T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

2021-YL-071

CAYLEY ÇİZGELERİ

Berna DEMİRCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

AYDIN - 2021

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam boyunca yardımını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU' na (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), babam Mestan YEŞİL' e ve eşim Ahmet İhsan DEMİRCİ' ye sonsuz teşekkür ederim.

Berna DEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

E_2	: Öklid grubu
$(l, \mathrm{m}, \mathrm{n})$	: Genişletilmiş üçgensel grup
$[l, \mathrm{m}, \mathrm{n}]$	: Üçgensel grup
$V(G)$	: Köşe kümesi
$E(G)$	: Kenar kümesi
$d(v)$	: v köşesinin derecesi
K_n	: Köşe sayısı n olan tam çizge
N_n	: Köşe sayısı n olan boş çizge
C_n	: n tane köşesi olan bir döngü
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
S_3	: 6 elemanlı simetrik grup
D_4	: Dihedal grup

ÖZET

CAYLEY ÇİZGELERİ

Demirci B. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Programı, Yüksek Lisans Tezi, Aydın, 2021.

Amaç: Bu tez çalışması Öklid grubunun bölüm uzayı kompakt olan alt gruplarının Cayley çizgelerini belirlemek amacı ile yapılmıştır.

Materyal ve Yöntem: Cayley çizgeleri yönlü çizgelerdir ve bir grubun Cayley çizgesi üreteç kümesine bağlıdır. Grubun her bir üreteci Cayley çizgesinin farklı türden bir yönlü kenarına karşılık gelmektedir ve bunlar farklı renklerle gösterilmiştir. Bu çalışmada ele alınan gruplar en fazla dört eleman tarafından üretildiği için, bunların Cayley çizgelerinde en fazla dört farklı renkte yönlü kenarlar bulunmaktadır.

Bulgular: Bu çalışmada, Öklid grubunun bölüm uzayı kompakt olan ve duvar kâğıdı grupları olarak adlandırılan alt gruplarının Cayley çizgeleri belirlenmiş ve bunlar şekil çizilerek gösterilmiştir. Ayrıca, devirli, dihedral ve simetrik gruplar gibi bazı sonlu grupların da Cayley çizgeleri belirlenmiştir.

Sonuç: Bu çalışmada, devirli, dihedral ve simetrik gruplar gibi bazı sonlu gruplar ile duvar kâğıdı gruplarının Cayley çizgeleri belirlenmiş ve farklı üreteç kümelerine farklı Cayley çizgelerinin karşılık gelebileceği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cayley Çizgesi, Çizge, Grup, Yönlü Çizge.

ABSTRACT

CAYLEY GRAPHS

Demirci B. Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Mathematics Program, Master Thesis, Aydın, 2021.

Objective: This research was carried out in order to investigate the Cayley graphs of the subgroups of the Euclidean group with compact quotient spaces.

Material and Methods: Cayley graphs are directed graphs and the Cayley graph of a group depends on the set of generators. Each generator of the group corresponds to a different type of directed edge of the Cayley graph and they are denoted by different colours. Since the groups considered in this thesis are generated at most by four elements, their Cayley graphs contain at most four directed edges with different colours.

Results: In this thesis, the Cayley graphs of the subgroups of the Euclidean group with compact quotient spaces, which are called wallpaper groups, have been determined and they have been visualized. The Cayley graphs of some finite groups such as cyclic, dihedral and symmetric groups have also been determined.

Conclusion: In this thesis, the Cayley graphs of some finite groups such as cyclic, dihedral and symmetric groups and the subgroups of the Euclidean group with compact quotient spaces have been determined and it has been observed that different generating sets correspond to different Cayley graphs.

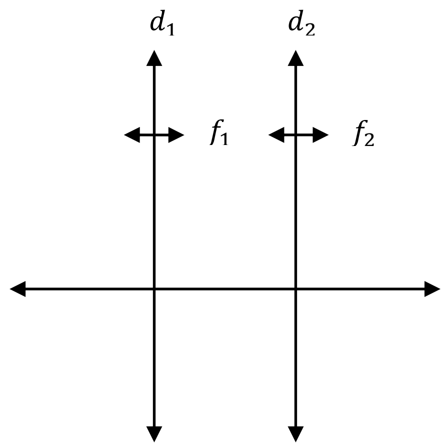
Keywords: Cayley Graph, Directed Graph, Graph, Group,

1. GİRİŞ

Öklid düzleminin tüm izometrilerinden oluşan küme, fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba Öklid grubu denir ve E_2 notasyonu ile gösterilir (Armstrong, 1988).

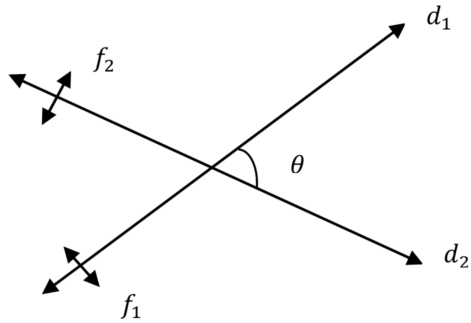
Öklid grubunun elemanları; yansımalar, ötelemeler, döndürmeler ve ötelemeli yansımalar olmak üzere dört türe ayrılırlar. Aşağıda daha ayrıntılı olarak açıklandığı gibi, ötelemeler ve yansımalar iki, ötelemeli yansımalar ise üç yansımanın bileşkesi olarak ifade edilebilirler.

d_1 ve d_2 Öklid düzleminde iki doğru olsun. Bu doğrular üzerindeki yansımalar sırasıyla f_1 ve f_2 olmak üzere, eğer d_1 ve d_2 doğruları paralel ise $f_1 f_2 = f_1 \circ f_2$ izometrisi düzlemdeki her bir noktayı d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklığın iki katı kadar ve d_1 ve d_2 doğrularına dik doğrular boyunca öteleyen bir ötelemedir, Şekil 1.1.



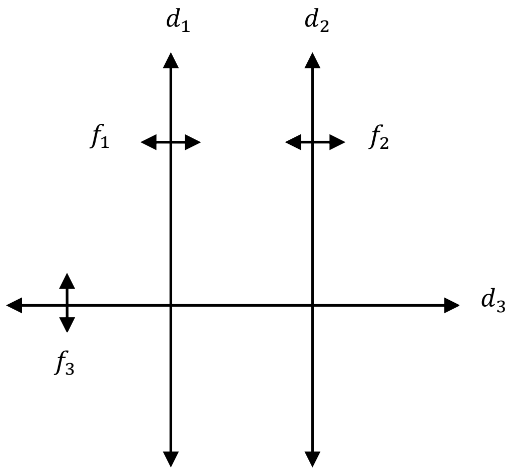
Şekil 1.1. Paralel iki doğru üzerindeki yansımaların bileşkesi.

Eğer d_1 ve d_2 doğruları kesişiyorlarsa $f_1 f_2$ izometrisi düzlemdeki her bir noktayı kesişme noktası etrafında doğrular arasındaki açının iki katı kadar döndüren bir döndürmedir, Şekil 1.2.



Şekil 1.2. Kesişen iki doğru üzerindeki yansımaların bileşkesi.

Eğer f_3, d_1 ve d_2 doğrularını dik kesen bir d_3 doğrusu üzerindeki yansıma ise, $f_1f_2f_3$ izometrisi bir ötelemeli yansımadır, Şekil 1.3.



Şekil 1.3. Üç yansımanın bileşkesi.

Öklid grubunun bölüm uzayı kompakt olan alt grupları 17 izomorfizma sınıfına ayrılır ve bu alt gruplar duvar kâğıdı grupları olarak adlandırılır.

Duvar kâğıdı gruplarından olan ve düzlemde bir üçgenin köşelerini sabit tutan döndürmeler ve kenarlarını sabit tutan yansımaların ürettiği gruplar mevcuttur. Bu gruplar yukarıda bahsedilen 17 aileden 6 sını oluşturur ve aşağıda kısaca tanıtılmıştır.

Öklid düzleminde iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ radyan olan bir üçgene $(l, \mathrm{m}, \mathrm{n})$ üçgeni denir. Böyle bir üçgenin kenarlarını içinde bulunduran doğrular üzerindeki üç yansıma fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu gruba $(l, \mathrm{m}, \mathrm{n})$ genişletilmiş üçgensel grubu denir. Eğer bu yansımalar,

$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^l = (bc)^m = (ac)^n = 1$$

bağıntılarını sağlayacak biçimde a , b , c ile gösterilebilir. Burada $l, \mathrm{m}, \mathrm{n}$ birden büyük tamsayılar ve

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

olduğundan, sadece 3, 3, 3; 2, 4, 4; veya 2, 3, 6 değerlerini alabilirler.

Örneğin (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2), (2,3,6) ve (2,6,3) üçgensel grupları birbirine izomorf olduğu için yukarıdaki listeye muhtemel değerler üçlülerinden sadece bir tanesi dahil edilmiştir. Dolayısıyla E_2 grubunun (3,3,3), (2,4,4) ve (2,3,6) olmak üzere, üç farklı genişletilmiş üçgensel alt grubu mevcuttur. Bu gruplar, üçüncü bölümde daha detaylı ele alınacak olan ve sırasıyla $p31m$, $p4m$ ve $p6m$ notasyonları ile gösterilen gruplara izomorftur.

Herhangi bir $(l, \mathrm{m}, \mathrm{n})$ üçgeninin köşelerini sabit tutan ve mertebeleri $l, \mathrm{m}, \mathrm{n}$ olan üç döndürme, $(l, \mathrm{m}, \mathrm{n})$ üçgensel grubunun indeksi 2 olan bir alt grubunu üretir. Bu grup yansıma ve ötelemeli yansıma içermez ve $[l, \mathrm{m}, \mathrm{n}]$ üçgensel grubu olarak adlandırılır. Eğer bu döndürmeler x, y,z ile gösterilirse,

$$x^l = y^m = z^n = xyz = 1$$

bağıntıları sağlanır. O halde E_2 grubunun [3,3,3], [2,4,4] ve [2,3,6] olmak üzere, üç farklı üçgensel alt grubu mevcuttur. Bu gruplar sırasıyla $p3$, $p4$ ve $p6$ gruplarına izomorftur.

Macbeath (1967) tarafından hiperbolik düzlemin bütün izometrilerinin oluşturduğu grubun bölüm uzayı kompakt olan alt grupları ve bunlarla ilgili temel cebirsel bilgiler verilmektedir. Bu gruplar NEC grupları olarak adlandırılır. Duvar kâğıdı grupları da Öklid düzleminin bütün izometrilerinin oluşturduğu grubun bölüm uzayı kompakt olan alt grupları oldukları için, bunlar hakkındaki temel bilgiler aynı makaleden elde edilebilir.

Coxeter ve Moser (1980) tarafından duvar kâğıdı gruplarının Cayley çizgeleri ve bu gruplar hakkında bazı temel bilgiler verilmiştir. Cayley çizgeleri belirlenirken grupların üreteç kümeleri minimum tutulmuştur.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde çizge ve yönlü çizge kavramları kısaca tanıtılmıştır. Bu kavramlar hakkında detaylı bilgiler (Bondy ve Murty, 2008) ve (Diestel, 2017) kaynaklarında yer almaktadır.

Üçüncü ve son bölümde ise önce Cayley çizgeleri tanıtılmış, ardından devirli, dihedral ve simetrik gruplar gibi bazı sonlu grupların Cayley çizgeleri belirlenmiş ve şekil çizilerek gösterilmiştir. Son olarak, 17 farklı izomorfizma sınıfına ayrılan duvar kâğıdı gruplarının her bir sınıfa ait temsilciler seçilerek bunların Cayley çizgeleri belirlenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

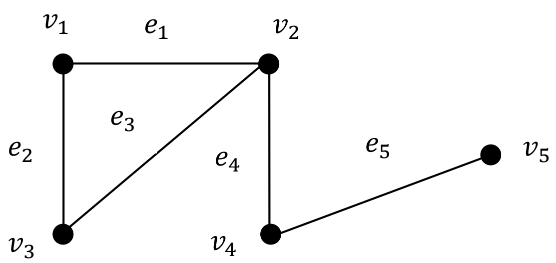
Bu bölümde Cayley Çizgeleri oluşturulurken kullanılan temel kavramlara ve bazı ön bilgilere yer verilmiştir.

2.1. Çizgeler

Tanım 2.1. Sonlu bir $V \neq \emptyset$ kümesi ve E, V nin elemanlarının sırasız ikililerden oluşturduğu bir küme olmak üzere $G = (V, E)$ ikilisine çizge adı verilir. Burada köşe kümesi V kümesinin elemanları ve bazı durumlarda boş olan kenar kümesi ise E kümesinin elemanlarıdır.

Bir G çizgesinin köşe kümesi için $V(G)$ ve kenar kümesi için $E(G)$ gösterimi kullanılacaktır. Çizgeyi oluştururken köşeleri noktalar, kenarları ise bu noktaları birleştiren çizgilerle temsil edilerek görsel hale getirilebilir. $v_1, v_2 \in V(G)$ olmak üzere $(v_1, v_2) \in E(G)$ kenarı için $e_1 = (v_1, v_2)$gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 2.1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ noktalar kümesi ve $E = \{\ e_1 = (v_1, v_2),\ e_2 = (v_1, v_3),\ e_3 = (v_2, v_3),\ e_4 = (v_2, v_4),\ e_5 = (v_4, v_5)\}$ kenarlar kümesine karşılık gelen $G = (V, E)$ çizgesi;

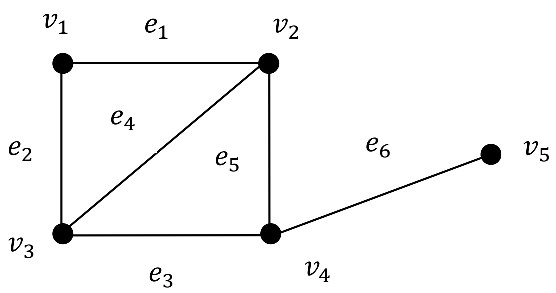


Şekil 2.1. Beş köşeli bir çizge.

Tanım 2.2. Bir e kenarı v_1 ve v_2 köşeleri arasında ise köşeler komşudur denir. Ayrıca e kenarı v_1 ve v_2 köşeleri ile bitişiktir denir. Bir çizgenin herhangi iki e_1 ve e_2 kenarının ortak köşesi var ise bu kenarlara komşu kenarlar denir.

Örneğin, Şekil 2.1 de verilen çizgede v_1 ile v_4 köşeleri komşu değildir ama v_2 ile v_4 köşeleri komşudur. e_1 kenarı v_1 ve v_2 köşeleri ile bitişiktir ama v_3 , v_4 ve v_5 köşeleri ile bitişik değildir.

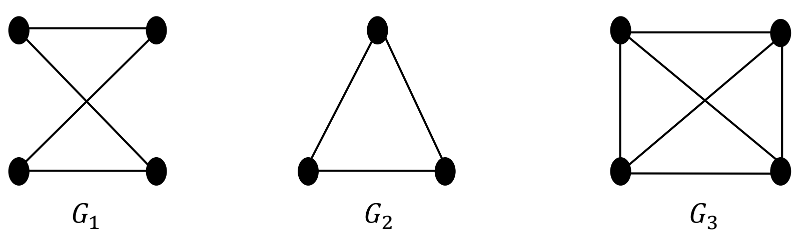
Tanım 2.3. Bir $G = (V, E)$ çizgesinin herhangi bir v_1 köşesine bitişik olan kenarların sayısına v_1 köşesinin derecesi denir. $d_G(v)$ veya $d(v)$ ile gösterilir.



Şekil 2.2. Beş köşeli çizge.

Örneğin, Şekil 2.2 de verilen çizge için $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3, d(v_3) = 3, d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 1$ dir.

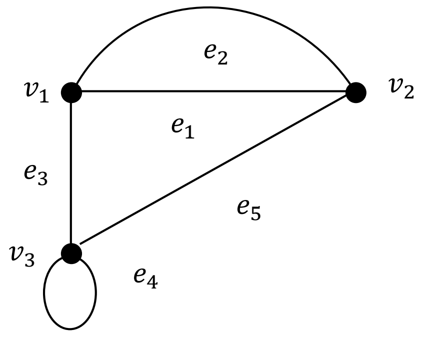
Tanım 2.4. Bir çizgede bütün köşelerin dereceleri eşit ise bu çizgeye regüler çizge denir. Bütün köşelerin derecesi *k* olan çizgeye özel olarak k-regüler çizge denir.



Şekil 2.3. Regüler çizgeler.

Şekil 2.3 de verilen G_1 ve G_2 çizgeleri 2-regüler çizge, G_3 çizgesi 3-regüler çizgedir.

Tanım 2.5. Bir çizgede herhangi bir kenarın her iki ucu da aynı köşeye bitişik ise bu kenara ilmek denir. Bir çizgenin farklı iki köşesini birleştiren kenar birden fazla ise bu kenarlara paralel kenarlar denir.

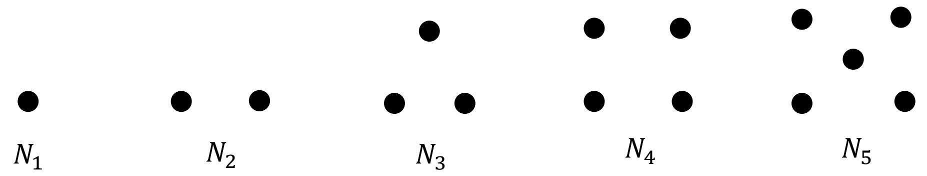


Şekil 2.4. Paralel kenar ve ilmek içeren çizge.

Örneğin, Şekil 2.4. de e_1 ve e_2 paralel kenarlar, e_4 bir ilmektir.

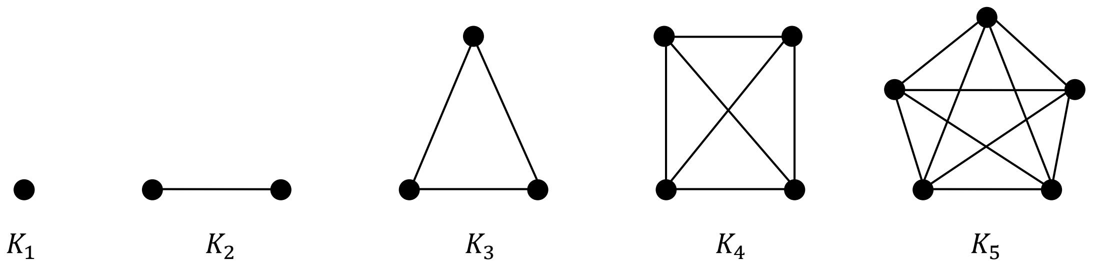
Tanım 2.6. Bir çizge ilmek ve paralel kenar bulundurmuyorsa bu çizgeye basit çizge denir. Paralel kenarlar içeren çizgeye ise çoklu çizge denir.

Tanım 2.7. Bir çizgenin köşeleri arasında herhangi bir kenar bulunmuyor ise bu çizgeye boş çizge denir. N_n notasyonu köşe sayısı n olan boş çizge için kullanılır. Boş çizgede kenarları oluşturan küme boştur.



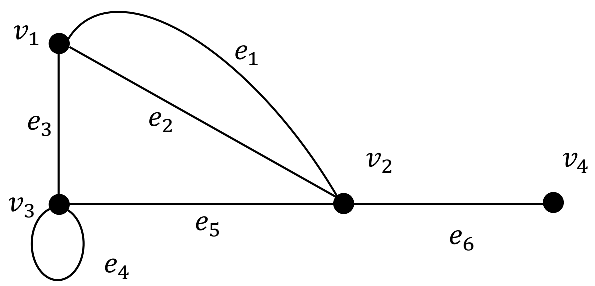
Şekil 2.5. Boş çizgeler.

Tanım 2.8. Basit bir çizgede rastgele seçilen herhangi iki köşesi arasında bir kenar bulunuyorsa bu çizgeye tam çizge denir. K_n notasyonu köşe sayısı n olan tam çizge için kullanılır.



Şekil 2.6. Tam çizgeler.

Tanım 2.9. Bir çizgede ardışık köşe ve kenarlardan oluşan $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ biçimindeki bir diziye yürüme denir. Eğer W yürümesindeki $e_1, e_2, \dots, e_k$ kenarları birbirinden farklı ise W ye bir gezi denir. Eğer W yürümesindeki $v_0, v_1, \dots, v_k$ köşeleri birbirinden farklı ise W ye bir patika denir.



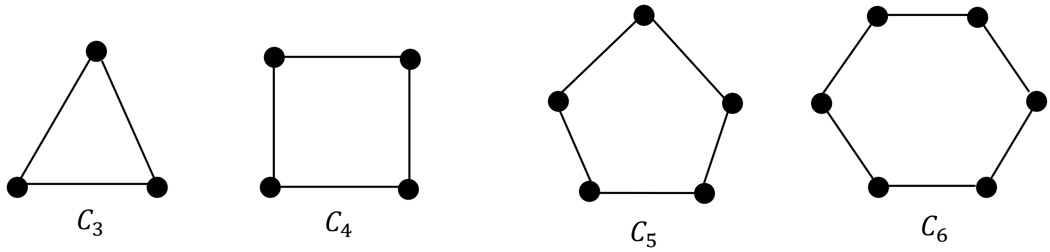
Şekil 2.7. Bir Çizge.

Örneğin Şekil 2.7 de $W_1 = v_1 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_2$ bir yürüme, $W_2 = v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_6 v_4$ bir gezi, $W_3 = v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_6 v_4$ bir patikadır.

Tanımdan ve örneklerden anlaşılacağı gibi her patika aynı zamanda bir gezidir. Dolayısıyla yukarıdaki örnekteki W_1 yürümesi bir gezidir ama bir patika değildir. W_2 ise hem bir gezi hem bir patikadır.

Tanım 2.10. Başlangıç ve bitişi aynı olan patikaya döngü (devir) denir. n tane köşesi olan bir döngü C_n notasyonu ile gösterilir. Şekil 2.7 de verilen çizgede $W = v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_1 v_1$ bir döngüdür.

Aşağıda Şekil 2.8 de; C_3, C_4, C_5 ve C_6 döngüleri verilmiştir.



Şekil 2.8. C_3, C_4, C_5 ve C_6 döngüleri.

Tanım 2.11. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri verilsin. Eğer G_1 ve G_2 çizgelerinin köşe ve kenar kümeleri arasında köşe ve kenarların özelliklerini koruyan birebir ve örten bir θ fonksiyonu varsa, G_1 ve G_2 çizgeleri izomorftur denir ve bu durum $G_1 \cong G_2$ notasyonu ile gösterilir. θ fonksiyonuna da G_1 ve G_2 çizgeleri arasında bir izomorfizma denir.

Burada aşağıdaki hususlar dikkate alınmalıdır:

i. Eğer θ fonksiyonu $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri arasında bir izomorfizma ise, her $(v_i, v_j) \in E_1$ için $\left(\theta(v_i), f(v_j)\right) \in E_2$ olmalıdır.

ii. $G_1 \cong G_2$ ise G_1 ve G_2 çizgelerinin kenar, köşe ve aynı dereceli köşelerinin sayıları eşit olmalıdır. Ayrıca bir izomorfizma köşelerin derecelerini korumalıdır.

2.2. Yönlü Çizgeler

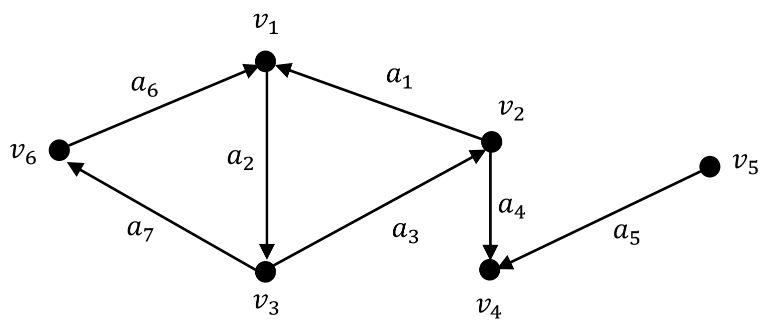
Tanım 2.11. $V \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve A, V nin elemanlarının oluşturduğu sıralı ikililerden meydana gelen bir küme olmak üzere $D = (V, A)$ ikilisine bir yönlü çizge denir. Burada V kümesinin elemanlarına köşeler ve bazı durumlarda boş olan A kümesinin elemanlarına da oklar veya yönlü kenarlar denir.

Eğer $a = (u, v), D = (V, A)$ yönlü çizgesine ait bir ok (yönlü kenar) ise u ve v köşelerine sırasıyla a nın başlangıç ve bitiş köşeleri denir.

Aşağıda Şekil 2.9 da $a = (u, v)$ ve $b = (v, u)$ okları görülmektedir.

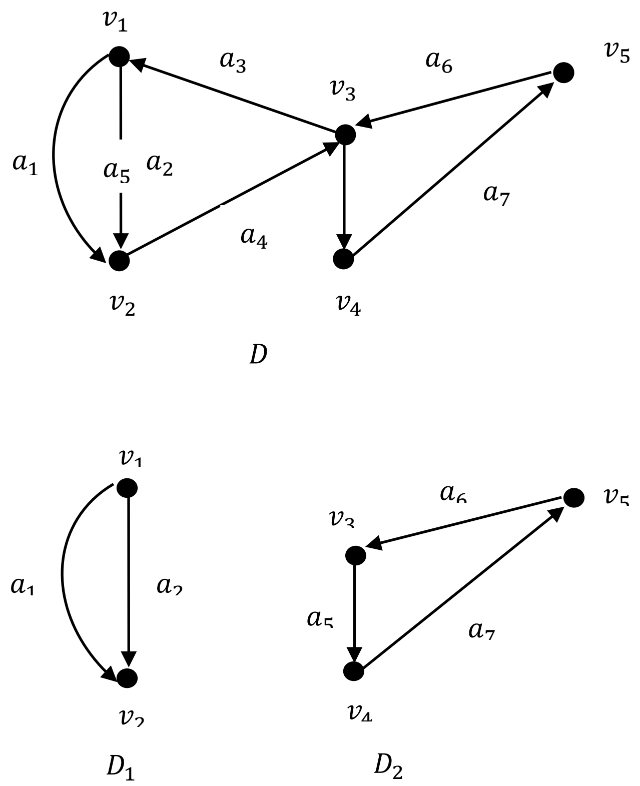
Şekil 2.9: a ve b okları.

Örnek 2.2. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ve $A = \{a_1 = (v_2, v_1), a_2 = (v_1, v_3), a_3 = (v_3, v_2), a_4 = (v_2, v_4), a_5 = (v_5, v_4), a_6 = (v_6, v_1), a_7 = (v_3, v_6)\}$ kümelerine karşılık gelen $D = (V, A)$ yönlü çizgesi Şekil 2.10 da gösterilmiştir.



Şekil 2.10. Altı köşeli olan bir yönlü çizge.

Çizgeler için verilen alt çizge tanımı yönlü çizgeler için de benzer şekilde verilebilir. Aşağıdaki şekilde bir D yönlü çizgesi ve bunun D_1 ve D_2 alt çizgeleri verilmektedir.



Şekil 2.11. Bir yönlü çizge ve alt çizgeleri.

Tanım 2.12. $D = (V, A)$ bir yönlü çizge olsun. Ardışık köşe ve oklardan oluşan

$$W = v_0 a_1 v_1 a_2 \cdots v_{k-1} a_k v_k$$

biçimindeki bir diziye yönlü yürüme denir. Burada her $1 \leq i \leq k$ için $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ okunun başlangıç köşesi v_{i-1} bitiş köşesi v_i dir.

Çizgelerde olduğu gibi bu yönlü yürüme kısaca

$$W = v_0 v_1 \cdots v_{k-1} v_k$$

olarak yazılabilir. Burada okların sayısı olan k pozitif tamsayısına W nin uzunluğu denir.

Yönlü gezi, yönlü patika, yönlü döngü ve yönlü tur tanımları da benzer şekilde verilir.

Örneğin Şekil 2.10 da

$$W = v_1 a_2 v_3 a_7 v_6 a_6 v_1 a_2 v_3 a_3 v_2$$

uzunluğu 5 olan bir yönlü yürümedir. Bu bir yönlü gezi değildir, çünkü a_2 oku iki kez tekrar edilmiştir. Burada

$$T = v_2 a_1 v_1 a_2 v_3 a_3 v_2 a_4 v_4$$

uzunluğu 4 olan bir yönlü gezidir, ama bir yönlü patika değildir. Çünkü v_2 köşesi iki kez tekrar edilmiştir. Ayrıca,

$$P = v_6 a_6 v_1 a_2 v_3 a_3 v_2 a_4 v_4 a_5 v_5$$

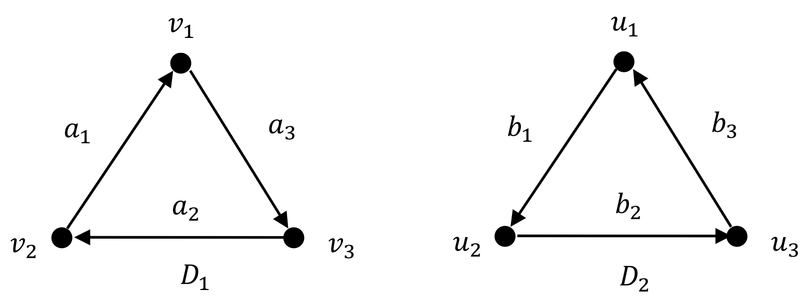
bir yönlü patikadır,

$$C = v_1 a_2 v_3 a_7 v_6 a_6 v_1$$

bir yönlü döngüdür.

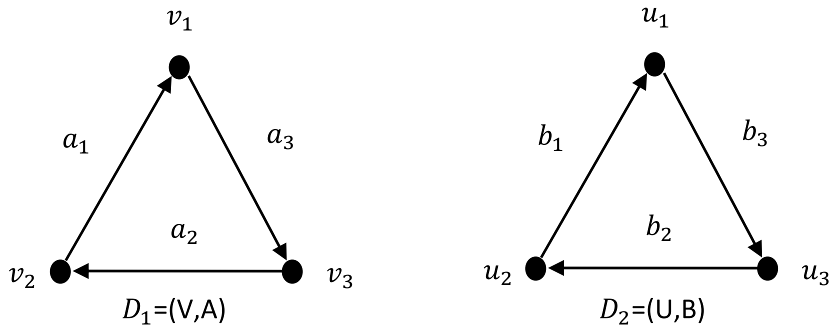
Tanım 2.13. $D_1 = (V_1, A_1)$ ve $D_2 = (V_2, A_2)$ yönlü çizgeleri verilsin. Eğer D_1 ve D_2 çizgelerinin köşe ve kenar kümeleri arasında köşe ve kenarların komşuluk ve bitişiklik özelliklerini koruyan birebir ve örten bir θ fonksiyonu varsa, D_1 ve D_2 yönlü çizgeleri izomorftur denir ve $D_1 \cong D_2$ notasyonu ile gösterilir. θ fonksiyonu da G_1 ve G_2 çizgeleri arasında bir izomorfizma denir.

Örnek 2.3. $\theta(v_1) = u_1, \theta(v_2) = u_3, \theta(v_3) = u_2; \theta(a_1) = b_3, \theta(a_2) = b_2, \theta(a_3) = b_1$ olarak tanımlanan θ fonksiyonu bir izomorfizma olduğu için aşağıdaki şekilde verilen D_1 ve D_2 yönlü çizgeleri izomorfturlar.



Şekil 2.12. D_1 ve D_2 çizgeleri.

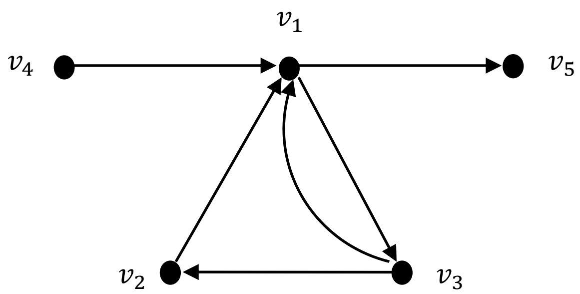
Örnek 2.4. $A = \{a_1 = (v_2, v_1), a_2 = (v_3, v_2), a_3 = (v_1, v_3)\}$ kümesinden $B = \{b_1 = (u_2, u_1), b_2 = (u_2, u_3), b_3 = (u_3, u_1)\}$ kümesine birebir ve örten herhangi bir θ fonksiyonu V kümesinden U kümesine birebir ve örten bir fonksiyon olmaz. Bu nedenle aşağıdaki şekilde verilen D_1 ve D_2 yönlü çizgeleri izomorf değildirler.



Şekil 2.13. D_1 ve D_2 yönlü çizgeleri.

Tanım 2.14. $D = (V, A)$ bir yönlü çizge ve $u \in V$ olsun. D çizgesinde bitiş köşesi v olan okların sayısına v köşesinin giriş derecesi; başlangıç köşesi v olan okların sayısına ise v köşesinin çıkış derecesi denir. Bunlar sırasıyla $id(v)$ ve $od(v)$ notasyonları ile gösterilir.

Aşağıdaki şekilde verilen çizgede $id(v_1) = 3,\ id(v_2) = 1,\ id(v_3) = 1,\ id(v_4) = 0,$ $id(v_5) = 1$ ve $od(v_1) = 2,\ od(v_2) = 1,\ od(v_3) = 2,\ od(v_4) = 1,\ od(v_5) = 0$ olduğu kolayca görülebilir.



Şekil 2.14. Bir yönlü çizge.

Teorem 2.1. $D = (V, A)$ köşe ve kenar sayıları sırasıyla n ve q olan bir yönlü çizge olsun. Eğer $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ ise

$$\sum_{i=1}^{n} id(v_i) = \sum_{i=1}^{n} od(v_i) = q$$

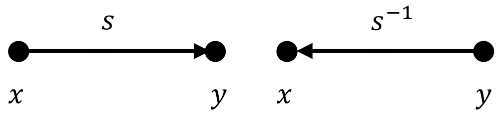
dir.

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Cayley Çizgeleri Temel Tanım ve Örnekler

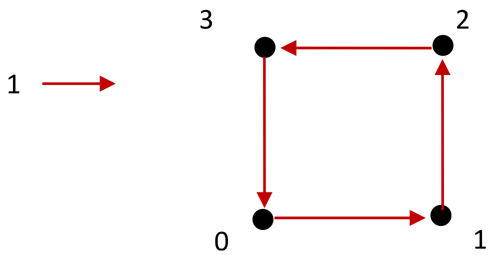
Bu bölümde cayley çizgesinin tanımı, çizge oluşturulurken izlenmesi gereken yollar ve bazı sonlu grupların cayley çizgeleri verilmiştir.

Tanım 3.1. Herhangi bir A grubu vebu grubun bir S üreteç kümesi verilsin. A grubunun S üreteç çizgesine karşılık gelen Cayley çizgesi, köşeleri A nın elemanlarından oluşan bir D yönlü çizgesidir. D nin herhangi bir $s = (x, y)$ yönlü kenarı; $x, y \in A$, $s \in S$ ve $x.s = y$ olacak şekilde elde edilir. s^{-1} yönlü kenarı ise (y, x) ikilisine karşılık gelir, Şekil 3.1.



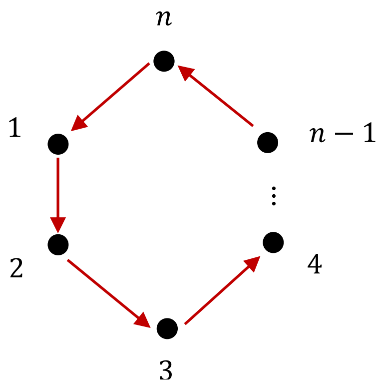
Şekil 3.1. Yönlü kenarlar.

Örnek 3.1. $\mathbb{Z}_4$ grubu için Cayley çizgesi oluştururken grubun elemanları $\{1,2,3,4\}$ ve üreteç kümesi $S = \{1\}$ olsun.



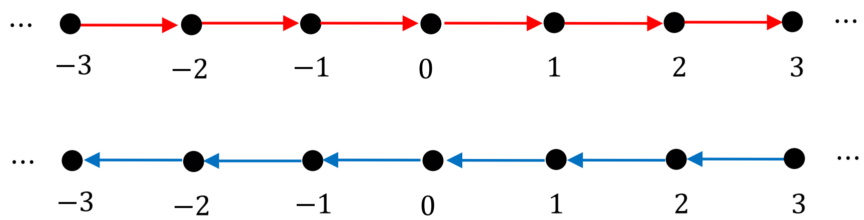
Şekil 3.2. $\mathbb{Z}_4$ grubunun Cayley çizgesi.

Örnek 3.2. n birden büyük bir tamsayı olmak üzere, $\mathbb{Z}_n = \{1,2,3,\cdots,n\}$ grubunun $S = \{1\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.3 te gösterilmiştir.



Şekil 3.3. $\mathbb{Z}_n$ grubunun Cayley çizgesi.

Örnek 3.2. $(\mathbb{Z},+)$ grubunun $S = \{1\}$ ve $S = \{-1\}$ üreteç kümelerine karşılık gelen Cayley çizgeleri Şekil 3.4 te verilmektedir.

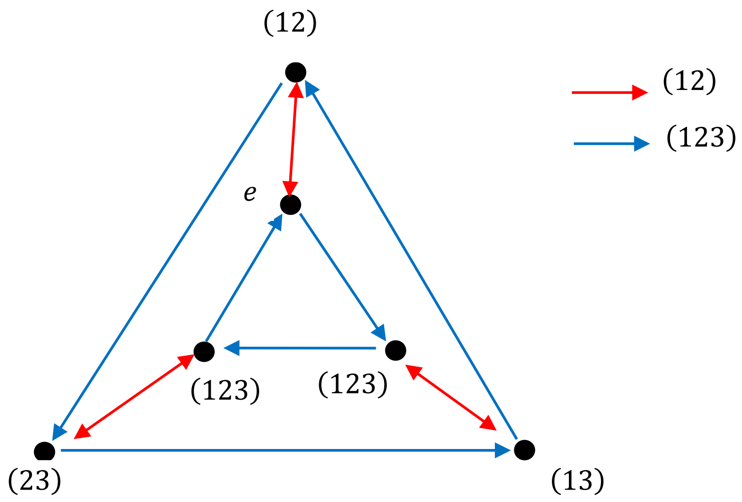


Şekil 3.4. $\mathbb{Z}$ grubunun iki farklı Cayley çizgesi.

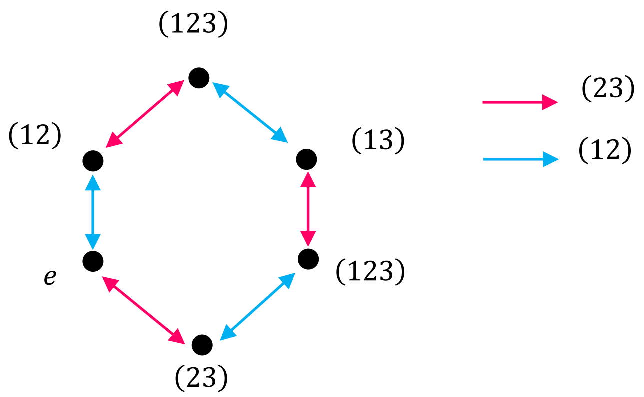
Gruptaki her eleman için bir köşe vardır (yani her tamsayı) ve her x, y çifti için (x, y) kenarı vardır. Çünkü bu bir Cayley çizgesidir, bu kenarların her biri o kenarı oluşturan üreteç ile etiketlenmektedir. Bu çizge için etiketleme oldukça basittir çünkü sadece bir üreteç vardır.

Örnek 3.3. S_3 için Cayley çizgesi;

$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ olduğu bilinmektedir. Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da, $S = \{(12), (123)\}$ ve $S = \{(12), (23)\}$ üreteç kümelerine karşılık gelen Cayley çizgeleri verilmektedir.



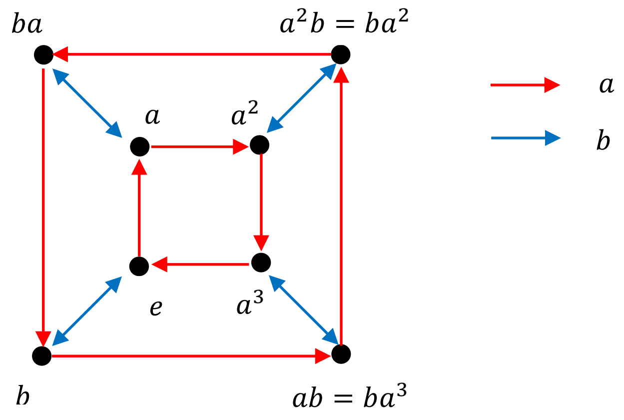
Şekil 3.5. S_3 grubunun Cayley çizgesi.



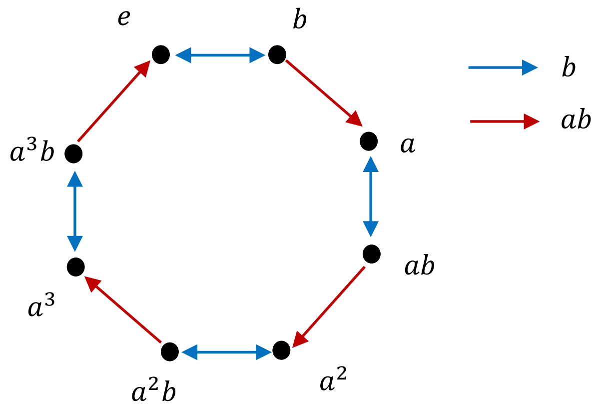
Şekil 3.6. S_3 grubunun Cayley çizgesi.

Yukarıdaki örnekte de olduğu gibi bir grubun Cayley çizgesi üreteç kümesine bağlıdır. Üreteç kümesi değişirse Cayley çizgesi de değişir. Bu nedenle bir grubun Cayley çizgesi tek değildir.

Örnek 3.4. $\langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ olarak verilen D_4 grubunun $S = \{a, b\}$ ve $S' = \{b, ab\}$ üreteç kümelerine karşılık gelen Cayley çizgeleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.

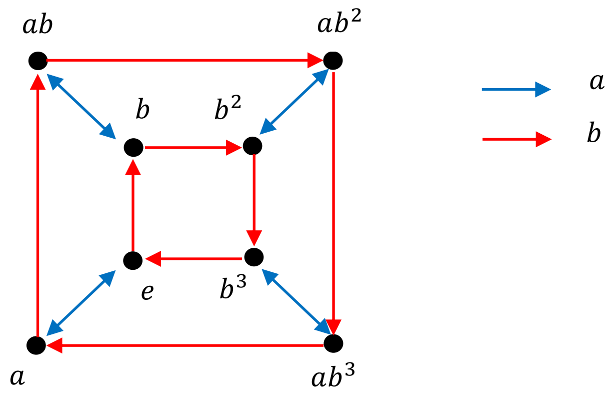


Şekil 3.7. D_4 grubunun $\{a, b\}$ üreteçli Cayley çizgesi.



Şekil 3.8. D_4 grubunun $\{b, ab\}$ üreteçli Cayley çizgesi.

Örnek 3.5. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \langle a^2 = b^4 = 1, ab = ba \rangle$ grubunun $\{a, b\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.9. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2. Duvar Kağıdı Grupları

3.2.1. p1 grubu

$p1$ grubu, Öklid düzleminde lineer bağımsız iki öteleme tarafından üretilir ve

$$p1 = \langle f, g | fg = gf \rangle$$

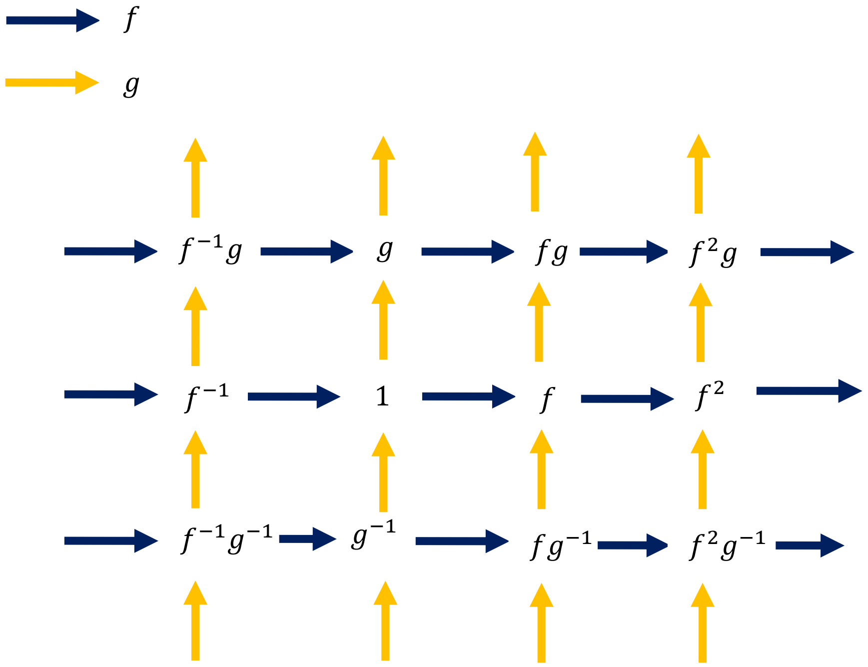
biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla $p1$ grubu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorftur.

Örneğin karmaşık düzlemde $f(z) = z + 1$ ve $g(z) = z + i$ ile verilen f ve g ötelemeleri lineer bağımsızdır ve

$$fg(z) = gf(z) = z + 1 + i$$

olduğundan bunların bileşke işlemine göre ürettiği grup $p1$ grubuna izomorftur.

$p1$ grubunun $S = \{f, g\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.10. $p1$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.2. p2 grubu

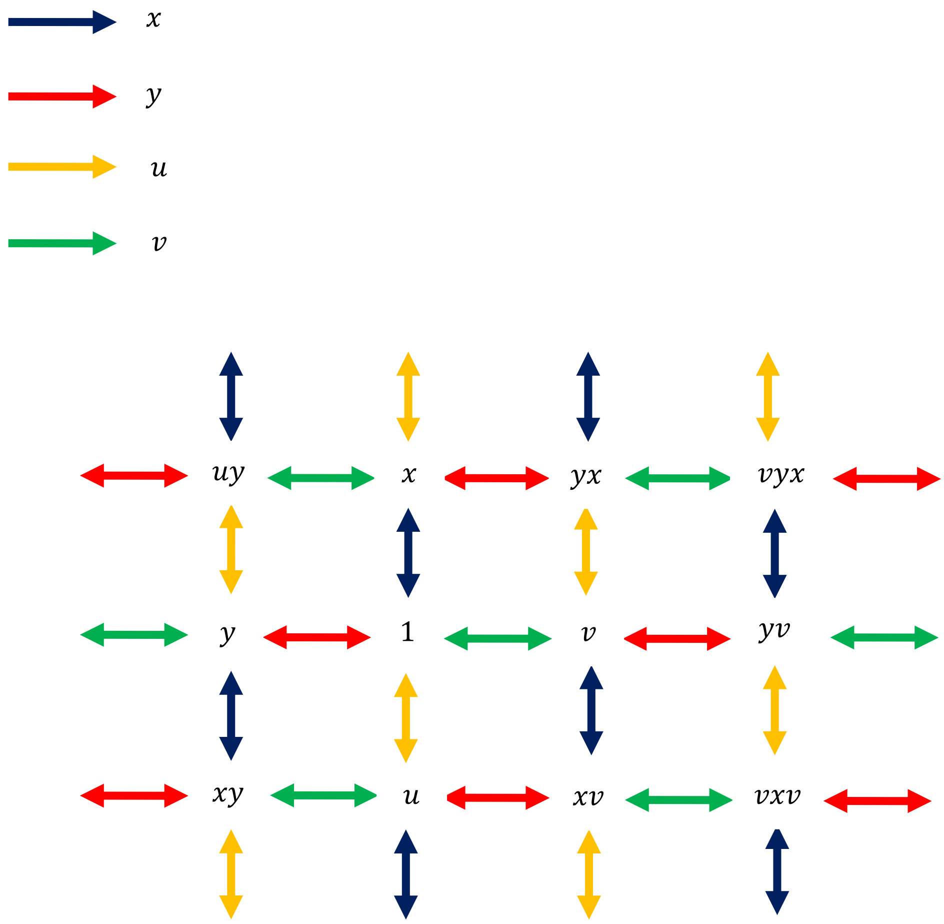
$p2$ grubu, Öklid düzleminde dört döndürme tarafından üretilir ve

$$p2 = \langle x, y, u, v | x^2 = y^2 = u^2 = v^2 = xyuv = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin, $0, 1, i$ ve $1 + i$ karmaşık düzlemde bir karenin köşeleridir. Sırasıyla bu köşeleri sabit tutan ve mertebeleri 2 olan $x(z) = -z$, $y(z) = -z + 2i$, $u(z) = -z + 2 + 2i$ ve $v(z) = -z + 2$ döndürmeleri $p2$ grubuna izomorf olan bir grup üretirler.

$p2$ grubunun $S = \{x, y, u, v\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.11. $p2$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.3. pmm grubu

pmm grubu, Öklid düzleminde bir dikdörtgenin kenarlarını sabit tutan dört yansıma tarafından üretilir ve

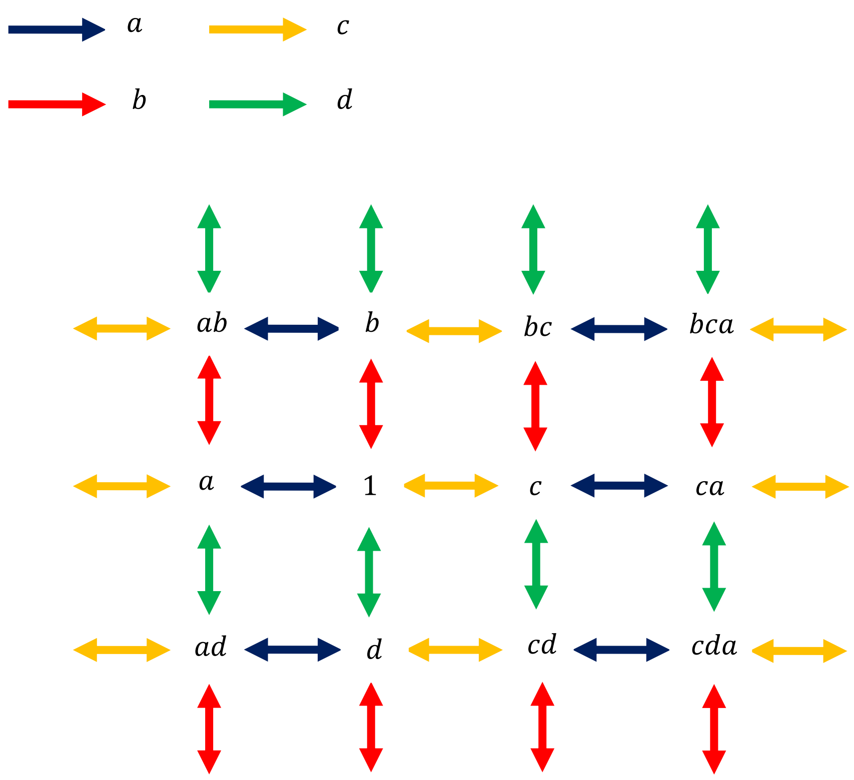
$$pmm = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = (cd)^2 = (ad)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin, karmaşık düzlemde köşeleri $0, 1, i$ ve $1 + i$ olan karenin kenarları üzerindeki yansımalar, $a(z) = \bar{z}, b(z) = -\bar{z},$ $c(z) = \bar{z} + 2i$ve $d(z) = -\bar{z} + 2$ile verilen $a, b, c, d\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarıdır(Alling ve Greenleaf, 1971).

Burada, $ab(z) = -z$, $bc(z) = -z + 2i$, $cd(z) = -z + 2 + 2i$ ve $ad(z) = -z + 2$ döndürmeleri pmm grubunun bir alt grubunu üretirler ve bu grup $p2$ grubuna izomorftur.

pmm grubunun $S = \{a, b, c, d\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.3 te verilmiştir.



Şekil 3.12. pmm grubunun Cayley çizgesi.

3.2.4. p3 grubu

$p3$ grubu, Öklid düzleminde bir eşkenar üçgenin herhangi iki köşesini sabit tutan ve mertebeleri 3 olan iki döndürme tarafından üretilir ve

$$p3 = \langle x, y | x^3 = y^3 = (xy)^3 = 1 \rangle$$

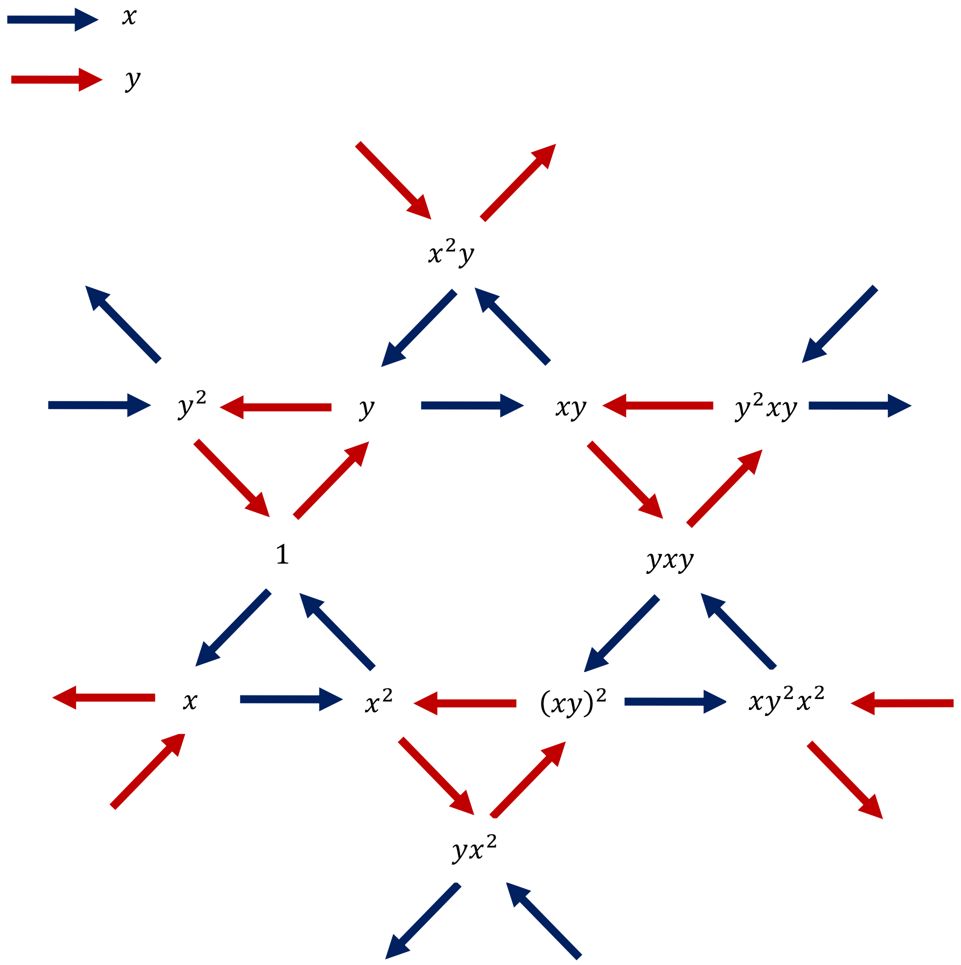
biçiminde ifade edilir.

Karmaşık düzlemde köşeleri $0, 1$ ve $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ noktaları olan eşkenar üçgenin 0 ve 1 köşelerini sabit tutan ve mertebeleri 3 olan

$x(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ ve $y(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

döndürmeleri $p3$ grubuna izomorf olan bir grup üretirler.

$p3$ grubunun $S=\{x,y\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.4 te verilmiştir.



Şekil 3.13. $p3$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.5. p4 grubu

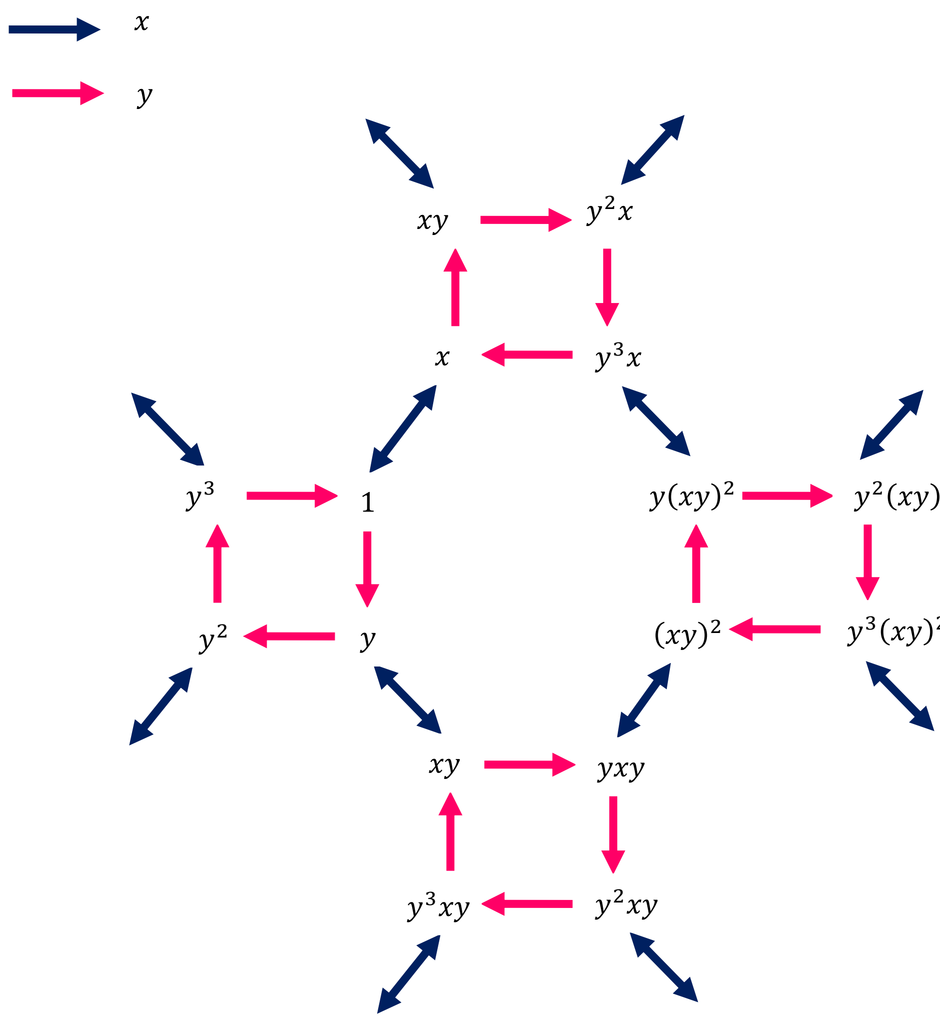
$p4$ grubu, Öklid düzleminde bir ikizkenar dik üçgenin herhangi iki köşesini sabit tutan iki döndürme tarafından üretilir ve

$$p4 = \langle x, y | x^2 = y^4 = (xy)^4 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin, köşeleri $0,\ 1$ ve $1 + i$ noktaları olan ikizkenar dik üçgenin 0 ve 1 köşelerini sabit tutan ve mertebeleri sırasıyla 4 ve 2 olan $x(z) = iz$ ve $y(z) = -z + 2$ ve döndürmeleri $p4$ grubunu üretirler.

$p4$ grubunun $S = \{x, y\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.14. $p4$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.6. p6 grubu

$p6$ grubu, Öklid düzleminde iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ ve $\frac{\pi}{6}$ radyan olan bir dik üçgenin herhangi iki köşesini sabit tutan iki döndürme tarafından üretilir ve

$$p6 = \langle x, y | x^2 = y^3 = (xy)^6 = 1 \rangle$$

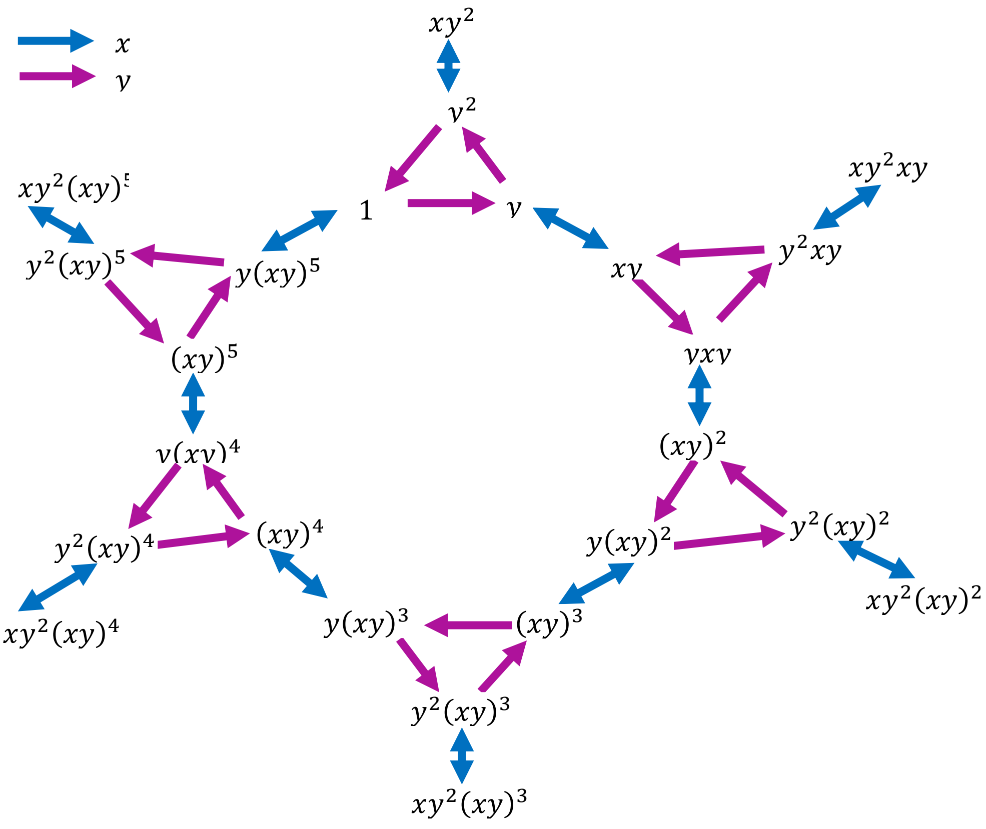
biçiminde ifade edilir.

Örneğin, köşeleri $0, \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ noktaları olan dik üçgenin 0 ve $\frac{1}{2}$ köşelerini sabit tutan ve mertebeleri sırasıyla 3 ve 2 olan

$$x(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) z \text{ ve } y(z) = -z + 1$$

döndürmeleri $p6$ grubunu üretirler.

$p6$ grubunun $S = \{x, y\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.6 da verilmiştir.



Şekil 3.15. $p6$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.7. p31m grubu

$p31m$ grubu, Öklid düzleminde bir eşkenar üçgenin kenarlarını sabit tutan üç yansıma tarafından üretilmiştir ve

$$p31m = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = 1 \rangle$$

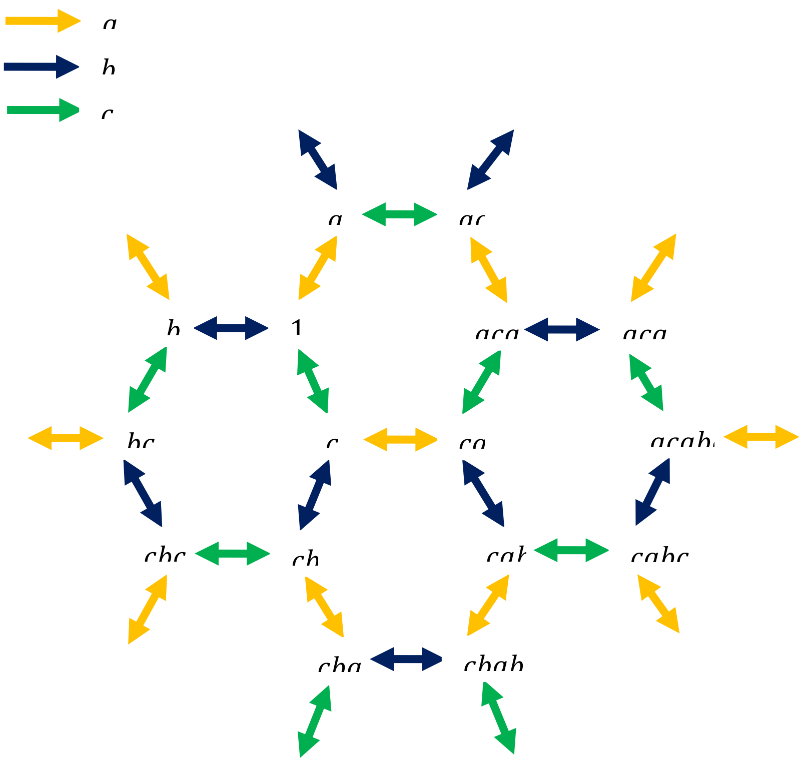
biçiminde ifade edilir.

Örneğin, köşeleri $0, 1$ ve $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ olan eşkenar üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar,

$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ olmak üzere, $a(z) = \bar{z}$, $b(z) = w\bar{z}$ ve $c(z) = \overline{w}(\bar{z} - 1) + 1$ ile verilen fonksiyonlardır (Alling ve Greenleaf, 1971). Bu üç yansıma $p31m$ grubuna izomorf olan bir grup üretirler.

$ab(z) = wz$ ve ac(z)= $w(z - 1) + 1$ elemanları $p31m$ grubunun $p3$ grubuna izomorf olan bir alt grubunu üretirler.

$p31m$ grubunun $S = \{a, b, c\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.16. $p31m$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.8. p4m grubu

$p4m$ grubu, Öklid düzleminde bir ikizkenar dik üçgenin kenarları üzerindeki üç yansıma tarafından üretilir ve

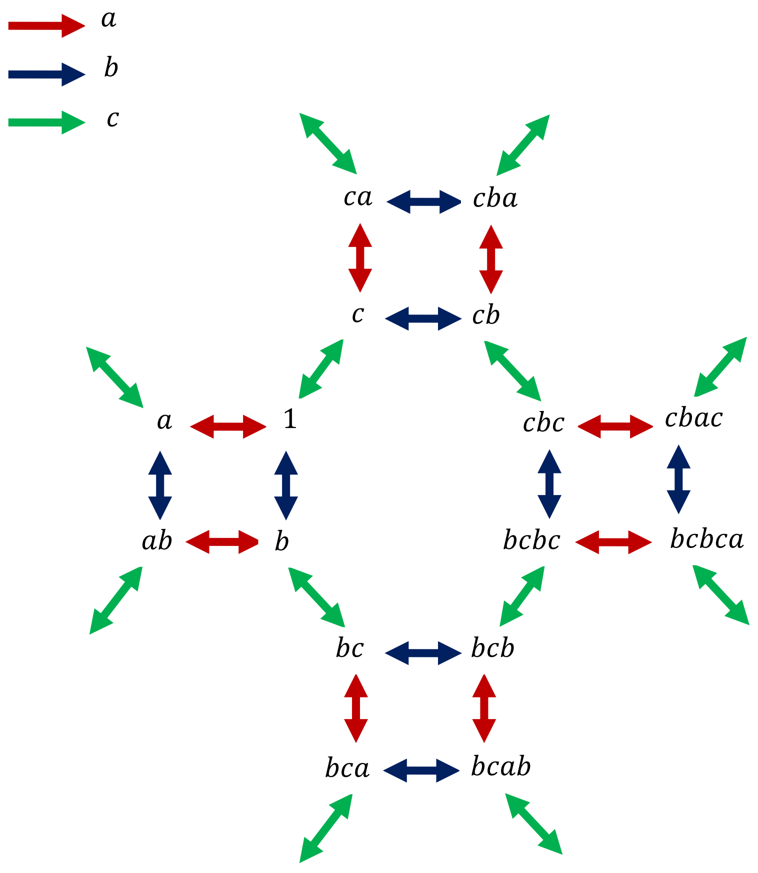
$$p4m = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ac)^4 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Bu üçgenin köşeleri örneğin $0,\ 1$ ve $1 + i$ alınabilir. Dolayısıyla bunun kenarları üzerindeki yansımalar, $a(z) = \bar{z},\ b(z) = -\bar{z} + 2$ ve $c(z) = i\bar{z}$ ile verilen $a, b, c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarıdır (Alling ve Greenleaf, 1971).

$ab(z) = -z + 2$ ve $ac(z) = iz$ elemanları, sırasıyla mertebesi 2 ve 4 olan döndürmelerdir ve dolayısıyla $p4m$ grubunun $p4$ alt grubunu üretirler.

$p4$ grubunun $S = \{a, b, c\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.17. $p4m$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.9. p6m grubu

$p6m$ grubu, Öklid düzleminde üç yansıma tarafından üretilmiştir ve

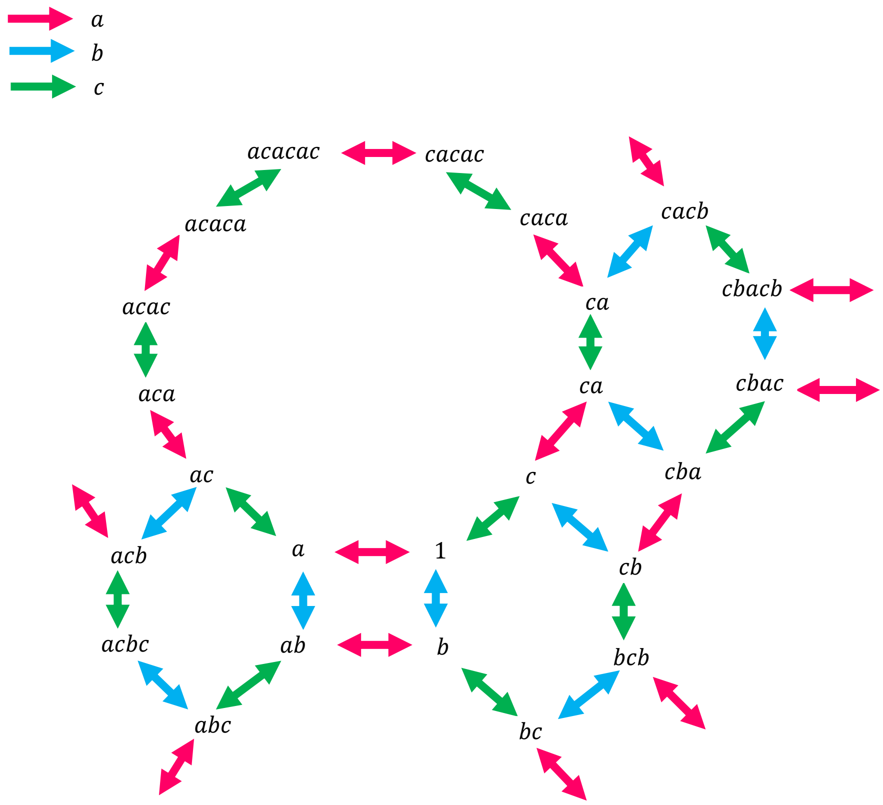
$$p6m = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^6 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin, köşeleri $0, \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ olan dik üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar, $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ olmak üzere, $a(z) = w\bar{z}$, $b(z) = \bar{z}$ ve $c(z) = \bar{w}(\bar{z} - 1) + 1$ ile verilen fonksiyonlardır ve bunlar $p6m$ grubuna izomorf olan bir grup üretirler(Alling ve Greenleaf, 1971).

$ab(z) = -z + 1$ ve $bc(z) = \bar{w}z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z$ elemanları, sırasıyla mertebesi 2 ve 3 olan döndürmelerdir ve dolayısıyla $p6m$ grubunun $p6$ alt grubunu üretirler.

$p6m$ grubunun $S = \{a, b, c\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.18. $p6m$ grubunun Cayley çizgesi

3.2.10. cmm grubu

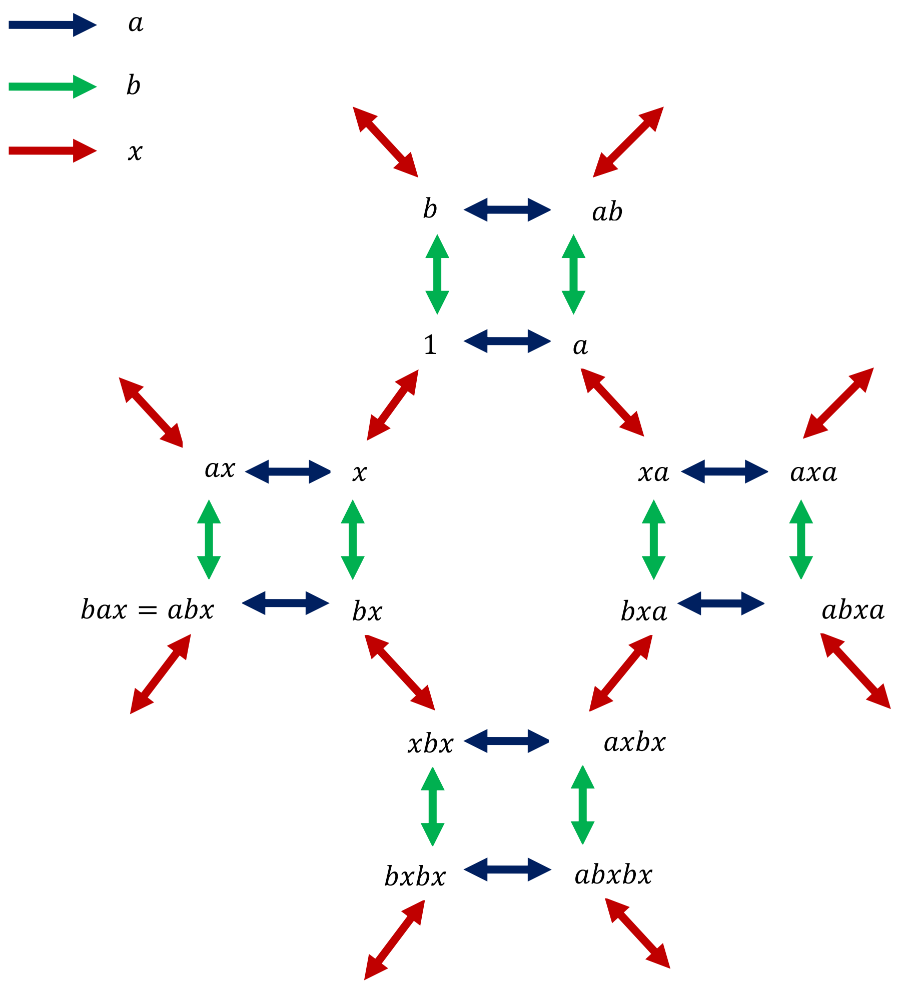
cmm grubu, Öklid düzleminde bir döndürme ve iki yansıma tarafından üretilir ve

$$cmm = \langle x, a, b | x^2 = a^2 = b^2 = (ab)^2 = (axbx)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $a(z) = -\bar{z}$ ve $b(z) = \bar{z} + 2i$ yansımaları ile mertebesi 2 olan $x(z) = -z + 1$ döndürmesi cmm grubunu üretirler.

cmm grubunun $S = \{a, b, x\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.10 da verilmiştir.



Şekil 3.19. cmm grubunun Cayley çizgesi.

3.2.11. p4g grubu

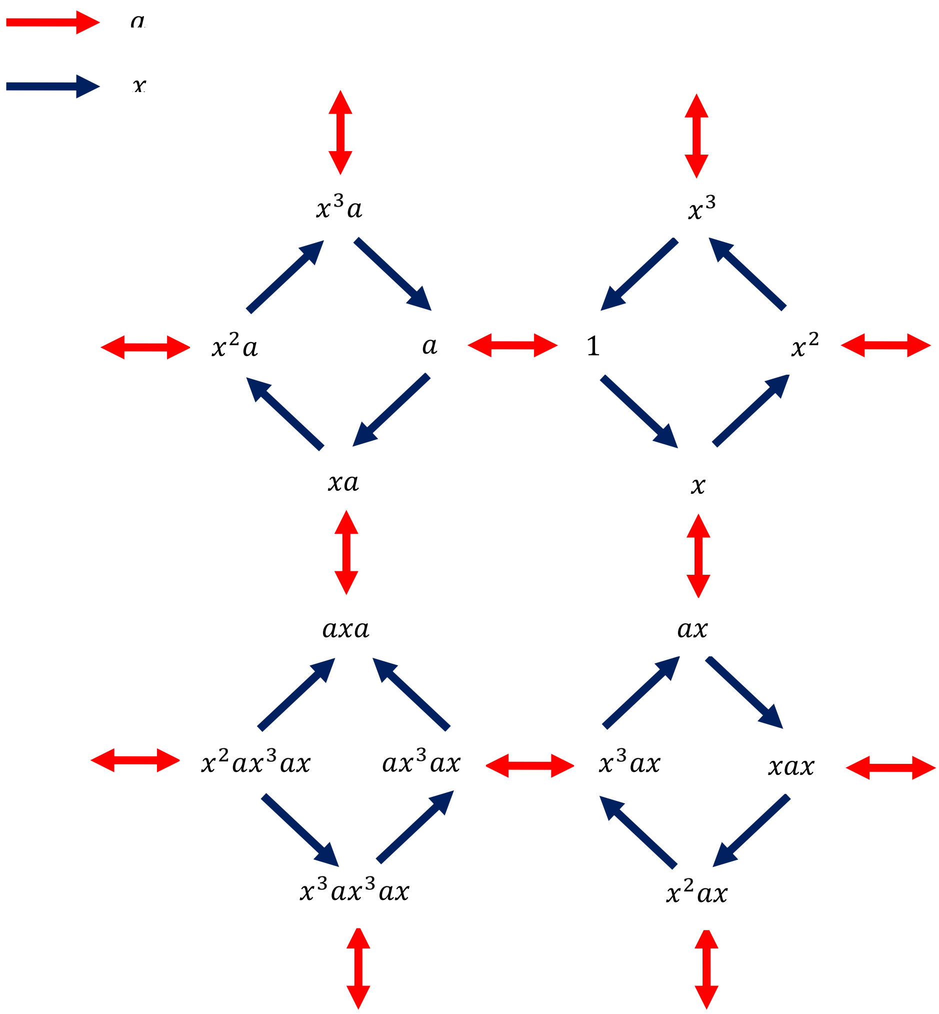
$p4g$ grubu, Öklid düzleminde bir döndürme ve bir yansıma tarafından üretilir ve

$$p4g = \langle x, a | x^4 = a^2 = (ax^{-1}ax)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $a(z) = \bar{z} + 2i$ yansıması ile mertebesi 4 olan $x(z) = iz$ döndürmesi $p4g$ grubunu üretirler.

$p4g$ grubunun $S = \{a, x\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.11 de verilmiştir.



Şekil 3.20. $p4g$ grubunun Cayley çizgesi.

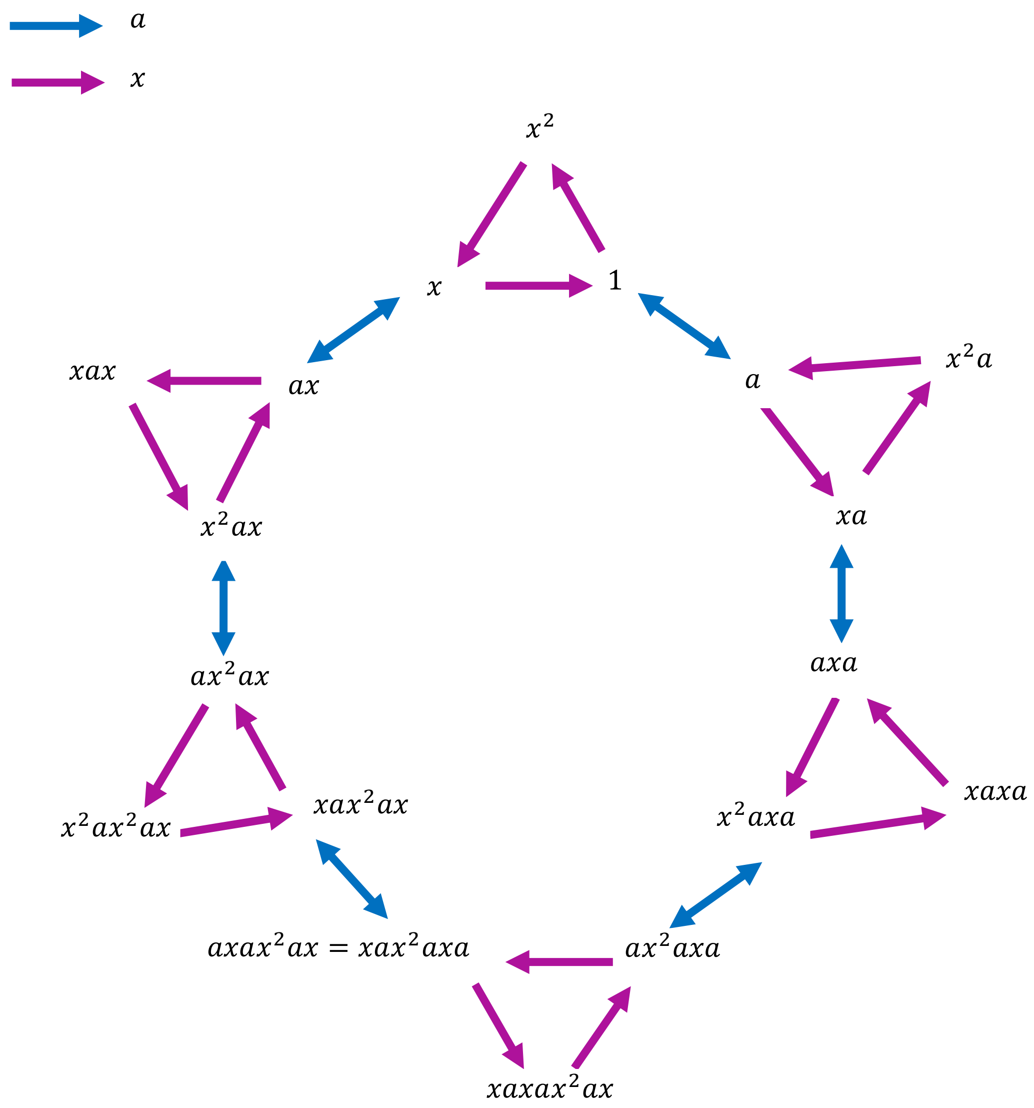
3.2.12. p3m1 grubu

$p3m1$ grubu, Öklid düzleminde bir döndürme ve bir yansıma tarafından üretilir ve

$$p3m1 = \langle x, a | x^3 = a^2 = (ax^{-1}ax)^3 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir. Örneğin $a(z) = \bar{z} + 2i$ yansıması ile mertebesi 3 olan $x(z) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ döndürmesi $p3m1$ grubunu üretirler.

$p3m1$ grubunun $S = \{a, x\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.12 de verilmiştir.



Şekil 3.21. $p3m1$ grubunun Cayley çizgesi.

3.2.13. pg grubu

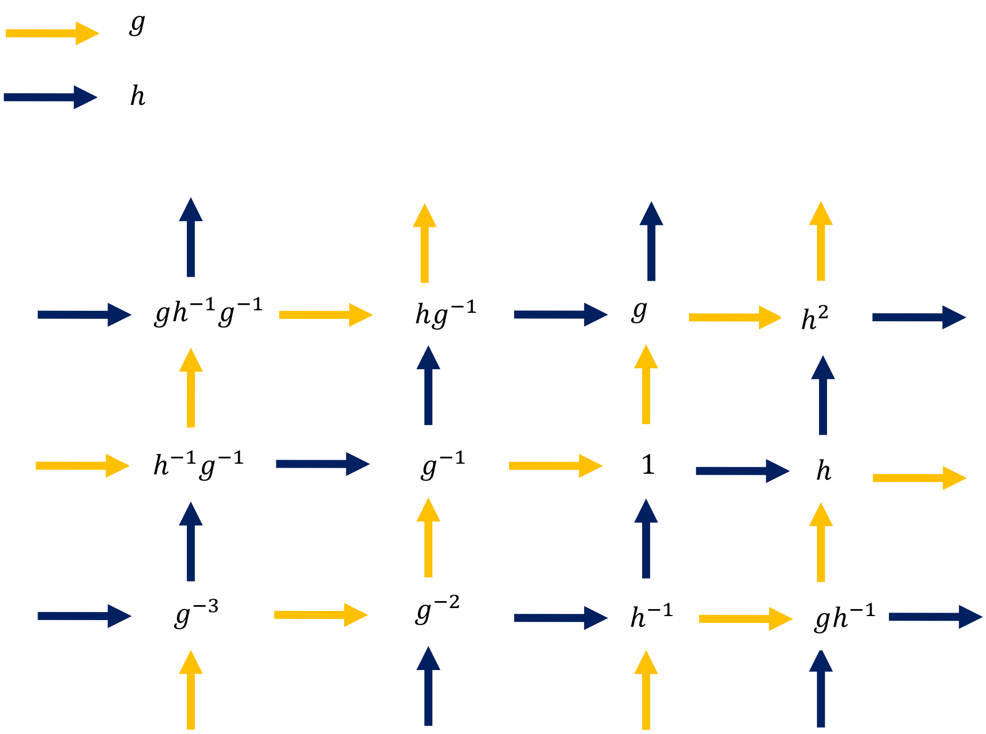
pg grubu, Öklid düzleminde birbirine paralel iki ötelemeli yansıma tarafından üretilir ve

$$pg = \langle g, h | g^2 h^2 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $g(z) = \bar{z} + 2i + 1$ ve $h(z) = \bar{z} + 1$ paralel ötelemeli yansımaları pg grubunu üretirler.

pg grubunun $S = \{g, h\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.13 te verilmiştir.



Şekil 3.22. pg grubunun Cayley çizgesi

3.2.14. cm grubu

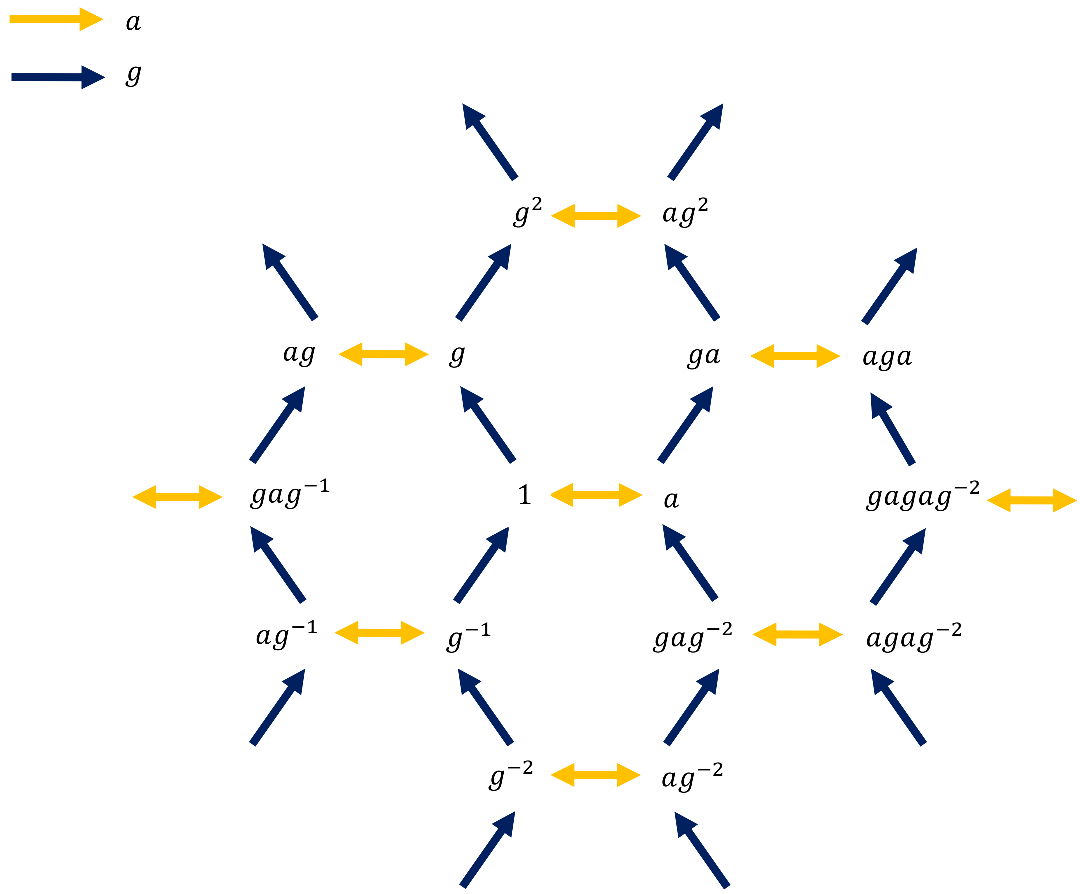
cm grubu, Öklid düzleminde bir ötelemeli yansıma ve bir yansıma tarafından üretilir ve

$$cm = \langle g, a | a^2 = ag^2ag^{-2} = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $g(z) = \bar{z} + 1$ ötelemeli yansıması ile ve $a(z) = i\bar{z}$ yansıması cm grubunu üretirler.

cm grubunun $S = \{g, a\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.14 te verilmiştir.



Şekil 3.23. cm grubunun Cayley çizgesi

3.2.15. pm grubu

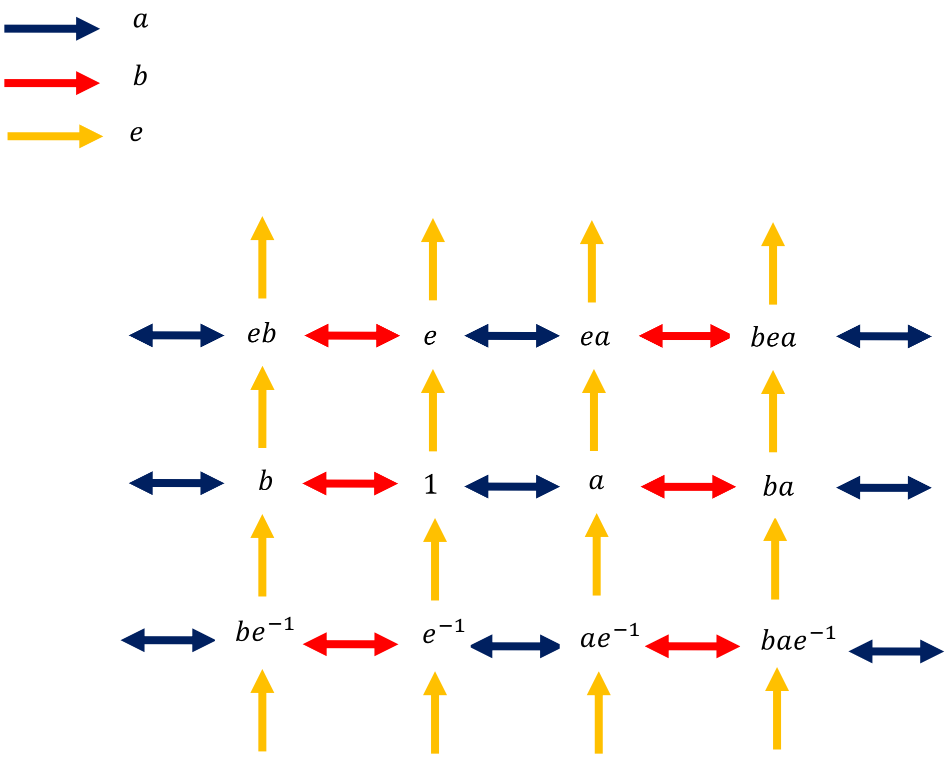
pm grubu, Öklid düzleminde bir öteleme ve iki yansıma tarafından üretilir ve

$$pm = \langle e, a, b | a^2 = b^2 = eae^{-1}a = ebe^{-1}b = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $a(z) = \bar{z} + 2i$ ve $b(z) = \bar{z}$ yansımaları ile $e(z) = z + 1$ ötelemesi pm grubunu üretirler.

pm grubunun $S = \{e, a, b\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.15 te verilmiştir.



Şekil 3.24. pm grubunun Cayley çizgesi

3.2.16. pgg grubu

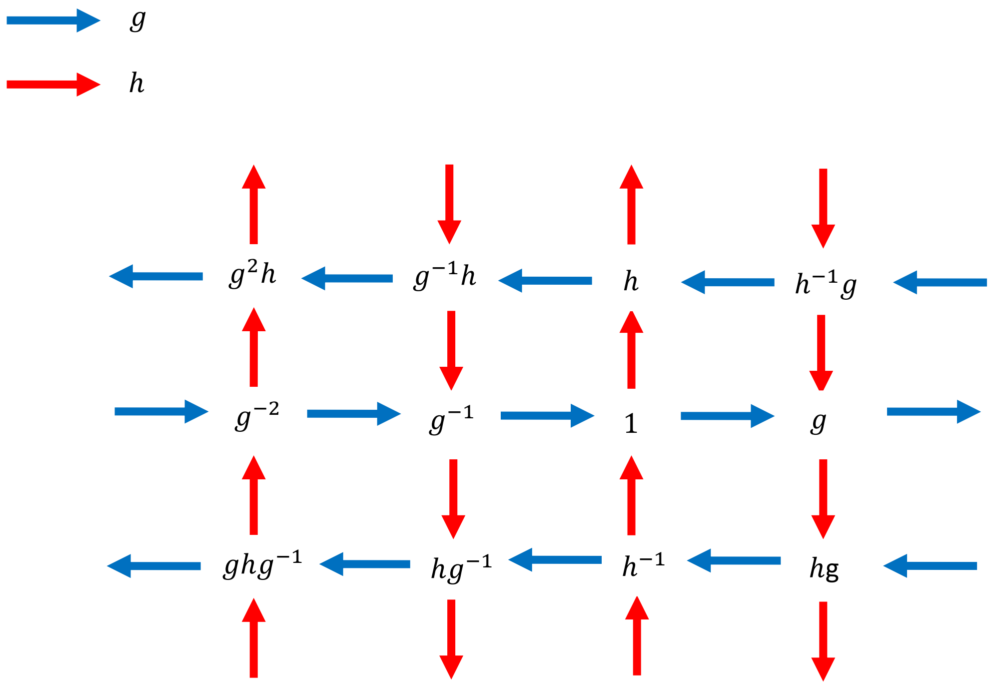
pgg grubu, Öklid düzleminde birbirine dik iki ötelemeli yansıma tarafından üretilir ve

$$pgg = \langle g, h | (gh)^2 = (g^{-1}h)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $g(z) = \bar{z} + 1$ ve $h(z) = -\bar{z} + i$ ötelemeli yansımaları pgg grubunu üretirler.

pgg grubunun $S = \{g, h\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.16 da verilmiştir.



Şekil 3.25. pgg grubunun Cayley çizgesi

3.2.17. pmg grubu

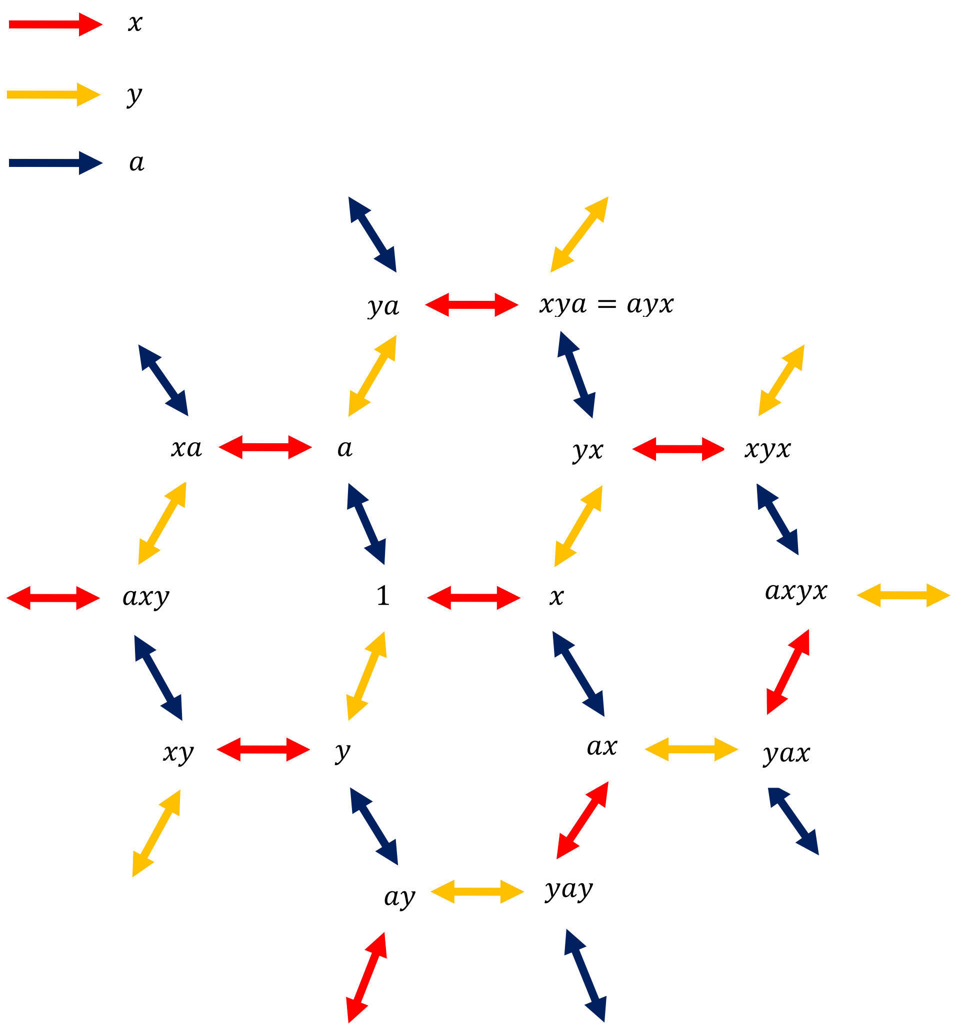
pmg grubu, Öklid düzleminde iki döndürme ve bir yansıma tarafından üretilir ve

$$pmg = \langle x, y, a | x^2 = y^2 = a^2 = xaxyay = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilir.

Örneğin $a(z) = \bar{z} + 2i$ yansıması ile mertebeleri 2 olan $x(z) = -z$ ve $y(z) = -z + 2$ döndürmeleri pmg grubunu üretirler.

pmg grubunun $S = \{a, x, y\}$ üreteç kümesine karşılık gelen Cayley çizgesi Şekil 3.17 de verilmiştir.



Şekil 3.26. pmg grubunun Cayley çizgesi

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak çizge, yönlü çizge ve Cayley çizgesi kavramları kısaca tanıtılmıştır. Daha sonra devirli, dihedral ve simetrik gruplar gibi bazı sonlu grupların Cayley çizgeleri belirlenmiş ve şekil çizilerek gösterilmiştir. Son olarak, 17 farklı izomorfizma sınıfına ayrılan duvar kâğıdı gruplarının her bir sınıfına ait gruplar ve üreteç kümeleri seçilerek bunlara karşılık gelen Cayley çizgeleri belirlenmiştir.

Daha önce yüzeyler üzerindeki çizgelerin otomorfizma grupları hakkında yapılan bazı çalışmalar ile yönlü çizgelerin otomorfizma grupları arasındaki ilişkiler sonraki çalışmalarda incelenebilir (Jones ve Singerman, 1978),(Melekoğlu, 2008), (Melekoğlu ve Singerman, 2016).

5. KAYNAKLAR

Alling, N., Greenleaf, N. (1971). *Foundations of the Theory of Klein surfaces*. Lecture Notes in Math. 219. Springer.

Armstrong, M.A. (1988). *Groups and symmetry*. Springer.

Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. Springer.

Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. (1980). *Geneators and relations for discrete groups*. Springer.

Diestel, R. (2017). *Graph Theory*. Springer.

Farmer, D.W. (1996). *Groups and symmetry*: *A Guide to discovering mathematics.* American Mathematical Society.

Jones, G.A., Singerman, D. (1978). Theory of maps on orientable surfaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *37*(3), 273–307.

Jones, G.A., Singerman, D. (1987). *Complex functions*: *An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press

Macbeath, A.M. (1967). The classification of non-Euclidean plane crystallographic groups. *Canadian Journal of Mathematics, 19,* 1192–1205.

Melekoğlu, A. (2008). A Geometric approach to the reflections of regular maps. *Ars Combinatoria, 89,* 355–367.

Melekoğlu, A., Singerman, D. (2016). The structure of mirrors on regular maps on Platonic surfaces. *Geometriae Dedicata, 181,* 239-256.

T.C.

AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK BEYANI

"Cayley Çizgeleri" başlıklı Yüksek Lisans tezimdeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Berna DEMİRCİ