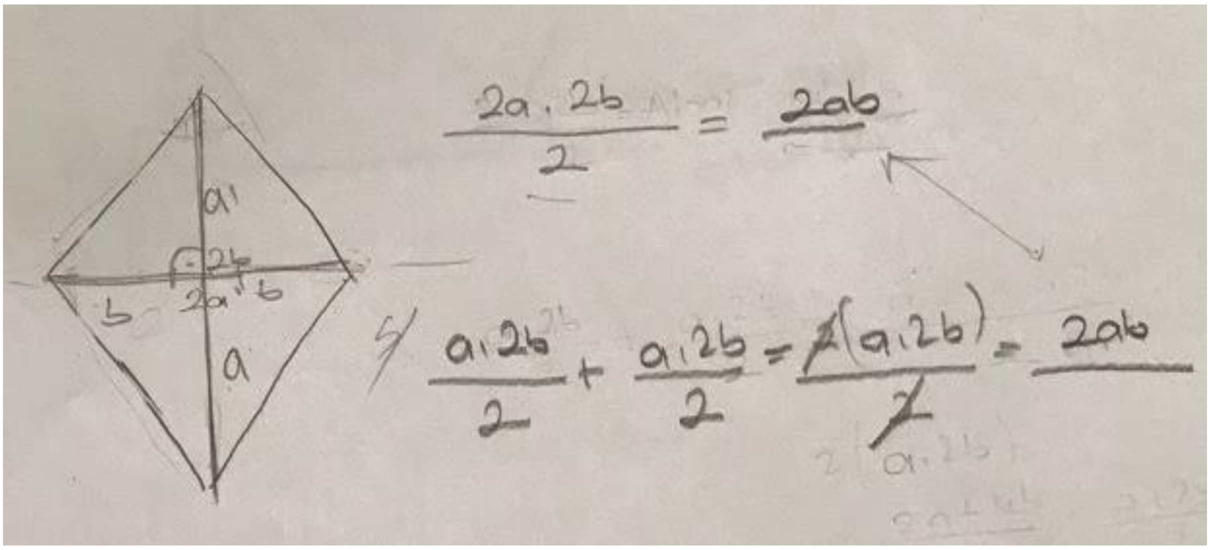
Ö1: Köşegen uzunlukları eşit mi oluyordu? Olmuyordu sanırım. Eşkenar kenarları hepsi eşittir.

A: Kareden farkını biliyor musun?

Ö1: İç açıları mı eşit değildi? Açılar ile alakalıydı sanırım. Sanırım bunların uzunlukları eşit değil (köşegenleri gösterir). Bu köşegene 2a dersek, bu köşegene de 2b diyelim. (Üçgenin birini gösterir) burası a.2b/2 olur. Diğeri de aynı. Toplarsak aynı sonuca çıkar.

A: Açıklar mısın ne yaptığını?

Ö1: Normalde bunun formülü köşegen uzunlukları çarpımının yarısıdır. Köşegenlerin ayırdığı iki tane ayrı ayrı üçgen olarak düşünürsek alanları toplamından bulabiliriz.



Şekil 4.11. Ö1 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin problemi kendi cümleleri ile ifade ettiği ve verilen istenen koşulları belirlediği görülmektedir. Varsayım üretme aşamasında problem durumunu uygun model kullanarak matematiksel olarak temsil etmiş ve varsayımına dayanak olarak bir teorem ortaya koymuştur. Önceden bildiğini söylediği varsayımını ifade etmiş, varsayımın doğrulanmasına yönelik argüman geliştirmeden, ispatlamaya yönelik geçerli argüman geliştirmiştir. Varsayımın ispatlanması aşamasında kavrama ait özellikler konusunda bilgi eksikliği yaşamış, hatırlamaya dayalı olarak sonuca varmıştır. Araştırmacının kavramın bazı özelliklerini sorması üzerine hatırlamaya odaklı çıkarımda bulunduğu görülmektedir. Bu durum öğrencinin ispat sürecinde bilgi eksikliğinden kaynaklı engel ile karşılaştığı olarak yorumlanabilir. Ayrıca öğrencinin bilgi eksikliğini doğru ve kesin bir çıkarım ile değil hatırlamaya odaklı gidermesi ispat yaparken kullanması gereken önermelerin doğruluğunu garanti etmediği böylece ispatın yapısını tam olarak kavrayamadığı olarak düşünülebilir.

Öğrencinin ispat için uygun argümanları tümdengelimsel bir çıkarımla ve genel bir gösterim kullanarak ifade ettiği fakat ispatını matematik standartlarında yazamadığı görülmüştür.

A: Soruyu okuyup ne istediğini söyler misin?

Ö2: Eşkenar dörtgen hangisi oluyor? Eşkenar dörtgeni unuttum. (Eşkenar dörtgen çizer) Bu muydu?

A: Eşkenar dörtgenin özelliklerini biliyor musun?

Ö2: Hayır. Hatırlamıyorum.

A: Köşegenler neresi oluyor peki?

Ö2: (Köşegenleri gösterir).

A: Sana sorulan nedir?

Ö2: Köşegen uzunluklarını bildiğimiz eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilir miyiz? Hesaplayabiliriz. Başka veriye ihtiyaç yoktur. Köşegen uzunluklarına kendim değer vereyim. O zaman 20 olsun (her iki köşegene 20 değerini verir). Köşegenlerin kesim noktasından yarıya bölmesi lazım. (Köşegenlerin kesim noktasını gösterir) Bunlar diktir. Dört tane dik üçgen var. Onların alanlarını bulup bulabilirim.

A: Köşegenleri eşit uzunlukta mıdır?

Ö2: Olmayabilir işte.

A: Bunu formüle edebilir misin?

Ö2: (Köşegen uzunluklarından bahseder) Bence aynı değiller.

A: Köşegenlere farklı temsiller verdin. Onların eşit olmadığını mı düşünüyorsun?

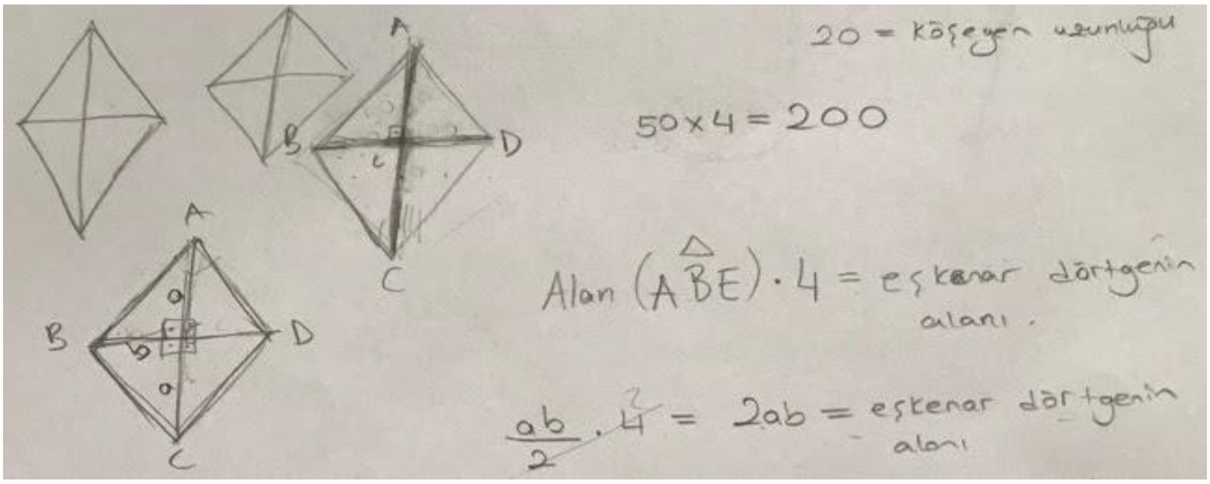
Ö2: (Düşünür…) Acaba açıları dik olabilir mi? Öyle olduğunu düşünsem...Aynı olamayacağı kanısına vardım.

A: Aynı olmayacağına nasıl karar verdin?

Ö2: Çünkü aslında şekle göre değişir. Şekli çizmesem karar veremezdim. Nedenini şu an saptayamıyorum ama farklı olması gerekiyor.

A: Sonuç olarak ne buldun?

Ö2: (a.b/2).4 = 2ab olur. Eşkenar dörtgenin alanını köşegenleri kullanarak buldum.



Şekil 4.12. Ö2 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başladığı görülmektedir. Varsayım üretme aşamasında problem durumuna uygun çizimler oluşturduğu fakat bilgileri unutmasından kaynaklı ispat sürecinde zorlanma yaşadığı görülmektedir. Varsayımın geçerliliği için öncelikle köşegenlerin dik kesiştiği ve birbirini ortaladığı bilgilerini kullanarak köşegenlerin oluşturduğu üçgenlerin alanı ile eşkenar dörtgenin alanı arasında ilişki kurmuş ve deneysel örnekler ile doğrulamıştır. Kurduğu bu ilişkiyi köşegen uzunluklarını eşit değer alarak göstermeye çalışmıştır. Öğrencinin varsayımını genel bir ifadeye dönüştürürken köşegen uzunluklarına farklı temsiller verdiği görülmüştür. Bunun sebebi olarak yaptığı çizimlerden bu sonuca vardığını söylemiştir. Hatırlayamadığı bilgileri doğru çıkarımlar ile değil çizdiği şekil üzerinden tahmine dayalı elde etmeye çalışması, öğrencinin kavramı ilişkisel değil ezbere öğrendiği anlamına gelebilir. Öğrenci varsayımını ifade etmiş ve varsayımın ispatı için uygun argümanları tümdengelimsel adımlar ile birleştirmiştir. İspatını matematik standartlarında kısmen yazabildiği fakat ispat sürecinin tamamını formal ispat yapısında ifade edemediği görülüştür.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu anlatır mısın?

Ö3: Bazı dörtgenlerin falan alanlarını hesaplamamızı istiyor, yani hesaplamanın yöntemini söylüyor, sonrasında sadece köşegen uzunluğunu kullanarak bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilir miyiz diyor.

Şimdi burada köşegen uzunluğunun çok büyük bir artısı var. (Kenarı a olan bir kare çizer.) Köşegen a^2 olur. Normalde köşegen uzunluğu her zaman a'nın $\sqrt{2}$ katıdır. Bir Şeyin $\sqrt{2}$ katı ise kenarın a olacağını bilebiliriz. Ama diyelim ki başka bir şey verdi o zaman $\sqrt{2}$'ye bölmemiz gerekir, $\sqrt{2}$'ye bölmenin nasıl olduğunu pek hatırlayabilmiş sayılmam, $\sqrt{36}$ olsa mesela bunu $\sqrt{2}$'ye böldüğümüzde $\sqrt{18}$ olur. Yani ne oluyor uzunluğu $3\sqrt{2}$ oluyor bir kenar uzunluğu. Sonra bu ikisini çarpar ve alanı bulabiliriz.

A: Bir eşkenar dörtgen çizebilir misin?

Ö3: Tabi, karede bir eşkenar dörtgen olduğu için bunu çizmeyi düşündüm. Mesela köşegenleri bilmiyoruz ve burada bir üçgen oluşturmuş. Buradaki köşegen a^2 olur. Çünkü üçgenin hipotenüsü ve aynı kenarlara sahip. $a^2 + a^2 = 2a^2$ bunun karekökünü bulmaya çalışırsak ne olur? $a\sqrt{2}$ olur. Çünkü oradaki 2 tam kare bir sayı değil ve kökün içine girmek zorunda kalır. İşte öyle bulunabilir. Önce köşegen uzunluğunu 2 ye bölerim, sonra çıkan kenar uzunluğunun karesini alırım. Köşegene x dersek, alan $(x/\sqrt{2})^2$ olur.

A: Peki kare olmayan bir eşkenar dörtgen için ne diyebilirsin?

Ö3: (Düşünür...)

A: Eşkenar dörtgenin özelliklerini biliyor musun?

Ö3: Kenarları her türlü birbirine eşit. Açıları farklı bir şeyde olabilir. Paralelkenarda bir eşkenar dörtgen olabilir. (Açıları 120^0 ve 60^0olan bir eşkenar dörtgen çizer) Şimdi…Kural ona uyuyor ama ötekine uymuyor, dik üçgenlerde geçerli oluyordu o bahsettiğim kural. Ama yine de kenar uzunlukları birbirinin aynısı. Köşegenle açıortay aynı şey mi acaba onu düşünmemiz lazım. Sonuçta beşgenin de köşegeni var ama açıortay olmuyor. O bilgiye de ihtiyacımız var. Olmayabilir diye düşünüyorum çünkü ilginç bir eğimi var. Eğim sanki tam ortalamayacakmış gibi olmuş. (Göz kararı açıortay olup olmadığını anlamaya çalışır). Sanırım bir şey fark ettim ister farklı ister aynı olsun yine de bir z kuralı var.

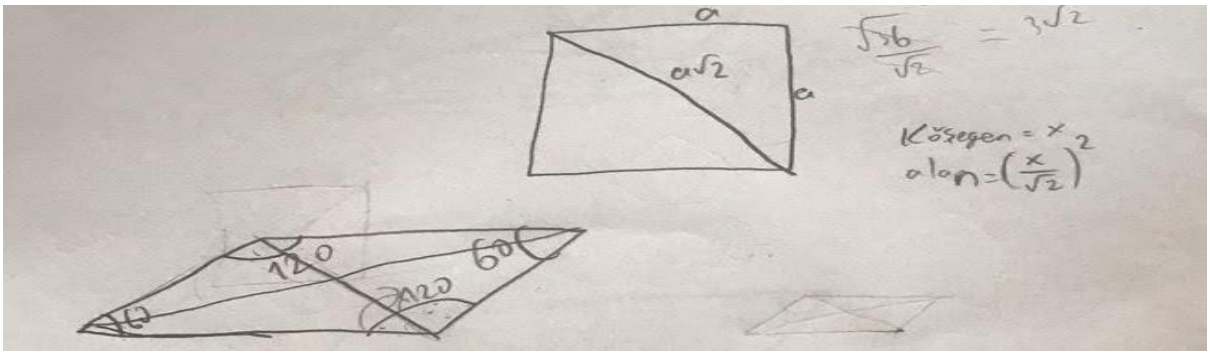
A: Z kuralı dediğin ne?

Ö3: Şöyle bir z şekli yapabilirsek (eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarları ve köşegen ile oluşturduğu şekli gösterip, iç ters açıları gösterir) bunlar eşit olur.

Sanırım eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilmek için başka bir veriye ihtiyaç vardır. Açılarının kaç derece olduğunu bilmemiz lazım yoksa tahminlerle sonuca varabiliriz. Özellikle açı ölçülerini bilirsek mesela 90^0 ise bildiğimiz bir formül var ve çok daha kolay olur.

A: Hangi veriye ihtiyaç vardır?

Ö3: Eğer iç açıları aynı ise tek bir iç açı, tamamen farklı ise dört açı da verilmesi gerekir.



Şekil 4.13. Ö3 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamış, verilen ve istenen koşulları ifade etmiştir. Öğrencinin varsayım üretme aşamasında problemin özel bir durumu için varsayım ürettiği görülmektedir. Karenin bir eşkenar dörtgen olduğunu belirtmiş ve kare özelinde köşegen-alan bağıntısı kurmuştur. Çizdiği karesel bölge üzerinden Pisagor bağıntısını kullanarak köşegen-alan ilişkisinde genel bir ifade ortaya koymuştur. Öğrencinin kare özelinde ürettiği varsayımın tüm eşkenar dörtgenlerde geçerli olmayacağının farkında olduğu görülmektedir. Ayrıca paralelkenarın bir eşkenar dörtgen olduğunu söylemesi, kavramların özelliklerini net olarak ortaya koyamaması bu konuda kavram yanılgısına sahip olduğu veya bilgileri ezberlediği ve ezberlediği bilgilerini yanlış hatırladığı olarak yorumlanabilir. Bu durumun öğrencinin doğru varsayım üretmesine engel teşkil ettiği düşünülebilir. Bunun yanında eşkenar dörtgende köşegenlerin açıortay olup olmadığı konusundaki ikilemde kaldığı ve çizdiği şekil üzerinden göz kararı bir sonuca vardığı, bu sonucu Z kuralı olarak ifade ettiği ezbere bir kurala dayandırdığı görülmüştür. Bu durum öğrencinin eşkenar dörtgen kavramının özelliklerini ilişkisel öğrenmediği, ezberleyerek aklında tutmaya çalıştığı olarak görülebilir. Son olarak eşkenar dörtgende köşegen-alan ilişkisi için verilenlerin yeterli olmadığını, iç açılarının da verilmesi gerektiğini ifade ederek varsayımını revize etmiş ve yanlış bir varsayım geliştirmiştir. Öğrencinin eşkenar dörtgen kavramında öğrendiği bilgileri unutması ve bu bilgileri doğru adımlar ile tekrar elde edememesi kavramı ilişkisel değil ezbere öğrenmiş olması doğru varsayım üretmesine engel olduğu olarak düşünülebilir.

Ö4: (Soruyu okur) Tekrar okuyayım.

Evet hesaplayabiliriz. Burada Pisagor kullanıyoruz. (Eşkenar dörtgen çizer) Mesela kenarlarına x dediğimizde kenarlar eşit olacağı için, biz böyle bir formül öğrenmiştik köşegen uzunluğu x^2 oluyordu. Mesela bu uzunluk (köşegenden bahseder) 10 olsun kenar uzunluğumuz 5 $\sqrt{2}$ olur ve biz kenarın karesini alırız alanını bulmak için.

A: Soruda tam olarak ne istiyordu?

Ö4: Köşegen ve alan ilişkisi. O zaman direk köşegenden yola çıkalım. Bu iki köşegeni çarpıp 2'ye de bölebiliriz. (Çizdiği şeklin etrafına dikdörtgen çizer) Çünkü köşegenleri şeklin kenarlarına taşıyıp kare olduğunu düşünebilirim ve her kareyi ortadan bölen bir kenar var. Bu iki köşegeni çarptığımızda büyük bir kare oluşuyor ve bizim asıl aradığımız eşkenar dörtgenin alanı bu büyük karenin yarısı oluyor.

A: Formüle edebilir misin?

Ö4: Deneyeyim. $x^2/2$ olur. x'e köşegen uzunluğu dedim.

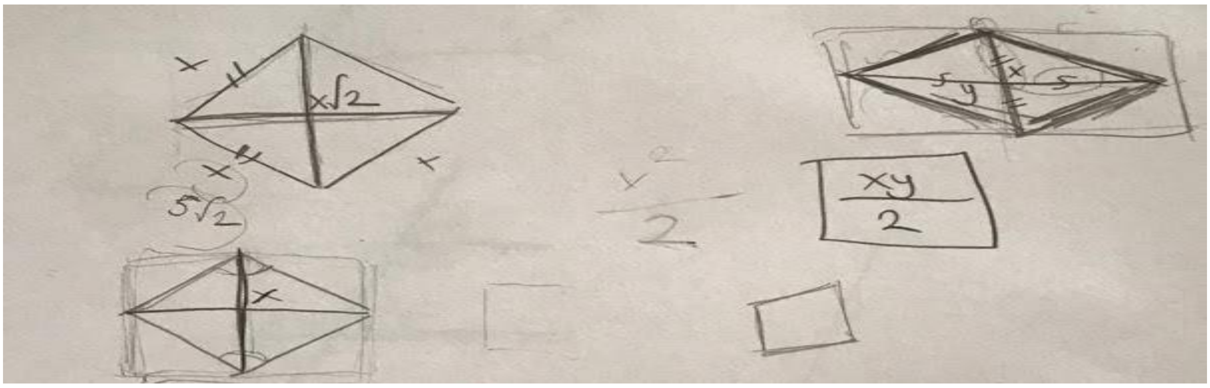
A: Peki eşkenar dörtgenin köşegenleri eşit midir?

Ö4: Eşkenar dörtgenin köşegenleri eşittir.

A: Peki eşkenar dörtgenin açıları hakkında ne söyleyebilirsin?

Ö4: Galiba 90^0 oluyor. Tekrar bir düşüneyim. Eşkenar dörtgen kare gibi değil çünkü karşılıklı kenarların açıları birbirine eşit oluyor. Köşegenleri birbirine eşit olmuyor. Çünkü daha farklı bir şekil çizersek (Daha geniş açılı bir eşkenar dörtgen çizer) köşegenlerin birinin daha kısa diğerinin daha uzun olduğunu görebiliyoruz.

Tekrar cebirsel gösterime bakmak isterim çünkü ben orada kare mantığında düşünmüştüm. O zaman burada köşegenleri çarpınca bir dikdörtgen oluşuyor diyelim, bu köşegenleri çarpınca eşkenar dörtgen bu oluşan dikdörtgenin yarısına denk geliyor köşegenlere x ve y diyelim. x.y/2 olur.



Şekil 4.14. Ö4 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap

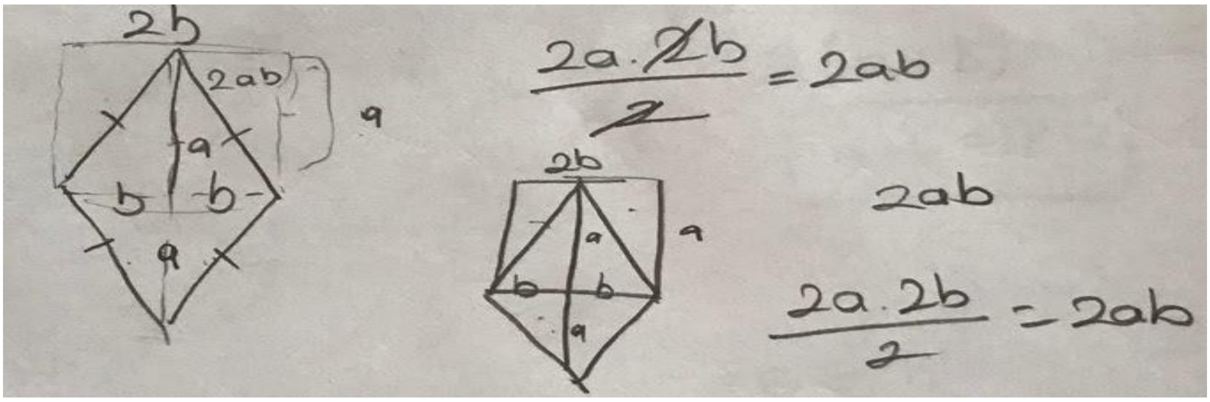
Öğrencinin problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başladığı görülmektedir. İlk olarak varsayımı geliştirme aşamasında eşkenar dörtgeni, kare özelinde düşünüp Pisagor bağıntısını kullanarak kenar-alan ilişkisi yönünde varsayım geliştirmiştir. Öğrencinin önceden bildiği bir teoremi kullanarak problemin özel bir durumuna yönelik probleme uygun olmayan varsayım ürettiği görülmektedir. Daha sonra tekrar problem durumunu keşfetmeye geri dönmüş ve yeni bir varsayım geliştirmiştir. Varsayımın doğrulanması aşamasında eşkenar dörtgeni içine alan en küçük şekli kare olarak tanımlaması önceki eksik veya yanlış hatırladığı bilgilerinden kaynaklı hatalı bir argüman geliştirdiği olarak düşünülebilir. Araştırmacının eşkenar dörtgende köşegen uzunluklarının ve açıların özelliklerini sorması üzerine geniş açılı bir eşkenar dörtgen çizerek, eşkenar dörtgenin kareden farklı olduğu noktaları tekrar gözden geçirmiş ve açıların 90^0 olmadığını, karşılıklı açıların eşit olduğunu ve köşegenlerin ise birbirine eşit olmadığını söylemiştir. Bu sonuçlara ulaşmada öğrencinin kendi çizimini temel alarak tahmine dayalı çıkarımlar yaptığı görülmektedir. Son olarak öğrenci varsayımını revize etmiş ve varsayımın ispatlanması için geçerli argümanları sunmuştur. Öğrenci tümdengelim zincirinde ifade ettiği argümanlarını matematik standartlarına göre ifade edememiştir.

Ö5: Önce ben buraya bir eşkenar dörtgen çizeyim. Köşegenden bahsetmiş. Kenarlarının eşit olduğunu farz edeceğiz. (Çizdiği eşkenar dörtgende köşegenlerin oluşturduğu ve altta kalan iki üçgenden bahseder) ben altta kalan üçgenleri yukarı taşırsam bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgenin bir kenarı a olsun. Eşkenar dörtgenin köşegen uzunluğunun 2a' nın yarısı oldu, dikdörtgenin diğer kenarı eşkenar dörtgenin diğer köşegeninin tamamına eşit. Ona 2b dersek, dikdörtgenin alanı 2ab yani köşegenleri çarpımının 2a.2b'nin yarısı olur.

A: Yaptığını özetler misin?

Ö5: Eşkenar dörtgen çizdim. Köşegenlerini çizdim ve köşegenler 2a ve 2b olsun. Köşegenler eşkenar dörtgeni dört eş parçaya ayırdı. Alttaki parçaları kesip yukarı koydum. Bunlarda tam bir dikdörtgen oluşturdu. Dikdörtgenin bir kenar a olurken diğer kenarı 2b şeklinde bir cebirsel ifade oldu. Alan 2ab ve köşegenlerin çarpımının yarısına eşit olduğunu bulmuş oldum

.



Şekil 4.15. Ö5 Kodlu Öğrencinin Üçüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başlamıştır. Varsayım ortaya koyma aşamasına problem durumu ile ilgili yaptığı çizim ile başlamıştır. Varsayımını ortaya koymuş ve varsayımın doğrulanması için uygun argümanlar geliştirmeye gerek duymadan ispat için geçerli argümanları tümdengelim adımlarında ifade etmiştir. Varsayımın geçerliliği için ortaya koyduğu argümanlar incelendiğinde eşkenar dörtgende köşegenlerin oluşturduğu üçgenler ile alan ilişkisi kurduğu görülmektedir. Çizdiği eşkenar dörtgende köşegenlerin kesişimi ile oluşan dört üçgenden altta kalan iki üçgeni öteleyerek dikdörtgen oluşturabileceğini, bu oluşturduğu dikdörtgenin eşkenar dörtgen ile aynı alana sahip olduğunu söylemiştir. Eşkenar dörtgen ile yeni oluşturduğu dikdörtgen arasında ilişki kurmuş ve bunu genel bir gösterim ile ifade etmiştir. Fakat tümdengelim zincirinde ifade ettiği argümanlarını matematik standartlarına göre ifade edememiştir.

Öğrencilerin üçüncü soruda geçirmiş oldukları ispat süreci aşamaları tabloda sunulmuştur.

Tablo 4.3. Öğrencilerin Üçüncü Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları

Ana Safhalar	Alt Safhalar	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problem durumunun araştırılması	Problem durumunun doğru bir şekilde açıklanması	✓		✓		
	Problem durumu ile ilgili çizimlerin ve ölçümlerin yapılması	✓	✓	✓	✓	✓
Varsayımın ifade edilmesi	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmesi	✓			✓	
	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmemesi		✓	✓		✓
Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi	Önceki tanım ve teoremleri kullanma	✓	✓	✓	✓	✓
	Görsel ve şekilsel modeller Kullanma	✓	✓	✓	✓	✓
	Deneysel ve kurala dayalı örnekler kullanma					
Uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi	Eşkenar dörtgende köşegenlerin kesişimi ile oluşan üçgenlerin alan ile ilişkisi	✓	✓			
	Eşkenar dörtgeni içine alan en küçük dikdörtgen ile alan ilişkisi				✓	
	Eşkenar dörtgende köşegenlerin oluşturduğu üçgenleri öteleyerek dikdörtgen oluşturma					✓
Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet	ABCD bir eşkenar dörtgen ve köşegenlerin kesişim noktası E olsun; $\overset{\Delta}{A(ABC)}+\overset{\Delta}{A(BCD)}=A(ABCD)$ olur. $\frac{\lvert AE\rvert.\lvert BC\rvert}{2}+\frac{\lvert DE\rvert.\lvert BC\rvert}{2}=\frac{\lvert AD\rvert.\lvert BC\rvert}{2}$					

Öğrencilerin üçüncü soruya ait ispat süreçleri incelendiğinde bir öğrencinin 3. aşama olan varsayımın doğrulanması için uygun iddiaların belirlenmesi aşamasına, dört öğrencinin ise 4. aşama olan ispat için uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi aşamasında ispat yaptığı görülmüştür. 3. aşamada ispat yapan öğrenci dik üçgenlerde pisagor bağıntısını kullanarak kare özelinde bir genellemeye varmış fakat eşkenar dörtgen kavramında bir genelleme geliştirebilmek için verilenlerin yeterli olmadığı, verilenlerin yanında açı ölçülerinin de verilmesi gerektiğini belirtmiş, ispat sürecinde varsayımın doğrulanması ve uygun argümanların belirlenmesi aşamasında kaldığı görülmektedir. 4. aşama ispat yapan dört öğrenciden ikisi eşkenar dörtgende köşegenlerin kesişimi ile oluşan üçgenlerin alan ile ilişkisini, bir öğrencinin eşkenar dörtgeni içine alan çizilebilecek en küçük dikdörtgenin alanı ile ilişkisini, bir öğrencinin ise eşkenar dörtgende köşegenlerin oluşturduğu üçgenleri öteleyerek inşa ettiği dikdörtgeninin alan ilişkisini kullanmıştır. Öğrencilerin varsayım geliştirme ve varsayımın geçerliliği için argüman üretme aşamasında eşkenar dörtgen kavramına dair hatalı veya eksik bilgiden kaynaklı zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca kavrama ait özellikleri hatırlayamadıkları ve bu bilgileri doğru bir çıkarım yolu ile değil kendi çizimlerinden tahmine dayalı ürettikleri gözlemlenmiştir. Bunun yanında bazı öğrencilerin kare özelinde ispat yapmaya çalışması ürettikleri varsayımın kısıtlılığını fark etmedikleri veya eşkenar dörtgenin özellikleri hakkında bilgi eksikliği yaşadıklarından, özelliklerinden emin oldukları kareyi kullanmayı tercih ettikleri veya eşkenar dörtgen-kare konusunda kavram yanılgısına sahip oldukları olarak düşünülebilir. Öğrencilerin tamamının ispat sürecinin başında problem durumuna ait çizdikleri şekil ile ispata başladıkları, ispata dayanak olarak ise daha önceden bildikleri tanım ve teoremleri kullandıkları görülmüştür. Ayrıca 4. aşama ispat yapan öğrencilerin, eşkenar dörtgeni üçgenlere parçalama ve dikdörtgene tamamlama gibi stratejiler ile bildikleri çokgenleri kullanarak ispat yapmaya çalıştıkları görülmektedir. Fakat hiçbir öğrencinin ispatını matematiksel standartlarda ifade edemediği tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin notasyon konusunda eksik olduğu veya formal bir ispatın yapısını bilmedikleri olarak düşünülebilir.

4.1.4. Dördüncü Soruya Ait Bulgular

Dördüncü soruda öğrencilere ‘Üslü sayıları çarparken sayıların değerini bulup çarpma işlemi yapabiliriz. Üslü sayıların kuvvetleri çok büyük olduğunda değerini bulmak zorlaşmaktadır. Bunu göz önünde bulundurarak, tabanları aynı olan üslü sayıları nasıl çarparsınız. Varsayımınızı (tahmininizi) gerekçelerini belirterek genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.’ sorusu yöneltilmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde tüm öğrencilerin ispat sürecini tamamladığı görülmüştür. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Soruyu okuyup ne istediğini anlatır mısın?

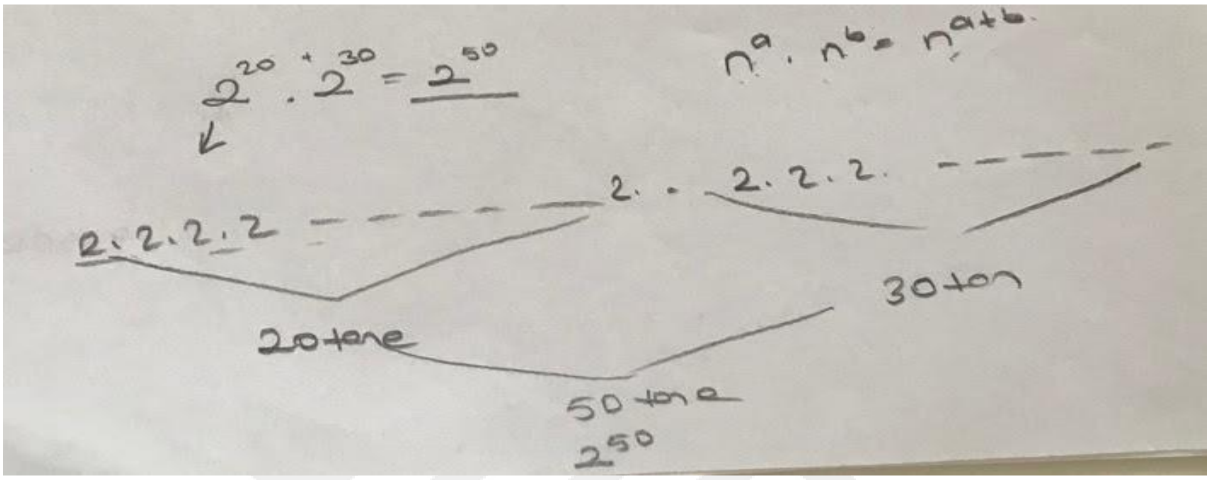
Ö1: (Soruyu okur) Mesela 2^5 ama bu biraz küçük oldu. 2^{20} diyelim bunu 2^{30} ile çarpacağız. Bunun değerini bulmak zor olduğu için bunların üslerini topluyoruz ve 2^{50} diyoruz. Ama bu neden böyle? Şimdi burada 2^{20} , 20 tane 2’nin çarpımı, 2^{30} ise 30 tane 2 ile tekrar çarpıcaz. Arada zaten çarpma olduğu için toplamda 50 tane 2’nin çarpımı olmuş olur. Bunu da 2^{50} olarak yazabiliriz.

A: Daha genel bir şekilde formüle edebilir misin bunu?

Ö1: n^a x n^b = n^{a+b} olur.

A: n^a nın anlamı nedir?

Ö1: a tane n nin çarpımı, bu da b tane n nin çarpımı aynı sayının farklı kuvvetleri çarpımı bu da a+b tane n nin çarpımı olur.



Şekil 4.16. Ö1 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin ispat sürecini tamamladığı görülmüştür. Öğrenci problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başlamış ve varsayımı ifade etmiştir. Varsayımını ispatlamaya yönelik sunduğu argümanda üslü sayıların anlamı ile çarpma işlemi arasında ilişki kurduğu görülmektedir. Öğrenci varsayımını genellenebilir bir örnek kullanarak tümdengelimsel bir çıkarım ile varsayımını genel bir gösterim ile ifade etmiştir. Öğrencinin üslü sayıların anlamını net bir şekilde ifade etmesi anlamlı öğrenme gerçekleştirdiği olarak düşünülebilir. Bilgilerin anlamlı öğrenilmiş olması ispat sürecinin başarılı bir şekilde ilerlemesine olanak sağladığı görülmektedir. Öğrenci varsayımını matematik standartlarında ifade etmiş, ispat sürecini tamamlamıştır.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu söyler misin?

Ö2: Mesela 2 den yola çıkarsak, 2^6 ile 2^9'u çarptığımda direk üslerini toplarım. Sayıların değerlerini bulmama gerek yok yani.

A: Peki üsleri neden topladın?

Ö2: Bunu kural olarak öğretiyorlar ama kurala vurmayacak olursak yine küçük sayılarla ben bunu şey yapardım bence.

A: Nasıl yapardın?

Ö2: Mesela 2^2 x 2^3 = 2^5 yapar. Bunların değerlerini biliyorum 4 ve 8 olduğunu ve sonuç 32= 2^5 olduğunu biliyorum. Daha küçük sayılar ile doğru mu diye kontrol edebiliyorum.

A: Şu an kuralı kontrol ettin. Kuralı bilmeseydin peki?

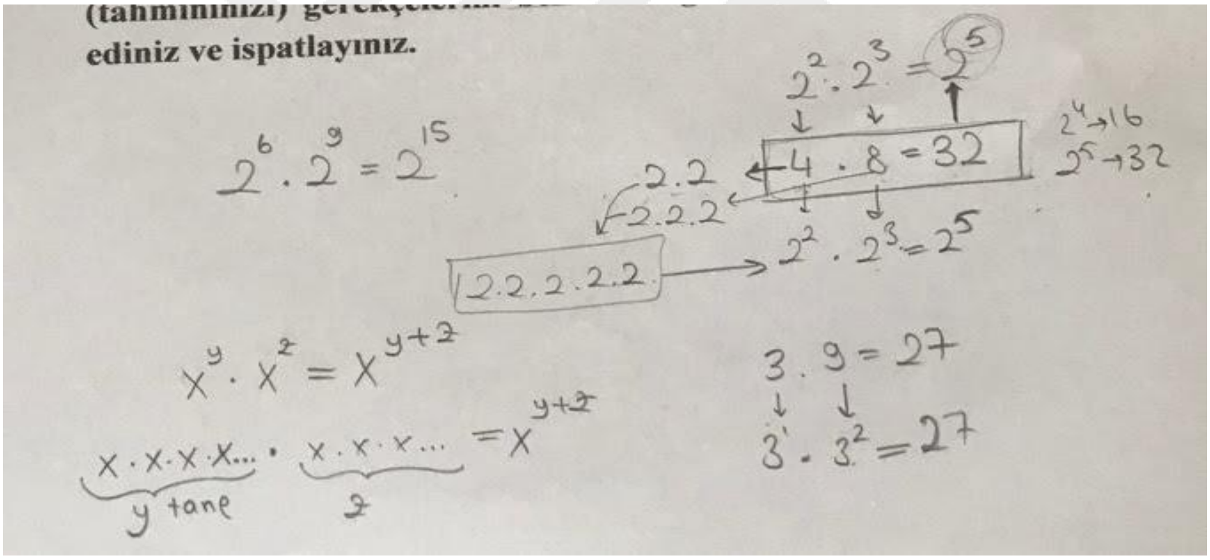
Ö2: Kuralı bilmeseydim eğer bunu 3 veya 5 ile de denerdim. 3 ile denediğimizde yine aynı şey çıkar. 3 ile 9 un çarpımı 27 yapar. 3^1 x 3^2 = 3^3=27 olur.

A: Peki yazdığın 2^6'nın anlamını biliyor musun?

Ö2: 6 tane 2'nin çarpımı. Aslında asal çarpanlarına da ayırabiliriz. 4, iki tane 2'nin çarpımı; 8, üç tane 2'nin çarpımı toplamda 5 tane 2'nin çarpımı olur.

A: Genel bir ifade ile gösterebilir misin?

Ö: x^y . x^z = x^{y+z} olur.



Şekil 4.17. Ö2 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrencinin ispat sürecini tamamladığı görülmektedir. Öğrenci problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başlamış, daha önceden bildiğini ifade ettiği varsayımı ifade etmiştir. Öğrencinin varsayımını bildiği kurala dayalı ürettiği görülmektedir. Öğrencinin varsayımı ispatlamaya yönelik argümanlarına bakıldığında öncelikle deneysel örnekler üzerinden varsayımını doğrulama yoluna gittiği görülmektedir. Öğrencinin varsayımını küçük örnekler kullanarak birden fazla deneysel örnek ile ispatlamaya çalışmıştır. Daha sonra araştırmacının üslü sayının anlamını sormasının ardından üslü sayıların anlamı ile çarpma işlemi arasında ilişki kurmuş varsayımını ispatlamaya yönelik geçerli bir argüman üretmiştir. İspat sürecinde öğrencilerin zaman zaman öğretmen desteğine ihtiyaç duydukları düşünülebilir. Öğrenci varsayımını matematik standartlarında ifade etmiş, ispat sürecini tamamlamıştır.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu söyler misin?

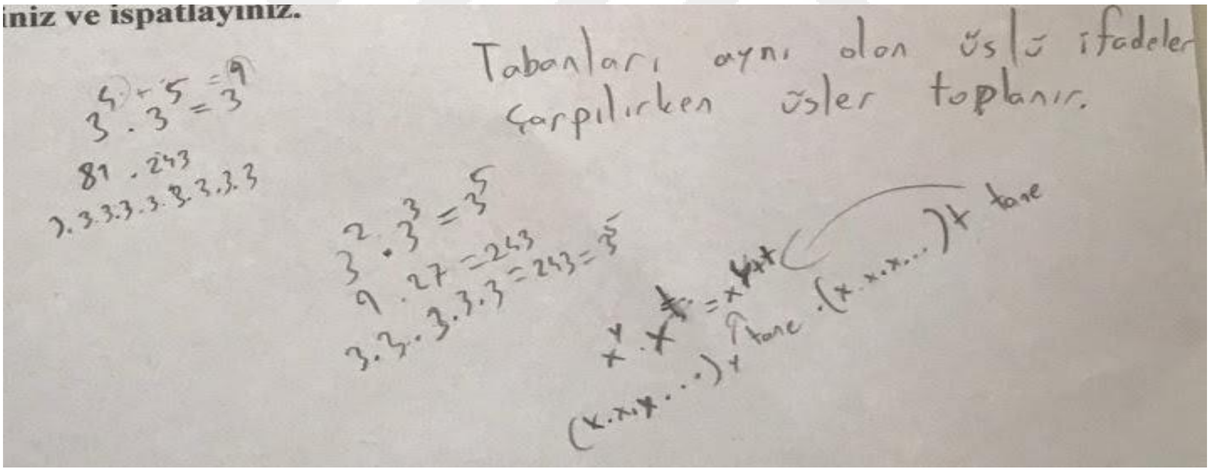
Ö3: (Soruyu okur) yani tabanları aynı, 3^5. 3^4=3^9

81. 243 şimdi, 81'in içinde çarpılan kaç tane 3 var diye bakacak olursak, 81= 3.3.3.3, 243= 3.3.3.3.3 olur. Şimdi dokuz tane 3 oldu çarpılacak. Buna da 3^9 diyebiliriz çünkü burada 9 tane üç var çarpılan. Üslü sayıları çarparken üslerini topluyorum. Çünkü kaç defa çarpılacaklarını gösteriyor.

A: Peki bunu cebirsel gösterebilir misin?

Ö3: x^y. x^t= x^{y+t}

(x.x.x…x) y tane . (x.x.x….x) t tane olur.



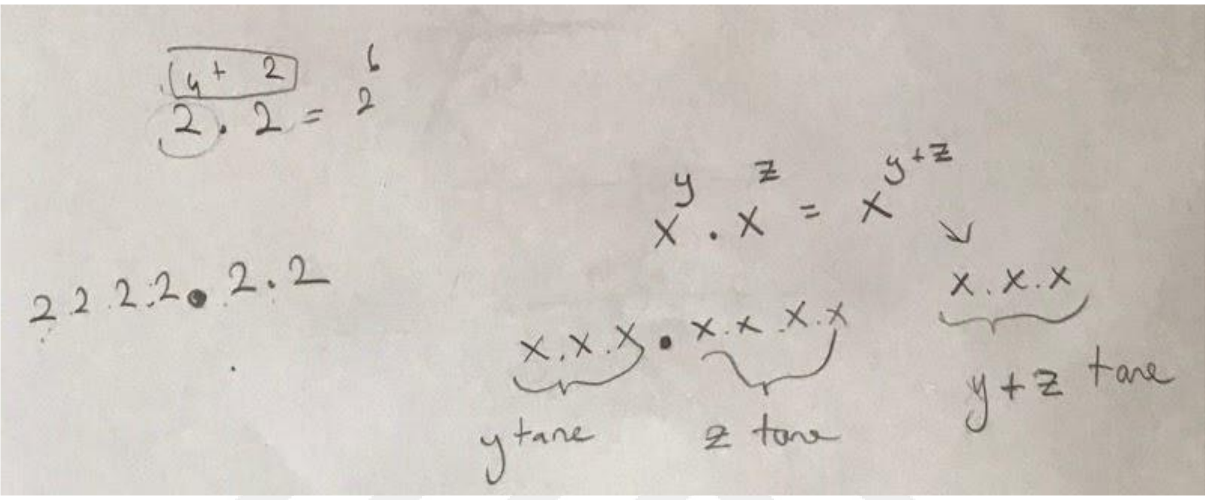
Şekil 4.18. Ö3 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başlamış ve varsayımını ifade etmiştir. Öğrencinin varsayım üretmek için argüman geliştirmemesi varsayımını ezbere bildiği kurala dayandırdığını gösterebilir. Öğrenci varsayımı ispatlama aşamasında üslü sayıların anlamından yola çıkarak genelleştirilebilir örnek üzerinden çarpma işlemi ile ilişki kurmuş ve kurduğu ilişkiyi genel bir gösterim ile ifade etmiştir. Öğrenci varsayımın ispatı için uygun argümanları tümdengelim adımlarında ifade etmiştir. Varsayımını matematik standartlarında ifade etmiş, ispat sürecini tamamlamıştır.

Ö4: Burada bize tabanları aynı olan üslü sayıları nasıl çarpacağımızı soruyor.

Mesela örnek vereyim; $2^4.2^2=2^6$ tabanları aynı ise üsleri topluyorduk. Nedeni ise 2^4 dediğimiz şey 2.2.2.2. dir. Biz buna yine bir çarpma işlemi uygulanırsa

2^2= 2.2 dir. Toplam kaç tane çarpma işlemi yaptığımızı üsleri toplayarak görebiliyoruz. Cebirsel göstereyim. $x^y.x^z=x^{y+z}$ yani x.x.x.x..x (y tane), x.x.x…x (z tane)= x.x.x…x (y+z tane) olur.



Şekil 4.19. Ö4 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problemi açıklamış ve problem durumuna ait varsayımı net bir şekilde ifade etmiştir. Varsayımı ispatlama aşamasında üslü sayıların anlamından yola çıkarak genelleştirilebilir örnek üzerinden çarpma işlemi ile ilişki kurmuş ve kurduğu ilişkiyi genel bir gösterim ile ifade etmiştir. Öğrencinin varsayımın doğrulanması için argüman geliştirme aşamasını atlayarak, ispat için uygun argümanları tümdengelim adımlarında ifade etmiştir. Bu durum öğrencinin üslü sayılarda anlamlı öğrenme gerçekleştirdiği olarak görülebilir. Varsayımını matematik standartlarında ifade etmiş, ispat sürecini tamamlamıştır.

Ö5: Biz üslü ifadeler çarpıldığında biliyoruz ki üsleri toplanıyor. $2^m.2^n=2^{n+m}$

A: O yazdığın 2 sabit mi?

Ö5: Hayır $a^m.a^n=a^{n+m}$ şeklinde gösteriyorlar zaten formülde. Bize bunun ispatını sormuş. Bir örnek vereyim belki bir şeyler çağrıştıracaktır. Şu anda aklıma bir şey gelmiyor.

$2^3.2^2=2^{3+2}=2^5$

8.4=32 ve 32= 2^5 tir.

Birden fazla örnek mi göstermem gerekiyor?

A: Birden fazla örnek yeterli olur mu ispat için sence?

Ö5: Bence olmaz.

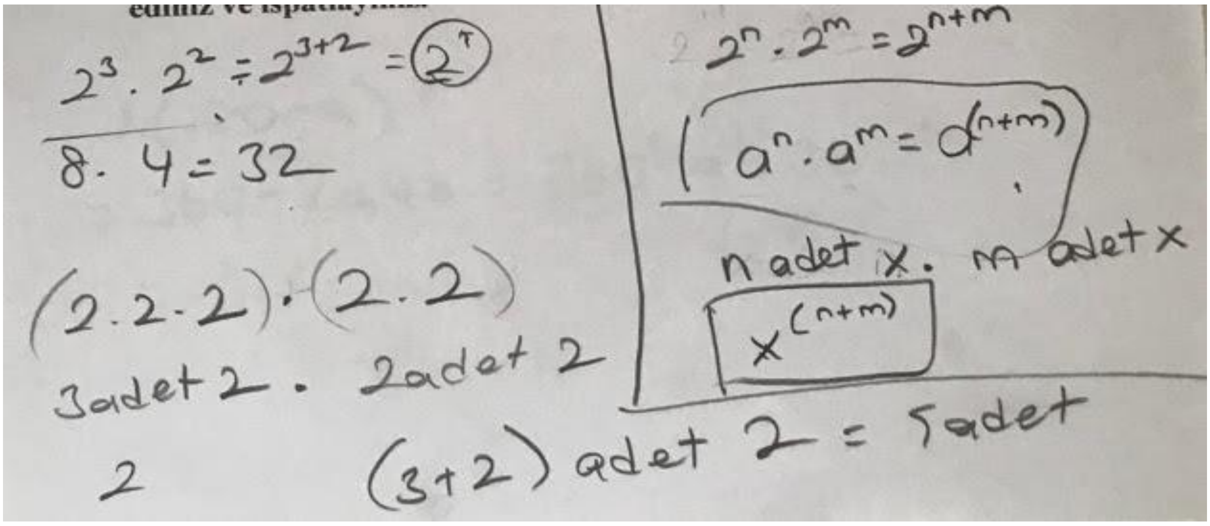
A: a^m veya a^n anlamı ne biliyor musun?

Ö5: Bir sayının m. kuvveti. (2^3 ve 2^2 den bahseder) bunları ben ayırsam;

3 adet 2 ve burada da 2 adet iki var, bunları çarpmış. 3+2 adet 2 olur , 5 adet 2 onu da 2^5 olarak gösteririm.

A: Cebirsel ifade de onu nasıl açıklarsın?

Ö5: $x^m.x^n=x^{n+m}$ n adet x çarpı, m adet x eşittir x^{n+m} olur.



Şekil 4.20. Ö5 Kodlu Öğrencinin Dördüncü Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamamış ve varsayımını net bir şekilde ifade etmiştir. Öğrencinin varsayımı ispatlamaya yönelik argümanlarına bakıldığında öncelikle deneysel örnekler üzerinden varsayımını doğrulama yoluna gitmiştir. Doğrulama için verdiği örneğin ardından ispat için birden fazla örnek gösterme konusunda kararsız kalmış fakat bunun ispat için yeterli olmayacağını ifade etmiştir. Bu durum öğrencinin örnek temelli argümanı ispat kabul edilmeyeceğinin farkında olması olarak düşünülebilir. Daha sonra araştırmacının üslü sayının anlamını sormasının ardından tümevarımsal bir çıkarım ile üslü sayıların anlamı ile çarpma işlemi arasında ilişki kurmuş varsayımını genel bir gösterim ile ifade etmiştir. Varsayımını matematik standartlarında ifade etmiş, ispat sürecini tamamlamıştır. Öğrencilerin dördüncü soruda geçirmiş oldukları ispat süreci aşamaları tabloda sunulmuştur.

Tablo 4.4. Öğrencilerin Dördüncü Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları

Ana Safhalar	Alt Safhalar	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problem durumunun araştırılması	Problem durumunun doğru bir şekilde açıklanması Problem durumu ile ilgili çizimlerin ve ölçümlerin yapılması					
Varsayımın ifade edilmesi	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmesi Varsayımın kesin formülasyonunun verilmemesi	✓	✓	✓	✓	✓
Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi	Önceki tanım ve teoremleri kullanma Görsel ve şekilsel modeller Kullanma Deneysel ve kurala dayalı örnekler kullanma	✓	✓ ✓	✓	✓	✓ ✓
Uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi	Üslü sayıların anlamı ve çarpma işlemi arasında ilişki kurma	✓	✓	✓	✓	✓
Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet	**Teorem.** Tabanları aynı olan iki üslü ifade çarpılırsa, üsler toplanarak o tabana üs olur. $a^m.a^n=a^{m+n}$ İspat a^m, m tane a'nın çarpımı; a^n, n tane a'nın çarpımı olduğundan bu iki ifade çarpılırsa m+n tane a çarpılmış olur.	✓	✓	✓	✓	✓

Dördüncü soruya ait tablo incelendiğinde tüm öğrencilerin ispat süreçlerini tamamladığı görülmüştür. Öğrencilerin tümünün varsayım üretmek için argüman geliştirmeden varsayımı ifade etmeleri, önceden bildikleri kurala dayalı varsayım ürettikleri olarak düşünülebilir. Varsayımlarının geçerliliğini ispatlamaya yönelik, iki öğrenci geçerli bir ispat ortaya koymadan önce varsayımlarını deneysel örnekler ile doğrulama yoluna gitmiştir. Varsayımlarını örnek kullanarak ispatlamaya çalışan iki öğrenciye, araştırmacının üslü sayıların anlamını sorması üzerine ispat için geçerli argüman geliştirebilmeleri öğrencilerin ispat sürecinde öğretmen yönlendirmesine ihtiyaç duyduğu anlamına gelebilir. Tüm öğrencilerin varsayımı ispatlama aşamasında üslü sayıların anlamı ile çarpma işlemi arasında ilişki kurduğu ve bunu genel bir gösterim ile ifade ederek ispat sürecini tamamladığı görülmüştür Öğrencilerin tamamının varsayımlarını ispatlamak için geçerli argüman geliştirebilmeleri üslü sayılar kavramını anlamlı öğrendikleri olarak düşünülebilir. Kavramsal ve anlamlı öğrenmenin ispat yapmaya olumlu etki sağladığı sonucuna ulaşılabilir. Ayrıca öğrencilerin ispatlarını matematik standartlarında ifade edebildiği görülmüştür. Bu durum öğrencilerin, cebirsel gösterimi daha kısa olan ifadeleri matematik standartlarında daha kolay yazabildiği olarak görülebilir.

4.1.5. Beşinci Soruya Ait Bulgular

Beşinci soruda öğrencilere 'Bir paralelkenarda ardışık açıların toplamı için ne söyleyebiliriz. Tahmininizi gerekçeleri ile belirtiniz ve ispatlayınız.' sorusu yöneltilmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde dört öğrencinin ispat için geçerli argüman üretebildiği, bir öğrencinin ise varsayımın doğrulanması için argüman geliştirme aşamasında kaldığı görülmektedir. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Soruyu okuyup ne istediğini anlatır mısın?

Ö1: (Ardışık açıları işaretler) Buna a desek, buna b desek toplamı 90^0 eder. Gerekçesi olarak ise paralelkenarda karşılıklı açılar eşittir ve (karşıt açıları gösterir) burası a ve burası da b'dir. $2a + 2b = 180^0$ ise $a+b=90^0$ yapar.

A: 180^0 dediğin nedir?

Ö1: Pardon paralelkenarın iç açı toplamı 360^0'dir. O zaman $a+b= 180^0$ olur.

A: Peki karşılıklı kenarlar neden eşit?

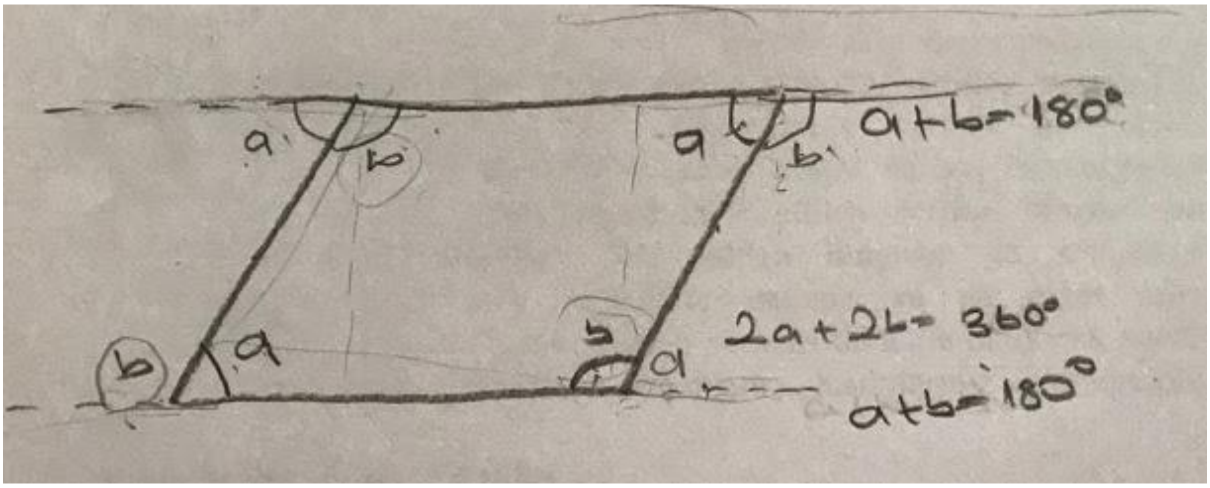
Ö1: Şöyle z kuralı vardı sanırım. (İç ters açıları gösterir) Burası a ise burası da a'dır. Burası b ise burası da b dir.

A: Z kuralı dediğin her zaman geçerli mi?

Ö1: (Paralelkenarın alt ve üst kenarını gösterir) Hayır, üst ve alt kenarın paralel olması gerekir. Bunun sanırım başka bir kuralı mı vardı? (Paralelkenarın alt ve üst kenarlarını gösterir) Bunlar paralel olduğu için doğruların üzerine iki tane doğru çekmişiz. (Paralelkenar üzerindeki yöndeş açıları gösterir) Bu açıların aynı olması gerekir paralel oldukları için.

A: Gösterdiğin açıların isimlerini biliyor musun?

Ö1: Hayır. Bilmiyorum



Şekil 4.21. Ö1 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamamış, problem durumu ile ilgili çizim yaparak ispat sürecine başlamıştır. Probleme ait varsayımı ifade etmiş fakat varsayımını yanlış bir bilgiye dayandırdığını fark edip daha sonra varsayımını revize etmiştir. Varsayımın geçerliliği için öncelikle paralelkenarda karşılıklı açıların eşitliğini gerekçe olarak sunmuş, araştırmacının bu eşitliği nasıl gösterebileceğine ilişkin sorusu üzerine okulda öğrendiği Z kuralına dayanarak bunların eşit olduğunu söylemiştir. İspat sürecinde öğrencinin önceden bildiği, hatırladığı ezbere bilgileri kullandığı görülmektedir. Son olarak öğrenci paralelkenara karşılıklı kenarların paralel olmasını kullanarak yöndeş açılar ile paralelkenarda ardışık açılar arasında ilişki kurmuş fakat yöndeşlik kavramını telaffuz etmemiştir. Öğrencinin varsayımın ispatı için geçerli argüman geliştirebildiği fakat argümanını matematik standartlarında ifade edemediği görülmüştür. Öğrencinin ispat için geçerli argüman üretip, varsayımını genel bir ifade ile temsil edebildiği halde matematik standartlarında ifade edememiştir.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu söyler misin?

Ö2: (Paralelkenarı çizer ve ardışık açıları işaretler.) Burada C var. C kuralı olduğunda toplamı 180^0 olacak. Bunu bilmeseydim eğer; (paralelkenarın kenarlarından birini uzatır) açılara a ve b dersem, a +b= 90^0 olur.

A: 90^0 dediğin neresi peki?

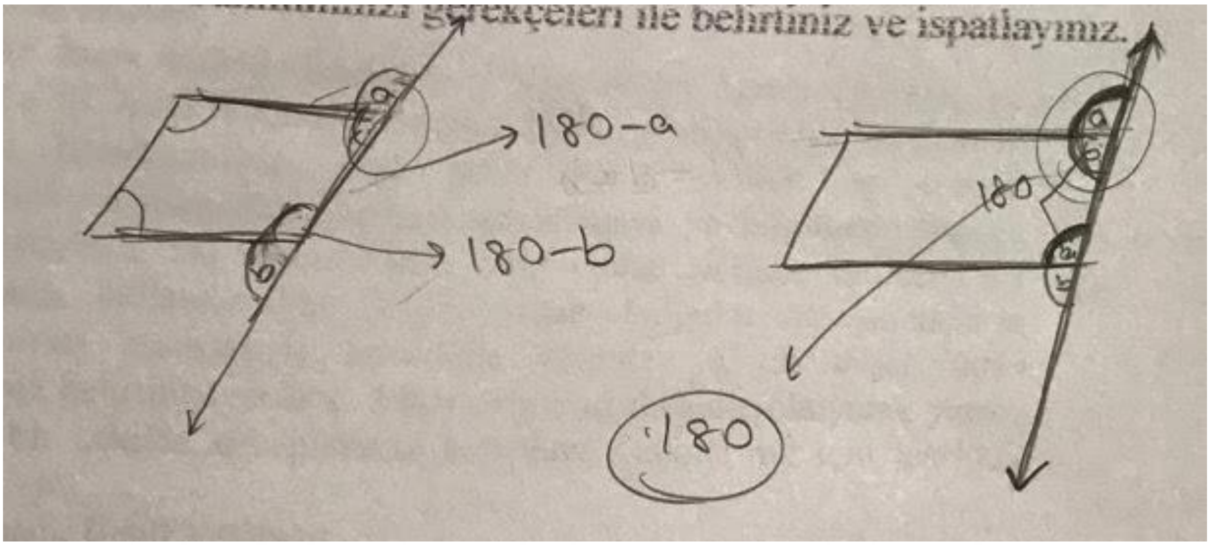
Ö2: Bir dakika… (Kenarı uzatır) dışta kalan açılara a ve b dersek ; (a ve b'nin iç açısını gösterir) 180-a ve 180-b olur. Bu kenarlar paralel olduğu için (yöndeş açıları gösterir) bunlar a ve b olur. (Kenarları gösterir) Bunlar paralel zaten. Paralel olduğu için (yöndeş açıları gösterir) bunlar eşit olur. a+b= 180^0olmak zorunda.

A: Peki nasıl yaptığını özetler misin?

Ö2: Eğer paralelkenarın ardışık açılarının olduğu bu kenarı uzatırsak bir doğru halinde ve açıları isimlendirirsek, bu iki kenar paralel olduğu için, (yöndeş açıları gösterir) bunlar eşit olur.

A: Gösterdiğin açıların adını biliyor musun?

Ö2: Hayır. Bilmiyorum. Eşit olmak zorunda kalır çünkü paraleller zaten. Öyle olunca toplamı 180^0 olmak zorundadır.



Şekil 4.22. Ö2 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamadan problem ile ilgili çizimler yaparak ispat sürecine başlamıştır. Probleme ait varsayımı net bir şekilde ortaya koymuş, varsayımın geçerliliği için ilk olarak alt-üst ve yan kenarın oluşturduğu şekilde C kuralı uygulayabileceğini söylemiş ve bunu varsayıma gerekçe göstermiştir. Öğrenci varsayım için argüman geliştirmeye ihtiyaç duymadan varsayımı ezbere bildiği bir kurala dayanarak ortaya koymuştur. Daha sonra paralelkenarda iki paralel ve bir kesen doğrunun oluşturduğu açıları fark etmiş yöndeş açıları gerekçe göstererek varsayımın ispatı için geçerli argüman üretmiştir. Öğrencinin varsayımın ispatı için geçerli argüman geliştirebildiği fakat argümanını matematik standartlarında ifade edemediği görülmüştür.

A: Soruyu okuyup ne sorduğunu söyler misin?

Ö3: Bir paralelkenarda ardışık açıların toplamı için ne söyleyebiliriz? Şimdi…Paralelkenar çizerek başlayalım öncelikle. O kadar düzgün çizemedim ama ne elde edeceğimiz az çok belli burada. Öncelikle karşılıklı açılar eşittir. Bunların hepsi 360^0

olduğuna göre şu ikisi (ardışık açılardan bahseder) 180^0 etmeli. Bu ikisi 180^0 edecekse birine 120^0 diğerine 50^0 diyemeyiz. O zaman toplamları 170^0 ediyor genel toplamda 340^0 ediyor. Yani şöyle bir oran var diyebiliriz. Ya da oran demeyelim aslında buradaki geniş açı ile buradaki dar açı artık her ne olacaksa toplamları 180^0 olmalı. Çünkü karşılıklı kenarlar birbirinin aynısı ve toplamları 360^0 etmeli.

A: Karşılıklı açıları neden eşittir peki?

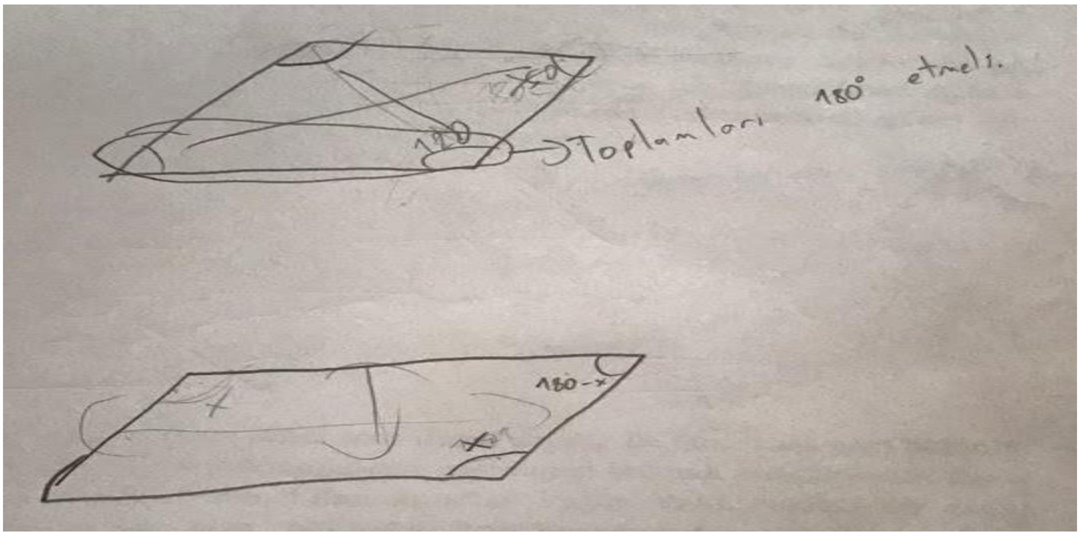
Ö3: Orada da öncelikle karşılıklı kenarların birbirine paralel olduğunu düşünürsek (karşılıklı kenarlardan bahseder) buradaki kenarlar birbirine paralel, buradakilerde birbirine paralel. Bunun ne işe yarayacağını da düşünmem gerekir. Çünkü bunlar birbirine paralel olmazlarsa bunlar eşit olamaz. Çünkü buradaki açı 119^0 bile olsa (geniş açısı 120^0 olan açıyı gösterir) buradaki bir tık eğik olacak ve paralel olmayacak eğilmeden dolayı.

A: İddianı cebirsel gösterebilir misin?

Ö3: (Tekrar bir paralelkenar çizer) bir açı x olursa ardışık açısı 180-x olacak. x ile 180-x toplandığında 180 olur, diğer x ile 180-x toplandığında 180 eder ve iç açılarının toplamı 360^0 oluyor.

A: Karşılıklı açıların eşitliğini burada açıklayabilir misin?

Ö3: İkisi de paralel olduğu için açının birindeki bir artış olduğunda diyelim ki burası yine x olsun, karşı kenarda bir tık eğim olacak ve paralelkenar artık paralelkenar olmayacak, bir yamuk olacak.



Şekil 4.23. Ö3 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu açıklamadan problem ile ilgili çizimler yaparak ispat sürecine başlamıştır. Probleme ilişkin varsayımı net bir şekilde ortaya koymuş, varsayıma gerekçe olarak paralelkenarın iç açı ölçülerinin toplamının 360^0 olması ve karşılıklı açıların eşit olması gerektiğini söylemiştir. Öğrencinin ispat için ilk olarak bildiği kurala dayalı bir argüman sunduğu görülmektedir. Araştırmacının karşılıklı açıların neden eşit olduğunu sorması üzerine öğrenci, eşitliği iki paralel ve bir kesen doğrunun oluşturduğu yöndeş açıların eşit olması teoremine dayanarak ispatlamıştır. Paralellikten kaynaklı eşitliği ifade ederken eğim kavramından yararlandığı görülmektedir. Öğrencinin farklı kavramlar arasında ilişki kurabildiği görülmektedir. Kavramlar arasında ilişki kurabilmenin ispat sürecinde argüman geliştirme aşamasında olumlu etkisinden söz edilebilir. Paralellik söz konusu olduğu için açıların eşit olması gerektiğini ve paralelliğin söz konusu olmadığı durumda şeklin paralelkenar değil yamuk olacağını ifade etmiştir. Öğrencinin yamukta paralellik şartının olmadığını ifade etmesi yamuk kavramında yanlış bilgiye veya kavram yanılgısına sahip olduğu olarak görülebilir. Öğrencinin varsayımın ispatı için geçerli argüman geliştirebildiği fakat argümanını matematik standartlarında ifade edemediği görülmüştür.

Ö4: (Paralelkenar çizer) Karşılıklı kenarlar paralel. Köşegen çizemediğimiz tüm açılar ardışık açı oluyor. Burada bir tane C şekli oluşuyor.

A: C şekli dediğin nedir?

Ö4: Paralellik olduğunda üst taban ve alt taban arasında paralellik olduğunda oluşan şekil C'ye benzetiliyor genelde bu iki tane komşu açının toplamı 180^0 olur.

A: Peki neden 180^0 olduğunu gösterebilir misin?

Ö4: (İki paralel bir kesen doğru çizer ve içte kalan açılardan birini 60^0olarak değer verir) Burada Z kuralı kullanıp (iç ters açı özelliğinden bahseder) 60^0'yi buraya geçirebiliriz.

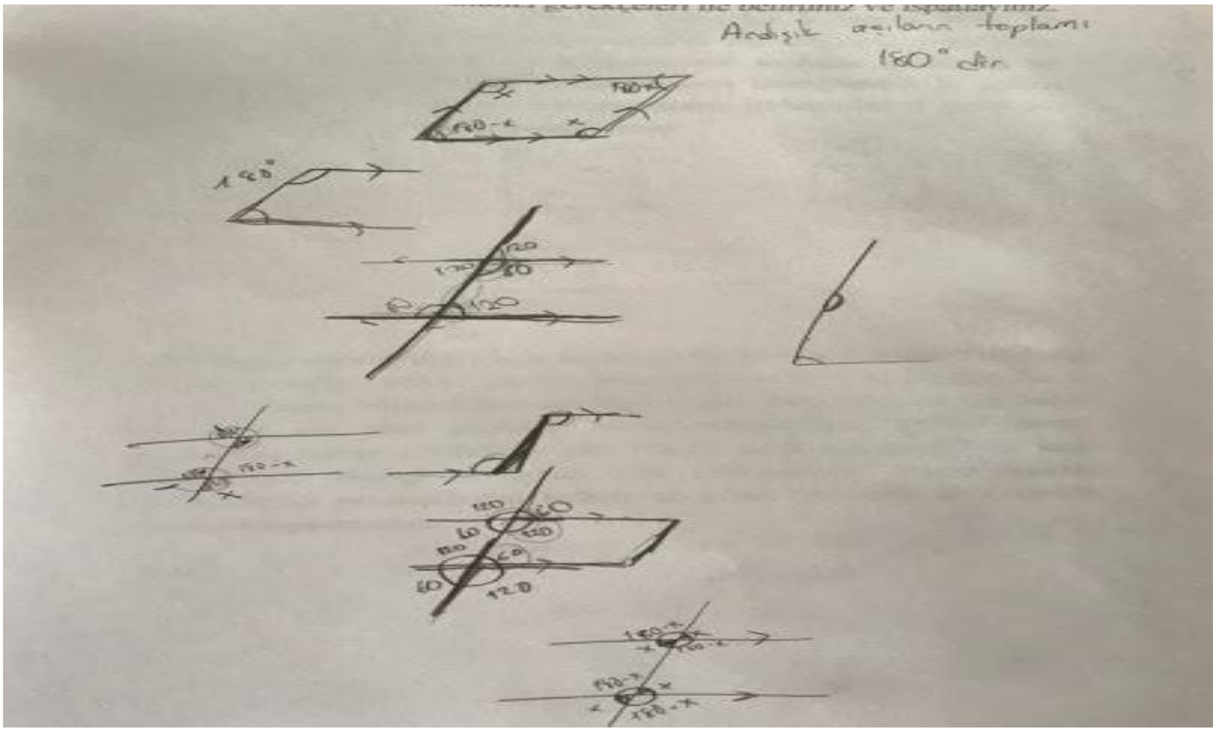
A: Z kural dediğin nedir?

Ö4: Yine paralellikte paralel olan iki kenarın iç kısımlarında aynı tarafta değil de zıt taraflarında kalan açıları birbirine eşit oluyor. O kuraldan gitmeyi denedim. Buradan yola çıkarak da bu iki açının toplamının 180^0 olduğunu anlayabiliyoruz. Bir yol daha aklıma geldi, (iki paralel ve kesen doğru çizer) paralellik olduğunda (iç ters, dış ters ve yöndeş olan açı çiftlerini gösterir) bu açılar da birbirine eşit olur.

Özetlersek; (İki paralel bir kesen doğru üzerinde dar açıyı 60^0 olarak isimlendirir) bir tam açının 360^0 olduğunu biliyoruz ve (ters açıları gösterir) karşılıklı olan zıt taraftaki açılar birbirine eşit oluyor. Komşu alan açı ile toplamının 180^0 olduğunu da biliyoruz bu da paralellikten olan bir şey. Böylece diğer açıların 120^0 olduğunu anlayabiliyoruz. Bu doğrular paralel olduğu için ve bunlar ikisini aynı ölçüde kestiği için buraya yazdığımız açıların aynısını buraya da uygulamak zorundayız çünkü iki doğruyu aynı şekilde kesiyor paralellik olduğu için. (Şeklin yan kısmını paralelkenara tamamlar) Burayı da paralelkenar olduğunu varsayarak iki ardışık açının 180^0 olduğunu görebiliyoruz.

A: Cebirsel gösterir misin?

Ö4: (İki kesen bir doğru çizer dar açıyı x, geniş açı 180-x derece olarak isimlendirir. Tekrar paralelkenar çizer dar olan açı x derece ise ardışık açısı 180-x derece olarak gösterir.)



Şekil 4.24. Ö4 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu inceleme aşamasında çizimler yapmış ve problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başlamıştır. Probleme ilişkin varsayımı net bir şekilde ifade etmiştir. Varsayımın geçerliliği için ortaya koyduğu argümanlara bakıldığında ilk olarak paralellik olduğunda üst taban ve alt taban arasında oluşan şeklin C'ye benzetildiğini bu sebeple bu iki açının toplamının 180^0 olduğunu söylemiştir. Daha sonra iddiasını iki paralel, bir kesen doğru üzerinden açı değeri vererek Z kuralı gereği iç ters açıların eşit olması gerektiğini söyleyerek desteklemiştir. Öğrencinin varsayımın ispatı için öncelikle kurala dayalı argümanlar sunduğu görülmüştür. Son olarak çizdiği iki paralel bir kesen doğrunun oluşturduğu açılar üzerinden tam açının 360^0 olmasını kullanarak ters-iç ters-dış ters ve yöndeş açıları gösterip bunların paralellik gereği eşit olması gerektiği yönünde açıklama yapmış ve bu modelin paralelkenarda kenar özelliği gereği uygulanabileceğini belirtmiştir. Varsayımını genel bir gösterim ile ifade etmiş fakat argümanını matematik standartlarında ifade edemediği görülmüştür.

Ö5: (Paralelkenar çizer) İlk sorumuzda dörtgenlerin 360^0 olduğunu kanıtlamıştık. (Karşılıklı açılardan bahseder) Bu iki açının paralellikten dolayı eşit olduğunu biliyoruz. (Paralelkenarın açılarını a ve b olarak isimlendirir)

O zaman $2.(a+b)=360^0$ olur. Buradan $a+b= 180^0$ olur.

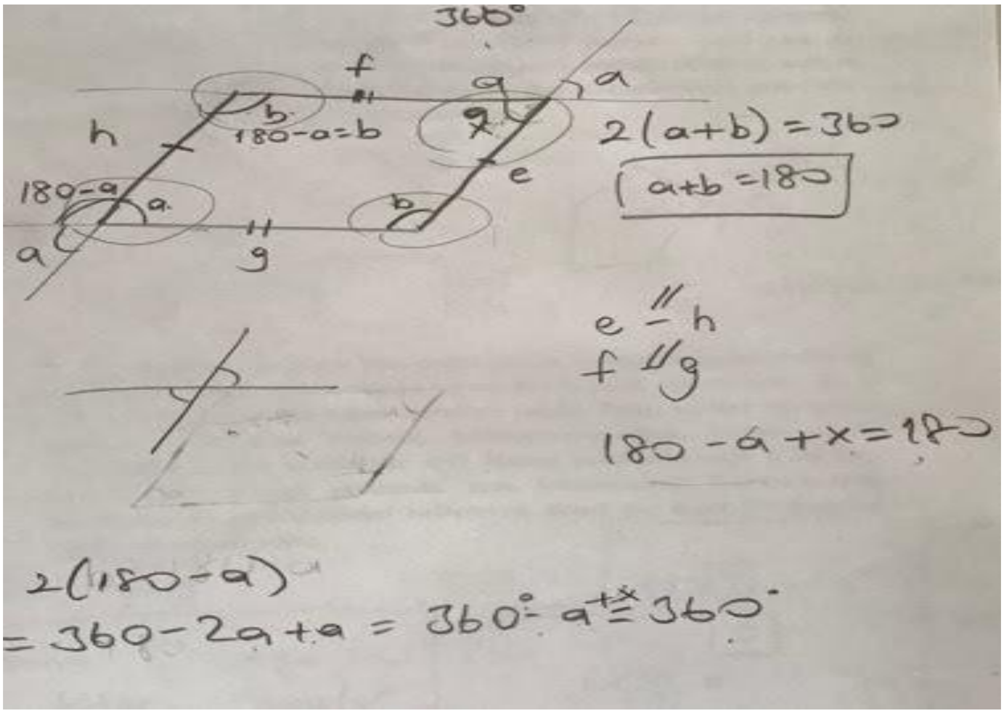
A: Karşılıklı açıların neden eşit olduğunu gösterebilir misin?

Ö5: Karşılıklı kenarlar paraleldir. (Kenarları e ve f olarak isimlendirir ve paralellik sembolü kullanarak yazar)

(Paralelkenarda dar açıyı a ve dış açısını180^0-a olarak isimlendirir, paralel olan diğer kenar üzerinde bulunan iç ters olan açıyı da 180^0-a olarak gösterir.)

180-a=b olur. Bu tüm açıların toplamının 360^0 olduğunu biliyorum.

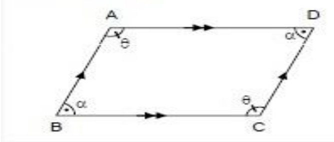
O zaman; $2(180^0-a)= 360^0-2a+a=360^0-a= 360^0$ olur. Tabi burada bir açım daha var ona da x demiştik. Yani $360^0-a+x= 360^0$ olur. Buradan x=a olur



Şekil 4.25. Ö5 Kodlu Öğrencinin Beşinci Soruya Verdiği Cevap

Öğrenci problem durumunu inceleme aşamasında çizimler yapmış ve problem durumunu açıklamamıştır. Probleme ilişkin varsayımı net bir şekilde ifade etmiştir. Varsayımın geçerliliği için ortaya koyduğu argümanlara bakıldığında ilk olarak karşılıklı açıların eşitliğini ve paralelkenarın iç açı toplamını kullanarak varsayımını ispatlamaya çalışmıştır. Öğrencinin ispat sürecinde ilk soruda ispatladığı ifadeyi kullanabileceğini ifade etmesi matematikteki aksiyomatik yapıyı fark edebildiği olarak düşünülebilir. Araştırmacının öğrenciden ispatta kullandığı karşılıklı açıların eşit olma durumunu göstermesini istemesi üzerine iç ve dış açıların bütünler olduğunu, paralelkenarda karşılıklı kenarların paralel olma özelliğinden iç ters açıların eşit olması gerektiğini söylemiştir. Karşılıklı açıların eşitliğini kullanarak yazdığı denklem ile karşılıklı açıların eşit olduğunu göstermiştir. Öğrencinin ispat etmesi gereken ifadeyi kullanarak ispat yapması bu süreçte geçerli argümanları ve ispatın yapısını bilmediği olarak düşünülebilir. Öğrenci kendisinden beklenen yöndeş açı kavramını kullanamamış ve ispatta kullandığı iddiayı ispatlayamamıştır. Öğrencilerin beşinci soruda geçirmiş oldukları ispat süreci aşamaları tabloda sunulmuştur.

Tablo 4.5. Öğrencilerin Beşinci Soruda Geçirmiş Oldukları İspat Süreci Aşamaları

Ana Safhalar	Alt Safhalar	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5
Problem durumunun araştırılması	Problem durumunun doğru bir şekilde açıklanması Problem durumu ile ilgili çizimlerin ve ölçümlerin yapılması	 ✓	 ✓	 ✓	 ✓	 ✓
Varsayımın ifade edilmesi	Varsayımın kesin formülasyonunun verilmesi Varsayımın kesin formülasyonunun verilmemesi	✓	✓	✓	✓	✓
Varsayımın doğrulanması için uygun argümanların belirlenmesi	Önceki tanım ve teoremleri kullanma Görsel ve şekilsel modeller Kullanma Deneysel ve kurala dayalı örnekler kullanma	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓
Uygun argümanların tümdengelim zincirinde birleştirilmesi	İki paralel ve bir kesen doğrunun oluşturduğu yöndeş açılar ile ardışık açıların ilişkisi	✓	✓	✓	✓	
Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet	Teorem: Paralelkenarda karşılıklı kenarlar paraleldir. Teorem: İki paralel bir kesen doğruda oluşan yöndeş açılar eşittir. [AB] // [DC] ve [AD] // [BC] dir. $\alpha + \theta = 180°$ olur. 					

Beşinci soruya ait tablo incelendiğinde dört öğrencinin ispat için geçerli argüman üretebildiği, bir öğrencinin ise varsayımın doğrulanması için argüman geliştirme aşamasında kaldığı görülmektedir. Tüm öğrencilerin problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başladığı görülmüştür. Öğrenciler ispat sürecinde problem durumuna ilişkin çizim oluşturmuşlar ve bu çizimler üzerinden varsayım ve argüman üretmişlerdir. Varsayım üretirken önceden bildikleri tanım veya kurallardan destek aldıkları görülmüştür. Varsayımlarının geçerliliğini ispatlamaya yönelik, dört öğrencinin yöndeş açıları kullanarak ispat yaptığı görülmektedir. Öğrencilerin paralel doğrularda yöndeşlik kavramını bildikleri fakat isim olarak telaffuz edememişlerdir. Ayrıca öğrenciler okulda öğrendikleri Z kuralı ve C kuralı olarak adlandırdıkları ezbere bilgiler üzerinden öncelikle ispat yapmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin ispat için geçerli argüman üretebildiği halde öncelikli olarak gerekçesini bilmeden ezberledikleri kuralları dayanak olarak kullanmaları ispatın başarılı şekilde ilerlemesinde engel olarak görülebilir. Bir öğrenci ispatlaması gereken ifadeyi kullanarak ispat yapmıştır. Bu durum öğrencinin ispat kavramını bilmediği olarak düşünülebilir. Öğrenci kendisinden beklenen yöndeş açı kavramını kullanamamış ve varsayımını ispatlayamamıştır. Öğrencilerin varsayımın ispatlanması için strateji geliştirebildikleri ve varsayımlarını genel bir temsil ile ifade edebildikleri halde ispatlarını matematiksel standartlarda yazamamaları öğrencilerin notasyon konusunda eksik olduğu veya ispatın formatını bilmedikleri anlamına gelebilir.

Üstün yetenekli beş öğrencinin geçirdikleri ispat sürecine ilişkin genel tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 4.6. Öğrencilerin Geçirdikleri İspat Sürecine İlişkin Genel Tablo

Veri Analizi İçin Kullanılacak Kodlar	1.soru	2.soru	3.soru	4.soru	5.soru
Problem durumunun açıklanması • Varsayıma destek çıkacak iddiaların tanımlanması • Çizimlerin araştırılması	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 X Ö2 X Ö3✓ Ö4 X Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 X Ö2 X Ö3 X Ö4 X Ö5 X	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓
Varsayımın ifade edilmesi	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓
Varsayımın geçerliliği için uygun iddiaların belirlenmesi • Varsayımın araştırılması • Varsayım kanıt olabilecek uygun argümanların belirlenmesi • İspat fikri oluşturma	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓
Tümdengelimli bir zincirde tutarlı argümanların seçimi ve kombinasyonu	Ö1 ✓ Ö2 X Ö3 X Ö4✓ Ö5 X	Ö1 X Ö2 ✓ Ö3 X Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3 X Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5 X
Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre formüle edilmesi ve özet	Ö1 X Ö2 X Ö3 X Ö4 X Ö5 X	Ö1 X Ö2 X Ö3 X Ö4 X Ö5 X	Ö1 X Ö2 X Ö3 X Ö4 X Ö5 X	Ö1 ✓ Ö2 ✓ Ö3✓ Ö4✓ Ö5✓	Ö1 X Ö2 X Ö3 X Ö4 X Ö5 X

4.2. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular

İkinci alt problem ‘Üstün yetenekli öğrencilerin ispata ilişkin görüşleri nasıldır?’ olarak belirlenmiştir. Bu alt probleme yönelik bulgular, pilot çalışma ve asıl çalışmada yapılan öğrenci görüşmelerinden elde edilmiştir. İlk soru olan matematik dersinde ispata yer verilip verilmediğine ilişkin öğrenci cevapları;

• Bazen evde bir kuralın neden öyle olduğunu anlamaya çalışıyorum. Eğer ortaya bir düşünce çıktıysa hocalarıma danışıyorum. Hocalar eğer dediğime doğru derlerse sınavda veya ders çalışırken bu ispatı kullanırım. Genelde matematik dersinde ve geometri konularında yaptım.

• Evet, özel derste yapıyoruz. Mesela iki kare farkı gibi konularda nedenlerini konuştuk.

• Hayır, yapmıyoruz.

• Okulda ve Bilsem ‘de yaptık.

• Hayır, yapmıyoruz.

• Okulda 7. sınıfta yaptık.

• Yapmıyoruz.

• Hayır. Yapmıyoruz.

Matematik dersinde ispatın gerekliliği konusunda öğrenci görüşleri;

• Derslerde kuralı direkt verip ispatını açıklamıyorlar. Bence ispatı verilmeli. Bir kuralın neden öyle olduğunu ve niçin o şekilde yaptığımızı bilmemiz lazım. Bu şekilde matematik daha anlaşılır ve sevilen bir ders olabilir.

• İspat yapmak hoşuma gidiyor ve konuların akılda daha iyi kalmasını sağlıyor.

• Özellikle ispat çalışmasını yaptıktan sonra, eksikliğini fazlasıyla hissettirdiğini düşünüyorum. Özellikle darlayan sorular ile daha önce karşılaşmadığımdan normalde olması gerekenden fazla zorlandım. Eğer okullarda bu çalışmalar yapılsaydı hem hayata (iş görüşmelerine, bir fikrin neden doğru olduğunu anlatmaya, hatta davalarda kendini savunmaya) hazırladı hem de beynimizi çalıştırmaya zorlardı.

• Bence yapılmalı çünkü bir bilginin doğru olduğunu ispatlarla görmek beni daha çok inandırır ve mantığını anlamamı sağlar.

• Genel olarak okul derslerinde formül verilip nedeni verilmediğinden o formül unutulduğunda, öğrencinin yapabileceği pek bir şey kalmıyor. Fakat öğrenci kendi formülünü kendi yazabiliyorsa formülü unuttuğunda bu ona bir çare olabilir. Bu şekilde baktığımda ispat kanıt çalışmaların gerekli olduğunu öne sürebilirim.

• Bence arada sırada yapılmalı. Konunun daha kalıcı olmasını sağlar.

• Bence iyi bir yöntem. Formüller ve kurallar destekleyici ve kanıtlar ile öğrencinin beynine tam oturuyor.

• Yapıldığında yorumlama ve düşünme gerektiriyor. Zihinsel açıdan yorucu olabiliyor fakat bir şeyi kanıtladığında veya doğru yaptığını düşündüğünde mutluluk hissi veriyor.

Tablo 4.7. Matematik Derslerinde İspatlara Yer Verilmesine İlişkin Öğrenci Görüşlerinin Kodlanması

Kodlar	**Öğrenci Görüşleri**
Kavramsal Öğrenme	• Derslerde kuralı direkt verip ispatını açıklamıyorlar. Bence ispatı verilmeli. Bir kuralın neden öyle olduğunu ve niçin o şekilde yaptığımızı bilmemiz lazım. Bu şekilde matematik daha anlaşılır ve sevilen bir ders olabilir. • Bence iyi bir yöntem. Formüller ve kurallar destekleyici ve kanıtlar ile öğrencinin beynine tam oturuyor.
Kalıcılık	• İspat yapmak hoşuma gidiyor ve konuların akılda daha iyi kalmasını sağlıyor • Genel olarak okul derslerinde formül verilip nedeni verilmediğinden o formül unutulduğunda, öğrencinin yapabileceği pek bir şey kalmıyor. Fakat öğrenci kendi formülünü kendi yazabiliyorsa formülü unuttuğunda bu ona bir çare olabilir. Bu şekilde baktığımda ispat kanıt çalışmaların gerekli olduğunu öne sürebilirim. • Bence arada sırada yapılmalı. Konunun daha kalıcı olmasını sağlar.
İkna olma	• Özellikle ispat çalışmasını yaptıktan sonra, eksikliğini fazlasıyla hissettirdiğini düşünüyorum. Özellikle darlayan sorular ile daha önce karşılaşmadığımdan normalde olması gerekenden fazla zorlandım. Eğer okullarda bu çalışmalar yapılsaydı hem hayata (iş görüşmelerine, bir fikrin neden doğru olduğunu anlatmaya, hatta davalarda kendini savunmaya) hazırlardı hem de beynimizi çalıştırmaya zorlardı. • Bence yapılmalı çünkü bir bilginin doğru olduğunu ispatlarla görmek beni daha çok inandırır ve mantığını anlamamı sağlar.
Mutluluk	• Yapıldığında yorumlama ve düşünme gerektiriyor. Zihinsel açıdan yorucu olabiliyor fakat bir şeyi kanıtladığında veya doğru yaptığını düşündüğünde mutluluk hissi veriyor.

Tablo incelendiğinde öğrencilerin okul matematik derslerinde çoğunlukla ispat yapmadıkları görülmektedir. Kural ve formüllerin okulda genellikle direkt olarak verildiğini nedeninin açıklanmadığını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin ispatın gerekliliğine ilişkin görüşlerine bakıldığında öğrenciler, formüllerin ya da kuralın nereden geldiğini ve niçin öyle olduğunu bilmek istediklerini, ezberlenen bilginin unutulma riskine karşılık ispatın kalıcı öğrenme sağladığını, bir kuralın nereden geldiğini bilmenin kendilerini ikna ettiğini ve yorucu olmasına rağmen zevkli olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir.

5. TARTIŞMA

Bu bölümde üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat süreçlerini ve ispata yönelik görüşlerini incelemek amacıyla yapılan klinik görüşmelerden hareketle ulaşılan sonuçlar paylaşılacak ve alanyazındaki diğer çalışmalar bağlamında yorumlanacaktır. Bu amaç doğrultusunda tartışma bölümünün iki başlık doğrultusunda verilmesi uygun görülmüştür. Birinci başlıkta öğrencilerin ispat yapma becerileri, ikinci başlıkta ise öğrencilerin ispata ilişkin görüşleri tartışılmıştır.

5.1. Birinci Alt Problemle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma

Tez çalışmasının birinci alt probleminde üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat süreçlerine odaklanılmış bu bağlamda ‘Üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma becerileri nasıldır?’ sorusuna yanıt aranmıştır. Bu soruya yanıt verebilmek için öğrencilere görüşme yöntemi ile araştırmacının geliştirmiş olduğu açık uçlu sorulardan oluşan ispat testi uygulanmıştır. Bu probleme ait veriler 1) Problem durumunu açıklayabilme, 2) Probleme ilişkin varsayım oluşturma ve varsayımı formüle edebilme, 3) Varsayımın geçerliliği için uygun iddiaların belirlenmesi, 4) Tümdengelimsel bir zincirde tutarlı argümanların seçimi ve 5) Tümdengelim zincirinde birleştirilen argümanların matematik standartlarına göre ifade edilmesi ve geriye dönük özet sunma çerçevesinde ele alınmıştır.

Bu uygulamada öğrencilerin ispat süreçleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

Tablo 5.1. İspat Testi Genel Sonuçlar

	Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5
Ö1	4. aşama	3. aşama	4. aşama	5. aşama	4. aşama
Ö2	4. aşama	4. aşama	4. aşama	5. aşama	4. aşama
Ö3	3. aşama	3. aşama	3. aşama	5. aşama	4. aşama
Ö4	4. aşama	4. aşama	4. aşama	5. aşama	4. aşama
Ö5	3. aşama	4. aşama	4. aşama	5. aşama	3. aşama

Bu tablodan hareketle bireylerin ispat süreçleri incelenerek ispat becerileri hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

Öğrencilerin çoğunlukla ispat için geçerli argüman üretebildiği ve stratejiler geliştirebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonucun alanyazında üstün yetenekli öğrenciler ile çalışma yapan Dinamit (2020), Tertemiz ve Karakaş (2017) ve Yıldız, Baltacı, Kurak, Y., Güven (2012)'nin sonuçları ile uyumlu olduğu görülmüştür. Dinamit (2020), 11.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin ispat becerisini ölçmeye yönelik yaptığı çalışmasında öğrencilerin ispat için strateji geliştirebildiklerini ifade etmiştir. Uğurel (2020), ispatların problemleri çözmek için araç, yöntem ve strateji içerdiğini ve Selden ve Selden (1995), rutin olmayan problemlerin çözümünde kullanılan akıl yürütmenin ispatlardaki akıl yürütmeye benzediğini belirtmiştir. Bu yönde yapılan çalışmaların sonuçlarına bakıldığında üstün yetenekli ilkokul 4. sınıf öğrencileri ile üstün yetenekli tanısı almamış başarılı ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin rutin olmayan problem çözme stratejilerini karşılaştırmayı amaçlayan Tertemiz ve Karakaş (2017), üstün yetenekli öğrencilerin diğer öğrencilere kıyasla rutin olmayan problemleri çözmede hata sayılarının oldukça az olduğu ve problemlerde farklı strateji geliştirebildiklerini ifade eder. Yıldız vd. (2012), 8. Sınıf üstün yetenekli olan ve olmayan öğrencilerin problem çözme stratejilerini kullanma durumlarını incelediği çalışmasında üstün yetenekli öğrencilerin problem çözmede daha fazla strateji kullanabildiği ve stratejileri uygulamada esnek bir yapıya sahip oldukları sonucuna ulaştığını belirtmiştir. Fakat çalışma sonucunun öğrencilerin ispat performansına yönelik bazı sonuçlar ile uyumsuz olduğu görülmüştür (Alpay, 2018; Knuth, Choppın ve Bieda, 2012; Cooper vd., 2011; Albayrak İhtiyari, 2010). Bu durumun, çalışmanın tipik öğrenciler ile değil üstün yetenekli öğrenciler ile yapılması sonucu olduğu düşünülebilir. Krutetszkii (1976), üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme, materyalden bağımsız düşünebilme, kanıtlama yeteneği gibi yeteneklerin olduğunu belirtir. Ayrıca Çalışkan (2012), 8.sınıf öğrencilerinin matematik başarısı ile ispat yapabilme seviyelerini incelemeyi amaçladığı çalışmasında öğrencilerin matematik başarıları ile ispat düzeyleri arasında pozitif ve aynı yönde ilişki tespit ettiğini bulgulamıştır. Çalışma grubunun öğretmen görüşüne göre seçildiği düşünülürse matematik alanında akademik başarısı yüksek ve üstün yetenekli öğrenciler ile çalışma yapılması sonucu bu bulguya ulaşıldığı düşünülmektedir.

Öğrencilerin 4. soru dışında hiçbir soruda tümdengelim çıkarımında geliştirdikleri argümanlarını matematik standartlarına göre ifade edemedikleri görülmüştür. Heinze ve Reiss (2004), yüksek başarı gösteren 7 ve 8. sınıftaki öğrencilerin geometrik ispat becerilerini incelemeyi amaçladıkları çalışmalarında 5. aşama olan tümdengelimsel zincirde birleştirilen argümanları matematiksel standartlarda yazmanın diğer aşamalara göre düşük seviyede kaldığını ifade eder. Çalışkan (2012), 8.sınıf öğrencilerinin matematik başarısı ile ispat yapabilme seviyelerini incelemeyi amaçladığı çalışmasında öğrencilerin uygulama esnasında ispatları bilinçli bir şekilde uygulamaya dökemediklerini, nasıl bir yol izleyeceği konusunda zorlandıklarını ifade etmiştir. Öğrencilerin ürettikleri varsayımların ispatı için geçerli argüman geliştirebildikleri ve varsayımlarını genel bir gösterim ile ifade edebildikleri halde ispatı matematiksel standartlarına uygun formatta yazamamaları, öğrencilerin notasyon konusunda eksik olduklarını veya formal ispat yapısını bilmedikleri olarak düşünülmektedir. Bu durum öğrencilerin ispat sürecini tamamlamalarına engel olmuştur. Elde edilen sonuç aşağıda sunulan çalışmalar ile uyumlu bulunmuştur. Polat (2018), 9. sınıflar ile yaptığı çalışmasında öğrencilerin matematiksel dil ve notasyon konusunda yeterli olmadıklarını ve bu durumun öğrencilerin ispatı tamamlamasına engel olduğunu ifade etmiştir. Sözsüz ispatlar üzerine yaptığı çalışmasında sözel olarak verilen varsayımın hiçbir öğrenci tarafından matematiksel olarak ifade edemediğini belirtmiştir. Dinamit (2020)'nin 11.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin ispat süreçlerini incelemeye yönelik yaptığı çalışmasında öğrencilerin matematiksel dil ve notasyon konusunda eksik olduğunu belirtmiş bu sebeple öğrencilere matematiksel dil ve notasyonu etkin kullanabilecekleri etkinlik ve öğrenme ortamlarına yer verilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Ayrıca öğretmen adayları ile ilgili yapılan çalışmaların bulgularında da öğrencilerin formal ispata ulaşmada yaşadıkları güçlüklerden biri matematiksel dil ve notasyon olarak tespit edilmiştir (Moore, 1994; Uğurel ve Moralı, 2010). Güler (2013), öğretmen adaylarının ispat süreçlerini incelediği çalışmasında ispatlarda dil ve notasyon kullanımının genellikle yetersiz ve yanlış olduğunu ifade etmiş ve tüm ispatlarda doğru notasyon ve matematiksel dil kullanan öğretmen adayının olmadığını ifade etmiştir. Moore (1994), üniversite öğrencilerinin formal ispata ulaşma sürecinde yaşadığı bilişsel güçlükleri incelemeye yönelik yaptığı araştırmasında matematiksel dil ve notasyonun öğrenciler için bir engel olduğu sonucuna varmıştır. Uğurel ve Moralı, (2010)'ya göre matematik derslerinde teste yönelik öğretim anlayışının benimsenmesi öğrencilerin matematiksel dil ve notasyon kullanmalarını engellemektedir. Bu nedenle öğrencilere matematiğin kendine has bir dili olduğu erken yaşlardan itibaren fark ettirilmeli ve öğretmenler tarafından matematik derslerinde etkin bir şekilde kullanılmalı ve kullandırılmalıdır.

Öğrencilerin varsayım üretme ve varsayımın ispatı için argüman geliştirme süreçlerinde önceden öğrendikleri bilgileri ve ezberledikleri kuralları dayanak olarak kullandıkları görülmüştür (Zeybek ve Üstün, 2019; İskenderoğlu, 2003; Dinamit, 2020). İspat sürecinde öğrendikleri bilgileri yanlış hatırlamaları ve gerekçesini bilmeden ezberledikleri kurallar hatalı varsayım ve argüman geliştirmelerine neden olmuştur. 7. Sınıf kazanımı olan Eşkenar dörtgen kavramında bazı özellikleri hatırlayamamaları ve bu özellikleri doğru bir çıkarım ile değil kendi çizimleri üzerinden tahmine dayalı elde etmeleri buna örnek olarak verilebilir. Ayrıca paralelkenar sorusunda C kuralı ve Z kuralı olarak ispata dayanak olarak sundukları kuralların nereden geldiğini bilmeden kullanmaları ezbere ve gerekçesiz öğrendiklerinin sonucu olarak görülebilir. Bu durumun ispat sürecinin tamamlanmasına engel oluşturduğu sonucuna varılmıştır. Coşkun (2020), öğretmen adayları ile yaptığı çalışmasında öğretmen adaylarının bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısının (n-3) olduğunu bilmelerine rağmen nedenini açıklayamadıklarını ve bir ifadenin nedenini sorgulamak yerine ezbere bilgiye sahip olduklarını tespit etmiştir. Yapılan çalışmadaki sonuçlar ile paralellik gösteren bu sonuç öğrencilerin erken yaşlardan itibaren matematiksel bilgileri ezbere öğrendiklerini ve bunun ispat sürecine engel olduğunu göstermektedir. Ross (1998), öğrencilerde akıl yürütme gelişmemişse matematiğin onlar için mantıklı olduğunu düşünmeksizin bir dizi prosedürü taklit etme meselesi olduğunu ifade eder. Bu nedenle öğretmenlerin öğrencilerin düzeyini gözeterek matematikteki her şeyi açıklamayı amaç edinmeleri gerektiğini vurgular. Matematikte kavramların ilişkili bir şekilde değil, ezbere öğrenilmesi anlamlı öğrenmeye engel olduğu gibi matematiğin yapısına ve doğasına aykırıdır. İskenderoğlu (2003), yaptığı çalışmasında öğrencilerin daha önce ezberlediği bilgileri hatırlamakta zorlandığını ve yanlış hatırladığını ifade etmiş, bu bilgilerin ezbere değil akıl yürütme yolu ile öğrenildiği taktirde daha doğru bir şekilde anımsanabileceğini belirtmiştir. Bu çalışmada benzer olarak öğrencilerin öğrenmiş oldukları bilgileri hatırlamakta zorlandıkları veya yanlış hatırladıkları görülmüştür. İspat sürecinde öğrencilerin ispata dayanak olarak sunduğu Z veya C kuralı diye ifade ettikleri nedenini bilmedikleri kurallar daha sonraki süreçlerde tamamen hatırlama becerileri doğrultusunda kullanılabilecektir. Pesen (2018), öğrencilerin ispat yapma becerilerinin içerik bilgilerinden etkilendiği ve argümantasyon becerilerinin ise kavram yanılgılarından ve delilleri kullanma biçimlerinden etkilendiğini ifade etmiştir. Matematiği sabit, değişmez, birbirlerinden kopuk, bağımsız kurallar yığını olarak gören, kuralları ve formülleri öğrenciye ezberletmeyi amaçlayan, öğrencinin sadece verilen algoritmaları takip ederek sonuca ulaşmasını bekleyen öğretmen sadece öğretici ve bilgiyi aktarandır. Bunun aksine öğretmen, akıl yürütme yoluyla öğrencinin bilgiye ulaşmasına rehber olup ona yol göstermelidir. Çünkü matematiğin doğasında muhakeme ve akıl yürütme yolu ile gözlemleme, varsayımda bulunma, açıklama ve keşfetme vardır (Baki, 2020). Bu nedenle matematik öğretiminde anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi yönünde bir öğretim yapılmalıdır.

Öğrencilerin varsayımın ispatlanması için argüman geliştirme aşamasında öncelikle deneysel örneklerden yararlandığı görülmüştür (Turan, 2019; Alpay, 2018; Pesen, 2018; Aylar, 2014; Zaimoğlu, 2012), Knuth, Choppın ve Bieda, 2012; Cooper vd., 2011; Albayrak İhtiyari, 2010). Öğrencilerin küçük sayıları kullanarak bir genellemeye varma eğilimde oldukları fakat bunun ispat için geçerli bir argüman kabul edilemeyeceğinin farkında oldukları bulgulanmıştır. 5 ile bölünebilme kuralını ispatlama ve üslü sayılarda çarpma işleminde varsayımı ispatlama aşamasında öğrencilerin deneysel örnekler kullanarak argüman geliştirmesi buna örnek olarak verilebilir. Ayrıca Ö5 adlı öğrencinin *'Bir örnek vereyim belki bir şeyler çağrıştıracaktır. Şu anda aklıma bir şey gelmiyor'* ifadesi örnekleri varsayım üretmeyi desteklemek için kullandığı olarak düşünülebilir. Cooper, Walkington, Williams, Akınsiku, Kalish, Ellis, Knuth (2011), örneklerin varsayımları doğrulama aşamasında stratejik kullanılması tümdengelimsel bir ispat stratejisi geliştirmelerine yardımcı olma potansiyeli taşıdığını belirtir. Aylar (2014), öğrencilerin doğru bir önermenin ispatında çoğunlukla örnek vererek ispat yapma eğiliminde olduklarını buna sebep olarak ise öğrencilerin ispat kavramını bilmedikleri veya bunun ispat olmadığını bilmelerine rağmen başka yöntem geliştiremediklerinden kaynaklı olduğunu ifade etmiştir. Ö4 ve Ö5 adlı öğrencinin görüşmesinden alınan aşağıdaki konuşma öğrencinin örnekleri ispat olarak kabul etmediğini göstermektedir.

A: Peki birkaç örnek ile bir kural çıkarılabilir mi?

Ö4: Çıkarılmaz aslında.

Ö5: Birden fazla örnek mi göstermem gerekiyor?

A: Birden fazla örnek yeterli olur mu ispat için sence?

Ö5: Bence olmaz

Bu çalışmadaki öğrencilerin, deneysel örneklerin ispat olarak geçerli olmayacağını ve deneysel örnek kullandıktan sonra ispat için geçerli argüman üretebildikleri görülmüştür. Bu durum deneysel örneklerin ispat için geçerli olmadığını bilmelerine rağmen deneysel örnekleri kullanmaları ilk etapta farklı argüman geliştiremediklerinden kaynaklı olduğu olarak düşünülebilir. Birçok araştırmacı ispat uygulamalarında öğrencilerin gerekçe sunma olarak örnekleri fazlaca başvurduğunu ortaya koymaktadır. Cooper vd. (2012), matematikçilerin genellikle içgörü sağlaması ve argüman geliştirmeye yardımcı olması için örnekleri kullandığını ifade eder. Fakat bununla birlikte öğrencilerin örnek kullanmayı temel ispat aracı olarak kullanmamalarını öğretmek gerektiğini belirtir. Harel ve Sowder (1998), matematik derslerinde bir ifadenin doğruluğunu ispatlamak için verilen birkaç örneğin öğrencilerde kavram yanılgılarına sebep olacağını ifade etmiştir. Bu sebeple matematik öğretiminde örnek kullanımında dikkatli olunması gerektiği sonucuna varılabilir. Özellikle matematik derslerinde doğru bir önermenin açıklanmasında örnek kullanımı öğrenciler için bir ispat yöntemi olarak algılanabilir. Örnek kullanımı, varsayımı anlamak, neden doğru veya yanlış olabileceğini hakkında fikir sahibi olmak, yeni argüman ve varsayımlar geliştirmeyi destekleyebilmektir. Fakat öğrencilerin örnek kullanımının sınırlarını anlamalarına yardımcı olmak gerekmektedir (Ellis, Ozgur, Vinsonhaler, Dogan, Carolan, Lockwood, Zaslavsky, 2019).

Öğrencilerin varsayım geliştirme aşamasında problemin özel bir durumuna yönelik varsayım geliştirdikleri görülmüştür. Bu durum öğrencilerin doğru varsayım geliştirmesini zorlaştırmıştır. Bahsedilen duruma örnek olarak çokgenlerin iç açı toplamı ile kenar sayısı ilişkisi sorusunda Ö2, Ö3, Ö4, Ö5 adlı öğrenciler problemdeki çokgenleri, çokgen olarak belirtildiğinin farkında olmalarına rağmen düzgün çokgen olarak ele almışlar, buna gerekçe olarak düzgün çokgenlerde daha kolay işlem yapabildiklerini ve aradaki ilişkiyi daha rahat görebilmek için düzgün çokgenleri kullandıklarını ifade etmişlerdir (Yıldırım ve Köse, 2017). Ö3 adlı öğrenci ise eşkenar dörtgenin alanı ile köşegenleri arasındaki ilişki sorusunda karenin bir eşkenar dörtgen olduğunu belirtmiş ve kare özelinde bir varsayım geliştirmiştir. Bu durum öğrencilerin çokgen-düzgün çokgen ve eşkenar dörtgen-kare arasında kavram yanılgısına sahip olduğu anlamına gelebilir. Düzgün çokgenlerde geçerli olabilecek prensiplerin çokgenler içinde geçerli olduğunun düşünülmesi veya aynı şekilde karenin bir eşkenar dörtgen olduğunu ve karede geçerli bir prensibin eşkenar dörtgende de işleyeceğini düşünmesi aşırı genelleme bir kavram yanılgısı olarak düşünülebilir. Çalışkan (2012), 8.sınıf öğrencilerinin matematik başarısı ile ispat yapabilme seviyelerini incelemeyi amaçladığı çalışmasında, öğrencilerin matematiksel kavramları bilmedikleri, yeterince somutlaştıramadıkları ve kavram yanlışlarına sahip olduklarını ifade etmiştir. Başışık ve Öksüz (2010), üstün yetenekli öğrenciler ve tipik gelişim gösteren öğrencilerde eşkenar dörtgen kavramında kavram yanılgısına sahip olduklarını ve eşkenar dörtgenin karenin 45^0 yan döndürülmüş hali olarak düşündüklerini, kare ve eşkenar dörtgenin tüm kenarlarını ve açılarını eşit olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Ay ve Başbay (2017), öğrencilerin çokgenler konusunda aşırı genelleme yaparak yanılgılar oluşturduklarını belirlemişler, şekillerin özelliklerini anlamlandırma yerine aşırı genelleme yapmaları, her durumu bir kuralla ilişkilendirmeye çalışmalarından kaynaklandığı ifade etmişlerdir. Pesen (2018), öğrencilerin ispat yapma becerilerinin içerik bilgilerinden etkilendiği ve argümantasyon becerilerinin ise kavram yanılgılarından etkilendiğini ifade etmiştir. Matematik öğretiminde eski bilgilerle yeni bilgiler arasında ilişki kurulmadığı takdirde bilgilerin ezbere öğrenildiği ve yeni karşılaşılan problem durumlarında ezberlenen bilginin yetersiz kaldığı, kavram yanılgılarına sebep olduğu ve kullanılamadığı görülmektedir. Matematik öğretiminde sadece işlemsel, kurala dayalı ve gerekçesiz öğretim yapılmamalı bilginin temelini oluşturan kavramsal bilgi üzerinde durulmalıdır. Matematik dersinde uygulama ve etkinlik ağırlıklı bir öğretim benimsenmesinin, kavramların doğru öğrenilmesi açısından daha etkili olacağı düşünülmektedir.

Öğrencilerin ispat sürecinde daha önce karşılaştığı durumların, problemin sorgulanmasına ket vurduğu, varsayım ve argüman geliştirmesine engel olduğu görülmüştür. Öğrencilerin bu durumda varsayım ve argüman üretmeye çalışmaktan çok hatırlamaya odaklandıkları görülmüştür. Çokgenlerin kenar sayısı ile iç açı toplamı arasındaki ilişkinin sorulduğu 1. soruda Ö1 ve Ö2 adlı öğrencilerin görüşme alıntıları aşağıda verilmiştir.

Ö1: ‘n koyuyorduk ama onu tam olarak hatırlayamadım’

Ö1: ‘n acaba köşegen mi kenar sayısı mıydı acaba? (n-2) /n midir?’

Ö2: Bunları öğretmişlerdi ama formülleri hatırlamıyorum

Ö2: Dışarıdaki açılar ile ilgili diye hatırlıyorum ama…

Alıntılardan da görüldüğü gibi öğrencilerin varsayım üretmek yerine ilk olarak öğrendiği bilgiyi hatırlamaya odaklandığı görülmektedir. Ö2 adlı öğrencinin varsayım üretme aşamasında ısrarla dış açıları kullanarak argüman geliştirmeye çalıştığı görülmüştür. Bu durum öğrencilerin varsayım üretme aşamasında karşılaştıkları bir engel olarak görülebilir. Doruk (2016), öğrencilere verilen matematik prensiplerin öğrenciler açısından ilk defa keşfediliyormuşçasına bir yaklaşım ile ispat sürecine girmenin matematiğin yapısına da daha uygun olacağını ifade etmiş ve bunun öneminin göz önünde bulundurulması gerektiğini ifade etmiştir. İspat sürecinde gereken zihinsel süreçlerin yaşanmaması öğrencilerin kendilerine yöneltilen matematiksel iddiaları sorgulamadan kabul etmesine ve otoriter bir öğrenme alışkanlığının kapıları açacağını belirtmiştir. Öğrencilerin öğrendiği formülü hatırlayamayınca alternatif bir çözüm yolu için argüman geliştirmeye devam ettikleri ve ispat için geçerli argüman üretmeyi başarabildikleri görülmüştür. Bu geçiş üstün yetenekli öğrencilerin problem çözme sürecinde gösterdikleri esnekliğe de örnek teşkil edebilir (Krutetskii, 1976). İspat sürecinin bir problemin altında yatan nedenleri sorgulandığı, kavramlar arasında ilişki kurularak ispat için geçerli bir argüman geliştirebilme süreci olarak düşünülürse (Altıparmak ve Öziş, 2005; Tall, 1998) bu durum öğrencilerin başarılı ispat süreci geçirmelerine engel olarak görülebilir. Öğretmenlerin sınıfta kullanacakları ispat etkinliklerinde öğrencinin ilk defa karşılaştıkları durumları kullanması öğrencilerin daha üretken ve başarılı bir ispat süreci geçirmelerini sağlayabilir.

5 ile bölünebilme kuralının ispatının sorulduğu ikinci soruda tüm öğrencilerin, üslü sayılarda çarpma işleminin ispatının sorulduğu dördüncü soruda ise Ö2 ve Ö5 adlı öğrencilerin ezberledikleri kurala dayanarak varsayım ortaya koyduğu görülmüştür (Zeybek ve Üstün, 2019; İskenderoğlu, 2003; Dinamit, 2020). Bu sorularda öğrencilerin varsayımı ispatlamak için argüman geliştirme süreçleri incelendiğinde öğrencilerin ispat için geçerli argüman üretebilmede zorlandıkları ve öncelikle deneysel örnekleri kullanarak argüman sundukları, sürekli olarak ezberledikleri kurala dayanarak argüman geliştirdikleri ve kuraldan sıyrılamadıkları görülmüştür. Ö3 adlı öğrencinin 2. soru ile ilgili *'Kural olmasa nasıl yapacağımı aklımda canlandıramıyorum. Kural olmasına o kadar alışmışım ki'* ifadesi öğrencilerin ezbere öğrendikleri kuralların ispat sürecinin başarılı bir şekilde ilerlemesine engel olduğu olarak görülebilir. Öğrencilerin geçerli olmayacağını bildiği halde öncelikle deneysel örnek vererek ispat yapmaya çalışması öğrencilerin argüman geliştiremediği için bu yola başvurduğu olarak düşünülebilir (Aylar, 2014). Healy ve Hoyles (2000), öğrencilerin doğruluğundan emin oldukları önermelerin ispatında, deneysel argüman kullanmalarının daha fazla olduğunu ifade eder. Harel ve Sowder (2007)'a göre varsayım, bireyin doğruluğundan şüphe duyarak ortaya attığı bir iddiadır. Böyle bir iddia öğrencileri araştırmaya ve incelemeye özendirir. Öğrencilerin varsayımın doğruluğundan emin olması araştırma ve inceleme sürecinde merak duygusuyla hareket edememesine neden olabilir. Matematik öğretiminde ezbere ve ilişkisiz öğrenilen kuralların ispat sürecinden de anlaşılacağı gibi öğrencilerin yaratıcı düşünmelerini engellediği sonucuna ulaşılabilir. Doruk (2016), ispat yapmadan önce girilen varsayım oluşturma sürecinin ispat yapmayı kolaylaştırdığını, önermenin doğruluğunu keşfetmek için geçirilen süreç ile önermenin ispatlama süreci arasındaki boşluk arttıkça ispatlama sürecindeki güçlüğün de artacağını ifade etmiştir. Ercan (2020), öğrencilerin kendilerine öğretilen matematiksel durumların neden doğru olduğunu bilmeden ezberlediklerinde ispatlarda başarılı olmadığını ifade etmiştir. NCTM'in Okul Matematiği İlkeleri ve Standartlarına (2000) göre, "Ortaokulun sonunda, öğrenciler matematiksel kanıtları anlayabilmeli ve üretebilmelidir ... ve bu tür argümanların değerini takdir etmelidir" (s. 56). Araştırmalar, öğretmenlerin öğrencilerin ikna edici buldukları gerekçeleri belirlemeleri ve

ardından tümdengelimli kanıtlara ulaşma hedefine yönelik akıl yürütme yeteneklerini geliştirecek etkinlikler sağlamaları gerektiğini göstermektedir. Bu süreç zaman alan bir süreç olsa da her yaştan öğrencinin, matematiksel gerçeği oluşturmak için argümanları kullandıkları bir sınıf kültürüne katılarak muhakeme yeteneklerini geliştirebilir (Quinn, 2009).

Öğrencilerin önceki yıllardaki kazanımlara ait yanlış bilgilerinin ve bilgi eksiklerinin olduğu, bu durumun ise ispat sürecinin başarılı bir şekilde ilerlemesine engel olduğu görülmüştür (Coşkun, 2020; Çalışkan, 2012; Albayrak İhtiyari, 2010; Dinamit, 2020; Polat, 2018). Eşkenar dörtgende iç açı toplamı ile kenar sayısı ilişkisinin sorulduğu üçüncü soruda öğrencilerin, eşkenar dörtgende köşegen ve açı özellikleri konusundaki bilgi eksikliklerinin ispat sürecinde varsayım üretme ve argüman geliştirmelerine engel olduğu tespit edilmiştir. Aynı zamanda üçüncü soruda Ö4 adlı öğrencinin eşkenar dörtgenin her bir açısının 90 derece ve beşinci soruda Ö1 adlı öğrencinin dörtgenin iç açı toplamının 180 derece olduğunu ifade ederek yanlış varsayım ürettiği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin bilgi eksikliği yaşadığı konularda bilgileri kendi çizimleri üzerinden sezgisel olarak göz kararı ve tahmine dayalı elde ettikleri bulgulanmıştır. Üçüncü soruda Ö2 adlı öğrencinin köşegen uzunlukları için *'Bence eşit değiller, çünkü aslında şekle göre değişir. Şekli çizmesem karar veremezdim. Nedenini şu an saptayamıyorum ama farklı olması gerekiyor.'* diyerek gerekçe sunmaması, yine aynı soruda Ö1 adlı öğrencinin *'Köşegen uzunlukları eşit mi oluyordu? Olmuyordu sanırım.'* sözünden de anlaşılacağı gibi sezgisel bir çıkarımda bulunması, Ö3 adlı öğrencinin *'Köşegenler açıortay mı acaba onu düşünmemiz lazım. Olmayabilir diye düşünüyorum çünkü ilginç bir eğimi var. Eğim sanki tam orta olmayacakmış gibi olmuş'* ifadesinde çizdiği şekil üzerinden tamamen göz kararı çıkarım yapması, Ö4 adlı öğrencinin *'Eşkenar dörtgen kare gibi değil çünkü karşılıklı kenarların açıları birbirine eşit oluyor. Köşegenleri birbirine eşit olmuyor. Çünkü daha farklı bir şekil çizersek köşegenlerin birinin daha kısa diğerinin daha uzun olduğunu görebiliyoruz.'* ifadeleri öğrencilerin eksik bilgilerini gerekçesiz ve sezgisel olarak elde etmesine örnek olarak verilebilir. Doruk (2016), öğretmen adaylarının bir kısmının kendilerine yöneltilen matematiksel bilgileri sorgulamadan ya da mantıksal olarak anlamsız muhakemeler sonucunda karar verdiklerini ifade etmektedir. Uğurel (2010), öğrencilerin bir ifadenin matematikte kabul görmesi için ispatlanması gerektiğini ve ispatların bir ifadenin doğruluğuna yönelik kesin bilgi sunduğunu bilmediklerini ifade eder. Bunun yanında ispatın öğrenciler tarafından yüzde yüz kesinlik içermediğini düşündüklerini tespit etmiştir. Bu durum hem öğrencilerin bilgileri ezbere öğrendikleri hem de ispatı oluşturulurken doğruluğu kesin önermelerin kullanılması gerektiğini bilmedikleri ve ispat mantığını kavrayamadıkları olarak yorumlanabilir (Dinamit, 2020; Albayrak İhtiyari, 2010); Çalışkan, 2012). Çalışkan (2012), 8. sınıf öğrencilerinin çoğunun ispat, doğrulama, sorgulama, kanıtlama kavramlarını bilmediklerini ifade etmiştir. Ayrıca Doruk (2016), öğretmen adaylarının yarısının bir teorem için sunulan tümevarımsal argümanın geçerli bir ispat olduğunu belirttiğini ve özel örneğin gerekçe olarak kullanıldığı argümanı doğru bir ispat olarak algıladıklarını ifade etmiştir. Öğrencilerdeki ispat kavramının ileriki yaşlarda da oturmadığı sonucuna ulaşılabilir. Öğrencilerin muhakeme yapabilme, kavramlar arası ilişki kurabilme, akıl yürütme, kanıtlama gibi üst bilişsel davranışları küçük yaşlardan itibaren geliştirilmelidir. Ayrıca matematiğin aksiyomatik yapısı erken yaşlarda öğrencilere hissettirilmeli ve öğretimde kullanılmalıdır.

İspat sürecinin problem durumunu açıklama aşaması incelendiğinde, öğrencilerin genellikle problem durumunu detaylı olarak açıklamadan ve verilen, istenen koşulları net bir şekilde ifade etmeden varsayım ortaya koyma aşamasına geçtikleri görülmüştür. Öğrencilerin problem durumuna ilişkin varsayımı önceden bildikleri ikinci, dördüncü ve beşinci sorularda problem durumunu kendi cümleleri ile açıklamadan varsayımı ifade etme aşamasına geçtikleri, varsayımı önceden bilmedikleri ve üretme çabasına girdikleri birinci ve üçüncü soruda ise problem durumunu daha çok inceledikleri görülmüştür. Yıldırım ve Köse (2017), 8. sınıf öğrencilerinin çokgenler ile ilgili problemlerdeki matematiksel düşünme süreçlerini inceledikleri çalışmada problemi anlama aşamasında öğrencilerin aşina oldukları problemleri anladıkları ancak farklı bir geometrik problem ile karşılaştıklarında zorlandıkları belirtmişlerdir. Bu durum öğrencilerin varsayımı önceden bilmedikleri ve varsayımın üretilmesini gerektiren durumlarda problemi daha dikkatli inceleme ihtiyacı duydukları olarak düşünülebilir. Bunun yanında öğrencilerin problem durumunu açıklamadan ispat sürecine başladığı sorularda, ispat için uygun argümanları tümdengelim zincirinde ifade edebildikleri görülmüştür. Bu durum öğrencilerin problem durumunu anladığı olarak düşünülebilir. Öğrencilerin geometri ile ilgili ispat sorularında problem durumunu anlamayı destekleyici çizimler yaptıkları ve varsayım ortaya koyma veya varsayımın ispatı aşamasında çizimleri kullandıkları görülmüştür. King ve Schattschneider (1997), görülemeyen bir ilişkinin ortaya çıkarılmasında ilgili nesnenin şeklinin çizilmesinin ya da taslağının yapılmasının önemli bir potansiyeli olduğunu belirtmektedir (Akt: Aktaş ve Aktaş, 2012). Çalışmada öğrencilerin geometri sorularının tümünde çizim yaparak ispat sürecine devam etmeleri geometrik şekillerin birbirleriyle ilişkilerini daha iyi görmek sağlamak amacıyla olduğu düşünülebilir.

Konu ile ilgili alanyazındaki çalışmaların (Aylar, 2014; Arslan, 2007; Zaimoğlu, 2012; Alpay, 2018) sonuçlarından farklı olarak bu çalışmada, öğrencilerin ispat sürecinde cebirsel bilgilerini kullanarak genellemeye varma ve varsayımı formüle etme becerilerinin yüksek olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin varsayımı genelleme aşamasında kullandıkları cebir bilgilerini ve cebirin temeli olarak görülen değişken kavramını anlamlandırabildikleri tespit edilmiştir. Birgin ve Demirören (2020) ve Arslan (2007), sınıf düzeyinin (6-8) ilerledikçe öğrencilerin cebir kullanarak sonuca ulaşma düzeyinde artış gözlendiğini, Çalışkan (2012), matematik başarısı ile ispat becerisi arasında paralellik olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca üstün yetenekli öğrencilerin birçok yönden akran gruplarından farklı olarak kavramsal olarak anlama, soyutlama ve genelleme yapabilme (Sriraman, 2004) becerilerinin olduğu düşünüldüğünde çalışmanın 8. sınıf düzeyinde ve üstün yetenekli öğrenciler ile yapılması bu sonucun ortaya çıkmasında etkili olduğu düşünülebilir.

Geometri sorularına ait ispat süreçleri incelendiğinde öğrencilerin varsayım üretme ve varsayımı ispatlama aşamasında, şekilleri çeşitli geometrik yapılara parçalama veya tamamlama stratejilerini kullandığı görülmektedir (Yıldırım ve Köse, 2018). Birinci soru olan çokgenlerin iç açı toplamı ile kenar sayısı ilişkisinde Ö1, Ö2 ve Ö4 adlı öğrencilerin çokgenleri üçgenlere parçalama stratejisini kullandıkları görülmektedir. Üçüncü soru olan eşkenar dörtgenin alanı ile köşegenleri arasındaki ilişki sorusunda Ö1, Ö2 ve Ö5 adlı öğrencilerin eşkenar dörtgeni üçgenlere parçalama, Ö4 adlı öğrencinin ise eşkenar dörtgeni dikdörtgene tamamlama stratejisi uyguladığı görülmüştür. Beşinci soru olan paralelkenarda ardışık açıların toplamı sorusunda ise tüm öğrencilerin paralelkenarı, iki paralel bir kesen doğruya parçaladığı ve yöndeşlik kavramını kullandığı görülmüştür. Yıldırım ve Köse (2018), 8. sınıf öğrencilerinin çokgenler konusundaki matematiksel düşünme süreçlerini incelediği çalışmasında benzer durumla karşılamışlardır. Yıldırım ve Köse (2018), öğrencilerin karmaşık bir problemle karşılaştıklarında şekilleri parçalama ihtiyacı duyduklarını ve böylelikle probleme yeni bir yol ile bakma fırsatı bulduklarını ifade eder. Yıldırım ve Köse (2018)'ye göre ileriki sınıflar geometrik ispatlarda başarının sıklıkla bu bakabilme/görme becerisine bağlıdır. Bu bağlamda, yapılan çalışmada da öğrencilerin parçalama/tamamlama stratejisini kullandıkları ve böylelikle öğrendiği kavramı kullanarak yeni kavramla arasında ilişki kurabildikleri tespit edilmiştir.

5.2. İkinci Alt Problemle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma

İkinci alt probleme yönelik veriler pilot çalışma ve asıl çalışmadaki İspat Görüşme Formuna ait bilgilerden yararlanılarak elde edilmiştir. Öğrencilere matematik ve geometri derslerinde ispat yapıp yapmadıkları ve derslerde ispatın kullanılmasına ilişkin görüşleri sorulmuştur. Öğrencilerin derslerde genellikle ispatın kullanılmadığını ifade ettikleri görülmüştür. Türk (2018), üstün yetenekli öğrencilerin derslerde çoğunlukla düz anlatımın kullanıldığını ifade eder. Öğrencilerin daha önce ispat ile karşılaşmamış olmalarına rağmen çoğunlukla varsayımlarını ispatlamak için geçerli argüman üretebildiği ve stratejiler geliştirebildikleri düşünüldüğünde bu yönde yapılacak bir öğretim için hazırbulunuşluk düzeylerinin olduğu düşünülebilir. Bunun yanında öğrencilerin ispatın gerekliliği konusunda hemfikir olmaları da elde edilen bulgular arasındadır. İspatın neden gerekli olduğuna dair sebeplerine bakıldığında ispatın kavramsal ve kalıcı öğrenme sağladığını düşündükleri görülmüştür. Öğrenciler, formüllerin nereden geldiğini bilmek istediklerini ifade etmişler, bu şekilde yapılan öğretimin daha anlaşılır olduğunu söylemişlerdir. Öğrenciler ispatları, neyin nereden geldiğini anlama ve bilgilerin kalıcı olması açısından faydalı olarak görmektedirler. Bu sonuç Polat, (2018), Uğurel (2010) ve Dinamit (2020)'in çalışma sonuçları ile uyumlu bulunmuştur. İspatın gerekliliğine ilişkin diğer bir neden, kalıcı öğrenme sağlaması olarak ifade edilmiştir. Öğrenciler ezbere bilgilerin unutulabileceğini fakat bilgilerin ispat yapılarak öğrenildiğinde bilgilerin tekrar elde edilebileceğini ifade etmişlerdir. Çalışmada da görüldüğü üzere öğrencilerin 7.sınıf kazanımı olan dörtgenlerde iç açı toplamı formülü ve eşkenar dörtgenin alan formülünü hatırlayamamışlardır. Bu da ezbere öğrenilen bilgilerin kalıcı olmadığı, bilgilerin daha kalıcı olabilmesi için neden-sonuç ilişkisinde bir öğretimin yapılması gerektiği sonucuna varılabilir. Diğer bir neden olarak ispatların öğrencilerin kendilerini ikna ettiğini ve mantığını kavramlarını sağladıklarını, bunun yanında ispatların zihinsel açıdan yorucu olsa da başarıldığında mutluluk verdiğini ifade etmişlerdir.

Yapılan klinik görüşmelerde gözlemlenen diğer bir bulgu öğrencilerin ispat sorularını çözmede oldukça meraklı ve istekli olduğudur. Görüşme boyunca tüm öğrencilerin sıkılmadan ve merakla testi yaptıkları görülmüştür. Karaduman (2010), matematik alanında üstün yetenekli öğrencilerin, matematikte çok başarılı olma veya aritmetik hesaplamalar yönünden yüksek kabiliyet göstermekten ziyade matematiksel fikir ve matematiğin mantığını anlaması açısından yüksek beceriye sahip olduklarını ifade eder. Genel olarak bu alandaki üstün yetenekli kavramının genel özelliklerine bakıldığında hızlı öğrenme, sorgulama becerisi, sebep-sonuç ilişkilerini merak etme ve kavrama, yaratıcılık ve genelleme olduğu görülmektedir. Türk (2018), çalışmasında üstün yetenekli öğrencilerin matematik öğretim programındaki konuları basit bulduklarını belirtmiştir. Ayrıca üstün yetenekli öğrencilerin Bilsem'de matematik derslerini daha çok sevdiklerini buna sebep olarakta Bilsem'de yapılan düşünme becerilerini destekleyici etkinlikler ve zekâ soruları gibi öğrenme etkinliklerinin çeşitliliği olarak ifade eder. Dinamit (2020), üstün yetenekli 11. sınıf öğrencilerinin ispat süreçlerini incelediği çalışmasında bu öğrencilerin rutin ders içeriklerinden sıkıldığını, öğrenme özellikleri bakımından yaşıtlarından ileride oldukları için yaratıcı, rutin dışı, üretkenlik isteyen sorularla çalışmak istediklerini ifade etmiştir. Tüm bu nedenler ışığında öğrencilerin ispatın gerekli olduğunu düşünmeleri, süreçte oldukça istekli ve meraklı davranışlar sergilemeleri ve bu yönde bir öğretim için hazırbulunuşluk düzeylerinin uygun olduğu düşünüldüğünde üstün yetenekli öğrencilerin matematik öğretiminde ispat bir yöntem olarak uygulanabilir. Albayrak İhtiyari (2010), ispatın bir ifadenin neden doğru olduğunu anlatmanın yanı sıra öğrencilere mantıksal bir temel sağladığını ifade eder. Matematik öğretiminde bir ifadenin doğru olduğunu formüllerin ve kuralların nedenlerini açıklanarak, sembol ve kavramların tanımlarını verilerek ispatlanabileceğini belirtir. Böylece kavramları ilişkisel öğrenen öğrencilerin neden-sonuç ilişkisinde ezberden uzak bir öğrenme gerçekleştirebileceğini ifade eder. Bu sebeple öğretmenlerin çeşitli ispat yöntemlerini öğrencilere uygulamalı olarak göstermelerini ve ispatlama becerilerini geliştirmeleri için öğrencilere rehberlik etmeleri gerektiğini vurgular.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen bulgular ve ulaşılan sonuçlar ışığında yapılabilecek öneriler şu şekilde sıralanabilir:

Çalışmanın bulguları arasında öğrencilerin çoğunlukla ispat için geçerli argüman üretebildiği ve stratejiler geliştirebildiği görülmüş, aynı zamanda matematik derslerinde ispatın gerekliliği konusunda hemfikir oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Sriraman (2004), üstün yetenekli öğrencilerin ispat konusunda uzman bir matematikçinin doğal sezgilerine sahip olduğunu ifade eder. Bu sebeple ispat konusunda doğal bir yeteneği olduğu düşünülen üstün yetenekli öğrencilerin matematik öğretiminde üstün yetenek alanları göz önüne alınarak ispat, bir öğretim yöntemi olarak uygulanabilir. Bilgileri sadece ezberleyip, algoritmik adımları uygulayan bireylerden ziyade yaratıcı düşünebilen, matematiği inşa edebilen bireylerin yetiştirilmesi hedeflendiğinden geleneksel yöntemlerden ziyade ispat gibi farklı yöntemler kullanılabilir. Bilgilerin anlamlandırılması ve kavramsal öğrenmenin gerçekleşebilmesi için bilgilerin neden-sonuç ilişkisinde verilmesi bilgilerin kalıcı öğrenilmesini destekleyebilir. Öğrencilerin kendi matematiksel fikirlerini ifade edebilecekleri, varsayımlar oluşturabilecekleri ve varsayımların ispatı için argüman üretebilecekleri öğrenme ortamı oluşturulabilir. Matematiğin doğasına uygun olarak matematiksel bilginin sonucundan ziyade elde etme sürecine vurgu yapıldığı ve matematiğin öğrenciler ile birlikte inşa edildiği bir öğretim yöntemi uygulanabilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin ispat becerisi konusunda hazırbulunuşluk düzeylerinin yeterli olduğu fakat ispat kavramını tam anlayamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin ispat kavramını anlayabilmeleri için matematiksel bilgilerin ispata dayalı elde edilmesi ve sonraki ispatlarda daha önce elde edilmiş, doğruluğundan şüphe duyulmayan bilgilerin ispata dahil edilmesi önerilir. Bu sayede öğrencilerin ispatın mantığını kavramasına ve matematiğin tarihsel gelişimine uygun olarak inşa edilmesine fırsat tanınabilir.

NCTM (2000), öğrencilerin ispat ve muhakeme yeteneklerinin ilköğretimden itibaren geliştirilmesi gerektiğini ifade eder. Öğrenciler kendi fikirlerini doğrulamaları gerektiğini, varsayımları formüle edip, varsayımlar arasında bağlantı ve ilişki kurmalarını böylece lise ve üniversite seviyesinde formal ispat için öğrencilerin daha hazır olacağını vurgulamaktadır.

(Bahtiyari, 2010). Lise ve üniversite düzeyinde aniden ispat ile karşılaşan öğrencilerde ispata karşı olumsuz tutum gelişmektedir. Bu yüzden her yaş grubunda öğrenciye, ispat konusunda gelişmesi için fırsatlar sunulmalıdır. (Stylianides, Stylianides and Philippou, 2007). Bu sebeple erken yaşlarda ispat kavramını ve ispat yöntemlerinin öğrencilere verilmesi sonraki süreçlerdeki başarı için gerekli olarak görülebilir.

Birçok çalışmada öğrencilerin ispat için deneysel örnekleri kullandıkları tespit edilmiştir (Turan, 2019; Alpay, 2018; Pesen, 2018; Aylar, 2014; Zaimoğlu, 2012), Knuth, Choppın ve Bieda, 2012; Cooper vd., 2011; Albayrak İhtiyari, 2010). Yapılan çalışmada öğrencilerin bunun bir ispat yöntemi olmadığının farkında olmalarına rağmen ispat sürecinde deneysel örnek kullandıkları görülmüştür. Matematik öğretiminde örnek kullanımında dikkatli olunması gerektiği sonucuna varılabilir. Almeida (2001), öğretmenlerin matematiksel kanıtı anlamalarının önemli olduğunu ve öğretmenlerin sınıfta, birkaç seçilmiş iyi örneğin ispat olduğuna öğrencileri inandırdıkları taktirde öğrencilerin ispat konusunda zorlanmasının kaçınılmaz olduğunu ifade eder. Özellikle matematik derslerinde doğru bir önermenin açıklanmasında örnek kullanımı öğrenciler için bir ispat yöntemi olarak algılanabilir. Örnek kullanımı, varsayımı anlamak, neden doğru veya yanlış olabileceğini hakkında fikir sahibi olmak, yeni argüman ve varsayımlar geliştirmeyi destekleyebilmektir. İspatın formal boyutunun yanında sosyo kültürel boyutuna vurgu yapan Harel ve Sowder (2007), ispat şemasına dayandırdığı üç temel bileşenden, ispatın sosyo-kültürel boyutuna vurgu yaptığı maddesinde, 'tespit etmeye karşı ikna etme' yani tespit etmeyi, kendi şüphelerini ortadan kaldırdığı, ikna etme ise başkalarının şüphelerini ortadan kaldırmak için kullandığı süreç olarak tanımlar. İspat sürecinde öğrencilerin deneysel örnek kullanım sıklığı düşünüldüğünde, öğrencilerin ispat sürecinde kullandıkları örnekler üzerinden tespit etme ve ikna etme arasındaki fark ile kendini ikna etme ile başkasını ikna etme arasındaki fark konusunda tartışma ortamı yaratılabilir.

Öğrencilerin matematiksel dil ve notasyon konusunda eksik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Mevcut kullanılan öğretim programında öğrencilere kazandırılması gereken matematik dersi özel amaçlarında öğrencilerin matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklaması ve paylaşmak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilmesi olarak belirlenmiştir (MEB, 2018). Öğrencilere matematiğin kendine has bir dili olduğu erken yaşlardan itibaren kavratılmalı ve öğretmenler tarafından matematik derslerinde etkin bir şekilde kullanılmalı ve kullandırılmalıdır.

Öğrencilerin ispat sürecinde daha önce karşılaştığı durumların, problemin sorgulamasına ket vurduğu, varsayım ve argüman geliştirmesine engel olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin sınıfta kullanacakları ispat etkinliklerinde öğrencinin ilk defa karşılaştıkları durumları kullanması öğrencilerin daha üretken ve başarılı bir ispat süreci geçirmelerini sağlayabilir. Doruk (2016), öğrencilere verilen matematik prensiplerin öğrenciler açısından ilk defa keşfediliyormuşçasına bir yaklaşım ile ispat sürecine girmenin matematiğin yapısına da daha uygun olacağını ifade etmiş ve bunun öneminin göz önünde bulundurulması gerektiğini ifade etmiştir. İspat sürecinde gereken zihinsel süreçlerin yaşanmaması öğrencilerin kendilerine yöneltilen matematiksel iddiaları sorgulamadan kabul etmesine ve otoriter bir öğrenme alışkanlığının kapıları açacağını belirtmiştir. Bu sebeple ispat sürecinde öğrencilerin ilk defa karşılaşacakları ispatların kullanılması önerilir.

Öğrencilerin ispat sürecinde C kuralı, Z kuralı gibi ezberledikleri kuralları ispata dayanak olarak kullandıkları görülmüştür. Bu durum ispat sürecinin başarılı bir şekilde ilerlemesine engel olmuştur. Matematik öğretiminde sadece işlemsel, kurala dayalı ve gerekçesiz öğretim yapılmamalı bilginin temelini oluşturan kavramsal bilgi üzerinde durulmalıdır. Matematik dersinde uygulama ve etkinlik ağırlıklı bir öğretim benimsenmesinin, kavramların doğru öğrenilmesi açısından daha etkili olacağı düşünülmektedir. Matematiğin doğasında akıl yürütme ve muhakeme olduğu düşünüldüğünde (Baki, 2020) matematik derslerinde bilgilerin nedeni sorgulanmadan direkt olarak verilen kuralların yerine neden-sonuç ilişkisinde gerekçelerinin öğrenciler ile tartışılarak keşfedilmesi hem anlamlı öğrenme hem de kavramsal öğrenme için gerekli olduğu düşünülmektedir.

İspat sürecinde öğrencilerin özellikle dörtgenler konusunda kavram yanılgısına sahip olduğu görülmüştür. Kavram yanılgılarını engellemek için, kuralların ezbere değil somut ve yarı-soyut aşamalardan oluşan etkinliklerin kullanıldığı bir öğretim modeli uygulamak kavram yanılgılarını azaltabilir. Bunun yanında öğretmenlerin kavram yanılgısının farkında olmaları ve konu bazında yaygın kavram yanılgılarını araştırarak dersi planlamaları kavram yanılgılarını engelleyebilir.

Öziş ve Altıparmak (2005), öğrencilerde ispat ve muhakeme becerisinin gelişiminin öğretmene bağlı olduğunu ifade eder. Heinze ve Reiss (2004), matematik derslerindeki ispat sürecinin öğretmen tarafından planlanıp kontrol edildiğini belirtir. Bu durumu öğretmenin öğrencileri bir labirentte yönlendirmesine benzetir. Öğrencinin yapması gereken öğretmenin kafasındaki yönü tahmin etmektir. Öğrencilerin ispata ilişkin deneyimlerindeki en önemli figürün öğretmen olduğu düşünüldüğünde, öğretmenlerin bu konuda donanımlı yetişmesi sağlanmalıdır. Bunun için öğretmen yetiştirme programlarında ispat uygulamalarına ağırlık verilmesi önerilir (Pala, 2020). Ayrıca Zeybek, Üstün ve Birol (2018), öğrencilerin öğrenmeleri üzerinde önemli derecede etkiye sahip ders kitaplarında ispat sayılabilecek etkinliklerin oldukça az olduğunu ve Türk (2018), ders kitaplarının üstün yetenekli öğrenciler tarafından yüzeysel bilgi içerdiğini, soru niteliğinin düşük ve soruların farklı strateji ve yöntem gerektirmediğini düşündüklerini ifade eder. Güncek eğitim reformları kapsamında her yaş grubundaki öğrencilerin ispat ile karşılaşması gerektiği düşünüldüğünde öğrencilerin temel öğrenim materyali sayılabilecek ders kitaplarında ispat etkinliklerine daha fazla yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir.

Öğrencilerin önceki yıllardaki kazanımlara ait bilgileri hatırlayamadıkları görülmüştür. Ezbere öğrenilen bilgilerin ispat sürecinin başarılı bir şekilde ilerlemesine engel olduğu sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin bilgileri ezbere bir yöntem ile değil anlamlandırarak, neden-sonuç ilişkisinde kavramlar arasında ilişki kurarak öğrenmesi bilgilerin kalıcılığı açısından önemli görülmektedir. Öğrencilerin muhakeme yapabilme, kavramlar arası ilişki kurabilme, akıl yürütme, ispatlama gibi üst bilişsel davranışları küçük yaşlardan itibaren geliştirilmelidir. Ayrıca uygulanacak öğretim yöntemi ile bu beceriler öğrenciye kazandırılmaya çalışılmalı ve matematiğin aksiyomatik yapısı erken yaşlardan itibaren ispat gibi yöntemler ile öğrencilere hissettirilmelidir.

Öneriler

Çalışmada öğrencilerin ispatı matematiksel standartlarda yazabilme konusunda eksik olduklarını fakat ispat sürecinde cebirsel bilgilerini kullanarak genellemeye varma ve varsayımı formüle etme becerilerinin yüksek olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin varsayımı genelleme aşamasında kullandıkları cebir bilgilerini ve cebirin temeli olarak görülen değişken kavramını anlamlandırabildikleri tespit edilmiştir. Formal ispata ulaşmada bu gibi yeterliliklerinde olması gerektiği düşünüldüğünde öğrencilerin neden formal ispat yapısına ulaşamadığı ile ilgili araştırma başka bir çalışma konusu olarak ele alınabilir.

Bu çalışmada üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat becerilerinin nasıl olduğu sorusuna yanıt aranmıştır. Farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin ispat becerilerinin incelenmesi veya matematik öğretiminde ispat kullanımının başarı veya tutum gibi matematik başarısını etkileyen etmenler üzerindeki etkilerinin araştırılması başka bir çalışmanın konusu olarak düşünülebilir.

7. KAYNAKLAR

Akar, H. (2019). Durum Çalışması. Saban, A., Ersoy, A. (Ed.), *Eğitimde Nitel Araştırma Desenleri* içinde (ss. 139-176). Ankara: Anı Yayıncılık.

Akar, Ş. (2015). Matematikte Üstün Yetenek ve Üstün Yeteneğin Destekenmesi. F. Şahin (Ed.), *Üstün Zekalı ve Üstün Yetenekli Öğrencilerin Eğitimi* içinde (5. Bs., ss. 97-110). Ankara: Pegem Akademi.

Akkaş, E., ve Tortop, H. S. (2015). Üstün yetenekliler eğitiminde farklılaştırma: temel kavramlar, modellerin karşılaştırılması ve öneriler. Journal of Gifted Education and Creativity, 2(2), 31-44.

Aktaş, D. Y., ve Aktaş, M. C. (2012). 8. sınıf öğrencilerinin özel dörtgenleri tanıma ve aralarındaki hiyerarşik sınıflamayı anlama durumları. *İlköğretim Online*, 11(3), 714-728.

Aktaş, M. C., ve Aktaş, D. Y. (2013). Matematik Bölümü Öğrencilerinin İspat Yapma ile ilgili Algılarının Metaforlar Yoluyla Belirlenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3).

Albayrak İhtiyari, Ö. (2010). *8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat ve Muhakeme Kavramlarının ve Önemlerinin Farkındalığı*. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum.

Alpay, Ü. (2018). Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt İmajının İncelenmesi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 659–665.

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(1), 53-60.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.

Alpay, Ü. (2018). *8. Sınıf Öğrencilerinin Kanıt İmajının İncelenmesi*. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

Altıparmak, K., ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

Arıkan, F. 2019. *Matematikte yetenekli öğrencilerin aparatlı matematik problemlerine yaklaşımları*. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, Bursa.

Assmus D. (2018) Characteristics of Mathematical Giftedness in Early Primary School Age. *In: Singer F. (eds) Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness. ICME-13 Monographs. Springer*, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-73156-8_6

Ay, Y., Başbay, A. (2017). Çokgenlerle ilgili kavram yanılgıları ve olası nedenler. *Ege Eğitim Dergisi*, *18*(1), 83-104.

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bahadır, K. (2020). Matematiksel Düşünmenin Sınıf Ortamına Yansımaları: 8. Sınıf Örneği. Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Giresun.

Bahtiyari, Ö. (2010). *8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat ve Muhakeme Kavramlarının ve Önemlerinin Farkındalığı*. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum.

Baki, A. (2020). *Matematiği Öğretme Bilgisi*. Pegem Akademi, Ankara.

Baki, A. (2020). Tarihi ve Felsefesi. Pegem Akademi, Ankara.

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In *Second UCSMP international conference on mathematics education*. NCTM.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). *The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.),* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. III, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Ball, DL ve Bass, H. (2003). Okulda matematiği makul kılmak. Okul matematiği için ilke ve standartlar için bir araştırma, 27-44.

Başışık, H. (2010). *İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konularındaki kavram yanılgılarının belirlenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Bell, AW (1976). Öğrencilerin Matematiksel Durumlarda İspat-Açıklamaları Üzerine Bir Çalışma. *Matematikte Eğitim Çalışmaları*, 23-40.

Bicknell, B. (2009). Who Are The Mathematically Gifted? Student, Parent And Teacher Perspectives. *Research in Mathematical Education*, 13(1), 63-73.

Bildiren, A. 2018. *Üstün Yetenekli Çocuklar*. Pegem Yayıncılık, Ankara.

Birgin, O., Demirören, K. (2020). Ortaokul yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler konusundaki başarı performanslarının incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 1-19.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof, 7*(8).

Boero, P., Douek, N., & Garuti, R. (2003). Children's Conceptions of Infinity of Numbers in a Fifth Grade Classroom Discussion Context. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 121-128.

Boz, B. (2009). *An Investigation Of Seventh Grade Students' Computational Estimation Strategies And Factors Associated With Them*. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Doktora Tezi, Ankara.

Budak, İ. (2007). *Matematikte üstün yetenekli öğrencileri belirlemede bir model*. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Trabzon.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2019). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Pegem Yayınları, Ankara.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2006). *Using reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof.* (Proceedings of PME) 30, 2, 289-296.

Coe, R. ve Ruthven, K. (1994). İleri matematik öğrencilerinin ispat uygulamaları ve yapıları. *İngiliz Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 20 (1), 41-53.

Coşkun, M. (2020). *İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometri Alanında İspat Yapabilme Becerilerinin İncelenmesi*. Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kayseri.

Cooper, J., Walkington, C., Williams, C., Akinsiku, O., Kalish, C., Ellis, A., & Knuth, E. (2011). Adolescent reasoning in mathematics: Exploring middle school students' strategic approaches in empirical justifications. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 33, No. 33).

Creswell, J. W. (2016). *Nitel Araştırma Yöntemleri.* (Çeviri editörleri: Mesut BÜTÜN ve Selçuk Beşir DEMİR). Ankara: Siyasal Kitapevi.

Çalışkan, Ç. (2012*). 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi*. Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Bursa.

Dede, Y. (2013). Matematikte İspat: Önemi, Çeşitleri ve Tarihsel Gelişimi (ss. 15-34). *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar.* Ankara: Pegem Akademi.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: A theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences,* 4(2), 47-71.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*. 4, (2).

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.

Dinamit, D. (2020*). Üstün Yetenekli Öğrencilerin Matematiksel İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi***.** Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aydın.

Doğan, M. (2019). Sekizinci Sınıf Matematik Ders Kitabındaki Matematiksel Akıl Yürütme ve İspatı Öğrenme Olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20: 601-618.

Dolev, S., & Even, R. (2015). Justifications and explanations in Israeli 7th grade math textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 309-327.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. Doktora Tezi. Erzurum

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. *Proof and proving in mathematics education*, 349-367.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Student‘s generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(3), 187-215.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E., ... & Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 263-283.

Ercan, N. (2020*). Ortaokul 7. Sınıf Öğrencilerinin A-Didaktik Bir Ortamda Geometri Konularında Kullandıkları Kanıt Şemaları*. Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu.

Ersoy, H. (2016). Durum Çalışması. Özden, M., Durdu, L. (Ed.). *Eğitimde Üretim Tabanlı Çalışmalar için Nitel Araştırma Yöntemleri* içinde (ss. 4-18). Ankara: Anı Yayıncılık

Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *The American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14.

Güler, A., Halıcıoğlu, M., Taşğın, S., (2015). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma.* Ankara: Seçin Yayıncılık.

Güler, G., Dikici, R. (2012). Ortaöğretim Matemetik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspat Hakındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20*(2), 571-590.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi.* Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum.

Güler, G. (2020). Akıl Yürütme ve İspat İlişkisi. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (5. bs., ss. 89-108). Ankara: Anı Yayıncılık

Güneş, S. (2013). *Matematik Eğitiminde Argümantasyon ve Kanıt Süreçlerinin Analizi ve Karşılaştırılması.* Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Gür, Ç. 2017. *Eğitimsel ve Sosya-Duygusal Bakış Açılarıyla Üstün Yetenekli Çocuklar*. Anı Yayıncılık, Ankara.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, 44(1), 5-23.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2002). What is a proof. *History of modern science and mathematics*, 1, 36-48.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society, 7*, 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.

Healy, L., Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 31(4), 396-428.

Heinze, A., Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy*.

Heinze, A., Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—a video study. (*ZDM), 36*(3), 98-104.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational studies in mathematics*, 75(3), 271-291.

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176-203.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

İnam, B. (2014*). Ortaöğretim Düzeyinde, Kavrama Testlerine Dayalı Bir İspat Öğretim Uygulamasının Değerlendirilmesi*. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

İskenderoğlu, T. (2003). *Farklı Sınıf Düzeyindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Süreçleri*. Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Bolu.

Johnson, D. T. (2000). Teaching Mathematics to Gifted Students in a Mixed-Ability Classroom. *ERIC Digest E594*.

Karaduman, G. B. (2010). Üstün yetenekli öğrenciler için uygulanan farklılaştırılmış matematik eğitim programları. *HAYEF Journal of Education*, 7(1), 1-12.

Karaduman, G. B., Davaslıgil, Ü. Farklılaştırılmış Geometri Öğretiminin Üstün Yetenekli Öğrencilerdeki Yaratıcılık, Uzamsal Yetenek Ve Erişiye Etkisi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *13*(2), 1305-1337.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of mathematics teacher education*, 5(1), 61-88.

Knuth, E. J., & Sutherland, J. (2004). Student understanding of generality. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education October 2004 Toronto*, Ontario, Canada, 562.

Knuth, E. J., Choppın, J. M., & Bieda, K. N. (2010). Middle school students' production of mathematical justifications. In *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 153-170). Routledge.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Küçükbulut, C. (2019). *Öğrencilerin İspat Yapabilme Becerilerinin Gelişimine 5e Modelinin Etkisi*. Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel Araştırma, Desen ve Uygulama için Bir Rehber* (Çev. Ed. Selahattin Turan) Ankara: Nobel yayınları.

Mili Eğitim Bakanlığı (MEB). (2009). *İlköğretim Matematik Dersi (8. Sınıflar) Öğretim Programı*, Ankara.

Mili Eğitim Bakanlığı (MEB). (2011). *İlköğretim Matematik Dersi (9. Sınıflar) Öğretim Programı*, Ankara.

Mili Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *İlköğretim Matematik Dersi (9. Sınıflar) Öğretim Programı*, Ankara.

Mili Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Millî Eğitim Bakanlığı Bilim ve Sanat Merkezleri Yönergesi*.http://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2016_10/07031350_bilsem_yonergesi.pdf. [Erişim Tarihi 15/11/2021]

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27: 249-266.

Mudaly, V. (2013). Is Proving a Visual Act?. *Online Submission*, *3*(3), 36-44.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.

Niederer, K., Irwin, R. J., Irwin, K. C., Reilly, I. L. (2003). Identification of mathematically gifted children in New Zealand. *High Ability Studies*, 14(1), 71-84.

Öz, T. (2017). *7. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi*. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum.

Öksüz, C., Başişik, H. (2010). 5. Sınıf Öğrencilerinin Çokgenler ve Dörtgenler Konularında Sahip Oldukları Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *20*, 413-430.

Özkan, M. U. (2013). *Üstün Yetenekli Çocukların Özellikleri*.

Özpınar, İ. (2012). 6-8. *Sınıflar Matematik Öğretim Programinda Yer Alan Becerileri Ölçmeye Yönelik Ölçek Geliştirme Çalışması.* Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Trabzon.

Pala, O. (2020). *İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkliği Bağlamında İncelenmesi*. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İzmir

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (Çeviri editörleri: Mesut BÜTÜN ve Selçuk Beşir DEMİR). Ankara, Pegem Akademi.

Pesen, M. (2018). *An Examination Of The Proof And Argumentation Skills Of Eighth-grade Students.* Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Polat, K. (2018*). Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi*. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving, *Volumes I and II. Wiley*.

Quinn, A. L. (2009). Connecting Research to Teaching: Count on Number Theory to Inspire Proof. *The Mathematics Teacher*, *103*(4), 298-304.

Recio, A. M., Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 48(1), 83-99.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A., & Gross, C. (2008). *Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples*. (ZDM), 40(3), 455-467.

Reiss, K. ve Renkl, A. (2002). Kanıtlamayı öğrenmek: Buluşsal örnekler fikri. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , *34* (1), 29-35.

Reiss, K. ve Renkl, A. (2002). Kanıtlamayı öğrenmek: Buluşsal örnekler fikri. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , *34* (1), 29-35.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *105*(3), 252-255.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi delta kappan*, *60*(3), 180.

Renzulli, J. S. (2011). What makes giftedness?: Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan*, 92(8), 81-88.

Reyes-Hernandez, L. (2021). Examining Middle School Students' Methods Of Justification.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *105*(3), 252-255.

Sağ, G. (2018). Matematikte Üstün Yetenekliliğe Teorik Bir Bakış. *Milli Eğitim*, 48: 159-174

Sarı Uzun, M., Altun, A., Aşkar, P. (2007). Undergraduate Students Mathematıcal Proof Processes In A Calculus Course A Case Study. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, Cilt.40, Ss.295-319

Sarı, M. (2007). Undergraduate students’ mathematical proof processes in a calculus course: A case study. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, 2007, vol: 40, no: 2 , 29 5319

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Schoenfeld, A. H. (2009). *The soul of mathematics*.

Selden, J., Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational studies in mathematics*, *29*(2), 123-151.

Serfiçeli̇ Z., Atmaz D. (2021). *Ortaokul matematik 8. sınıf ders kitabı* (Kök-e Yayıncılık). Ankara s.129)

Sezen Yüksel, N. (2020). Matematik Tarihi ve Felsefesi Çerçevesinde İspat ve İspatlama. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (3. bs., ss. 41-67). Ankara: Anı Yayıncılık

Sheffield, L. J. (1994). The development of gifted and talented mathematics students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards (No. 9404). *DIANE Publishing.*

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The mathematics educator*, *14*(1).

Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, G.J., Stylianides, A.J., Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers’ knowledge of proof by mathematical induction. *J Math Teacher Educ*. 10:145–166

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades*. New York: Routledge.

Stylianou, DA, Blanton, ML ve Knuth, EJ (Ed.). (2010*). Sınıflar arasında öğretme ve öğrenme kanıtı: Bir K-16 perspektifi*. Routled Schoenfeld.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades*. New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2009). The soul of mathematics. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. Xii–xvi). New York, NY: Routledge.

Şimşek, Z., Üstün, A. (2019). 7.Sınıf Öğrencilerinin Dörtgenler Konusundaki İspat Seviyelerinin İncelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13: 196-216.

Tall, D. (1998, August). *The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some*. In Conference of the University of Chicago School Mathematics Project.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the learning of mathematics*, 15(1), 29-37.

Tertemiz, N. I., Doğan, A., Karakaş, H. (2017). 4. Sınıf Üstün Yetenekli Öğrenciler ile Başarılı Akranlarının Problem Çözme Stratejilerinin Karşılaştırılması. *Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretim Çalışmaları Dergisi*, *7*(13), 161-188.

Tortop, H. S. (2016). Tecrübe etkileşimi vasatında araştırmalarla zenginleştirilmiş uygulamalı (Tevazu) üstün yetenekliler aile eğitim programının etkililiğinin araştırılması. *Journal of Gifted Education and Creativity*, 3(1), 87-98.

Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, 36, 31-35.

Turan, İ. (2019). *Matematik Akademik Başarısı Yüksek Ortaokul Öğrencilerinin ve Matematik Öğretmenlerinin İspat Yapabilme Becerilerinin ve Argüman Tercihlerinin İncelenmesi.* Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Tokat.

Türk, T. (2018*). Ortaokul matematik dersi öğretim programının üstün yetenekli öğrencilerin eğitimi açısından öğretmen ve öğrenci görüşlerine göre değerlendirilmesi*. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Uğurel, I. (2020). İspatın Sahip Olduğu Roller ve İşlevler. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (6. bs., ss. 113-146). Ankara: Anı Yayıncılık.

Uğurel, I., Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28:135- 154.

Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim Matematik Programının Temel Ögeleri Çerçevesinde Öğrencilerin İspat Kavramına Yönelik Matematiksel Bilgilerini Nasıl Düzenlediklerinin Söylem Çözümlemesi ile Belirlenmesi*. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İzmir.

Umay, A. 2003. Matematiksel Muhakeme Yeteneği, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.

Umay, A., Kaf, Y., 2005. Matematikte Kusurlu Akıl Yürütme Üzerine Bir Çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* 28:188-195.

Urhan, S. (2020). Argümantasyon ve Matematiksel İspat Süreçleri Arasındaki İlişki. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (7. bs., ss. 149-184). Ankara: Anı Yayıncılık

Uygur Kabael, T. (2020). İspat ve İspatlamada Bazı Temel Kavramlar. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (2. bs., ss. 23-39). Ankara: Anı Yayıncılık

Uzun, M. S., & Bülbül, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretme deneyi. *Eğitim ve Bilim*, 38(169).

Ülker, E. (2019). *Ortaokulda ispata giriş: gerçekçi mamtematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı* (Doctoral dissertation, Anadolu University.

Wagner, H., & Zimmermann, B. (1986). Identification and fostering of mathematically gifted students. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 243-260.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 351-360.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, 56(2), 209-234.

Winner, E. (1996). *Gifted Children: Myths and Realities*. New York: Basic Books.

Yasin, A. Y., & Başbay, A. Çokgenlerle İlgili Kavram Yanılgıları ve Olası Nedenler. *Ege Eğitim Dergisi*, 18(1), 83-104.

Yıldırım, D., Köse, N. Y. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(1), 605-633.

Yıldırım, A., Şimşek, H. 2016. *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. 10. Baskı., Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yıldız, A., Baltacı, S., Kurak, Y., Güven, B. (2012). Üstün yetenekli ve üstün yetenekli olmayan 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme stratejilerini kullanma durumlarının incelenmesi.

Yılmaz Demirel, Ö. (2021). *Yetenek Haritaları Belirlenen Üstün Yetenekli Çocukların Ailelerine Verilen Aile Destek Eğitiminin Çocukların Gereksinimşerine Yönelik Farkındalıklarına Etkisinin İncelenmesi*. Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Konya.

Yim, J., Song, S., & Kim, J. (2008). Mathematically gifted elementary students' revisiting of Euler's polyhedron theorem. *The Mathematics Enthusiast*, 5(1), 125-142.

Zack, V. (1999). Everyday and mathematical language in children's argumentation about proof. *Educational Review*, 51(2), 129-146.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. (Yüksek Lisans Tezi). Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu.

Zeybek Şimşek, Z. (2020). İspat nedir sorusuna Farklı Pencerelerden Bakış. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (1. bs., ss. 1-18). Ankara: Anı Yayıncılık

Zeybek Şimşek, Z. (2020). İspatın matematik öğretim programlarındaki ve uluslararası standartlardaki yeri ve önemi. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi* içinde (4. bs., ss. 69-88). Ankara: Anı Yayıncılık

Zeybek-Şimşek, Z., Üstün, A. (2019). 7. Sınıf Öğrencilerinin Dörtgenler Konusundaki İspat Seviyelerinin İncelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13(1), 196-216.

Zeybek, Z., Üstün, A., Birol, A. (2018). Matematiksel İspatların Ortaokul Matematik Ders Kitaplarındaki Yeri. *İlköğretim Online*, *17*(3).

Ek 2. Veli İzin Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, ‘ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ” adıyla, Nisan 2021 ve Haziran 2021 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA YETERLİLİKLERİNİ ORTAYA ÇIKARMAKDIR.

Araştırma Uygulaması: Görüşme şeklindedir.

Araştırma T.C. Millî Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımla.

Araştırmacı : Betül VATANDAŞ
İletişim bilgileri:

Velisi bulunduğum .... sınıfı .... numaralı öğrencisi .... ……………………………..'in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).

…./…../…………

İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı :
Telefon Numarası :

Ek 3. Öğrenci İzin Formu

Sayın Katılımcımız

Katılacağınız bu çalışma, 'ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ" adıyla, Betül Vatandaş tarafından Nisan 2021-Haziran 2021 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: **ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA YETERLİLİKLERİNİ ORTAYA ÇIKARMAKDIR.**

Araştırmanın Nedeni: O Bilimsel araştırma O Tez çalışması

Araştırmanın Yapılacağı Yer(ler): Aydın Bilim Sanat Merkezi

Araştırma Uygulaması: O Anket O Görüşme

O Gözlem

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul/kurum yönetiminin izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çalışmada sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Veriler sadece araştırmada kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.

Uygulamalar, kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden rahatsız hissederseniz cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz.

Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımla.

Araştırmacı : Betül Vatandaş
İletişim Bilgileri:

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

…./…../…………
İsim-Soyisim

İmza:
Katılımcı Adı-Soyadı :
Telefon Numarası :

Ek 4. İspat Testi

İSPAT TESTİ

1) Bir üçgenin iç açıları toplamının 180°, bir dörtgenin 360°, bir beşgenin ise 540° olduğu bilinmektedir. Bu bilgilerden hareketle **çokgenin kenar sayısını ile iç açılarının toplamı hakkında ne söylenebilir? Bir çokgenin kenar sayısını bildiğimizde iç açıları toplamını bulabilir miyiz? Varsayımınızı (tahmininizi) genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.**

2) Bir doğal sayının diğer bazı doğal sayılar ile tam (kalansız) bölünüp bölünmeyeceğini, bölme işlemi yapmadan bulmak mümkündür. Bu iş için belirlenmiş bölünebilme kuralları vardır. **Peki, verilen bir doğal sayının 5 ile tam bölünüp bölünemeyeceğine, bölme işlemi yapmadan karar verilebilir mi? Hangi şartlarda sayı 5 ile tam bölünebilir? Hangi şartlarda tam bölünemez? Varsayımınızı (tahmininizi) gerekçelerini belirterek genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.**

3) Farklı özelliklere sahip dörtgenlerin alanları, verilen uzunluk ve açı değerlerine göre farklı yöntemlerle hesaplanmaktadır. **Buna göre sadece köşegen uzunluklarını bildiğimiz bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilir miyiz? Başka bir veriye ihtiyaç var mıdır? Varsayımınızı (tahmininizi) gerekçelendirerek genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.**

4) Üslü sayıları çarparken sayıların değerini bulup çarpma işlemi yapabiliriz. Üslü sayıların kuvvetleri çok büyük olduğunda değerini bulmak zorlaşmaktadır. **Bunu göz önünde bulundurarak, tabanları aynı olan üslü sayıları nasıl çarparsınız. Varsayımınızı (tahmininizi) gerekçelerini belirterek genel bir ifade ile formüle ediniz ve ispatlayınız.**

5) Bir paralelkenarda **ardışık olan açıların toplamı** için ne söyleyebiliriz. Tahmininizi gerekçeleri ile belirtiniz ve ispatlayınız.

Ek 5. İspat Görüşme Formu

İspat Görüşme Formu

Değerli Öğrenciler,

Aşağıdaki form matematiksel ispata yönelik ön öğrenmelerinize ve ispata yönelik hazır bulunuşluklarınıza ilişkin görüşlerinize başvurmak amacıyla hazırlanmıştır. Açık uçlu olarak verilen üç soruyu cevaplayınız. Lütfen tüm soruları cevaplamaya ve boş bırakmamaya özen gösteriniz. Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Elde edilen bulgular ve sonuçların yayınlanması aşamasında kesinlikle isminiz ya da diğer şahsi bilgileriniz belirtilmeyecektir. Lütfen soruları dikkatle okuyarak yansız ve titiz bir şekilde cevaplamaya çalışınız. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Araştırmacı: Betül Vatandaş

1) Matematik veya geometri derslerinde ispat çalışmaları yapıyor musunuz? Yapıyorsanız hangi konularda ispat yaptınız.

2) Derslerinizde ispat yapılması veya yapılmaması konusunda neler düşünüyorsunuz

T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK BEYANI

“ÜSTÜN YETENEKLİ 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ” başlıklı Yüksek Lisans tezimdeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Betül VATANDAŞ

… / … / …

ÖZ GEÇMİŞ

Soyadı, Ad **: Betül VATANDAŞ**

Yabancı Dil **:** İngilizce

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi (Yıl)**
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	2007
Yüksek Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	2022

BURSLAR ve ÖDÜLLER

İŞ DENEYİMİ

Yıl	**Yer/Kurum**	**Ünvan**
2007-2022	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

AKADEMİK YAYINLAR

1. MAKALELER

2. PROJELER

3. BİLDİRİLER

A) Uluslarası Kongrelerde Yapılan Bildiriler

B) Ulusal Kongrelerde Yapılan Bildiriler