

**T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-YL-044**



YARI PLATONİK TOR YÜZEYLERİ

Gülsün TANOĞLU

**Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Gülsün TANOĞLU tarafından hazırlanan “Yarı Platonik Tor Yüzeyleri” başlıklı tez, 18.08.2020 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. İbrahim ÇANAK	Ege Üniversitesi	
Üye :	Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Aydın ADÜ	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER	Aydın ADÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulununsayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

18/08/2020

Gülsün TANOĞLU

ÖZET

YARI PLATONİK TOR YÜZEYLERİ

Gülsün TANOĞLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

2020, 39 sayfa

Bu çalışmanın amacı tor yüzeyleri üzerindeki düzgün hiperfigürleri tanıtmak ve bunların bazı geometrik, topolojik ve cebirsel özelliklerini incelemektir.

Birinci bölümde kısaca tezin özeti verilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışması için gerekli olan temel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Öklid düzlemi ve tor yüzeyleri üzerindeki düzgün hiperfigürler tanıtılmıştır.

Son bölümde ise tor yüzeyleri üzerinde tipi $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ ve $(4, 4, 2)$ olan düzgün hiperfigür aileleri tanıtılmış ve bu ailelere ait olan düzgün hiperfigürlerin bazı cebirsel ve geometrik özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Figür, Düzgün figür, Hiperfigür, Düzgün hiperfigür, Tor yüzeyi, Yarı Platonik tor yüzeyi.

ABSTRACT

QUASI PLATONIC TORI

Gülsün TANOĞLU

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

2020, 39 pages

The aim of this study is to introduce the regular hypermaps on tori and investigate some of their geometric, topological and algebraic properties.

In the first chapter the thesis is summarized briefly.

The second chapter is devoted to basic concepts which are required in the subsequent chapters.

In the third chapter, the regular hypermaps on the Euclidean plane and tori have been introduced.

In the last chapter, regular hypermap families consisting of regular hypermaps of types $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ and $(4, 4, 2)$ have been introduced and some algebraic and geometric properties of their members have been investigated.

Key Words: Map, Regular map, Hypermap, Regular Hypermap, Torus, Quasi-Platonic torus.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmam boyunca yardımını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) sonsuz teşekkür ederim.

Gülsün TANOĞLU

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	4
2.1. Grup Etkisi	4
2.2. Temel Bölge	4
2.3. Bölüm Uzayı (Yörünge Uzayı)	6
2.4. Üçgensel Gruplar	7
2.5. Düzgün Figürler	9
3. DÜZGÜN HİPERFİGÜRLER.....	11
3.1. Cebirsel Hiperfigür.....	12
3.2. Düzgün Hiperfigürlerin Otomorfizmaları	13
3.3. Bölüm Hiperfigürü	13

3.4. Evrensel Topolojik Hiperfigürler	14
3.5. Küre Üzerinde Düzgün Hiperfigürler.....	16
3.6. Tor Yüzeyleri Üzerinde Düzgün Hiperfigürler	17
4. YARI PLATONİK TOR YÜZEYLERİ VE DÜZGÜN HİPERFİGÜR AİLELERİ.....	19
4.1. Tipi (3, 3, 3) olan Düzgün Hiperfigür Ailesi.....	19
4.2. Tipi (2, 3, 6) olan Düzgün Hiperfigür Ailesi.....	24
4.3. Tipi (4, 4, 2) olan Düzgün Hiperfigür Ailesi.....	28
5. SONUÇ.....	35
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

\mathcal{A}	: Cebirsel hiperfigür
$Aut(\mathcal{A})$: \mathcal{A} 'nın tüm otomorfizmalarının grubu
\mathring{A}	: A kümesinin içi
A_n	: n . dereceden alterne grup
$Aut^+ \mathcal{M}$: \mathcal{M} figürünün konform otomorfizmalarının grubu
$Aut \pm \mathcal{M}$: \mathcal{M} figürünün tüm otomorfizmalarının grubu
$Aut^+ X$: X yüzeyinin konform otomorfizmalarının grubu
$Aut \pm X$: X yüzeyinin tüm otomorfizmalarının grubu
\mathbb{C}	: Karmaşık sayılar kümesi
G_k	: k noktasının yörüngesi
\mathcal{G}	: Çizge (graf)
\mathcal{H}	: Topolojik hiperfigür
$\widehat{\mathcal{H}}$: Evrensel topolojik hiperfigür
\mathcal{M}	: Figür
$\{m, n\}$: Figürün tipi
S_n	: n . dereceden simetrik grup

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $\langle z \rightarrow z + 1 \rangle$ grubu için bir temel bölge.....	5
Şekil 2.2 $\langle z \rightarrow z + 1, z \rightarrow z + i \rangle$ grubu için bir temel bölge	5
Şekil 2.3 İki öteleme tarafından üretilen grubun bölüm uzayı	7
Şekil 2.4 Bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar	7
Şekil 3.1 Tor yüzeyi üzerinde tipi (3,3,3) olan bir hiperfigür.....	11
Şekil 3.2 Bir üçgensel kaplamadan hiperfigürün oluşturulması.....	14
Şekil 3.3 Öklid düzleminin (2,4,4) üçgenleri ile kaplaması	15
Şekil 3.4 Tipi (6,3,2) olan bir hiperfigür	18
Şekil 3.5 Tipi (3,6,2) olan bir hiperfigür	18
Şekil 4.1 G_1 grubu için bir temel bölge.....	19
Şekil 4.2 T_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_1 hiperfigürü	20
Şekil 4.3 T_2 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_2 hiperfigürü	21
Şekil 4.4 G_1 grubu için bir temel bölge.....	24
Şekil 4.5 T_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_1 hiperfigürü	25
Şekil 4.6 T_2 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_2 hiperfigürü	26
Şekil 4.7 G_1 grubu için bir temel bölge.....	29
Şekil 4.8 T_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_1 hiperfigürü	29
Şekil 4.9 T_2 yüzeyi üzerindeki \mathcal{H}_2 hiperfigürü	30

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 l, m ve n 'nin alabileceği değerler	8
Çizelge 3.1 Küre üzerindeki düzgün hiperfigürler	16
Çizelge 3.2 Öklid düzlemindeki düzgün hiperfigürler.....	17
Çizelge 4.1 Tipi (3 3,3) olan düzgün hiperfigürler ailesi	22
Çizelge 4.2 Tipi (2,3,6) olan düzgün hiperfigürler ailesi	27
Çizelge 4.3 Tipi (4,4,2) olan düzgün hiperfigürler ailesi	32

1. GİRİŞ

T bir tor yüzeyi olsun. Bu durumda f ve g karmaşık düzlemde \mathbb{C} lineer bağımsız iki öteleme ve G , bileşke işlemine göre bu iki öteleme tarafından üretilen grup olmak üzere, $T = \mathbb{C}/G$ biçiminde ifade edilebilir. Eğer G grubu bir $(2, m, n)$ üçgensel grubu tarafından normal alt grup olarak içeriliyorsa T yüzeyi her bir köşede n tanesi bir araya gelecek biçimde m kenarlı eş düzgün çokgenlere ayrılabilir. Böylece T üzerinde düzgün çokgenlerin kenar ve köşelerinin belirlediği ve düzgün figür olarak adlandırılan bir çizge mevcuttur. Burada m kenarlı eş düzgün çokgenlere düzgün figürün yüzleri denir. Küre üzerinde, Öklid düzleminde ve tor yüzeyleri üzerinde bulunan düzgün figürler üçüncü bölümde detaylı olarak incelenecektir.

Eğer G grubu bir (l, m, n) üçgensel grubu tarafından normal alt grup olarak içeriliyorsa, T yüzeyi, kenar sayısı aynı olan çokgenler eş olmak kaydıyla l, m ve $2n$ kenarlı düzgün çokgenlere bölünebilir. Böylece T üzerinde hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzleri sırasıyla l, m ve $2n$ kenarlı düzgün çokgenler olan bir hiperçizge bulunur. Bu durumda T ye yarı Platonik tor yüzeyi denir.

Yukarıda bahsedildiği gibi, her tor yüzeyi Öklid düzleminde lineer bağımsız iki ötelemenin bölüm uzayı olarak ele alınabilir. Dolayısıyla bir tor yüzeyi üzerinde tipi (l, m, n) olan bir düzgün hiperfigür verilmiş ise bu düzgün hiperfigür de Öklid düzlemi üzerindeki bir düzgün hiperfigürün bölüm uzayı olarak ele alınabilir. Daha sonra görüleceği gibi, Öklid düzleminde bulunan bir düzgün hiperfigürün tipi $(4, 4, 2), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (2, 3, 6), (2, 6, 3)$ veya $(6, 3, 2)$ dir. Böyle bir düzgün hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan grup; $(4, 4, 2), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (2, 3, 6), (2, 6, 3)$ veya $(6, 3, 2)$ üçgensel grubuna izomorftur ve sonlu değildir. Herhangi bir tor yüzeyi üzerinde bulunan bir düzgün hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan grup ise, $(4, 4, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (2, 3, 6), (2, 6, 3)$ veya $(6, 3, 2)$ üçgensel grubunun bir homomorfizma altında görüntüsüdür ve sonludur.

Tipi (l, m, n) olan ve Öklid düzleminde bulunan bir düzgün hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan grup ; a, b ve c hiperfigürün üç yansıması olmak üzere,

$$\langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^l = (bc)^m = (ca)^n = 1 \rangle \quad (1.1)$$

biçimindedir. Yani (l, m, n) üçgensel grubuna izomorftur. Eğer aynı hiperfigür bir tor yüzeyi üzerinde bulunuyorsa, bunun tüm otomorfizmalarından oluşan grup sonlu olduğundan (1.1) de verilen bağıntılara en az bir bağıntının daha eklenmesi gerekir.

Verilen bir hiperfigürün komşu hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzlerinin merkezleri geodezik doğru parçalarıyla birleştirilirse, hiperfigürü üzerinde bulunduran tor yüzeyi veya Öklid düzlemi, iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ radyan olan üçgenlere bölünmüş olur. Bu üçgenlerden herhangi birinin kenarları üzerindeki yansımalar hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan grubu üretir. Bu üçgenlerden herhangi birinin köşelerini sabit tutan ve mertebeleri sırasıyla l, m ve n olan döndürmeler X, Y, Z olsun. Bu döndürmeler söz konusu hiperfigürün tüm konform otomorfizmalarından oluşan grubu üretir. Bu grup, (l, m, n) üçgensel grubunun indeksi 2 olan bir alt grubudur ve

$$\langle X, Y, Z | X^l = Y^m = Z^n = XYZ = 1 \rangle \quad (1.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Öklid düzleminde ve tor yüzeyleri üzerinde bulunan düzgün hiperfigürler üçüncü bölümde detaylı olarak incelenecektir.

Herhangi bir tor üzerinde tipi aynı olan sonsuz düzgün hiperfigür bulunur. Bunun temel sebebi, Öklid düzleminde aynı çokgene benzer, ama alanları farklı olan sonsuz çokgenin bulunmasıdır. Küre ve hiperbolik düzlemde benzer çokgenler eş oldukları için bu durum söz konusu değildir.

Bir düzgün hiperfigürün herhangi bir yansıması; eğer hiperfigür Öklid düzleminde ise bir doğruyu, bir tor yüzeyi üzerinde ise bir veya iki basit kapalı eğriyi sabit tutar. Hiperfigürün, söz konusu doğruyu veya eğrileri kümesel olarak sabit tutan konform otomorfizmaları mevcuttur. Bu otomorfizmalar ilgili sabit eğrinin dönele otomorfizmaları olarak adlandırılır. Verilen düzgün hiperfigürün tipine göre dönele otomorfizmalar eşlenik sınıflarına ayrılır. (Melekoğlu, 2008) tarafından her bir eşlenik sınıfına ait bir eleman verilmiştir. Eğer hiperfigür Öklid düzleminde ise dönele otomorfizmaların her biri bir ötelemedir ve dolayısıyla bunların mertebeleri sonlu değildir. Eğer hiperfigür bir tor yüzeyi üzerinde ise bu otomorfizmaların mertebeleri sonlu olmak zorundadır.

Daha sonra görüleceği gibi, her pozitif tamsayı bir düzgün hiperfigüre ait bir dönel otomorfizmanın mertebesi olabilir. Ayrıca istisnai durumlar dışında mertebe büyükçe söz konusu hiperfigürün hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüz sayıları da artacaktır. Dolayısıyla dönel otomorfizmaların bazı cebirsel özellikleri ile ilgili hiperfigürün geometrik özellikleri birbirlerini etkilemektedir.

Üçüncü ve son bölümde, tor yüzeyleri üzerinde tipi $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ ve $(4, 4, 2)$ olan düzgün hiperfigür aileleri tanıtılacaktır. Ayrıca, yukarıda bahsedilen dönel otomorfizmalar kullanılarak, bu ailelere ait olan düzgün hiperfigürlerin otomorfizma grupları ve hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüz sayıları gibi bazı cebirsel ve geometrik özellikleri incelenecektir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Grup Etkisi

G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. G grubunun birim elemanı e olmak üzere, her $x \in X$ ve her $g_1, g_2 \in G$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi denir:

$$(i) \varphi(e, x) = x,$$

$$(ii) \varphi(g_1 g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x)).$$

Örnek 2.1.1. X bir topolojik uzay $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda her $x \in X$ ve her $g \in G$ için, $\varphi : G \times X \rightarrow X$ ve $\varphi(g, x) = g(x)$ şeklinde tanımlanan φ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisidir. Çünkü her $x \in X$ için, $\varphi(e, x) = e(x) = x$ ve her $g_1, g_2 \in G$ için,

$$\varphi(g_1 g_2, x) = g_1 g_2(x) = g_1(\varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$$

eşitliği sağlanır.

2.2. Temel Bölge

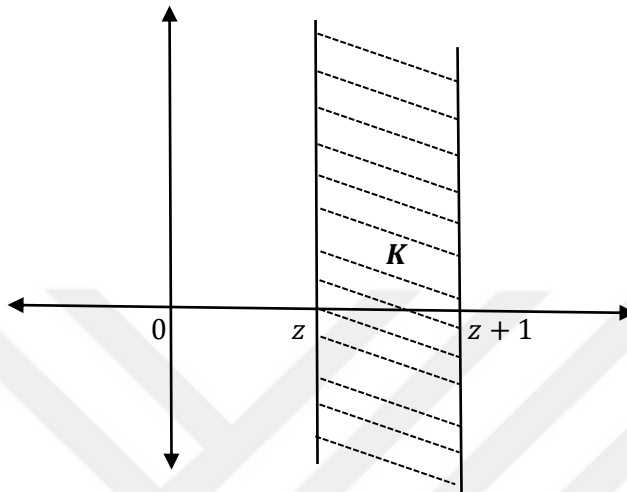
X bir topolojik uzay ve $G = \{g \mid g : X \rightarrow X \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. Bu durumda X uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı bir A alt kümesine G grubu için bir temel bölge denir:

$$(i) \cup_{g \in G} g(A) = X,$$

$$(ii) \text{ Her } g \in G \setminus \{e\} \text{ için, } \mathring{A} \cap g(\mathring{A}) = \emptyset.$$

Burada A kümesinin içi \mathring{A} notasyonu ile gösterilmektedir.

Örnek 2.2.1. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $f(z) = z + 1$ olarak tanımlanan f fonksiyonu sonsuz devirli bir G grubu üretir. Şekil 2.1 deki taralı olan K kümesi bu G grubu için bir temel bölge olur

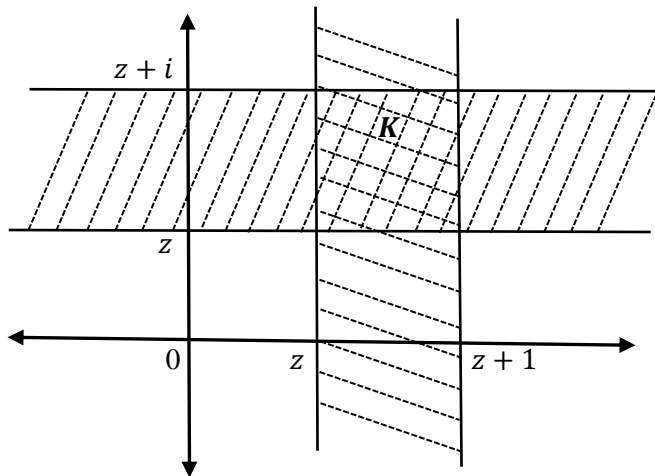


Şekil 2.1 $\langle z \rightarrow z + 1 \rangle$ grubu için bir temel bölge

Örnek 2.2.2. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + 1$

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = z + i$$

ile tanımlanan f ve g fonksiyonları sonsuz bir $G = \langle f, g \rangle$ grubunu üretir. Şekil 2.2 de verilen K kümesi bu G grubu için bir temel bölge olur.



Şekil 2.2 $\langle z \rightarrow z + 1, z \rightarrow z + i \rangle$ grubu için bir temel bölge

2.3. Bölüm Uzayı (Yörünge Uzayı)

Tanım 2.3.1. G bir grup, $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\varphi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. $k \in X$ için, $G_k = \{ \varphi(g, k) = g(k) \mid g \in G \}$ kümesine k noktasının yörüngesi denir.

Tanım 2.3.2. X bir topolojik uzay ve G, X uzayına etki eden bir grup olmak üzere G_k kümesi, $k \in X$ noktasının yörüngesi olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$"x\beta y \Leftrightarrow y \in G_k"$$

olarak tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır.

Bu denklik bağıntısına göre k elemanın denklik sınıfı, k elemanın yörüngesidir ve denklik sınıflarının oluşturduğu $X/\beta = \{G_k \mid k \in X\}$ ailesi de bölüm kümesidir.

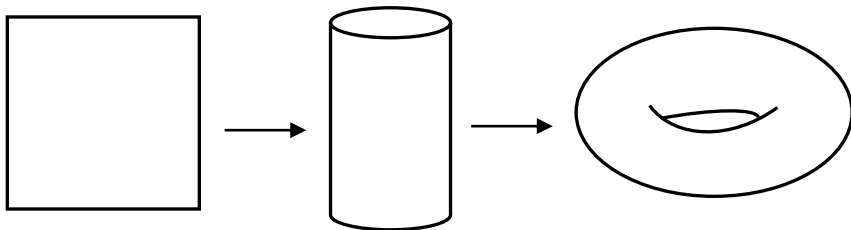
$\pi(x) = G_k$ olarak tanımlanan $\pi: X \rightarrow X/\beta$ fonksiyonu da bölüm fonksiyonudur. Bu durumda,

$$\tau = \{ A \subset X/\beta \mid \pi^{-1}(A) \text{ kümesi } X \text{ uzayında açıktır} \}$$

olarak tanımlanan τ ailesi X/β kümesi üzerinde topoloji oluşturur.

Bu topolojiye bölüm topolojisi denir. X/β kümesi bu topolojiyle birlikte düşünüldüğünde bir topolojik uzaydır ve X/β topolojik uzayına bölüm uzayı veya yörünge uzayı denir. Burada X/β bölüm uzayının elemanları G grubuna göre yörüngeler olduğundan, X/β yerine X/G notasyonu kullanılacaktır. Ayrıca, X/G geometrik olarak şu şekilde elde edilir. K, G grubu için bir temel bölge olsun. Temel bölge tanımından dolayı K kümesinin iki farklı iç noktası aynı yörüngede bulunamaz ama sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı yörüngede bulunabilir. Burada K kümesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse X/G uzayı elde edilir.

Örnek 2.3.3. Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 1$ ve $g(z) = z + i$ biçiminde tanımlanan iki ötelemenin ürettiği grup G olsun. Bu durumda, köşeleri $0, 1, i, 1 + i$ olan kare G grubu için bir temel bölgedir. Bu temel bölgenin aynı denklik sınıfında bulunan noktaları birleştirilirse bölüm uzayının tor yüzeyi olduğu görülür, Şekil 2.3.



Şekil 2.3 İki öteleme tarafından üretilen grubun bölüm uzayı

2.4. Üçgensel Gruplar

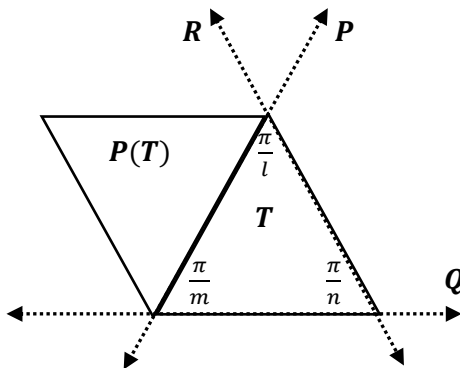
l, m, n 1'den büyük tam sayılar olmak üzere, iç açıları $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ olan bir T üçgenine (l, m, n) üçgeni denir. Bu üçgen; $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$ ise küre üzerindedir, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ise Öklid düzleminde ve $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ ise hiperbolik düzlemedir. Bu tez çalışmasında hiperbolik düzlemdeki üçgenler ele alınmayacaktır.

T , Öklid düzleminde bir (l, m, n) üçgeni ve bunun kenarları üzerindeki yansımalar P, Q, R olsun. T 'nin köşelerini sabit tutan $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ radyanlık döndürmeler sırasıyla A, B, C olsun. Bu döndürmeler,

$$A^l = B^m = C^n = ABC = 1 \quad (2.4.1)$$

bağıntılarını sağlar ve sonsuz bir $\Gamma[l, m, n]$ grubunu üretirler.

Şekil 2.4 te görüldüğü gibi T üçgeninin kenarları üzerindeki P, Q, R yansımaları $PQ = A, QR = B$ ve $RP = C$ olacak şekilde seçilebilir.



Şekil 2.4 Bir üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar

Böylece P, Q, R yansımaları

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^l = (QR)^m = (RP)^n = 1 \quad (2.4.2)$$

bağıntılarını sağlar ve sonsuz bir $\Gamma(l, m, n)$ grubunu üretirler. Bu grup genişletilmiş üçgensel grup olarak adlandırılır ve $\Gamma[l, m, n]$ grubu $\Gamma(l, m, n)$ grubunun indeksi 2 olan bir alt grubudur.

$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ olduğundan l, m ve n 'nin alabileceği değerler Çizelge 2.1 de verilmiştir.

Çizelge 2.1 l, m ve n 'nin alabileceği değerler

l	m	n
2	4	4
4	2	4
4	4	2
3	3	3
2	3	6
2	6	3
3	2	6
6	2	3
3	6	2
6	3	2

l, m ve n nin farklı permütasyonlarından elde edilen üçgensel gruplar izomorf olduğu için Öklid düzleminde sadece $\Gamma[2, 4, 4]$, $\Gamma[2, 3, 6]$, $\Gamma[3, 3, 3]$ üçgensel ve $\Gamma(2, 4, 4)$, $\Gamma(2, 3, 6)$, $\Gamma(3, 3, 3)$ genişletilmiş üçgensel gruplarını ele almak yeterlidir.

$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$ ise (l, m, n) üçgeni küre üzerindedir ve bu durumda aşağıdaki üçgensel gruplar elde edilir:

$\Gamma[2, 3, 3]$, $\Gamma[2, 3, 4]$, $\Gamma[2, 3, 5]$, $\Gamma(2, 3, 3)$, $\Gamma(2, 3, 4)$, $\Gamma(2, 3, 5)$. Bu gruplar sonludur ve

$$\Gamma[2, 3, 3] \cong A_4, \Gamma[2, 3, 4] \cong S_4, \Gamma[2, 3, 5] \cong A_5,$$

$$\Gamma(2, 3, 3) \cong \mathbb{Z}_2 \times A_4, \Gamma(2, 3, 4) \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4, \Gamma(2, 3, 5) \cong \mathbb{Z}_2 \times A_5$$

olduğu bilinmektedir.

2.5. Düzgün Figürler

Tanım 2.5.1. X bir yüzey olmak üzere, sonlu ve bağlantılı bir \mathcal{G} çizgesinin X yüzeyine gömülmesine X üzerinde bir figür denir. Burada, $S \setminus \mathcal{G}$ açık disklerden oluşur ve bu disklerin her birine figürün yüzü denir. \mathcal{G} çizgesinin kenar ve köşelerine de sırasıyla figürün kenarı ve köşeleri denir.

Tanım 2.5.2. \mathcal{M} , bir X yüzeyi üzerinde bulunan bir figür olsun. X yüzeyinin, $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ şartını sağlayan bir f otomorfizmasına \mathcal{M} figürünün bir otomorfizması denir. O halde bir figürün bir otomorfizması köşeleri köşelere, kenarları kenarlara ve yüzleri yüzlere götürür.

Tanım 2.5.3. \mathcal{M} , bir X yüzeyi üzerinde bulunan bir figür olsun. Eğer $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu yönlü kenarlar üzerinde geçişli ise \mathcal{M} figürüne bir düzgün figür denir. Dolayısıyla bir düzgün figürün yüzleri düzgün ve eş çokgenlerden oluşur.

Tanım 2.5.4. \mathcal{M} , bir düzgün figür olsun. \mathcal{M} figürünün her bir köşesinin derecesi m ve her bir yüzünün kenar sayısı n ise \mathcal{M} figürünün tipi $\{m, n\}$ dir denir.

\mathcal{M} , cinsi g ve tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür olsun. Ayrıca, bu figürün yüz, köşe ve kenar sayıları sırasıyla $\|F\|$, $\|V\|$ ve $\|E\|$ olsun. Bu durumda, Euler-Poincaré formülü olarak bilinen

$$\|F\| + \|V\| - \|E\| = 2 - 2g$$

eşitliği geçerlidir.

\mathcal{M} bir X yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür ve F , \mathcal{M} figürünün yüzü olsun. F yüzünün merkezi, kendisine komşu olan kenarlarının orta noktalarına ve köşelere geodezik doğru parçalarıyla birleştirilsin. Böylece F , $2n$ tane S yüzeyi ise $|Aut^\pm \mathcal{M}|$ tane üçgene bölünmüş olur. Bu üçgenlerin her birinin iç açıları $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ radyandır. Dolayısıyla bunlar $(2, m, n)$ üçgenleridir.

Eğer \mathcal{M} figürü küre üzerinde ise $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} > \pi$ olur ve dolayısıyla $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği çözülerek Platonik cisimlere karşılık gelen aşağıdaki düzgün figürler bulunur:

$\{3,3\}$ → Düzgün Dörtüzlü (Tetrahedron)

$\{3,4\}$ → Küp (Hexahedron)

$\{3,5\}$ → Düzgün On İki Yüzlü (Dodecahedron)

$\{4,3\}$ → Düzgün Sekiz Yüzlü (Octahedron)

$\{5,3\}$ → Düzgün Yirmi Yüzlü (Icosahedron).

Benzer şekilde, cinsi 1 olan $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürler $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ eşitliği çözülerek bulunur ve bunlar, tipleri $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ olan figürlerdir.

Cinsi 1'den büyük olan $\{m, n\}$ tipindeki düzgün figürler hiperbolik düzlemdir ve $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ eşitsizliği çözülerek bulunur. Ancak bu tür düzgün figürler bu tez çalışmasında yer almayacaktır.

3. DÜZGÜN HİPERFİGÜRLER

Tanım 3.1. X kompakt ve yönlendirilebilir bir yüzey olsun. S ve A X 'in kapalı alt kümeleri olmak üzere, X üzerinde bir topolojik hiperfigür aşağıdaki şartları sağlayan ve \mathcal{H} notasyonu ile gösterilen bir (X, S, A) üçlüsüdür:

- (i) $B = S \cap A$ boştan farklı ve sonlu bir kümedir,
- (ii) $S \cup A$ bağlantılıdır,
- (iii) S 'nin ve A 'nın her bir bileşeni bir kapalı diske homeomorftur,
- (iv) $X \setminus (S \cup A)$ kümesinin her bir bileşeni bir açık diske homeomorftur.

S kümesinin bileşenleri hiperköşeler, A kümesinin bileşenleri hiperkenarlar ve $X \setminus (S \cup A)$ kümesinin bileşenleri hiperyüzler olarak adlandırılır. $B = S \cap A$ kümesinin elemanlarına ise ortak köşeler denir. \mathcal{H} hiperfigürünün cinsi X yüzeyinin cinsidir. Örneğin Şekilde 3.1 verilen altıgenin karşılıklı kenarları birleştirilirse bir tor yüzeyi elde edilir. Bu tor yüzeyi üzerinde 3 hiperköşesi, 3 hiperkenarı ve 3 hiperyüzü olan bir \mathcal{H} hiperfigürü görülmektedir.



Şekil 3.1 Tor yüzeyi üzerinde tipi (3, 3, 3) olan bir hiperfigür

Kompakt olmayan bir X yüzeyi üzerindeki bir hiperfigür tanımı ilk tanımdakine benzer şekilde verilir. Sadece (i) yerine şunlar gelmelidir:

- (i_1) Her hiperköşe ve hiperkenar sonlu sayıda ortak köşe içerir,
- (i_2) Bir hiperyüzün kapanışı sonlu sayıda ortak köşe içerir.

Hiperköşeler, hiperkenarlar ve hiperyüzler köşeleri ortak köşeler olan çokgenlerdir. Hiperyüzün kenarları ise S ve A kümelerinin sınırları tarafından içerilen yaylardır. Herhangi iki hiperköşe veya hiperkenar kesişmeyeceği için bir hiperyüz olan bir çokgenin ardışık iki kenarı ∂S ve ∂A kümeleri tarafından içerilmelidir. Dolayısıyla buradan şu sonuç elde edilir:

Teorem 3.1. Her hiperyüz çift sayıda kenarı olan bir çokgendir.

3.1. Cebirsel Hiperfigür

Tanım 3.1.1. \mathcal{H} bir topolojik hiperfigür ve \mathcal{H} 'nin ortak köşelerinin kümesi B olsun. σ ve α B 'nin sırasıyla hiperköşe ve hiperkenarların pozitif yönde döndürülmelerine karşılık gelen permütasyonlar olsun. Örneğin Şekil 3.1 de

$$\sigma = (345)(681)(279)$$

$$\alpha = (123)(467)(895) \text{ ve}$$

$$\sigma\alpha = (175)(248)(369)$$

dir.

Burada σ ve α permütasyonlarının devirleri ile hiperköşe ve hiperkenarlar arasında birebir bir eşleme vardır öyle ki devirlerin uzunluğu bunlara karşılık gelen hiperköşe ve hiperkenar çokgenin kenar sayısına eşittir. $\sigma\alpha$ permütasyonunun her bir deviri ise bir hiperyüze karşılık gelir.

Tanım 3.1.2. B bir küme, σ ve α B 'nin iki permütasyonu ve $G = \langle \sigma, \alpha \rangle$ grubunun B kümesine etkisi geçişli olmak üzere,

$$\mathcal{A} = (G, B, \sigma, \alpha)$$

dörtlüsüne bir cebirsel hiperfigür denir. Eğer σ , α , $\sigma\alpha$ elemanlarının mertebeleri sırasıyla l, m, n ise \mathcal{A} cebirsel hiperfigürünün tipi (l, m, n) dir denir.

Bir \mathcal{H} topolojik hiperfigürü verildiğinde buna karşılık gelen bir cebirsel figürünü yukarıda açıklandığı gibi oluşturabiliriz.

$z(\delta)$ bir δ permütasyonundaki devirlerin sayısı olmak üzere, bir cebirsel figürün cinsi aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanır:

$$z(\sigma) + z(\alpha) + z(\sigma\alpha) = |B| + 2 - 2g.$$

3.2. Düzgün Hiperfigürlerin Otomorfizmaları

Tanım 3.2.1. $\mathcal{A}_i = (G_i, B_i, \sigma, \alpha)$ ($i = 1, 2$) iki cebirsel hiperfigür olsun. Bu durumda $f: B_1 \rightarrow B_2$ ve $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlayan $(f, \Phi): \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ dönüşüm ikilisine \mathcal{A}_1 ve \mathcal{A}_2 cebirsel hiperfigürleri arasında bir izomorfizma denir:

(i) f birebir örtendir,

(ii) Φ fonksiyonu $\sigma_1 \Phi = \sigma_2$, $\alpha_1 \Phi = \alpha_2$ özelliklerini sağlayan bir grup izomorfizmasıdır.

(iii) Aşağıda verilen diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 B_1 \times G_1 & \longrightarrow & B_1 \\
 \downarrow f & & \downarrow \Phi \\
 B_2 \times G_2 & \longrightarrow & B_2
 \end{array}$$

Eğer $B_1 = B_2 = B$ ve $G_1 = G_2 = G$ ise ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ olmak üzere) (f, Φ) dönüşüm ikilisine $\mathcal{A} = (G, B, \sigma, \alpha)$ cebirsel hiperfigürünün bir otomorfizması denir.

\mathcal{A} 'nın bütün otomorfizmaları bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $Aut(\mathcal{A})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. Eğer $Aut(\mathcal{A})$ grubunun B kümesine etkisi geçişli ise $\mathcal{A} = (G, B, \sigma, \alpha)$ cebirsel hiperfigürü düzgündür denir.

3.3. Bölüm Hiperfigürü

$\mathcal{A} = (G, B, \sigma, \alpha)$ bir cebirsel hiperfigür ve $P < Aut(\mathcal{A})$ olsun. Her $b \in B$ için $[b]_P$ b 'nin yörüngesini gösterebilir ve her $g \in G$ için $[b]_P g = [bg]_P$ olarak tanımlansın. Grup etkisinin çekirdeği K olmak üzere \mathcal{A}/P bölüm hiperfigürü

$$\mathcal{A}/P = (G/K, B/P, K\sigma, K\alpha)$$

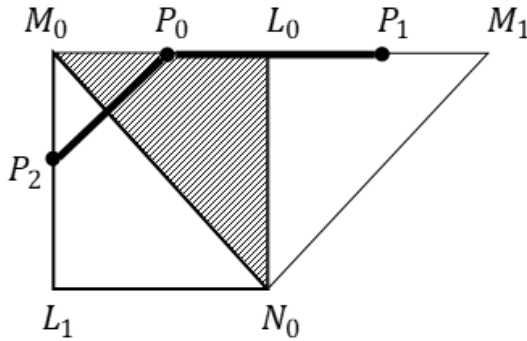
olarak tanımlanır.

Teorem 3.2. Tipi (l, m, n) olan her \mathcal{A} cebirsel hiperfigürü $\hat{\mathcal{A}}/P$ bölüm hiperfigürüne izomorftur.

3.4. Evrensel Topolojik Hiperfigürler

(l, m, n) tipindeki her topolojik hiperfigür bir evrensel hiperfigürünün bölüm hiperfigürü olarak ele alınabilir. Tipi (l, m, n) olan evrensel topolojik hiperfigür; eğer $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$ ise küre üzerinde, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ise Öklid düzleminde, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ ise hiperbolik düzlem üzerinde bulunur. Bu çalışmada küre ve Öklid düzleminde bulunan hiperfigürler ele alınacağı için $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ durumu dikkate alınmayacaktır.

U Öklid düzlemi veya küre olmak üzere, T U üzerinde bulunan, köşeleri L_0, M_0, N_0 ve iç açıları $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ olan bir üçgen olsun. U'nun; T üçgeni ve bunun kenarları üzerindeki yansımalar tarafından üretilen grubun elemanları altında T 'nin görüntülerinden oluşan kaplaması göz önüne alınsın. T 'nin her bir görüntüsü yine bir (l, m, n) üçgenidir. Bu kaplamada L_0 köşesinin görüntüleri L_i , M_0 köşesinin görüntüleri M_i ve N_0 köşesinin görüntüleri de N_i olarak isimlendirilecektir. Dolayısıyla kaplamadaki L_i, M_i ve N_i köşelerinin dereceleri sırasıyla $2l, 2m$ ve $2n$ olacaktır. Eğer T üçgeni L_0N_0 ve M_0N_0 kenarları üzerinde yansıtılırsa Şekil 3.2 de görüldüğü gibi $L_1M_0N_0$ ve $L_0M_1N_0$ üçgenleri elde edilir.

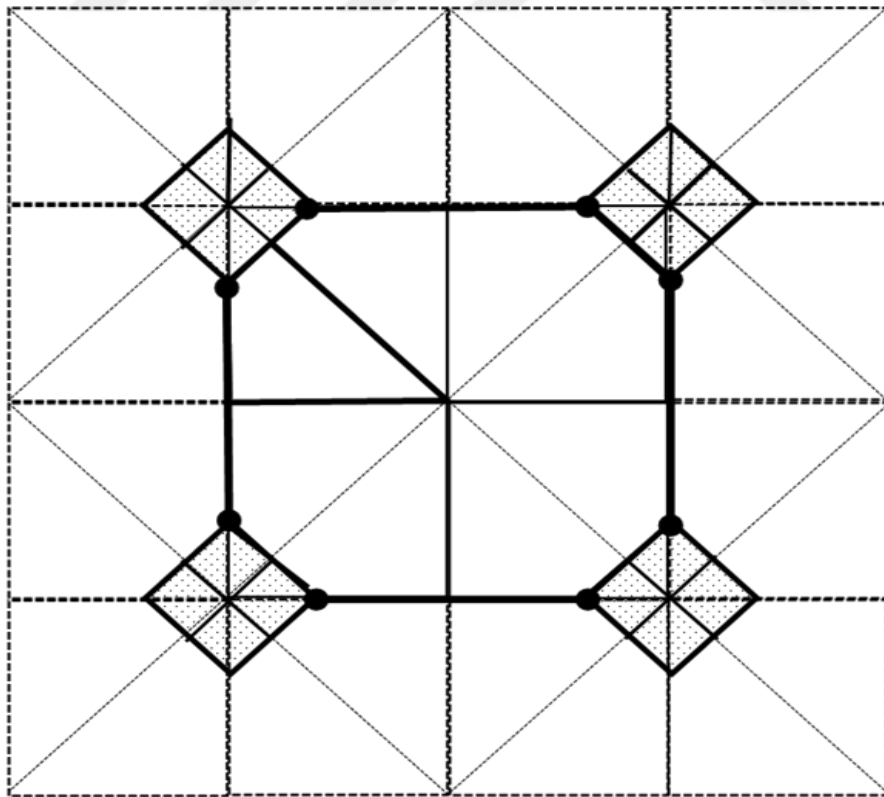


Şekil 3.2 Bir üçgensel kaplamadan hiperfigürün oluşturulması

T üçgeninin L_0M_0 kenarı üzerinde bir P_0 noktası verilsin. Bunun, sırasıyla L_0M_0 ve M_0N_0 kenarları üzerindeki yansımaları olan P_1 ve P_2 noktaları göz önüne alınsın. Eğer $l = 2$ ise P_0, L_0, P_1 noktaları doğrusaldır. Aksi halde, $\frac{\pi}{l}$ radyan olan L_0 köşesindeki açı $\frac{\pi}{2}$ den küçüktür ve P_0P_1 ve L_0N_0 kenarları dik kesişir.

Bu işleme devam edilirse merkezi L_0 olan l kenarlı çokgen elde edilir. Benzer şekilde, merkezi M_0 olan m kenarlı çokgen elde edilir.

Eğer $l = 2$ veya $m = 2$ ise l veya m kenarlı çokgenler doğru parçalarına dönüşür ve bunlarda 2 kenarlı çokgenler olarak düşünülebilir. Bu işlem kaplamadaki tüm üçgenlere uygulanırsa (U, \hat{S}, \hat{A}) hiperfigürü elde edilir. Burada \hat{S} ve \hat{A} sırasıyla l ve m kenarlı çokgenlerden oluşur. U üzerinde $\hat{S} \cup \hat{A}$ 'nın tümleyeni $2n$ kenarlı çokgenlerden oluşur ve bunlar hiperyüzlerdir. Bu şekilde elde edilen hiperfigür $\hat{\mathcal{H}}(l, m, n)$ notasyonu ile gösterilecektir. Bu da (l, m, n) tipindeki evrensel topolojik hiperfigürdür. Böylece $\hat{\mathcal{H}}(l, m, n)$ düzgün hiperfigürünün hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzleri ile U yüzeyinin l, m ve $2n$ kenarlı çokgenlerle bir kaplaması elde edilmiş olur. U yüzeyi üzerinde bir $\hat{\mathcal{H}}(l, m, n)$ düzgün hiperfigürü verilmiş olsun. Bu hiperfigürün komşu hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzlerinin merkezleri geodezik doğru parçaları ile birleştirilirse U yüzeyinin (l, m, n) üçgenlerinden oluşan bir kaplaması elde edilir. Örneğin Şekil 3.3'te Öklid düzleminin $(2, 4, 4)$ üçgenleri ile kaplaması ve $\hat{\mathcal{H}}(2, 4, 4)$ düzgün hiperfigürü görülmektedir.



Şekil 3.3 Öklid düzleminin $(2, 4, 4)$ üçgenleri ile kaplaması

3.5. Küre Üzerinde Düzgün Hiperfigürler

Küre üzerindeki düzgün hiperfigürler, kürenin düzgün ve yarı düzgün kaplamalarına karşılık gelir. Bunlar ise Platonik cisimler ile Arşimet cisimlerinin bazılarını verir. Bu cisimler herhangi bir köşesine komşu olan yüzlerin kenar sayılarının saatin ters yönünde listelenmesiyle elde edilen sonlu dizi yardımıyla sınıflandırılır. Örneğin kesik küp ve kesik düzgün dörtyüzlüye karşılık gelen diziler sırasıyla 4.8.8 ve 3.6.6 dır.

$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$ şartının sağlanması durumunda tipi (l, m, n) olan hiperfigürler küre üzerinde bulunur ve bunlar Çizelge 3.1 de verilmiştir:

Çizelge 3.1 Küre üzerindeki düzgün hiperfigürler

HİPERFİGÜR	ARŞİMET CİSMİ
$\mathcal{H}(2, 3, 3)$	Kesik dört yüzlü
$\mathcal{H}(3, 3, 2)$	Küp sekiz yüzlü
$\mathcal{H}(2, 3, 4)$	Kesik küp
$\mathcal{H}(3, 4, 2)$	Küçük rombi küp sekiz yüzlü
$\mathcal{H}(2, 4, 3)$	Kesik sekiz yüzlü
$\mathcal{H}(2, 3, 5)$	Kesik oniki yüzlü
$\mathcal{H}(2, 5, 3)$	Kesik yirmi yüzlü
$\mathcal{H}(3, 5, 2)$	Küçük rombi birleşik on iki ve yirmi yüzlü

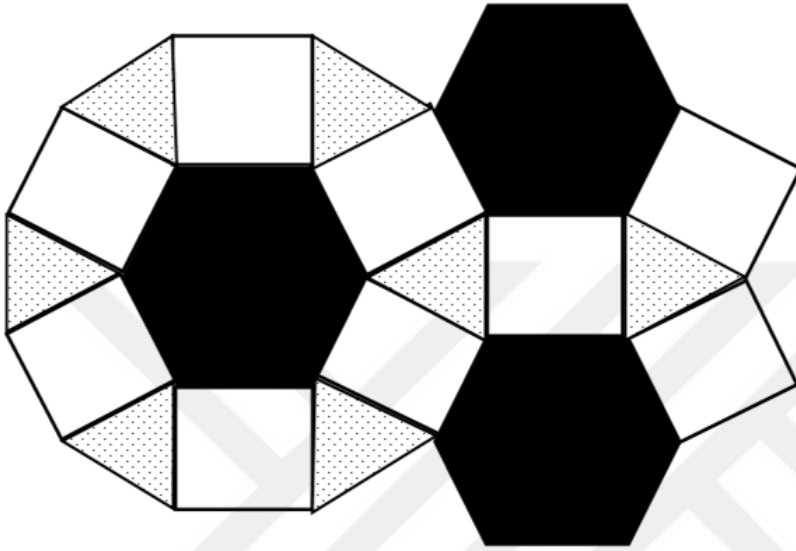
3.6. Tor Yüzeyleri Üzerinde Düzgün Hiperfigürler

$\mathcal{H}(l, m, n)$ bir tor yüzeyi üzerinde bir düzgün hiperfigür olsun. Teorem 3.2. gereğince $\mathcal{H}(l, m, n)$ hiperfigürü bir $\widehat{\mathcal{H}}(l, m, n)/P$ bölüm hiperfigürüne izomorftur. Burada $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ denkleminin çözümüne karşılık gelen $\widehat{\mathcal{H}}(l, m, n)$ evrensel hiperfigürleri Çizelge 3.2 de verilmiştir.

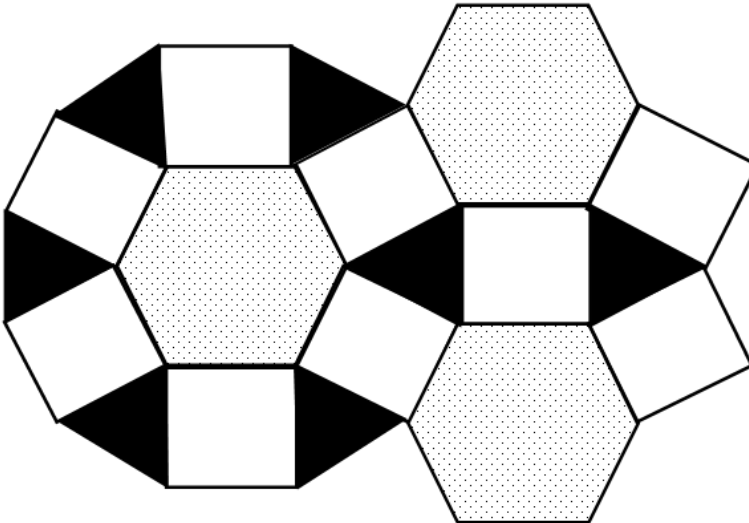
Çizelge 3.2 Öklid düzlemindeki düzgün hiperfigürler

HİPERFİGÜR
$\widehat{\mathcal{H}}(4,4,2)$
$\widehat{\mathcal{H}}(2,4,4)$
$\widehat{\mathcal{H}}(3,3,3)$
$\widehat{\mathcal{H}}(2,3,6)$
$\widehat{\mathcal{H}}(2,6,3)$
$\widehat{\mathcal{H}}(6,3,2)$

NOT 3. 6. (l, m, n) tipindeki bir hiperfigürün hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzleri sırasıyla l , m ve $2n$ kenarlı çokgenlerden oluşur. (m, l, n) tipindeki bir hiperfigürün ise hiperyüzleri yine $2n$ kenarlı çokgenlerdir. Ama hiperköşe ve hiperkenarları sırasıyla m ve l kenarlı çokgenlerdir. Bunların otomorfizma grupları izomorftur. Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 te sırasıyla $(6,3,2)$ ve $(3,6,2)$ tipinde hiperfigürler verilmiştir.



Şekil 3.4 Tipi (6, 3, 2) olan bir hiperfigür



Şekil 3.5 Tipi (3, 6, 2) olan bir hiperfigür

4. YARI PLATONİK TOR YÜZEYLERİ VE DÜZGÜN HİPERFİGÜR AİLELERİ

4.1. Tipi (3, 3, 3) olan Düzgün Hiperfigür Ailesi

T , karmaşık düzlemde (\mathbb{C}) köşeleri $0, 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ olan üçgen olsun. Bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar, $u = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ olmak üzere,

$$a(z) = \bar{z}, \quad b(z) = u\bar{z} \quad \text{ve} \quad c(z) = \bar{u}(\bar{z} - 1) + 1$$

ile verilen fonksiyonlardır. Bu üç yansıma bileşke işlemine göre bir U grubunu üretir ve aşağıdaki bağıntıları sağlar:

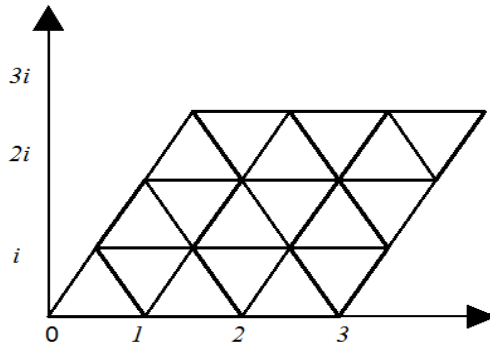
$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = 1.$$

Aşağıda verilen t_{11} ve $t_{12}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ötelemeleri de U grubunun bir G_1 alt grubunu üretir:

$$t_{11}(z) = (ac)^2(cb)^2(ba)^2(z) = z + 3,$$

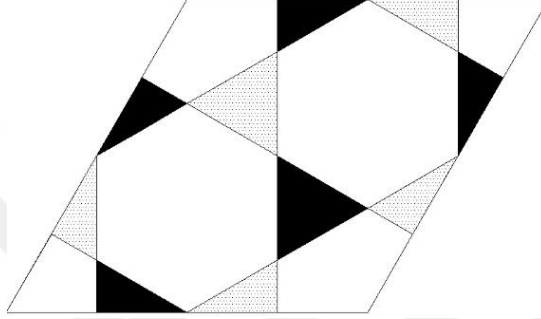
$$t_{12}(z) = (bc)^2(ca)^2(ab)^2(z) = z + 3v.$$

Burada $v = e^{\frac{\pi}{3}i}$ dir. t_{11} ve t_{12} ötelemeler oldukları için \mathbb{C}/G_1 bir tor yüzeyini verir. Bu tor yüzeyini T_1 ile gösterelim. Şekil 4.1 de verilen ve köşeleri $0, 3, 3v$ ve $3 + 3v$ olan eşkenar dörtgen G_1 grubu için bir temel bölgedir. Şekil 4.1 de görüldüğü gibi, $T_1 = \mathbb{C}/G_1$ yüzeyi her biri T üçgenine eş olan 18 eşkenar üçgene bölünmüştür.



Şekil 4.1 G_1 grubu için bir temel bölge

(Corn ve Singerman, 1988) de açıklandığı gibi, T_1 üzerinde tipi $(3,3,3)$ olan ve 3 hiperköşe, 3 hiperkenar ve 3 hiperyüzü bulunan bir \mathcal{H}_1 düzgün hiperfigürü mevcuttur, Şekil 4.2. Dolayısıyla T_1 yarı Platonik bir tor yüzeyidir.



Şekil 4.2 T_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_1 hiperfigürü

Eğer \mathcal{H}_1 hiperfigürünün komşu hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzlerinin merkezleri geodezik doğru parçalarıyla birleştirilirse, yukarıda bahsedilen 18 eşkenar üçgen tekrar elde edilir. Bu üçgenlerden herhangi birinin kenarları üzerindeki yansımalar \mathcal{H}_1 hiperfigürünün tüm otomorfizmalarından oluşan grubu yani $Aut(\mathcal{H}_1)$ grubunu üretir. Bu grup

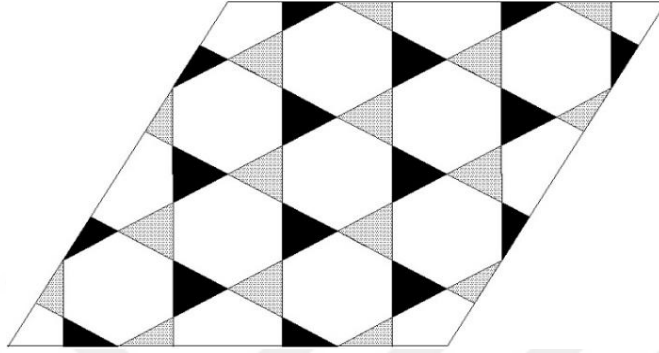
$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = (ab)^2(bc)^2(ca)^2 = 1 \rangle$$

olarak ifade edilebilir ve mertebesi 18 dir.

Benzer şekilde aşağıda verilen t_{21} ve $t_{22}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ötelemeleri de U grubunun bir G_2 alt grubunu üretir:

$$t_{21}(z) = t_{11}(t_{11}(z)) = z + 6, \quad t_{22}(z) = t_{12}(t_{12}(z)) = z + 6v.$$

Şekil 4. 3 de verilen ve köşeleri $0, 6, 6v$ ve $6 + 6v$ olan eşkenar dörtgen G_2 grubu için bir temel bölgedir ve $T_2 = \mathbb{C}/G_2$ bir tor yüzeyidir. Ayrıca G_2 grubunun temel bölgesinin alanı G_1 grubunun temel bölgesinin alanının 4 katı olduğu için, T_2 üzerinde 12 hiperköşe, 12 hiperkenar ve 12 hiperyüzü bulunan bir \mathcal{H}_2 düzgün hiperfigürünün mevcut olduğu görülür, Şekil 4.3.



Şekil 4.3 T_2 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_2 hiperfigürü

\mathcal{H}_2 in tüm otomorfizmalarından oluşan grup

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = ((ab)^2(bc)^2(ca)^2)^2 = 1 \rangle$$

biçimindedir ve mertebesi 72 dir.

Bu şekilde devam edilirse, her k pozitif tamsayısı için, U grubunun

$$t_{k1}(z) = t_{11}^k(z) = z + 3k \text{ ve } t_{k2}(z) = t_{12}^k(z) = z + 3kv$$

ötelemeleri tarafından üretilen G_k alt grubu elde edilir. Bu durumda $T_k = \mathbb{C}/G_k$ tor yüzeyi üzerinde, \mathcal{H}_k ile gösterilen ve $3k^2$ hiperköşe, $3k^2$ hiperkenar ve $3k^2$ hiperyüzü bulunan bir düzgün hiperfigür mevcuttur.

\mathcal{H}_k düzgün hiperfigürünün tüm otomorfizmalarından oluşan grup ($Aut(\mathcal{H}_k)$)

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = ((ab)^2(bc)^2(ca)^2)^k = 1 \rangle$$

biçimindedir ve mertebesi $18k^2$ dir.

Çizelge 4.1 de k nin alacağı ilk 10 değere karşılık gelen düzgün hiperfigürler ve bunlara ait bazı detaylar verilmektedir. Çizelgede $|V_{\mathcal{H}_k}|$, $|E_{\mathcal{H}_k}|$, $|F_{\mathcal{H}_k}|$, ve $|Aut(\mathcal{H}_k)|$ sırasıyla \mathcal{H}_k hiperfigürünün hiperköşe, hiperkenar, hiperyüz sayılarını ve tüm otomorfizmalarından oluşan grubun mertebesini göstermektedir.

Çizelge 4.1 Tipi (3,3,3) olan düzgün hiperfigürler ailesi

k	\mathcal{H}_k	$ V_{\mathcal{H}_k} $	$ E_{\mathcal{H}_k} $	$ F_{\mathcal{H}_k} $	$ Aut(\mathcal{H}_k) $
1	\mathcal{H}_1	3	3	3	18
2	\mathcal{H}_2	12	12	12	72
3	\mathcal{H}_3	27	27	27	162
4	\mathcal{H}_4	48	48	48	288
5	\mathcal{H}_5	75	75	75	450
6	\mathcal{H}_6	108	108	108	648
7	\mathcal{H}_7	147	147	147	882
8	\mathcal{H}_8	192	192	192	1152
9	\mathcal{H}_9	243	243	243	1458
10	\mathcal{H}_{10}	300	300	300	1800

Yukarıda bahsedilen ve her k pozitif tamsayısı için \mathcal{H}_k hiperfigürünün mertebesi k olan $(ab)^2(bc)^2(ca)^2$ otomorfizması, (Melekoğlu, 2018) tarafından tanımlanmış ve dönel otomorfizma olarak adlandırılmıştır. Tipi (l, m, n) olan bir düzgün hiperfigürün dönel otomorfizmaları; l, m ve n nin tek veya çift olma durumlarına göre; 1, 2 veya 3 eşlenik sınıfına ayrılırlar, (Melekoğlu, 2018). $l = m = n = 3$ olduğu için bu kısımdaki her bir düzgün hiperfigürün tüm dönel otomorfizmaları eşleniktir.

Dönel otomorfizmalar yardımıyla bazı düzgün figürlerin otomorfizma gruplarının ifade edilebileceği (Melekoğlu ve Singerman, 2016) da gösterilmiştir. Benzer çalışmalar (Conder ve Melekoğlu, 2017) de Hurwitz yüzeyleri üzerindeki düzgün figürler için yapılmıştır.

Tipi $(3,3,3)$ olan bir düzgün hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan grubun

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = 1 \rangle$$

şeklinde olacağı aşikardır. Ancak bu grup sonlu olmadığı için, bir tor yüzeyi üzerindeki bir düzgün hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan gruba izomorf olamaz. Bu nedenle yukarıdaki ifadedeki bağıntılar, Öklid düzleminde tipi $(3,3,3)$ olan bir düzgün hiperfigürün tüm otomorfizmalarından oluşan grubu verir.

Bu kısımda her k pozitif tamsayısı için elde edilen \mathcal{H}_k hiperfigürü için $Aut(\mathcal{H}_k)$ grubu

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = ((ab)^2(bc)^2(ca)^2)^k = 1 \rangle$$

olarak bulunur. Buradaki $((ab)^2(bc)^2(ca)^2)^k = 1$ bağıntısının bir dönel otomorfizmadan elde edildiği açıktır. Bundan sonraki kısımlarda da görüleceği gibi, dönel otomorfizmalar kullanılarak bazı düzgün hiperfigürlerin de otomorfizma grupları ifade edilebilmektedir.

4.2 Tipi (2, 3, 6) olan Düzgün Hiperfigür Ailesi

T , karmaşık düzlemde (\mathbb{C}) köşeleri 0 , $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ olan üçgen olsun. Bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar, $u = e^{\frac{\pi}{3}i}$ olmak üzere,

$$a(z) = \bar{z}, \quad b(z) = -\bar{z} + 1 \quad \text{ve} \quad c(z) = u\bar{z}$$

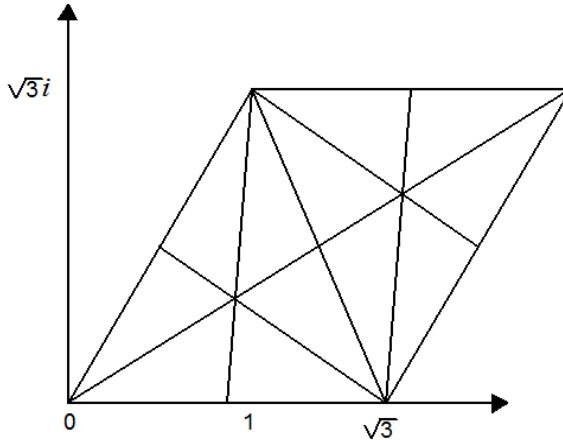
olarak verilen fonksiyonlardır. Bu üç yansıma bileşke işlemine göre bir U grubunu üretir ve aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^6 = 1.$$

Aşağıda verilen t_{11} ve $t_{12}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ötelemeleri de U grubunun bir G_1 alt grubunu üretir:

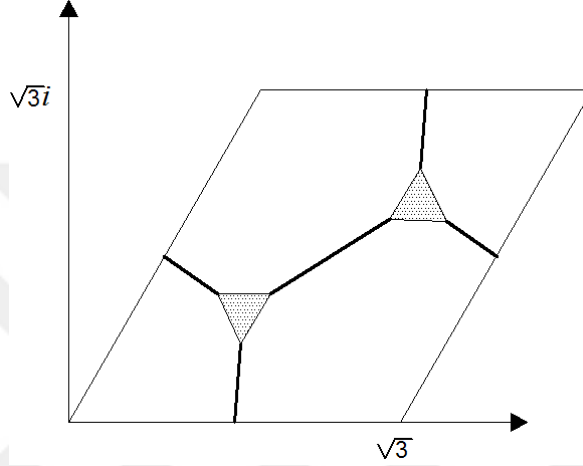
$$t_{11}(z) = bcacac(z) = z + \sqrt{3}, \quad t_{12}(z) = cbcaca = z + 2v.$$

Burada $v = e^{\frac{\pi}{3}i}$ dir. t_{11} ve t_{12} ötelemeler oldukları için \mathbb{C}/G_1 bir tor yüzeyidir. Bu tor yüzeyini T_1 ile gösterelim. Şekil 4.4 de verilen ve köşeleri 0 , $\sqrt{3}$, $2v$ ve $\sqrt{3}+2v$ olan eşkenar dörtgen G_1 grubu için bir temel bölgedir. Şekil 4.4 te görüldüğü gibi, $T_1 = \mathbb{C}/G_1$ yüzeyi her biri T üçgenine eş olan 12 üçgene bölünmüştür.



Şekil 4.4 G_1 grubu için bir temel bölge

Bir önceki kısımda olduğu gibi, T_1 üzerinde tipi $(2, 3, 6)$ olan ve 2 hiperköşe, 2 hiperkenar ve 1 hiperyüzü bulunan bir \mathcal{H}_1 düzgün hiperfigürü vardır, Şekil 4.5.



Şekil 4.5 T_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_1 hiperfigürü

Eğer \mathcal{H}_1 hiperfigürünün komşu hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzlerinin merkezleri geodezik doğru parçalarıyla birleştirilirse, yukarıda bahsedilen 12 üçgen tekrar elde edilir. Bu üçgenlerden herhangi birinin kenarları üzerindeki yansımalar $Aut(\mathcal{H}_1)$ grubunu (\mathcal{H}_1 hiperfigürünün tüm otomorfizmalarından oluşan grubu) üretir. Bu grup

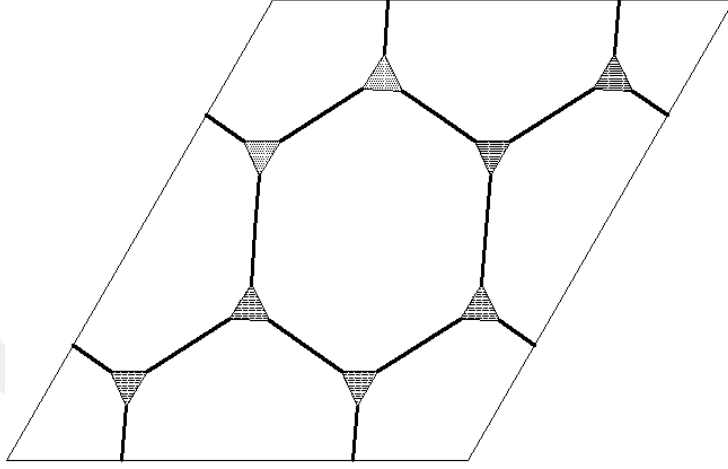
$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^6 = bcacac = 1 \rangle$$

biçimindedir ve mertebesi 12 dir.

Benzer şekilde aşağıda verilen t_{21} ve $t_{22}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ötelemeleri de U grubunun bir G_2 alt grubunu üretir:

$$t_{21}(z) = t_{11}(t_{11}(z)) = z + 2\sqrt{3}, t_{22}(z) = t_{12}(t_{12}(z)) = z + 4v.$$

Şekil 4. 6 da verilen ve köşeleri $0, 2\sqrt{3}, 4v$ ve $2\sqrt{3}+4v$ olan eşkenar dörtgen G_2 grubu için bir temel bölgedir ve $T_2 = \mathbb{C}/G_2$ bir tor yüzeyidir. Ayrıca G_2 grubunun temel bölgesinin alanı G_1 grubunun temel bölgesinin alanının 4 katı olduğu için, T_2 üzerinde 8 hiperköşe, 8 hiperkenar ve 4 hiperyüzü bulunan bir \mathcal{H}_2 düzgün hiperfigürünün mevcut olduğu kolayca görülür, Şekil 4.6.



Şekil 4.6 T_2 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_2 hiperfigürü

$Aut(\mathcal{H}_2)$ grubu,

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^6 = (bcacac)^2 = 1 \rangle$$

biçimindedir ve mertebesi 48 dir.

Daha önce olduğu gibi genelleştirme yapılırsa, her k pozitif tamsayısı için, U grubunun

$$t_{k1}(z) = t_{11}^k(z) = z + k\sqrt{3} \text{ ve } t_{k2}(z) = t_{12}^k(z) = z + 2kv$$

ötelemeleri tarafından üretilen G_k alt grubu elde edilir. Bu durumda $T_k = \mathbb{C}/G_k$ tor yüzeyi üzerinde, \mathcal{H}_k ile gösterilen ve $2k^2$ hiperköşe, $2k^2$ hiperkenar ve k^2 hiperyüzü bulunan bir düzgün hiperfigür mevcuttur. Üzerinde bir düzgün hiperfigür bulundurduğu için T_k yarı Platonik bir tor yüzeyidir.

Mertebesi $12k^2$ olan $Aut(\mathcal{H}_k)$ grubu

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^6 = (bcacac)^k = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilebilir.

Çizelge 4.2 de k nin alacağı ilk 10 değere karşılık gelen düzgün hiperfigürler ve bunlara ait bazı detaylar verilmektedir. Burada kullanılan notasyonlar bir önceki çizelgedekilerle aynıdır.

Çizelge 4.2 Tipi (2,3,6) olan düzgün hiperfigürler ailesi

k	\mathcal{H}_k	$ V_{\mathcal{H}_k} $	$ E_{\mathcal{H}_k} $	$ F_{\mathcal{H}_k} $	$ Aut(\mathcal{H}_k) $
1	\mathcal{H}_1	2	2	1	12
2	\mathcal{H}_2	8	8	4	48
3	\mathcal{H}_3	18	18	9	108
4	\mathcal{H}_4	32	32	16	192
5	\mathcal{H}_5	50	50	25	300
6	\mathcal{H}_6	72	72	36	432
7	\mathcal{H}_7	98	98	49	588
8	\mathcal{H}_8	128	128	64	768
9	\mathcal{H}_9	162	162	81	972
10	\mathcal{H}_{10}	200	200	100	1200

Bu kısımda karşılaşılan ve her k pozitif tamsayısı için \mathcal{H}_k hiperfigürünün mertebesi k olan $bcacac$ otomorfizması, (Melekoğlu ve Singerman, 2016) tanımlanmış ve dönele otomorfizma olarak adlandırılmıştır. Aynı makaledeki sonuçlar gereğince bu kısımdaki düzgün hiperfigürlerin dönele otomorfizmaları iki eşlenik sınıfına ayrılırlar. Bu sınıflardan biri için $bcacac$ otomorfizması temsilci olarak alınabilir. (Melekoğlu ve Singerman, 2016) da verilen sonuçlar yardımıyla, diğer eşlenik sınıfının temsilcisi olarak $bcacb(ac)^2a$ otomorfizmasının alınabileceği görülmektedir. Benzer şekilde bu temsilci kullanılarak, düzlemde ötelemeler ve bunların ürettiği grupların bölüm uzayları olan tor yüzeyleri üzerinde yukarıda olduğu gibi sonsuz düzgün hiperfigür ailesi tanımlanabilir.

Bu kısımda, $(2,3,6)$ üçgenel grubunun normal alt grubu olan ve iki öteleme tarafından üretilen gruplar ve bunların bölüm uzayı olan yarı Platonik tor yüzeyleri üzerinde bulunan ve tipi $(2,3,6)$ olan düzgün hiperfigürler incelendi. (Corn ve Singerman, 1988) de açıklanan yöntem kullanılarak, yarı Platonik tor yüzeyleri üzerinde tipleri $(2,6,3)$ ve $(3,6,2)$ olan düzgün hiperfigür aileleri belirlenebilir ve bunların bazı cebirsel, topolojik ve geometrik özellikleri benzer şekilde incelenebilir. Yapılan işlemler standart olduğu için, tipleri $(2,6,3)$ ve $(3,6,2)$ olan düzgün hiperfigür ailelerine ait detaylar bu çalışmaya dâhil edilmemiştir.

4.3 Tipi $(4, 4, 2)$ olan Düzgün Hiperfigür Ailesi

T , karmaşık düzlemde (\mathbb{C}) köşeleri 0 , $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ olan üçgen olsun. Bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar,

$$a(z) = \bar{z}, \quad b(z) = -\bar{z} + 1 \quad \text{ve} \quad c(z) = i\bar{z}$$

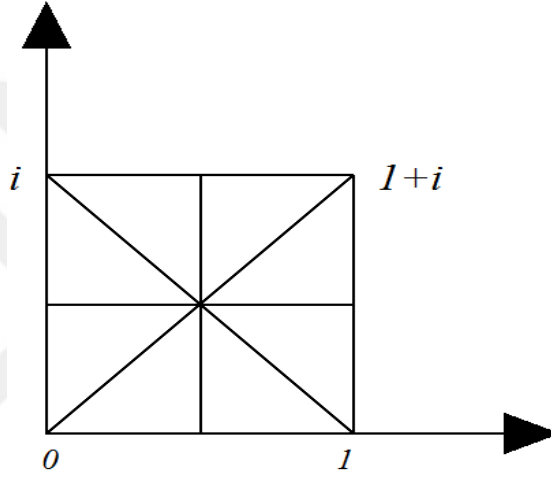
olarak verilen fonksiyonlardır. Bu üç yansıma bileşke işlemine göre bir U grubunu üretir ve aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ac)^4 = 1.$$

Aşağıda verilen t_{11} ve $t_{12}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ötelemeleri de U grubunun bir G_1 alt grubunu üretir:

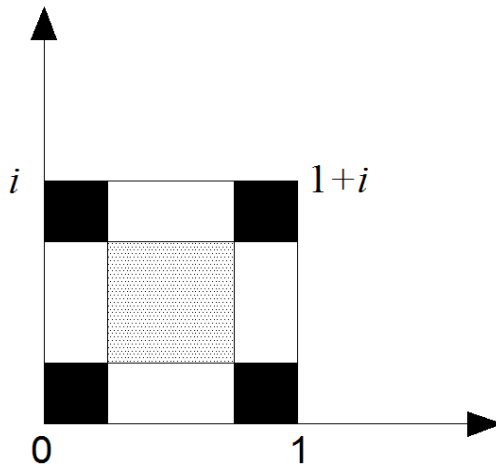
$$t_{11}(z) = bcac(z) = z + 1, \quad t_{12}(z) = acbc = z + i.$$

Burada t_{11} ve t_{12} ötelemeler oldukları için \mathbb{C}/G_1 bir tor yüzeyidir. Bu tor yüzeyini T_1 ile gösterelim. Şekil 4.7 de verilen ve köşeleri $0, 1, i$ ve $1+i$ olan kare G_1 grubu için bir temel bölgedir. Şekil 4.7 de görüldüğü gibi, T_1 yüzeyi her biri T üçgenine eş olan 8 üçgene bölünmüştür.



Şekil 4.7 G_1 grubu için bir temel bölge

Bir önceki kısımda olduğu gibi T_1 üzerinde 1 hiperköşe, 1 hiperkenar ve 2 hiperyüzü bulunan bir \mathcal{H}_1 düzgün hiperfigürü mevcuttur, Şekil 4.8.



Şekil 4.8 T_1 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_1 hiperfigürü

Eğer \mathcal{H}_1 hiperfigürünün komşu hiperköşe, hiperkenar ve hiperyüzlerinin merkezleri geodezik doğru parçalarıyla birleştirilirse, yukarıda bahsedilen 8 üçgen tekrar elde edilir. Bu üçgenlerden herhangi birinin kenarları üzerindeki yansımalar \mathcal{H}_1 hiperfigürünün tüm otomorfizmalarından oluşan grubu üretir. Mertebesi 8 olan bu grup

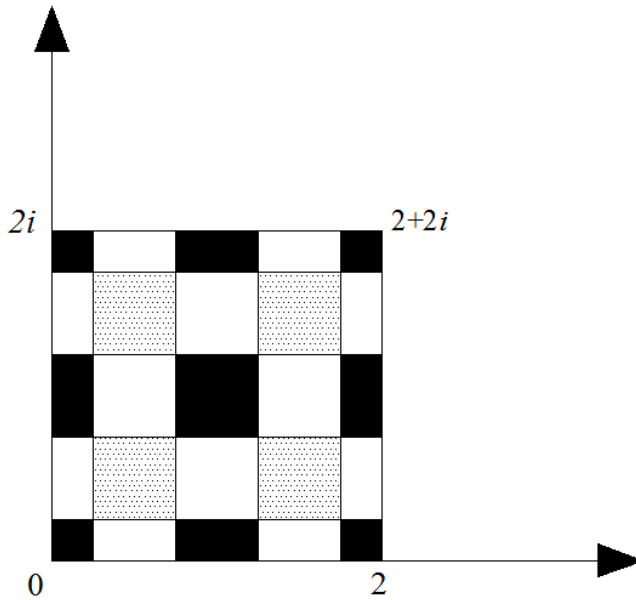
$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ac)^4 = acbc = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilebilir.

Benzer şekilde aşağıda verilen t_{21} ve $t_{22}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ötelemeleri de U grubunun diğer bir alt grubunu üretir:

$$t_{21}(z) = t_{11}(t_{11}(z)) = z + 2, \quad t_{22}(z) = t_{12}(t_{12}(z)) = z + 2i.$$

Bu grubu G_2 ile gösterelim. Şekil 4.9 da verilen ve köşeleri $0, 2, 2i$ ve $2 + 2i$ olan kare G_2 grubu için bir temel bölgedir ve $T_2 = \mathbb{C}/G_2$ bir tor yüzeyidir. Ayrıca G_2 grubunun temel bölgesinin alanı G_1 grubunun temel bölgesinin alanının 4 katı olduğu için, T_2 üzerinde 4 hiperköşe, 4 hiperkenar ve 8 hiperyüzü bulunan bir \mathcal{H}_2 düzgün hiperfigürünün mevcut olduğu kolayca görülür, Şekil 4.9.



Şekil 4.9 T_2 yüzeyi üzerinde \mathcal{H}_2 hiperfigürü

$Aut(\mathcal{H}_2)$ grubu (\mathcal{H}_2 hiperfigürünün tüm otomorfizmalarından oluşan grup)

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ac)^4 = (acbc)^2 = 1 \rangle$$

biçimindedir ve mertebesi 32 dir.

Şimdi yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse, her k pozitif tamsayısı için, U grubunun

$$t_{k1}(z) = t_{11}^k(z) = z + k \text{ ve } t_{k2}(z) = t_{12}^k(z) = z + ki$$

ötelemeleri tarafından üretilen G_k alt grubu elde edilir. Bu durumda $T_k = \mathbb{C}/G_k$ tor yüzeyi üzerinde, \mathcal{H}_k ile gösterilen ve k^2 hiperköşe, k^2 hiperkenar ve $2k^2$ hiperyüzü bulunan bir düzgün hiperfigür mevcuttur.

\mathcal{H}_k nin tüm otomorfizmalarından oluşan grup

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ac)^4 = (acbc)^k = 1 \rangle$$

biçimindedir ve mertebesi $8k^2$ dir.

Çizelge 4.3 de k nin alacağı ilk 10 değere karşılık gelen düzgün hiperfigürler ve bunlara ait bazı detaylar verilmektedir. Burada kullanılan notasyonlar bir önceki çizelgedekilerle aynıdır.

Çizelge 4.3 Tipi (4, 4, 2) olan düzgün hiperfigürler ailesi

k	\mathcal{H}_k	$ V_{\mathcal{H}_k} $	$ E_{\mathcal{H}_k} $	$ F_{\mathcal{H}_k} $	$ Aut(\mathcal{H}_k) $
1	\mathcal{H}_1	1	1	2	8
2	\mathcal{H}_2	4	4	8	32
3	\mathcal{H}_3	9	9	18	72
4	\mathcal{H}_4	16	16	32	128
5	\mathcal{H}_5	25	25	50	200
6	\mathcal{H}_6	36	36	72	288
7	\mathcal{H}_7	49	49	98	392
8	\mathcal{H}_8	64	64	128	512
9	\mathcal{H}_9	81	81	162	648
10	\mathcal{H}_{10}	100	100	200	800

Bu kısımdaki hiperfigürlerin tipleri $(4,4,2)$ olduğu için bunların dönel otomorfizmaları üç eşlenik sınıfına ayrılırlar, (Melekoğlu, 2018) . Bunlardan sadece $acbc$ temsilci otomorfizması kullanılarak değişik tor yüzeyleri üzerinde sonsuz düzgün hiperfigür ailesi tanımlandı. Benzer şekilde, diğer iki sınıftan da temsilciler seçilerek, sonsuz düzgün hiperfigür aileleri tanımlanabilir.

Bu kısımda, $(2,4,4)$ üçgensel grubunun normal alt grubu olan ve iki öteleme tarafından üretilen gruplar ve bunların bölüm uzayı olan tor yüzeyleri üzerinde bulunan ve tipi $(4,4,2)$ olan düzgün hiperfigürler incelendi. Eğer bunlar yerine tipi $(2,4,4)$ olan düzgün hiperfigürler alınmış olsaydı benzer sonuçlar elde edilebilirdi. Yani tor yüzeyleri üzerinde tipi $(2,4,4)$ olan sonsuz düzgün hiperfigür aileleri ve bunlara ait cebirsel, topolojik ve geometrik bilgiler aynı yöntemler kullanılarak elde edilebilirdi. Ancak yapılan işlemler benzer olduğu için, tipi $(2,4,4)$ olan düzgün hiperfigür aileleri ile ilgili detaylar bu çalışmaya dâhil edilmemiştir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak Öklid düzleminde tor yüzeyleri üzerinde hiperfigür kavramları tanıtıldı. Daha sonra tor yüzeyleri üzerinde tipi $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ ve $(4, 4, 2)$ olan düzgün hiperfigür aileleri ele alındı. Üçgensel grupların lineer bağımsız iki öteleme tarafından üretilen alt grupları ve dönel otomorfizmalar yardımıyla bu ailelere ait olan düzgün hiperfigürlerin bazı geometrik, topolojik ve cebirsel özellikleri incelendi. Benzer çalışmalar, hiperbolik düzlemdeki düzgün hiperfigürler ve dolayısıyla cinsi birden büyük olan kompakt Riemann yüzeyleri üzerindeki düzgün hiperfigürler için de yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Bosma, W., Cannon, J., Playoust, C. 1997. The Magma Algebra System I: The User Language. **Journal of Symbolic Computation**, 24: 235-265.
- [2] Corn, D., Singerman, D. 1988. Regular hypermaps. **European Journal of Combinatorics**, 9: 337-351.
- [3] Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. 1980. Generators and relations for discrete groups. Springer-Verlag, ix+161pp.
- [4] Jones, G.A., Singerman, D. 1978. Theory of maps on orientable surfaces. **Proceedings of the London Mathematical Society**, 37(3): 273-307.
- [5] Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, xiv+342 pp.
- [6] Melekoğlu, A. 2008. A Geometric Approach to the Reflections of Regular Maps. **Ars Combinatoria**, 89: 355-367.
- [7] Melekoğlu, A. 2018. Patterns of Mirrors on Quasi-Platonic Surfaces. **Graphs, groups and more: celebrating Brian Alspach's 80th and Dragan Marušič's 65th birthdays**. Koper.
- [8] Melekoğlu, A., Singerman, D. 2016. The structure of mirrors on regular maps on Platonic surfaces. **Geometriae Dedicata**, 181:239-256.
- [9] Conder, M., Melekoğlu, A. 2017. Link indices of Hurwitz maps. **Journal of Algebra**, 490: 568-580.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gülsün TANOĞLU

Doğum Yeri Ve Tarihi : İzmir 10.08.1994

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Böl.

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Böl.

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Makaleler

-SCI

-Diğer

b) Bildiriler

-Uluslararası

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-Posta Adresi : gulsunmeydan03@gmail.com

Tarih : 18/08/2020

