T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-DR-013

PURE ÖZELLİĞİ İLE TANIMLANAN MODÜL, HALKA VE KATEGORİ YAPILARI

Azime TARHAN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

18.12.2020

Azime TARHAN

ÖZET

PURE ÖZELLİĞİ İLE TANIMLANAN MODÜL, HALKA VE KATEGORİ YAPILARI

Azime TARHAN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2020, 99 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
Tezin birinci bölümü olan Giriş kısmında tez konusu tanıtılarak konu ile ilgili temel kabul edilen çalışmaların tarihçesi kısaca verilmiştir.

İkinci bölümde tezin okunurluğunu kolaylaştıracak ve ispatlarda kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde genel olarak halka ile modüllere ait bilinen bazı ileri yapısal özellikler ve sonuçlar yer almaktadır.

Tezin üçüncü bölümünde ilk olarak pure alt modüller ve flat modüllere ait devamında ise singüler ve nonsingüler modüllere ait bazı temel özellikler verilmiştir. Bu bölümde τ_s-kapalı alt modüller tanımlanmış ve extending modüller, bu yeni kapalı alt modüller yardımıyla torsion teoriye göre purely τ_s-extending modül olarak genelleştirilmiştir. Yeni tanımlanan bu extending modüllerin genel teoride yer alan bazı temel özellikleri sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca flat modüller, modülün injektif genişlemesi ve çarpımsal modüller gibi faktörler kullanılarak purely τ_s-extending modüllerin karakterizasyonu yapılmış ve semi-hereditary halka üzerinde extending modüllerin bir sınıflandırması verilmiştir.

Son olarak tezin dördüncü bölümünde pure kapalı alt objeler, güçlü pure kapalı alt objeler ve sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde pure bölüm Goldie boyut ile ilgili çalışmalar yer almaktadır. Bu kategoride, direkt limitler ve pure epimorfik görüntüler altında kapalı olan objelerin her sınıfının pure bölüm sonlu boyutlu bir objesinin her güçlü pure kapalı alt objesinin bir yarı yerel endomorfizma halkasının var olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Pure Altmodüller, Flat Modüller, Singüler ve Nonsingüler Modüller, Extending Modüller, UC-modüller, Goldie Boyut

ABSTRACT

THE STRUCTURES OF MODULES, RINGS AND CATEGORIES DEFINED BY PURE PROPERTY

Azime TARHAN

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2020, 99 pages

This thesis mainly consist of four chapters.
In the first chapter the topic of thesis has been introduced and studies that are considered in basic literature are briefly mentioned.

In the second part of the thesis some basic definitions and theorems that are used in proofs and make the thesis easier to read are introduced. In addition, some known advance properties and results of general structure of rings and modules are included.

In the third part of this thesis, firstly given the basic properties of pure submodules and flat modules and in the continuation some properties related to singular and nonsingular modules are given. In this section, τ_s-closed submodules are defined and extending modules are generalized as purely τ_s-extending modules with this new closed submodules according to a torsion theory. It has been shown that these newly described extending modules provide some basic features in general theory. In addition, by using factors such as flat modules, injective envelope hull of the modules and multiplicative modules, the characterization of purely τ_s-extending modules has been introduced and a classification of extending modules on a semi-hereditary ring is given.

The last part of the thesis pure closed subobjects, strongly pure closed subobjects are studied and given pure quotient Goldie dimension in finitely accessible additive category. We prove in this category every strongly pure closed subobject of a pure quotient finite dimensional object of every class of objects closed under direct limits and pure epimorphic images has a semilocal endomorphism ring.

Key Words: Pure Submodules, Flat Modules, Singular and Nonsingular Modules, Extending Modules, UC-modules, Goldie Dimension

ÖNSÖZ

Tez çalışma dönemim boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik ve bilimsel bakış açısını geliştirmeme zemin hazırlayan saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e (Adnan Menderes Üniversitesi), ayrıca bu dönemde yorumlarıyla sağlamış olduğu bilimsel katkılarından dolayı saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na (Adnan Menderes Üniversitesi) ve Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ'a (Uşak Üniversitesi) ve bölümün kurucu hocası olarak lisans eğitimimden beri emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a yürekten teşekkür ederim. Tüm yaşamım boyunca desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan annem Aynur TARHAN'a, babam Ramazan TARHAN'a ve her zaman yanımda olan biricik dedem Mehmet KÖYLÜOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Azime TARHAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$A \leq B$	: A, B nin altmodülü
$A \leq_e B$	: A, B nin large (essential) altmodülü
$A \lneqq B$	: A, B nin öz altmodülü
$A \leq_p B$	: A, B nin pure altmodülü
$A \ll B$	: A, B nin small altmodülü
$Hom_R(A,B)$	: A dan B ye olan R-homomorfizmalarının sınıfı
(lc)	: Alt süreklilik (lower continuous)
A/B	: A nın B ye bölüm modülü
$\bigoplus A$	: A modüllerinin direkt toplamı
$\prod A$	: A modüllerinin direkt çarpımı
$\sum A$	: A modüllerinin toplamı
$FC(A/C)$	: A/C objesinin monic $\mathcal{C}$-örtüsü
DCC	: Azalan Zincir Şartı (Descending Chain Condition)
ACC	: Artan Zincir Şartı (Ascending Chain Condition)
$l.Ann_R(a)$	: Bir M modülünde a elemanının R de sol sıfırlayanı
$l.Ann_R(M)$	: Bir M modülünün R de sol sıfırlayanı
$udim(m)$	: Bir M modülünün uniform boyutu
$Z(M)$	: Bir M modülünün singüler altmodülü
$Z_\tau(M)$	: Bir M modülünün τ-singüler altmodülü
$n(u)$	: Bir u elemanının mertebesi
$dim(_K V)$	: Bir V vekör uzayının boyutu
$rank(f)$	: Bir vektör uzayı homomorfizmasının rankı
PID	: Esas ideal bölgesi (Principal Ideal Domain)
Çek(f)	: f homomorfizmasının çekirdeği
Gör(f)	: f homomorfizmasının görüntüsü
$End(_R M)$	: M modülünün endomorfizma halkası
$RadM$	: M modülünün radikali
$_R M$	: M sol R-modül
$T(M)$	: M modülünün torsion altmodülü
$\mathcal{L}(M)$	: M nin bütün altmodüllerinin kafesi (lattice)
$N \leq_{\tau_s c} M$	: N, M modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü
$\mathcal{L}e(R)$	: R halkasının tüm essential sol ideallerinin kümesi
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali

$\mathcal{U}$	: Sol R-modüllerin sınıfı
${}_R\mathcal{M}$	: Sol R-modüllerin kategorisi
$U^{(I)}$	: U'ların direkt toplamı
$FGen(U)$	: U ile sonlu üretilmiş modüllerin sınıfı
$Gen(U)$	: U ile üretilmiş modüllerin sınıfı
(uc)	: Üst süreklilik (upper continuous)
$PE(X)$	: X objesinin pure injektif genişlemesi (pure injective envelope)

1. GİRİŞ

Extending modül kavramı J. von Neumann'ın 1930'lu yıllarda gerçekleştirmiş olduğu çalışmalara dayanmaktadır [65], [66]. J. von Neumann'ın Quantum mekaniğine olan ilgisi ve bu alandaki çalışmaları, günümüzde tam modül kafeslerinde (complete module lattice) üst süreklilik (upper continuous) ve alt süreklilik (lower continuous) olarak adlandırılan sürekli geometri (continuous geometry) kavramının gelişmesine vesile olmuştur.
R birimli, birleşmeli bir halka ve I bir indis kümesi olmak üzere $i \in I$, $b_i \in R$ ve $a \in R$ için R'nin esas (principal) sağ ideallerinin kafesinde her $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq R$ ve $\{a\} \subseteq R$ göz önüne alınırsa alt ve üst süreklilik sırasıyla

1. (lc): $aR + (\bigcap_{i\in I} b_iR) = \bigcap_{i\in I}(aR + b_iR)$
2. (uc): $aR \cap (\sum_{i\in I} b_iR) = \sum_{i\in I}(aR \cap b_iR)$

biçimindeki koşullar ile tanımlanmıştır.
Bir R halkasında her $r \in R$ için $rar = r$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa bu halka *von Neumann düzenli (von Neumann regular)* olarak adlandırılır. J. von Neumann [65] ve [66] çalışmalarında sürekli geometriler teorisini ve bir von Neumann düzenli halkasının sol esas ideallerinin kafes yapısını geliştirmiştir. J. von Neumann düzenli halkaları eğer sol esas ideallerinin kafesi üstten ve alttan sürekli ise *sürekli halka (continuous ring)* olarak adlandırmıştır.

Utumi, J. von Neumann'ın çalışmalarını geliştirerek bir düzenli halkayı eğer sol esas ideallerinin kafesi üst sürekli ise *sol sürekli (left continuous)* olarak tanımlamış ve "Düzenli bir R halkasının sol sürekli olması için gerek ve yeter koşulun bir sol R-modül olarak R'nin extending olmasıdır." durumunu ispatlamıştır [80]- [81]. Utumi ayrıca düzenli olması gerekmeyen ancak sol R-modül R'nin continuous veya quasi-continuous (yani π-injektif) olduğu halkalar üzerinde çalışmıştır. Bu kavramlar Jeremy [53], [54], Mohamed-Bouhy [62] ve Takeuchi [77] tarafından modüller üzerine taşınmıştır.

İnjektif modüller, modül teoride ve daha genel anlamda cebirde 1960'lı ve 1970'li yıllarda önemli yer tutmaya başlamış ve Carl Faith'in [33] çalışmasıyla daha da etkili hale gelmiştir. Bunun dışında o zamanlardan günümüze injektif modüller ile von Neumann'ın sürekli geometri kavramı üzerinden Quantum Mekanikleri modeli denemesiyle modüllerin çeşitli genelleştirilmesi konusunda pek çok çalışma yapılmıştır. İnjektif modüller için elde edilen pek çok sonuç M-üreteçli modülleri kapsayan $\sigma[M]$ kategorisinde M'yi injektif obje olarak içeren self-injektif (ve diğer) M modüllerine uyarlanmıştır [82].

Teorinin gelişimi içinde daha genel olarak modüllerde yani sürekli (continuous) ve π-injektif modüllerde çalışmalar arttırılarak sonuçlar genelleştirilmiştir. Tüm bu modüller, altmodüllerinin extending olması yani her altmodülünün bir direkt toplananda essential olması sebebiyle ortak bir özelliğe sahiptir.

1960'lı yılların sonunda Osofsky "Bir R halkasının yarı basit olması için gerek ve yeter koşul her devirli R-modül injektiftir." önermesini ispatlamıştır [68], [69]. Ayrıca Osofsky, P. Smith ile [70] çalışmalarında bir $\sigma[M]$ kategorisinde her devirli R-modülün injektif ise M modülünün yarı basit olduğunu göstermişlerdir.

Pek çok matematikçi continuous ve quasi-continuous modüller üzerinde çalışarak teorinin gelişimine katkı sağlamıştır. Mohamed ve Müller'in [63] ile Dung, Huynh, Smith ve Wisbauer'in [31] kitapları bu konuda yazılmış temel eserler arasında yer almaktadır. Ayrıca Müller ile öğrencileri (özellikle Kamal ve Rizvi) ve Harada ile öğrencileri (özellikle Oshiro) ile adını sayamadığımız daha pek çok matematikçi yaptıkları çalışmalarla bu teorinin geliştirilmesine destek vermişlerdir.

Bu gelişmelerden bağımsız olarak Goldie 1958-1960 yılları arasında ilk olarak quotient halkaların tümleyenleri (complement) kavramını düşünmüştür [44], [45] ve bu çalışmalar Hajarnavis'i sol CS (complement summand)-halkaları çalışmaya sevk etmiştir. Bu bağlamda R'nin bir R-modül olarak extending olduğu durumu Chatters ile birlikte çalışmışlardır [13]. Sonraki dönemlerde Chatters, Khuri ile işbirliği yaparak sol CS (complement summand)-halkalar üzerindeki modüllerin endomorfizma halkalarını araştırmıştır [14]. Teorinin gelişiminde araştırmacılar farklı terminolojiler kullanmışlardır. Örneğin Chatters ve Hajarnavis CS terminolojisini kullanırken Harada ve onun ekolu lifting modüllere dual olarak extending modül terimini kullanmışlardır [48]. Bu terminoloji [31] eserinde de bu şekilde kullanılmıştır.

1980'li yıllarda özellikle M. Harada'nın öğrencisi olan B. Müller, Tariq Rizvi ile birlikte extending modüllerle ilgili çalışmalar yapmıştır [64].

R bir halka, M bir sol R-modül ve N, M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. Eğer M'nin sıfırdan farklı her altmodülü ile N'nin arakesiti sıfırdan farklı ise N'ye M'nin bir *essential altmodülü* denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.
Yani $0 \neq N \leq_e M \Leftrightarrow \forall 0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$.
M bir R-modül ve N, M'nin bir essential altmodülü olsun. Bu durumda M'ye N'nin bir essential genişlemesi denir. Ayrıca kapalı (closed) altmodül "Eğer M'nin bir K altmodülünün M'de hiçbir öz essential genişlemesi yoksa K, M'de bir kapalı altmodüldür." şeklinde tanımlanır. R birimli birleşmeli bir halka ve N, birimsel bir M sol R-modülünün altmodülü olmak üzere M modülünün altmodülleri kolleksiyonunda N'yi essential olarak içeren maksimal K altmodülü

N'nin M'deki *kapanışı (closure)* olarak tanımlanır. M'nin bir N alt modülü için M'nin N ile arakesiti sıfır olacak şekildeki altmodüllerin kolleksiyonundaki maksimal L altmodülü N'nin M'deki *tümleyeni (complement)* olarak adlandırılır. Yani $M \cap L = 0$ olacak şekilde L, M'nin maksimal atmodülüdür. Bundan başka "Bir M modülünün K altmodülünün bir kapalı altmodül olması için gerek ve yeter koşulun K'nin M'de bir tümleyen olması " bilinen bir özelliktir. Eğer bir M modülünün her kapalı altmodülü M'nin bir direkt toplananı ise *M extending modül* olarak adlandırılır. M'nin her tümleyen (complement) altmodülü M'nin bir direkt toplananı ise M'ye *CS-modül* denir.

Bu bağlamda bir R-modül M için aşağıda verilen ifadeler birbirine denktir:

1. M bir extending modüldür.
2. M'nin her N altmodülü için N'nin M'deki her kapanışı (closure) M'nin bir direkt toplananıdır.
3. M'nin her altmodülü M'nin bir direkt toplananında essentialdır.

Ayrıca burada bir M modülü için aşağıdaki şartların denkliği de bilinmektedir:

1. M bir CS-modüldür.
2. M'nin her N altmodülü için N'nin M'deki tümleyeni (complement) M'nin bir direkt toplananıdır.
3. M'nin her kapalı (closed) altmodülü M'nin bir direkt toplananıdır.

Extending modüllere örnek olarak basit (simple), yarı basit (semisimple), uniform ve quasi injective modüller verilebilir.

Halka ve modül Teorisinde injektif modüllerin sınıfı direkt toplam ayrışım özelliklerine sahip olması sebebiyle oldukça önemli yer tutar. Bir M injektif

R-modülü daima extending modül olur.

Bu bağlamda A. Tercan ve P. Smith de continuous ve quasi continuous modüller üzerine çalışmışlardır [75]. Ancak continuous ve quasi continuous modüllerin modül sınıflarına göre genelleştirmeleri için S. Doğruöz ve P. F. Smith'in [25] çalışmasına bakılabilir. Ayrıca yakın dönemde Sh. Asgari, S. Doğruöz ve P. F. Smith'in [25] çalışmasından esinlenerek torsion teoriye göre continuous ve quasi continuous modüllerin bir genellemesini yapmıştır [4].

İnjektif modüllerdeki direkt toplam özellikleri extending modüller için düşünüldüğünde aşağıdaki açık problem ile karşılaşılmıştır:

Açık Problem: Bir extending modülün direkt toplananları extending olurken herhangi iki extending modülün direkt toplamı her zaman extending olmak zorunda değildir. Örneğin p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^3}$ $\mathbb{Z}$-modülleri $\mathbb{Z}$-modül olarak extending modül iken $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^3}$ direkt toplam $\mathbb{Z}$-modülü extending modül değildir. Çünkü $K = \mathbb{Z}(1+\mathbb{Z}_p, p+\mathbb{Z}_{p^3})$ kapalı altmodül olmasına rağmen bir direkt toplanan değildir. Kamal ve Müller [55]'de bazı özel şartlar altında extending modüllerin direkt toplamının da extending modül olduğunu göstermiştir. Bu açık problem halka ve modül teorisinin gelişimine oldukça katkı sağlamıştır.

Extending modül teorisi gelişiminde A. Harmancı ve P. Smith'in [49] çalışmasında yapmış oldukları bağıl injektif (relative injective) extending iki altmodülün direkt toplamının extending olduğu ispatları açık probleme şimdiye kadar verilen en önemli cevaptır. S. Doğruöz ve P. Smith [25], [26] çalışmalarında modül sınıflarına göre extending modülleri genelleştirmişlerdir. Daha sonra S. Doğruöz [25] ve [28] çalışmalarında torsion teoriye extending modüllerin ilk genelleştirmesini yapmıştır. Aynı zamanda son dönemlerde Adnan Tercan ve öğrencileri de teorinin gelişimine oldukça katkı sağlayacak [3], [78], [79] çalışmalarını yapmışlardır .

Tezin ikinci bölümünde, tezin ileriki bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Bu bölümde özellikle modül teorinin temel kaynakları arasında yer alan başta F. W. Anderson-K. R. Fuller [5], N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith and R. Wiasbauer [31], F. Kasch [57] ve S. H. Mohamed-B. J. Müller [63] olmak üzere pek çok farklı kaynaktan yararlanılmıştır.

Üçüncü bölümde K. R. Goodearl'in [46] kitabında tanımladığı s-kapalı (closed) modüllerin bir genelleştirilmişi olan τ_s-kapalı (closed) alt modüller tanımlanmış ve bu altmodüller yardımı ile extending modüller purely τ_s-extending modül olarak pure altmodüllere göre genelleştirilmiştir. Bu bölümde ihtiyaç olan pure altmodüllere ait temel özellikler verilerek extending modüllerin karakterizasyonu çalışılmıştır.

Bu bağlamda R-modüller için pure olma durumu ilk olarak P. M. Cohn [17] tarafından ortaya atılmıştır. "Sol R-modüllerin bir

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin pure tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul her A sağ R-modülü için

$$0 \longrightarrow A \otimes K \longrightarrow A \otimes L \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow 0$$

dizisinin tam olmasıdır." [17]. Burada K modülüne, L'de *pure altmodül* denir. Diğer taraftan L'nin bir K altmodülünün pure olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow L/K \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin pure olmasıdır. Buradan herhangi bir K modülü için hem 0 hem de K modülünün pure altmodüller olduğu kolayca görülebilir. Cohn pure kavramı ile ilgili olarak aşağıdaki temel teoremi vermiştir:

Teorem 1.0.1. [17, Theorem 2.4] M bir R-modül ve P, M modülünün bir altmodülü olsun. P'nin M modülünde pure olması için gerek ve yeter koşul; "I sonlu bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için P'de $a_{i_j} \in R$, $m_j \in M$ ve bir J sonlu indis kümesi için $j \in J$ olacak şekilde $\Sigma a_{i_j} m_j = q_i$ verilsin. Bu durumda her $i \in I$ için $\Sigma a_{i_j} m_j = \Sigma a_{i_j} p_j$ olacak şekilde $p_j \in P$ vardır." durumunun sağlanmasıdır .

Irving Kaplansky bu tanımı Esas İdeal Bölgesi (Principal Ideal Domain) için R bir halka, M bir R-modül ve P, M modülünün bir altmodülü olmak üzere P'nin M'de pure olmasını; her $r \in R$ için $rM \cap P = rP$ ifadesine denk gelen ifadeyle genelleştirmiştir [56]. Bunun dışında pure altmodüller ile ilgili gelişmeler için Carl Faith [33], David J. Fieldhouse [36] ve [37] çalışmaları incelenebilir. R bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere R'nin her sonlu üreteçli I ideali için $IN = IM \cap N$ oluyorsa N'ye M'nin bir *pure altmodülü* denir ve $N \leq_p M$ ile gösterilir [5]. L. Fuchs extending modülleri şu şekilde genelleştirmiştir: M bir R- modül olmak üzere eğer M'nin her altmodülü M'nin bir pure altmodülünde essential ise M'ye *purely extending modül* denir. Ayrıca R-modül M'nin purely extending olması için gerek ve yeter şartın M'nin her kapalı altmodülünün M'de pure olması gerektiğini göstermiştir [40]. J. Clark da "Nonsingüler bir R halkası için R'nin purely extending olması için gerek ve yeter koşulun her devirli (cyclic) nonsingüler R-modülün flat olmasıdır." önermesini ispatlamıştır [15].

Bu bölümde torsion teoriye göre nonsingüler modüller yardımı ile τ_s-kapalı altmodül tanımlanarak bu kapalı altmodüle göre yeni bir purely τ_s-extending modül kavramına yer verildi. Burada yeni tanımlanan yeni extending modülün genel extending modül özelliklerinden bazılarını sağladığı gösterildi. Ayrıca extending modül teorisinde yer alan açık probleme yönelik çözüm arandı. Bu bağlamda bir modülün purely τ_s-extending modül olabilmesi için bazı gerek ve yeter koşullar elde edilerek karakterizasyonlar yapıldı. Ayrıca bir R halkasının direkt toplamının purely τ_s-extending olmasına ilişkin bir sınıflandırma yapılarak bu sınıflandırma Teorem 3.5.7 ile verildi.

Ayrıca üçüncü bölümde Victor P. Camillo ve Julius M. Zelmanowitz [12] ile Patrick Smith'in [74] çalışmalarında yer alan UC-modüllerin bir genellemesi yapılarak τ-torsion halka üzerinde her R-modülün bir τ_s-UC-modül olduğu gösterildi.

Tezin dördüncü bölümünde pure kapalı altobjeler ve sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde pure quotient Goldie boyut ile ilgili çalışmalar yer almaktadır. Burada M. K. Berktaş'ın [7] ve [9] çalışmalarından esinlenilmiştir. [7] çalışmasında motivasyon için A. Facchini ve D. Herbera'nın [32] çalışması göz önünde bulundurulmuştur. A. Facchini ve D. Herbera'nın [32]'de $\mathcal{C}$ bir Grothendieck kategori olmak üzere eğer A, sonlu Goldie boyuta (dimension) sahip ve her $A \to A$ monomorfizması bir izomorfizma olacak şekilde $\mathcal{C}$'nin bir objesi ise bu durumda A'nın endomorfizma halkası $End_{\mathcal{C}}(A)$'nın yarı yerel olduğunu göstermişlerdir. R birimli bir halka M birimsel bir sağ R-modül olmak üzere eğer M sıfırdan farklı m tane altmodülün direkt toplamını içerecek şekilde en büyük m tamsayısına *M'nin sonlu Goldie boyutu* denir ve $udim(M) = m$ ile gösterilir.

(Eğer böyle bir m tamsayısı yoksa M sonsuz Goldie boyuta sahiptir denir [23].)

$\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere eğer $\mathcal{C}$'nin direkt limitleri var, sonlu üreteçli objelerinin sınıfı skeletally small ve her objesi sonlu üreteçli objelerin bir direkt limiti ise $\mathcal{C}$'ye *sonlu ulaşılabilir kategori (finitely accessible category)* denir.

Bir R halkası için $R/J(R)$ bir yarı basit Artin halka ise R'ye bir *yarı yerel halka (semilocal ring)* denir. R ve S birer halka ve $\varphi : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer her $r \in R$ için $\varphi(r)$, S'de tersinir olmak üzere r elemanı R'de tersinir ise φ *yerel (local) homomorfizma* olarak adlandırılır.

Bu bölümde söz edilen kategorilerde direkt limitler ve pure epimorfik görüntüler altında kapalı olan objelerin her güçlü (strongly) pure kapalı altobjesinin bir yerel endomorfizma halkasına sahip olduğu ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel tanım ve özellikler kaynakları ile birlikte verilmiştir.

2.1. Kullanılan Bazı Genel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. [52] R boş olmayan bir küme; "+" toplama ve "$\cdot$" çarpma diyeceğimiz R üzerinde tanımlı iki tane ikili işlem verilmiş olsun. Eğer

1. $(R,+)$ bir Abel grup,
2. R üzerinde "$\cdot$" işleminin birleşme özelliği var,
3. R üzerinde "$\cdot$" işleminin "$+$" işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği var

ise $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir.

$(R,+,\cdot)$ halkasının "$+$" işlemine göre etkisiz elemanına *halkanın sıfır elemanı* denir ve 0_R ile gösterilir. Her R halkasının sıfır elemanı vardır. R halkasının "$\cdot$" işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer R halkasının "$\cdot$" işlemine göre etkisiz elemanı varsa bu elemana *birim eleman*; R'ye de bir *birimli halka* denir. R halkasının birim elemanı 1_R ile gösterilir.

Ayrıca R halkası "$\cdot$" işlemine göre değişme özelliğine sahip ise bu halkaya *değişmeli halka* denir.

Tanım 2.1.2. [52] r, R halkasının sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Eğer R'nin $rs = 0_R$ $(sr = 0_R)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir s elemanı varsa r'ye *sol (sağ) sıfır bölen* denir. R halkası sol ve sağ sıfır bölen içermiyorsa R halkasına bir *sıfır bölensiz halka* denir.

Tanım 2.1.3. [52] Birimli ve sıfır bölensiz bir halkaya *tam halka*; birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya *tamlık bölgesi (integral domain)* denir.

Tanım 2.1.4. [61] R bir halka ve S, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun. R halkasının işlemlerine göre S kendi başına bir halka oluyorsa S'ye R halkasının bir *althalkası* denir.
R halkasının sıfırı 0 olmak üzere $\{0\}$ ve R, R halkasının aşikar althalkalarıdır.

Teorem 2.1.5. [61, Theorem 11.1.2] *R bir halka ve S, R'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. S'nin R halkasının bir althalkası olabilmesi için gerek ve yeter koşul*

(1) *Her $a,b \in S$ için $a-b \in S$*

(2) *Her $a,b \in S$ için $ab \in S$*

özelliklerinin sağlanmasıdır.

Tanım 2.1.6. [52] R bir halka ve A, R halkasının bir altkümesi olsun. R halkasının A'yı kapsayan bütün althalkalarının arakesitine *A'nın ürettiği althalka* denir ve $<A>$ ile gösterilir. A'nın elemanlarına da $<A>$ halkasının *üreteçleri* denir.

Tanım 2.1.7. [52] R bir halka ve I, R'nin boş kümeden farklı bir altkümesi olsun.

1. Her $a,b \in I$ için $a-b \in I$ ve
2. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ $(ar \in I)$

oluyorsa I'ya R'nin bir *sol (sağ) ideali* denir.
Eğer I, R'nin hem sol hem de sağ ideali oluyorsa I'ya R'nin bir *ideali* adı verilir. Burada $\{0\}$ ve R altkümeleri R halkasının (sol, sağ) idealleridir. Bu ideallere *aşikar idealler* adı verilir. R'nin bunların dışındaki diğer tüm (sol, sağ) idealleri *aşikar olmayan ideal* olarak adlandırılır. I, R halkasının bir ideali olmak üzere eğer $I \neq R$ ise I idealine R'nin bir *öz (proper) ideali* denir.
Tanım gereği her idealin bir althalka olduğu açıktır.

Tanım 2.1.8. [57] Birimli birleşmeli bir halkanın 0 ve kendisinden başka iki yanlı ideali yoksa bu halkaya bir *basit halka* denir.

Tanım 2.1.9. [61] R bir halka ve A, R'nin bir alt kümesi olsun. R'nin A'yı kapsayan bütün sol (sağ) ideallerinin arakesitine *A'nın ürettiği sol (sağ) ideal* denir ve $< A >_l$ ($< A >_r$) ile gösterilir.
Burada $< A >_l$, R halkasının A'yı içeren en küçük sol idealidir. Eğer
$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ biçiminde sonlu bir küme ise A ile üretilen $< A >_l$ sol ideali
$< a_1, a_2, ..., a_n >$ ile gösterilir ve $< A >_l$, *sonlu üretilmiş bir sol ideal* olarak adlandırılır. Eğer $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise A'nın ürettiği $< a >_l$ sol idealine *sol esas (principal) ideal* denir ve $< a >$ ile gösterilir. Sağ esas (principal) ideal benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.10. [52] R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının her ideali esas (principal) ideal ise R halkasına bir *esas (principal) ideal halkası* denir.
Her ideali esas ideal olan birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya *esas ideal bölgesi (principal ideal domain (PID))* denir.

Tanım 2.1.11. R bir halka ve I, R'nin bir sol ideali ve J, R'nin bir sağ ideali ise o zaman $IJ = \{\sum a_i b_i | a_i \in I, b_i \in J\}$, R'nin bir ideali olur.
Bir $a \in R$ için Ra, R'nin bir sol ideali ve aR, R'nin bir sağ idealidir. Böylece $R(aR)$, R'nin bir ideali olur. Bu ideal RaR ile gösterilir.

Tanım 2.1.12. [82] R birimli bir halka olmak üzere R'nin bir a elemanı için $a^2 = a$ oluyorsa a'ya bir *idempotent eleman* denir.
Burada a, birimli bir R halkasının bir idempotent elemanı olmak üzere R halkasının her x elemanı için $ax = xa$ oluyorsa (yani a, R halkasının merkezinin bir elemanı ise) a'ya bir *merkezil idempotent eleman* denir.

Tanım 2.1.13. [61] R birimli bir halka ve P, R halkasının $P \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. R halkasının herhangi iki I ve J ideali için eğer $IJ \subseteq P$ olması $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa P idealine bir *asal ideal* denir.

Teorem 2.1.14. [61, Theorem 17.1.2] *R birimli bir halka ve P, R halkasının $P \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ önermesinin doğru olmasıdır.*

Sonuç 2.1.15. [61, Corollary 17.1.3] *R birimli ve değişmeli bir halka ve P, R halkasının $P \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ önermesinin doğru olmasıdır.*

Tanım 2.1.16. [61] R birimli bir halka ve M, R halkasının $M \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. $M \subset I \subset R$ olacak biçimde R halkasının herhangi bir I ideali yoksa M idealine R halkasının bir *maksimal ideali* denir.

Teorem 2.1.17. [61, Theorem 17.1.7] *Birimli ve değişmeli bir R halkasının her maksimal ideali R'nin bir asal idealidir.*

Tanım 2.1.18. [57] R bir halka olmak üzere R'nin her r elemanı için $rr^{'}r = r$ olacak şekilde bir $r^{'} \in R$ varsa R'ye *düzenli (regular) halka* denir.

Önerme 2.1.19. [57, p.38] *Bir R halkası için şağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *R düzenlidir (regular).*

(ii) *R'nin her devirli (cyclic) sağ ideali R_R'nin bir direkt toplananıdır.*

(iii) *R'nin her devirli (cyclic) sol ideali ${}_RR$'nin bir direkt toplananıdır.*

(iv) *R'nin her sonlu üreteçli (finitely generated) sağ ideali R_R'nin bir direkt toplananıdır.*

(v) *R'nin her sonlu üreteçli (finitely generated) sol ideali ${}_RR$'nin bir direkt toplananıdır.*

Tanım 2.1.20. [82] Bir vektör uzayının homomorfizmasının rankı görüntü uzayının boyutu olarak tanımlanır.

Tez içinde ispatlarda kullanılacak olan bir vektör uzayının endomorfizma halkasının yapısı ile ilgili aşağıdaki tanım ve önermeleri verelim:

Lemma 2.1.21. [82, 3.9] *K bir bölümlü halka; V, K üzerinde bir vektör uzayı ve $S = End({}_KV)$ olsun.*

(i) *Her $f \in S$ için $fgf = f$ olacak şekilde $g \in S$ vardır (yani S düzenlidir (regular)).*

(ii) *Bir $f \in S$ epimorfizmasını içeren her sol ideal S'ye denktir.*

(iii) *Bir $g \in S$ monomorfizmasını içeren her sağ ideal S'ye denktir.*

(iv) *Eğer $dim({}_KV) = n \in \mathbb{N}$ ise o zaman $End({}_KV)$ bir basit halkadır.*

(v) *Eğer $dim({}_KV)$ sonsuz ise o zaman $I = \{f \in S \mid rank(f) \text{ sonlu } \}$ için*

(a) *I, S'de bir minimal idealdir ve $I^2 = I$;*

(b) *I, bir merkezil idempotent eleman tarafından üretilmez;*

(c) *I, bir sol ideal olarak sonlu üreteçli değildir;*

(d) *Eğer $({}_KV)$'nin bir sayılabilir tabanı varsa o zaman I, S'deki tek aşikâr olmayan idealdir.*

(vi) *Eğer $dim({}_KV)$ sonsuz ise o zaman her sonsuz asal (cardinal) sayı için $\kappa \leq dim({}_KV)$ olup $I_\kappa = \{f \in S \mid rank(f) < \kappa\}$ kümesi S'de bir idealdir ve S'nin her ideali bu biçimdedir.*

Tanım 2.1.22. [82] R bir halka ve r, R'nin bir elemanı olsun. $r + t - rt = 0$ olacak şekilde bir $t \in R$ varsa r'ye R halkasının bir *sol quasi regular elemanı* denir. Benzer şekilde *sağ quasi regular eleman* da tanımlıdır. Eğer R'nin bir r elemanı hem sol hem de sağ quasi regular ise r'ye *quasi regular eleman* denir.
Bir R halkasının bir A idealinin tüm elemanları yukarıdaki özelliğe sahipse A'ya *quasi regular ideal* denir.

Lemma 2.1.23. [82, 21.10]

(i) *Bir R halkasında (R birimli olmayabilir) her sol quasi regular sol ideal aynı zamanda sağ quasi regular olur.*

(ii) *Birimli bir R halkasında bir sol I ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) *I sol quasi regular idealdir.*

(b) *I quasi regular idealdır.*

(c) *I, $_RR$'de essential olur.*

Önerme 2.1.24. [35, Proposition and Definition 19.24] *R bir halka olmak üzere eğer R aşağıda verilen denk koşullardan birini sağlıyorsa R'ye düzenli (regular) halka denir.*

(i) *Her devirli sol R-modül düzdür (flat).*

(ii) *Her sol R-modül düzdür (flat).*

(iii) *$x \in R$ ise $xax = a$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. (Bu durumda xa, xR'yi üreten bir idempotent elemandır.)*

(iv) *Her devirli sol ideal bir idempotent eleman tarafından üretilir.*

(v) *Her sonlu üreteçli sol ideal bir idempotent eleman tarafından üretilir.*

Üçüncü bölümde tanımlanıp detaylı özellikleri verilen flat modüllerin düzenli (regular) elemanla ilişkisi burada Teorem 2.1.25 ile aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Teorem 2.1.25. [57, Theorem 10.4.9] *Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) *Her $_RM$ modülü düz (flat) modüldür.*

(2) *Her* $r \in R$ *için* $rr^{'}r = r$ *olacak şekilde R'de bir* $r^{'}$ *elemanı vardır.*

(3) *R halkasının her devirli sağ ideali* R_R*'nin bir direkt toplananıdır.*

(4) *R halkasının her sonlu üreteçli sağ ideali* R_R*'nin bir direkt toplananıdır.*

Böylece Teorem2.1.25 ile düzenli (regular) halkanın tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir:

Tanım 2.1.26. [57] Teorem 2.1.25 koşullarından birini sağlayan bir R halkası da bir *düzenli (regular) halka* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.27. R bir halka olsun. R'nin I_i ideallerinin her $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ azalan zinciri durağan ise R'ye bir *Artin halka* denir.

Ayrıca halkanın regülerliği ile ilgili ispatlarda kullanışlı olan aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 2.1.28. [82] R birimli bir halka olmak üzere R'nin Jacobson radikali $J(R)$ aşağıdaki biçimlerde tanımlanabilir:

1. R'deki maksimal sol (sağ) ideallerin arakesitidir.
2. R'deki tüm essential sol (sağ) ideallerin toplamıdır.
3. Tüm sol quasi-regular ideallerin toplamıdır.
4. En büyük (sol) quasi-regular ideal
5. $J(R)$=$\{r \in R \mid$ herhangi $a \in R$ için $1 - ar$ tersinirdir. $\}$
6. Basit sol (sağ) R-modüllerin sıfırlayanlarının arakesitidir.

Tanım 2.1.29. [82] R bir halka olmak üzere $R/J(R)$ bir yarı basit artin halka ise R'ye *yarıyerel (semilocal) halka* denir.

Tanım 2.1.30. [82] Birimli bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

1. R bir yerel halkadır.

2. R halkasının tek bir maksimal sol ideali vardır.

3. R halkasında essential olacak şekilde bir maksimal sol ideal vardır.

4. R halkasında tersinir olmayan (non-invertible) herhangi iki elemanın toplamı tersinir değildir.

5. R halkasının tek bir maksimal sağ ideali vardır.

6. R halkasında essential olacak şekilde bir maksimal sağ ideal vardır.

Tanım 2.1.31. [57] $(\mathrm{R},+,\cdot)$ bir halka olsun. $(M,+)$ bir değişmeli toplamsal grup olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} *: & R\times M & \to & M \\ & (r,m) & \mapsto & r*m \end{array}$$

ile tanımlanan $*$ fonksiyonu her $m,m_1,m_2\in M$ ve her $r,r_1,r_2\in R$ için

1. $r*(m_1+m_2)=r*m_1+r*m_2$

2. $(r_1+r_2)*m=r_1*m+r_2*m$

3. $(r_1\cdot r_2)*m=r_1*(r_2*m)$

koşullarını sağlıyorsa M'ye bir *sol R-modül* denir. $_RM$ ile gösterilir. Benzer şekilde sağ R-modül tanımlanır. S ve R iki halka olmak üzere M bir sol R-modül ve bir sağ S-modül ise M'ye bir *R-S-bimodül* denir ve $_RM_S$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.32. [57] M bir sol R-modül olsun. N, M'nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere eğer N kendi başına bir sol R-modül olma koşullarını sağlıyorsa N'ye M'nin bir *altmodülü* denir ve $N\leq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.33. [57] R bir halka M ve N sol R-modüller olsun. $f:M\to N$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa f ye bir sol *R-modül homomorfizması* adı verilir.

(1) Her $m_1,m_2\in M$ için $f(m_1+m_2)=f(m_1)+f(m_2)$

(2) Her $m\in M$ ve $r\in R$ için $f(rm)=rf(m)$ dir.

f homomorfizması örten ise *epimorfizma*, birebir ise *monomorfizma* , bire-bir ve örten ise *izomorfizma* adını alır.

Tanım 2.1.34. [57] M ve N birer R-modül; $f : M \to N$ bir modül homomorfizması olmak üzere

Gör$(f) = \{f(a) \mid a \in M\}$ kümesine *f'nin görüntü kümesi* denir.

Çek$(f) = \{a \in M \mid f(a) = 0_N\}$ şeklinde tanımlı Çek(f) kümesi de *f'nin çekirdeği* olarak adlandırılır. Ayrıca

Eşçek(f)=Coker$(f) := N/f(M)$ ve

Eşgör(f) =Coim$(f) := M/f^{-1}(0)$ şeklindedir.

Tanım 2.1.35. [57] M ve N iki sol R-modül olmak üzere bir $\alpha : M \to N$ homomorfizması için Çek(α), M'de small yani Çek$(\alpha) \ll M$ ise α ya *small homomorfizma* denir. Eğer α örten ise α ya *small epimorfizma* denir.

Eğer $\alpha : M \to N$ homomorfizması için Gör(α), N modülünde essential yani Gör$(\alpha) \leq_e N$ ise α ya *essential (large) homomorfizma* denir. Eğer α birebir ise α ya *essential (large) monomorfizma* denir.

Tanım 2.1.36. [57] M bir R modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere M'den M/N bölüm modülüne $\eta(m) = m + N$ şeklinde tanımlı η homomorfizmasına *doğal (kanonik) homomorfizma* adı verilir. Burada η homomorfizması örtendir.

Teorem 2.1.37. [5] *M ve N birer sol R-modül olmak üzere*

1.İzomorfizma Teoremi: $f : M \to N$ bir modül homomorfizması olmak üzere $M/$Çek$(f) \cong$Gör(f)'dir.

2.İzomorfizma Teoremi: K ve L, M'nin birer altmodülleri olsun. O zaman $K/(K \cap L) \cong (K+L)/L$.

3.İzomorfizma Teoremi: Eğer K ve L, M'nin $K \leq L$ olacak şekilde birer altmodülleri ise o zaman $(M/K)/(L/K) \cong M/L$.

Bu çalışma boyunca aksi belirtilmediği sürece halkalar birimli ve birleşmeli, tüm modüller birimsel sol R-modül olarak kabul edilecektir. Ayrıca çalışmada yer alan tanım ve özelliklerle ilgili detaylı bilgi için [5], [12], [27], [30], [49] ve [57] çalışmaları incelenebilir.

Tanım 2.1.38. [52] M bir sol R-modül ve X, M modülünün bir altkümesi olsun. M'nin X kümesini kapsayan bütün altmodüllerinin arakesitine *X tarafından üretilen altmodül* denir ve $< X >$ ile gösterilir. Burada X kümesinin elemanları, *$< X >$ altmodülünün üreteçleri* olarak adlandırılır. Eğer X sonlu elemana sahipse X'in ürettiği altmodüle bir *sonlu üretilmiş altmodül* denir. Ayrıca $X = \{x\}$ şeklinde tek elemanlı ise
$< \{x\} >$ kısaca $< x >$ kümesine bir *devirli (cylic) altmodül* adı verilir.
Eğer $M =< X >$ ve X sonlu ise M modülüne *sonlu üretilmiş R-modül* denir. Ayrıca burada X sonlu kümesi M'yi geren küme olarak da bilinir. $M =< m >$ olacak şekilde bir $m \in M$ varsa M modülüne *m tarafından üretilen bir devirli R-modül* denir.

Teorem 2.1.39. [52] *M bir R-modül ve X, M modülünün boş olmayan sonlu bir altkümesi olsun. Bu durumda*

$$< X >= \{r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_nx_n \mid r_1, r_2, ..., r_n \in R; x_1, x_2, ..., x_n \in X\}$$

biçimindedir.

Sonuç 2.1.40. [5] *M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. O zaman*

$$< m >= Rm = \{rm \mid r \in R\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.41. [61] R bir halka ve M bir R-modül olsun. $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$, M modülünün elemanlarının bir indislenmiş altkümesi olsun. I indis kümesinin her sonlu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ elemanları ve her $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ için $r_1x_{\alpha_1} + r_2x_{\alpha_2} + ... + r_nx_{\alpha_n} = 0$ olması $r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$ olmasını gerektiriyorsa $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ kümesine *doğrusal (lineer) bağımsızdır* denir.
R birimli bir halka ve M birimsel bir R-modül ise M'nin bir $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

altkümesinin M'yi germesi için gerek ve yeter koşul M'nin her bir m elemanının her $r_i \in R$ $(i = 1,2,...,n)$ için $m = x_1r_1 + x_2r_2 + ... + x_nr_n$ lineer kombinasyonu biçiminde yazılabilmesidir.

F bir R-modül olmak üzere F eğer lineer bağımsız $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ geren kümesine sahip ise (rankı I'nin kardinali olan) serbest $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ tabanına sahip bir *serbest (free) R-modül* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.42. [52] $\mathcal{U}$, sol R-modüllerin bir sınıfı ve M bir sol R-modül olsun. $\mathcal{U}$ sınıfında bir (sonlu) indislenmiş $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ kümesi var ve

$$\bigoplus_{\Lambda} U_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tam dizi ise M modülüne $\mathcal{U}$ ile *sonlu üretilmiştir* ya da $\mathcal{U}$, M'yi *sonlu üretir* denir. Eğer $\mathcal{U} = \{U\}$ tek elemanlı bir küme ise o zaman U, M'yi sonlu üretir.

Yani (sonlu) I kümesi için

$$U^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Burada M modülü *U-üreteçli (U-generated)* olarak da adlandırılır.

Tanım 2.1.43. [52] M bir R-modül ve $\{M_\lambda\}_\Lambda$, M modülünün altmodüllerinin bir ailesi olsun. Eğer

1. $M = \sum_\Lambda M_\lambda$ ve
2. $\forall\lambda \in \Lambda$ için $M_\lambda \cap (\sum_{\mu\neq\lambda} M_\mu) = \{0\}$

ise M modülüne $\{M_\lambda\}_\Lambda$ altmodüllerinin bir *iç direkt toplamı* veya sadece *direkt toplamı* denir ve $M = \bigoplus_\Lambda(M_\lambda)$ ile gösterilir. Bu durumda M_λ alt modüllerine M modülünün *direkt toplam terimleri (direkt toplananları)* denir.

Eğer M modülü sıfırdan farklı altmodüllerinin bir direkt toplamı şeklinde yazılamıyorsa M'ye *parçalanamaz (indecomposable) modül* denir. Eğer M modülü parçalanamaz modül değilse M modülü *parçalanabilir modül* olarak adlandırılır.

M bir R-modül ve $M = \bigoplus_{\Lambda}(M_{\lambda})$ olmak üzere indis kümesi özel olarak $\Lambda = \{1,2\}$ ise $M = M_1 \oplus M_2$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.44. [57] M bir sol R-modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. $M = N \oplus K$ olacak şekilde M modülünün bir K altmodülü var ise N ye M nin bir *direkt toplananı (direct summand) denir*. Ayrıca M sıfırdan farklı bir R-modül olmak üzere M nin sıfırdan ve kendisinden başka direkt toplananı yoksa M ye *direkt parçalanamaz (direct indecomposable) modül* denir.

Sonuç 2.1.45. [57, Corollary 3.4.11 (2)] R bir halka, M ve N sol R-modüller olsun. Bir $\beta : M \to N$, R-modül homomorfizması için aşağıdakiler denktir:

(1) β bir parçalanabilir epimorfizmadır.

(2) $\beta\gamma = 1_N$ olacak şekilde $\gamma : N \to M$ homomorfizması vardır.

Tanım 2.1.46. [57] Bir M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü N olsun. M nin N de içerilen sıfırdan ve N modülünden başka altmodülü yok ise N modülüne M nin bir *minimal altmodülü* denir.

Tanım 2.1.47. [57] Sıfırdan farklı bir M modülünün her N altmodülü için $N = 0$ veya $N = M$ ise M ye bir *basit (simple) modül* denir. Yani bir M modülü basit ise M, 0'dan farklı olup 0 ve kendisinden başka altmodülü yoktur.

Tanım 2.1.48. [57] $(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, M modülünün basit altmodüllerinin indislenmiş kümesi olsun. Eğer $M = \bigoplus\limits_{\Lambda} M_\alpha$ ise M modülüne *yarıbasit modül (semisimple module)* denir.

Teorem 2.1.49. [57] *Bir R-modül M için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M'nin her altmodülü basit (simple) altmodüllerin bir toplamıdır.*

(2) *M basit (simple) altmodüllerin bir toplamıdır.*

(3) *M basit (simple) modüllerin bir direkt toplamıdır.*

(4) *M'nin her altmodülü M'nin bir direkt toplananıdır.*

Tanım 2.1.50. [57] Teorem 2.1.49'deki şartları sağlayan bir R-modül M'ye *yarıbasit (semisimple) modül* denir.
R bir halka olmak üzere $_RR$ ve R_R bir yarıbasit modül ise R'ye *yarıbasit halka* denir.

Tanım 2.1.51. [57] N, M modülünün bir öz altmodülü olsun. M modülünün N altmodülünü kapsayan N modülünden başka hiçbir öz altmodülü yok ise N modülüne M nin bir *maksimal altmodülü* denir.

Modül kategorisinde maksimal altmodül, maksimal öz altmodül anlamındadır. Minimal altmodül ise minimal sıfırdan farklı altmodül anlamındadır. Örneğin M modülünün basit (simple) olması için gerek ve yeter koşul M'nin minimal ve 0 modülünün M'nin maksimal altmodülü olmasıdır.

Lemma 2.1.52. [57, Lemma 2.2.4] *M bir basit modül ise $\{0\}$, M modülünün maksimal altmodülüdür ve M'nin sıfırdan farklı her m elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir.*

Tanım 2.1.53. [5] Bir sol R-modül M için

$$\begin{aligned} RadM &= \bigcap \{\, K \leq M \;\mid\; K, M \;\; de \;\; maksimal \,\} \\ &= \sum \{\, L \leq M \;\mid\; L \ll M \,\} \end{aligned}$$

tanımlansın. Burada $RadM$, M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle *M modülünün radikali* denir.

Tanım 2.1.54. [82] R bir halka olsun. $Rad(_RR)$ ye, $_RR$ nin (Jacobson) radikali denir. $Rad(_RR)$, R nin iki yanlı idealidir ve $J(R)$ ile gösterilir.
Eğer M modülünün hiç bir maksimal altmodülü yoksa $Rad(M) = M$'dir.

Tanım 2.1.55. [5] M bir R-modül ve $\mathcal{L}$, M modülünün altmdoüllerinin bir kümesi olsun. $\mathcal{L}$ kümesindeki her

$$L_1 \leq L_2 \leq ... \leq L_n ...$$

zinciri için $L_{n+i} = L_n$ $(i = 1, 2, ...)$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$ kümesi artan zincir şartını (ACC) sağlar.

Bir M modülünün tüm altmodüllerinin kafesi $\mathcal{L}(M)$ artan zincir şartını sağlıyorsa M modülüne *nother (noetherian) modül* denir.

Benzer şekilde bir M modülünün $\mathcal{L}$ kümesindeki her

$$L_1 \geq L_2 \geq ... \geq L_n ...$$

zinciri için $L_{n+i} = L_n$ $(i = 1, 2, ...)$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$ kümesi azalan zincir şartını (DCC) sağlar.

Bir M modülünün tüm altmodüllerinin kafesi $\mathcal{L}(M)$ azalan zincir şartını sağlıyorsa M modülüne *artin (artinian) modül* denir.

Önerme 2.1.56. [5, Proposition 10.9] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

i. *M nother modüldür.*

ii. *M modülünün her altmodülü sonlu üreteçlidir.*

iii. *M modülünün altmodüllerinin boş kümeden farklı her altkümesi bir maksimal elemana sahiptir.*

Benzer durum artin modüller için aşağıdaki gibidir:

Önerme 2.1.57. [5, Proposition 10.10] *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

i. *M artin modüldür.*

ii. *M modülünün her bölüm modülü sonlu eşüreteçlidir.*

iii. *M modülünün altmodüllerinin boş kümeden farklı her altkümesi bir minimal elemana sahiptir.*

Sonuç 2.1.58. [5, Corollary 10.11] *M sıfırdan farklı bir modül olsun.*

(i.) *Eğer M artin modül ise o zaman M modülünün bir basit altmodülü vardır; hatta $Soc(M)$ bir essential altmodüldür.*

(ii.) *Eğer M modül ise o zaman M modülünün bir maksimal altmodülü vardır; hatta $Rad(M)$ bir superfluous altmodüldür.*

Teorem 2.1.59. [57, Theorem 6.1.2]

(I) *M bir sol R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M noetherdir.*

(2) *N ve M/N notherdir.*

(3) *M'nin altmodüllerinin her $N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant \ldots$ artan zinciri durağandır.*

(4) *M'nin her altmodülü sonlu üreteçlidir.*

(5) *I bir indis kümesi olmak üzere M'nin N_i altmodüllerinin her $\{N_i \mid i \in I\}$ kümesinde $\Sigma_{i\in I} N_i = \Sigma_{i\in I_0} N_i$ olacak şekilde sonlu bir $\{N_i \mid i \in I_0\}$ (yani sonlu $I_0 \subseteq I$) alt kümesi vardır.*

(II) *M bir sol R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *M artindir.*

(2) *N ve M/N artindir.*

(3) *M'nin altmodüllerinin her $N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3 \geqslant \ldots$ azalan zinciri durağandır.*

(4) *M'nin her bölüm modülü sonlu eşüreteçlidir.*

(5) *I bir indis kümesi olmak üzere M'nin N_i altmodüllerinin her $\{N_i \mid i \in I\}$ kümesinde $\bigcap_{i \in I} N_i = \bigcap_{i \in I_0} N_i$ olacak şekilde sonlu bir $\{N_i \mid i \in I_0\}$ (yani sonlu $I_0 \subseteq I$) alt kümesi vardır.*

Tanım 2.1.60. [57] M bir sol R-modül olsun. M nin her N altmodülü için $A + N = M$ olması durumunda $N = M$ oluyorsa A altmodülüne M de *small (superfluous) altmodül* denir ve $A \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.61. [31] R bir halka, M bir sol R-modül ve N, M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. Eğer M'nin 0'dan farklı her alt modülü ile N'nin arakesiti sıfırdan farklı ise N'ye M'nin bir *essential altmodülü* denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.
(Yani $0 \neq N \leq_e M \Leftrightarrow \forall 0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$.)
M bir R-modül ve N, M'nin bir essential altmodülü olsun. Bu durumda M'ye N'nin bir essential genişlemesi denir.

Her modül kendisinin bir essential altmodülüdür. Bir R-modül M'nin bu şekildeki essential genişlemesine *aşikar essential genişleme* denir. Bunun dışındaki diğer essential genişlemeler *öz (proper) essential genişleme* olarak adlandırılır.
$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi bir $\mathbb{Z}$-modül olarak düşünülürse $\mathbb{Z}$'nin bir essential genişlemesi olur.

Lemma 2.1.62. [59, Remark 3.27 (i)] *M ve N, $N \subseteq M$ olacak şekilde birer R-modül olsun. M modülünün N'nin bir essential genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul M'nin sıfırdan farklı herhangi bir m elemanı için $0 \neq rm \in N$ olacak şekilde R halkasında bir r elemanının var olmasıdır.*

Lemma 2.1.63. [59, Remark 3.27 (ii)] *K, L, M; $K \leq L \leq M$ olacak şekilde birer R-modül olsun. Eğer K, L'nin bir essential altmodülü ve L, M'nin bir essential altmodülü ise o zaman K, M'nin bir essential altmodülü olur. Yani essential altmodüller geçişlilik özelliğine sahiptir.*

2.2. Bazı İnjektif ve Projektif Modül Özellikleri

Tanım 2.2.1. [57] R bir halka ve U bir R-modül olmak üzere R-modüllerin her bir $\alpha : K \to M$ monomorfizması ve her bir $\beta : K \to U$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} & & U \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[u, dotted, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan (yani $\phi\alpha = \beta$ olacak şekilde) bir $\phi : M \to U$ homomorfizması varsa U'ya M'ye göre *injektif (injective) modül (veya U, M-injektiftir)* denir. Eğer U, bütün sol R-modüllere göre injektif ise U'ya bir *injektif modül* denir. $\{M_i \mid i \in I\}$, sol R-modüllerin bir sınıfı olmak üzere her farklı $i, j \in I$ eleman çifti için M_i, M_j-injektif oluyorsa M_i modüllerine *aralarında injektif (relative injective) modüller* denir. Özel olarak $U = M$ için M modülü M-injektif ise M'ye *quasi injektif modül* denir.

Teorem 2.2.2. [57, Theorem 5.3.1] *Bir sol R-modül Q için aşağıdakiler denktir:*

(1) Her $\xi : Q \to B$ monomorfizması parçalanabilir yani Gör(ξ), B de bir direkt toplanandır.

(2) Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde bir $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır. Yani

$$\begin{tikzcd} & & Q \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[u, dotted, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

(3) Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması için

$Hom(\alpha, 1_Q) : Hom_R(B,Q) \to Hom_R(A,Q)$ bir epimorfizmadır.

Tanım 2.2.3. [57] Teorem 2.2.2 de belirtilen denk koşullarından birini sağlayan bir ${}_RQ$ modülüne *injektif R-modül* denir.

Tanım 2.2.4. [57] M bir R-modül olsun. Eğer Q, injektif R-modül ve $\eta : M \to Q$ monomorfizması bir essential (large) monomorfizma ise η monomorfizmasına *M'nin bir injektif genişlemesi (injective hull)* denir.

Teorem 2.2.5. (Baer Kriteri) [57, Theorem 5.7.1] Bir ${}_RM$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul ${}_RR$'nin her sağ I ideali ve her $\rho : I \to M$ homomorfizması için $i : I \to R$ içerim dönüşümü olmak üzere $\rho = \tau i$ olacak şekilde bir $\tau :_R R \to M$ homomorfizması vardır.

Tanım 2.2.6. [34] M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere M'nin her φ endomorfizması için $\varphi(N) \subseteq N$ oluyorsa N'ye M'nin bir *fully invariant altmodülü* denir.

Eğer M modülü kendisinin tüm injektif genişlemelerinin bir fully invariant altmodülü ise M quasi-injektif modül olur [41].

Tanım 2.2.7. [57] R bir halka olsun. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere M_n R-modüllerin ve f_n modül homomorfizmalarının bir dizisi aşağıdaki biçimde verilsin:

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Eğer Gör(f_{n-1}) =Çek(f_n) sağlanıyorsa bu diziye bir *tam dizi* denir. Özel olarak

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

şeklindeki tam diziye bir *kısa tam dizi* denir.

Kısa tam dizide f homomorfizmasının birebir, g homomorfizmasının örten ve Gör(f) =Çek(g) olduğu açıktır.

Önerme 2.2.8. [31, Characterization p.8] *M,N,K,L birer R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *N, M-injektiftir.*

(ii) *Her* $f : E(M) \to E(N)$ *morfizması için* $f(M) \leq N$*'dir.*

(iii) *R-modüllerin* $0 \to K \to M \to L \to 0$ *biçimindeki tüm tam dizilerine göre* $Hom_R(-,N)$ *funktoru tamdır.*

(iv) *M'nin her U devirli altmodülü için N, U-injektiftir.*

Bu durumda her $0 \to K \to M \to L \to 0$ *tam dizisi için N, K-injektif ve L-injektif olur.*

Teorem 2.2.9. [57, Theorem 5.3.1] *Bir sol R-modül P için aşağıdakiler denktir:*
(1) Her $\xi : B \to P$ *epimorfizması parçalanabilir yani Çek*(ξ)*, B de direkt toplanandır.*
(2) Her $\beta : B \to C$ *epimorfizması ve her* $\psi : P \to C$ *homomorfizması için* $\psi = \beta\lambda$ *olacak şekilde bir* $\lambda : P \to B$ *homomorfizması vardır. Yani*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "\psi"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagram değişmelidir.
(3) Her $\beta : B \to C$ *epimorfizması için*
$Hom(1_P, \beta) : Hom_R(P,B) \to Hom_R(P,C)$ *bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.2.10. [57] Teorem 2.2.9 de belirtilen denk koşullardan birini sağlayan bir $_RP$ modülüne bir *projektif R-modül* denir.

Tanım 2.2.11. [57] M bir R-modül olsun. Eğer P projektif modül ve $\xi : P \to M$ epimorfizması bir small epimorfizma ise ξ epimorfizmasına *M'nin bir projektif örtüsü (projective cover)* denir.

Lemma 2.2.12. [59, Lemma 3.28] *Bir R-modül M'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul M'nin hiç bir öz essential genişlemesinin olmamasıdır.*

Lemma 2.2.13. [59, Lemma 3.29] *Herhangi bir R-modül M'nin bir maksimal essential genişlemesi vardır.*

Teorem 2.2.14. [59, Theorem 3.30] $N \leq M$ *olacak şekildeki R-modüller için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(1) *M, N'nin bir maksimal essential genişlemesidir.*

(2) *M hem N'nin bir essential genişlemesidir hem de bir injektif modüldür.*

(3) *M, N üzerinde minimal injektiftir.*

Tanım 2.2.15. [59] Teoerem 2.2.14'in denk koşullarından birini sağlayan M modülüne N'nin bir injektif genişlemesi (injective hull (envelope)) denir.

Bir M modülünün injektif genişlemesi $E(M)$ ile gösterilir. Lemma 2.2.13 ile herhangi bir M modülünün bir injektif genişlemesi vardır. Ayrıca injektif genişleme izomorfizma farkıyla tek türlüdür.

Önerme 2.2.16. [50, Proposition 3.5.6]

(i) *Herhangi* M_1 *ve* M_2 *modülleri için* $E(M_1 \oplus M_2) \cong E(M_1) \oplus E(M_2)$*'dir.*

(ii) *Eğer* $\varphi : M \to Q$ *bir monomorfizma ve* Q *bir injektif modül ise o zaman* $Q_1 \cong E(M)$ *olmak üzere* $Q = Q_1 \oplus Q_2$ *şeklindedir.*

2.3. Bazı Temel Tensör Çarpım Özellikleri

Şimdi de özellikle tezin üçüncü bölümünde işlenen flat modüllerin tanımında kullanılan tensör çarpımla ilgili aşağıdaki bazı tanım ve özellikleri verelim:

Tensör çarpım (başka halkalar üzerinde uygun koşullar altında olsa da) genel olarak bir A_R modülü ve bir ${}_RU$ modülünden yeni bir $A \otimes U$ $\mathbb{Z}$-modülünün oluşturulmasıdır. $A \otimes_R U$ tensör çarpımını tanımlamak için

$A \times U = \{(a,u) \mid a \in A, u \in U\}$; A ve U'nun çarpım kümesi,

$F = F(A \times U, \mathbb{Z})$ serbest (free) sol $\mathbb{Z}$-modülü (ya da sağ $\mathbb{Z}$-modülü, $\mathbb{Z}$ değişmeli olduğundan $\mathbb{Z}$ için yönün bir önemi yoktur) göstersin. Ayrıca K,

$D_1 = \{(a+a^{'},u)-(a,u)-(a^{'},u) \mid a,a^{'} \in A, u \in U\}$,

$D_2 = \{(a,u+u^{'})-(a,u)-(a,u^{'}) \mid a \in A, u,u^{'} \in U\}$,

$T = \{(ar,u)-(a,ru) \mid a \in A, u \in U, r \in R\}$

olmak üzere F'nin $D_1 \cup D_2 \cup T$ kümesi tarafından üretilen (bir $\mathbb{Z}$-modül olarak) altmodülü olsun. Verilen bu A, U, F modülleri ve K altmodülü ile tensör çarpım aşağıdaki biçimde tanımlanır:

Tanım 2.3.1. [57] R bir halka A_R bir sağ R-modül ve $_RU$ bir sol R-modül olmak üzere $A \otimes_R U := F/K$ ile tanımlı F/K bölüm modülüne R üzerinde A_R ile $_RU$'nin *tensör çarpımı* denir. F'nin (a,u) elemanının $F \to F/K$ 'ye tanımlı doğal epimorfizma altındaki görüntüsüne a ile u'nun tensör çarpımı denir ve $a \otimes u$ ile gösterilir.

$a \otimes u := (a,u) + K$ şeklinde tanımlıdır.

Tensör çarpımın R üzerinde tanımlı olduğu açıksa o zaman kısaca $A \otimes_R U$ yerine $A \otimes U$ yazılır. Tensör çarpımın aşağıdaki elementer özellikleri vardır:

Özellik 2.3.2. [57, Operational Rules 10.1.2]

1. $(a+a^{'}) \otimes u = a \otimes u + a^{'} \otimes u$,
2. $a \otimes (u+u^{'}) = a \otimes u + a \otimes u^{'}$,
3. $ar \otimes u = a \otimes ru$,
4. $0 \otimes u = a \otimes 0 = 0$,
5. $-(a \otimes u) = (-a) \otimes u = a \otimes (-u)$,
6. $(a \otimes u)z = (az) \otimes u = a \otimes (uz)$, $z \in \mathbb{Z}$

Tanım 2.3.3. [60] R değişmeli bir halka olsun. $E_1, ..., E_n$, F birer R-modül olsun. $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ n-çoklu doğrusal dönüşümlerin (multilineer map) modülü

$L^n(E_1,...,E_n;F)$ ile gösterilsin. (Her bir değişkende lineer (yani R-lineer) olan dönüşüme bir *çoklu doğrusal dönüşüm (multilineer map)* denir.)

Eğer $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ ve $g : E_1 \times ... \times E_n \to G$ birer multilineer dönüşümler ise $f \to g$ morfizması

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, dotted, "h"] \\ E_1 \times ... \times E_n \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir $h : F \to G$ homorfizması ile tanımlanabilir. Bu kategorideki (R-Mod da yer alan) bir objeye (modüle) R üzerinde $E_1,...,E_n$'nin bir *tensör çarpımı* denir.

Önerme 2.3.4. [60, Proposition 1.1] K, L ve M birer R-modül ve $k \in K, l \in L$ ve $m \in M$ olmak üzere $(k \otimes l) \otimes m \mapsto k \otimes (l \otimes m)$ olacak şekilde tek bir $(K \otimes L) \otimes M \to K \otimes (L \otimes M)$ izomorfizması vardır.

Bu önerme ile tensör çarpımın birleşme özelliğini sağladığı söylenir.

Önerme 2.3.5. [60, Proposition 1.2] M, N birer R-modül olsun. Bu durumda $m \in M$ ve $n \in N$ için $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ olacak şekilde tek bir $M \otimes N \to N \otimes M$ izomorfizması vardır.

Tensör çarpımın pek çok funktoriyel (functorial) özelliği vardır:

$i = 1,...,n$ için lineer dönüşümlerin bir $f_i : M_i^{'} \to M_i$ kolleksiyonunu göz önüne alalım. Burada çarpım üzerinde bir $\prod f_i : \prod M_i^{'} \to \prod M_i$ indirgeme dönüşümü elde edilir. Tensör çarpım içine kanonik dönüşüm ile $\prod f_i$ dönüşümü oluşturulacak olursa

$$\begin{tikzcd} M_1^{'} \times ... \times M_n^{'} \arrow[r] \arrow[d, "\prod f_i"] & M_1^{'} \otimes ... \otimes M_n^{'} \arrow[d, "T(f_1,...,f_n)"] \\ M_1 \times ... \times M_n \arrow[r] & M_1 \otimes ... \otimes M_n \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan $T(f_1,...,f_n)$ ile gösterilen bir indirgeme dönüşümü elde edilir. Bu ise T'nin funktoriyal olduğunu yani eğer $i=1,...,n$ için $f_i \circ g_i$ doğrusal (lineer) dönüşümlerin bir bileşkesi ise

$$T(f_1 \circ g_1,...,f_n \circ g_n) = T(f_1,...,f_n) \circ T(g_1,...,g_n)$$

ve

$$T(id,...,id) = id$$

olur.

Burada $T(f_1,...,f_n)$, $x_1^{'} \otimes ... \otimes x_n^{'} \in M_1^{'} \otimes ... \otimes M_n^{'}$ elemanını $f_1(x_1^{'} \otimes ... \otimes) f_n(x_n^{'})$ görüntüsüne eşleyen tek lineer dönüşümdür.

$$T : \prod_{i=1}^{n} L(M_i^{'}, M_i) \to L(\bigotimes_{i=1}^{n} M_i^{'}, \bigotimes_{i=1}^{n} M_i)$$

şeklinde düşünülebilir. T'nin çoklu doğrusal dönüşüm (multilineer map) olduğu açıktır.

$f : N^{'} \to N$ ve $g_1, g_2 : M^{'} \to M$ homomorfizmaları verilsin. O zaman $(f,g) \mapsto T(f,g)$ olmak üzere

$$T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2) \text{ ve}$$
$$T(f, ag_1) = aT(f, g_1)$$

özelikleri sağlanır.

Özel olarak N sabit bir modül seçilir ve modüllerden modüllere $\tau(M) = N \otimes M$ olacak şekildeki $\tau = \tau_F$ funktoru göz önüne alınırsa o zaman τ her bir $M^{'}, M$ modül çifti için $\tau(f) = T(id, f)$ ile formülize edilen bir

$$\tau : L(M^{'}, M) \to L(\tau(M^{'}), \tau(M))$$

doğrusal (lineer) dönüşümüne yükselir.

$T(f_1, ..., f_n)$ gösterimi yerine $f_1 \otimes ... \otimes f_n$ gösterimi de kullanılabilir.

2.4. Bazı İleri Modül Özellikleri

Tanım 2.4.1. [52] G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde en küçük n pozitif tam sayısına *a elemanın mertebesi* denir. Eğer G grubu toplamsal bir grup ise o zaman $a \in G$ için $n.a = e$ olacak şekilde en küçük pozitif n tam sayısına *a elemanının mertebesi* denir ve $n(a)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2. [52] G bir abel grup olsun. G_t= { $u \in G \mid n(u)$ *sonlu* } kümesi G nin bir altgrubudur. Bu altgruba G nin bir *burulmalı (torsion) altgrubu* denir.

Tanım 2.4.3. [52] G bir abel grup olsun ve G_t= { $u \in G \mid n(u)$ *sonlu* } kümesi verilsin. Eğer $G = G_t$ ise o zaman G abel grubuna *burulmalı (torsion) grup* denir.

Tanım 2.4.4. [47] M bir sol R-modül ve X, M'nin bir altkümesi olsun.
$Ann(X) = \{r \in R \mid \text{her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$ kümesine *X'in sıfırlayanı* denir ve bu küme R'nin bir sol idealidir. R halkasını belirtmek için $Ann_R(X)$ olarak yazılır.
M bir sol R-modül olduğundan belirtilmesi gerektiği durumda $Ann(X)$
yerine $l.Ann(X)$ yazılır.
$M = R$ durumunda sol R-modül olarak $_RR$'ye göre sıfırlayanlar tanımlanır. Böylece $X \subseteq R$ için $l.Ann(X) = \{r \in R \mid \text{her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$ sol sıfırlayan olarak tanımlanır. Sağ sıfırlayanlar da benzer şekilde
$r.Ann(X) = \{x \in M \mid \text{her } x \in X \text{ için } xr = 0\}$ şeklinde tanımlanır.
Ayrıca modüllerde var olan sıfırlayanlar aşağıdaki biçimde verilir:
M bir sol R-modül ve Y, R'nin bir alt kümesi ise M'de
$Ann_M(Y) = \{x \in M \mid \text{her } y \in Y \text{ için } yx = 0\}$ kümesi M modülünde Y'nin sıfırlayanıdır ve bu küme M'nin bir toplamsal alt grubudur. Bu sıfırlayan kümesi

$l.Ann_M(Y)$ biçiminde belirtilir. Sol R-modül M de R'nin bir sol idealinin sıfırlayanı M'nin bir altmodülüdür. Bir sağ modül üzerinde R halkasının bir sol idealinin sıfırlayanı benzer şekildedir.

Bir M modülünün bir elemanının ve kendisinin sıfırlayanı aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.4.5. [42] R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. Bir $m \in M$ için $Ann_R(m) = \{ r \in R \mid rm = 0 \}$ kümesine m nin R deki *sol sıfırlayanlarının kümesi* denir. Bu kümenin R de bir ideal olduğu açıktır. Bu ideal $Ann_R(m)$ ile de gösterilir. Ayrıca $Ann_R(M)$=$\{ r \in R \mid rM = 0 \}$ kümesine de *M'nin R'deki sıfırlayanı* denir. Burada $Ann_R(M)$ de R'nin bir idealidir. Bir $m \in M$ elemanı için eğer m nin sıfırlayanı R'nin sıfır ideali değil ise m ye M nin bir *burulmalı (torsion) elemanı* denir.

Tanım 2.4.6. [57] R bir tamlık bölgesi ve M bir sol R-modül olsun. $T(M) = \{ x \in M \mid Ann_R(x) \neq 0 \}$ kümesi bir altmodüldür. Bu altmodül M nin bir *burulmalı (torsion) altmodülü* olarak adlandırılır. Eğer $T(M) = M$ ise M'ye *burulmalı (torsion) modül* denir. Eğer $T(M) = 0$ ise M *burulmasız (torsion free) modül* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.7. [47] Bir R halkası üzerinde bir sol R-modül M için eğer $Ann_R(M) = 0$ ise M modülüne bir *sadık (faithful) R-modül* denir.
Sıfırdan farklı bir R halkası üzerinde bir sadık modül daima sıfırdan farklıdır. Ayrıca R-modül M'nin sıfırlayanı R halkasının bir idealidir ve $R/Ann(M)$ üzerinde her zaman bir sadık modül olur.

Teorem 2.4.8. [52, Theorem 2.1] *Birimli bir R halkasında birimsel bir R-modül F için aşağıdaki koşullar denktir:*
(1) F nin boş olmayan bir tabanı vardır.
(2) F, her biri sol R-modül olarak R ye izomorf olan devirli R-modüllerin bir ailesinin iç direkt toplamıdır.

(3) F, sol R-modül R nin kopyalarının bir direk toplamına R-modül olarak izomorftur.

(4) Aşağıdaki özellikleri sağlayan boş olmayan bir X kümesi ve bir $\iota : X \to F$ *fonksiyonu vardır:*

Herhangi bir birimsel R-modül A ve $f : X \to A$ *fonksiyonu verilsin. O zaman* $\bar{f}\iota = f$ *olacak şekilde bir tek* $\bar{f} : F \to A$*, R-modül homomorfizması vardır. Başka bir deyişle F, birimsel R-modüller kategorisinde bir serbest (free) objedir.*

Tanım 2.4.9. [52] Teoremin 2.4.8'in denk şartlarını sağlayan bir R halkası üzerindeki birimsel F modülüne X kümesi üzerinde bir *serbest (free) R-modül* adı verilir.

Tanım 2.4.10. [46] M, sıfırdan farklı bir R-modül olmak üzere M'nin sıfırdan farklı her altmodülü M'de essential ise M'ye bir *uniform modül* denir. Buna denk olarak M'nin sıfırdan farklı her iki altmodülünün arakesiti sıfırdan farklıdır. Yani $M \neq 0$ olmak üzere M'nin sıfırdan farklı her N, K altmodülü için $N \cap K \neq 0$ 'dır.

Tanım 2.4.11. [46] R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M, sıfırdan farklı altmodüllerinin bir sonsuz direkt toplamını içermez ancak ve ancak M, bazı $1 \leq i \leq n$ için $U_i \leq M$ uniform altmodülleri için $U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$ biçiminde bir essential altmodül kapsayacak şekilde negatif olmayan bir n tamsayısı vardır. Bu n tamsayısı M modülü için tek türlü olup n tamsayısına *sonlu uniform boyut* ya da *Goldie boyut (Goldie rank)* denir ve $udim(M)$ biçiminde gösterilir. Yani $udim(M) = n$'dir. Eğer $M = 0$ ise $udim(M) = 0$ yazılır.

Tanım 2.4.12. [12] R bir halka, M bir sol R-modül ve $udim(M)$, M'nin düzgün (Goldie) boyutunu göstermek üzere M'nin tüm A, B altmodülleri için

$$udim(A+B) = udim(A) + udim(B) - udim(A \cap B)$$

ise M'ye bir *dimension modül* denir .

Bir M modülünün her sonlu üreteçli altmodünün sonlu uniform boyutu varsa M'nin *sonlu yerel uniform boyutu* vardır denir.

Tanım 2.4.13. [31] R bir halka, M bir sol R-modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. Eger K'nin M'de hiçbir öz essential genişlemesi yoksa K'ye M'de bir *kapalı (closed) altmodül* denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir.
(Yani; $K \leq_c M \Leftrightarrow K \leq_e L \leq M \Rightarrow K = L$)

Tanım 2.4.14. R bir halka, M bir sol R-modül ve $N \leq M$ olsun. M modülünün N altmodülünü essential olarak içeren altmodüllerin ailesindeki maksimal K altmodülüne N'nin M'deki *kapanışı (closure)* denir.
Zorn Lemma yardımıyla M'nin her altmodülün M'de bir kapanışı vardır.

Tanım 2.4.15. [31] R bir halka, M bir sol R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. M modülünün H altmodüllerinin ailesinde $N \cap H = 0$ özelliğine sahip maksimal olan K altmodülüne N'nin M'deki *tümleyeni (complement)* denir.
Eğer M modülünün K, N'nin bir tümleyeni olacak şekilde bir N altmodülü varsa K'ye M'nin bir *tümleyen (complement) altmodülü* denir.
Zorn Lemma ile bir M-modülünün her alt modülünün M'de bir tümleyeni (complement) vardır.

Tümleyen (complement) altmodüllerin varlığı ile aşağıdaki denk özelliklere sahibiz:
Bir M modülünün $L \cap N = 0$ olacak şekildeki L ve N altmodüller için

(i) $L \leq K$ olacak biçimde N'nin M'de bir K tümleyeni (complement) vardır.

(ii) $K \oplus N$ direkt toplamı M'nin bir essential altmodülüdür ($K \oplus N \leq_e M$).

(iii) K, M'de kapalı (closed) altmodüldür.

Önerme 2.4.16. [63, Proposition 2.1] *Herhangi bir (quasi-) injektif R-modül M aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) *M modülünün her altmodülü M'nin bir toplananında essential altmodüldür (C_1).*

(ii) *Eğer M modülünün bir A altmodülü M'nin bir direkt toplananına izomorf ise o zaman A da M modülünün bir direkt toplananı olur (C_2).*

Ayrıca eğer M modülü (C_2) özelliğine sahipse;

(iii) *M_1 ve M_2, M modülünün $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak şekildeki direkt toplanan altmodülleri ise o zaman $M_1 \oplus M_2$ modülü de M'nin bir toplananı olur (C_3).*

Tanım 2.4.17. [63] M bir R-modül olmak üzere M, ($C1$) ve ($C2$) koşullarını sağlıyorsa M'ye *sürekli (continuous) modül*; ($C1$) ve ($C3$) koşullarını sağlıyorsa M'ye *quasi sürekli (quasi-continuous) modül* denir.

Bir R-modül M için aşağıdaki diyagram doğrudur:
M, injektif $\Rightarrow$ M, quasi-injektif$\Rightarrow$ M, continuous $\Rightarrow$ M, quasi-continuous $\Rightarrow$ M, ($C1$) şartını sağlar.

Tanım 2.4.18. [31] R bir halka ve M bir sol R-modül olsun.

1. Eğer M modülünün her kapalı (closed) altmodülü M'nin bir direkt toplananı ise M modülüne bir *extending modül*;
2. Eğer M modülünün her tümleyen (complement) altmodülü M'nin bir direkt toplananı ise M modülüne bir *$\mathcal{CS}$-modül* (CS:complement summand);
3. Bir M modülünün her altmodülü M'nin bir direkt toplananında essential ise M modülü *($C1$)* şartını sağlar denir.

Teorem 2.4.19. [31] *Tanım 2.4.18 de verilen özellikler denktir.*

Tanım 2.4.20. [24] R bir halka ve sol R-modüllerin R-Mod kategorisinde bir *$\mathcal{X}$ sınıfı* sıfır modülünü içeren ve izomorfizmalar altında kapalı R-modüllerin bir ailesini göstersin.

Eğer $_RM$ modülü $\mathcal{X}$ sınıfına ait ise $_RM$'ye bir *$\mathcal{X}$-modül* denir. $_RM$'nin $\mathcal{X}$ sınıfına ait $_RN$ alt modülüne bir *$\mathcal{X}$-altmodül* denir.

Tanım 2.4.21. [76] R bir halka ve $\mathcal{T}$, R-modüllerin bir sınıfı olmak üzere eğer $\mathcal{T}$;

1. Direkt toplamlar altında kapalı,
2. Homomorfik görüntü altında kapalı ve
3. Genişlemelere göre yani kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalı ise (yani modüllerin $0 \to N \to M \to K \to 0$ kısa tam dizisinde $N, K \in \mathcal{T}$ ise $M \in \mathcal{T}$'dir.)

bir *burulmalı (torsion) sınıf* olarak adlandırılır.
Diğer taraftan $\mathcal{F}$ =$\{F \in \mathcal{F}$ | her T $\in \mathcal{T}$ için Hom(T, F)= 0 } şeklinde tanımlı $\mathcal{F}$ sınıfına bir *burulmasız (torsion-free) sınıf* denir.

Uyarı 2.4.22. Burada $\mathcal{F}$ sınıfı

1. Altmodüller altında,
2. Direkt çarpımlar (dolayısıyla direkt toplamlar) altında ve
3. Genişlemelere göre yani kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalıdır (yani modüllerin $0 \to N \to M \to K \to 0$ kısa tam dizisinde $N, K \in \mathcal{F}$ ise $M \in \mathcal{F}$'dir).

Tanım 2.4.23. [76] $\mathcal{T}$ bir torsion sınıf ve $\mathcal{F}$ bir burulmasız (torsion-free) sınıf olmak üzere

1. τ=($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$) ikili sistemine bir *burulmalı (torsion) teori* ,
2. $\mathcal{T}$ sınıfı altmodüllere göre kapalı ise o zaman τ=($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$) sistemine bir *kalıtsal burulmalı (hereditary torsion) teori* denir.
3. Eğer $\mathcal{F}$ sınıfı homomorfik görüntü altında kapalıysa o zaman τ=($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$) sistemine bir *eş-kalıtsal burulmalı (co-hereditary torsion) teori* adı verilir.

Tanım 2.4.24. [76] τ bir torsion teori ve M_i'ler M modülünün $\mathcal{T}$-altmodülleri olmak üzere

1. $\tau(M) = \sum M_i \leq M$. M'nin maksimal $\mathcal{T}$-altmodülüdür.

2. Eğer τ(M)=M ise M modülüne bir *τ-burulmalı (τ-torsion) modül* ve
3. τ(M)=0 ise M'ye bir *τ-burulmasız (τ-torsion-free) modül* denir.

Tanım 2.4.25. τ=($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$) bir torsion teori ve M bir R-modül olsun. Eğer M'nin bir N altmodülü M modülünde essential ve $M/N \in \mathcal{T}$ ise N altmodülüne M modülünde *τ-essential altmodül* denir ve $N \leq_{\tau_e} M$ ile gösterilir.
(Bu tanımının orijinali 1965 yılında Tsai tarafından yapılmıştır. Bakınız [43].)

Tanım 2.4.26. Bu tanım kullanılarak burulmalı (torsion) teoriye göre extending modül tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

1. Eğer $N \leq M$ için N altmodülünün M modülünde hiçbir öz τ-essential genişlemesi yoksa N alt modülü M modülünde *τ-kapalıdır* denir ve $N \leq_{\tau_c} M$ ile gösterilir [27].
2. Eğer M'nin her τ-kapalı (closed) alt modülü M modülünün bir direkt toplananı ise M modülüne bir *τ-extending modül* denir [27].
3. M bir R-modül ve N, M modülünün bir altmodülü olsun. M modülünün N altmodülünü τ-essential alt modül olarak içeren bir τ-kapalı (closed) K altmodülüne N'nin M modülündeki τ-kapanışı (closure) denir [29], [30].
4. M bir R-modül olsun. M'nin her alt modülünün M modülünde tek bir τ-kapanışı varsa M modülüne bir *$\tau - UC$ modül* denir [29], [30].

Tanım 2.4.27. [31] M bir R-modül olmak üzere eğer M'nin kopyalarının her direkt toplamı extending ise M'ye *Σ-extending modül* denir.

Lemma 2.4.28. [28, Lemma 2.1] *τ bir torsion teori N ve K bir M modülünün altmodülleri olsun. O zaman aşağıdaki özellikler vardır:*

(i) *N, M modülünde τ-essential ise N, M modülünde essential altmodüldür.*

(ii) *N, K modülünde τ-essential ve K, M modülünde τ-essential ise N, M modülünde τ-essential altmodüldür.*

(iii) *N, M modülünün bir kapalı (closed) altmodülü ise N, M modülünün bir τ-kapalı (closed) altmodülüdür.*

(iv) *M, bir τ-extending modül ise M, extending modül olur.*

(v) *M bir τ-extending modül olsun. N altmodülünün M modülünde kapalı olması için gerek ve yeter şart N altmodülünün M modülünde τ-kapalı olmasıdır.*

(vi) *N, M modülünün bir direkt toplananı ise N, M modülünde τ-kapalı olur.*

3. PURE ALTMODÜLLERE GÖRE EXTENDING MODÜL ÖZELLİĞİ

Modül teoride pure altobjelere göre extending modülün bir genellemesi daha önce [8]'de verilmiştir. Bu bölümde extending modüller üzerine yapılan çalışmalar ışığında tanımlamış olduğumuz τ_s-kapalı altmodüller yardımı ile purely extending modüllerin torsion teoride bir genellemesi olan purely τ_s-extending modül yapısı oluşturuldu. Extending modül teoride yer alan klasik bazı temel özelliklerin ve teoremlerin, yeni tanımlanan purely τ_s-extending modüller için de varlığı gösterildi. Ayrıca extending modül teorideki halihazırda açık olan ayrışım problemi üzerinde çalışıldı. Yani purely τ_s-extending modüllerin direkt toplamının bazı şartlar altında purely τ_s-extending modül olduğu gösterildi. Burada flat modüllerin özellikleri kullanılarak purely τ_s-extending modüllerin bir karakterizasyonunu oluşturuldu. Ayrıca bir R halkasının semihereditary olması durumunda elde edilen karakterizasyon Teorem3.5.7'de halka sınıflandırması olarak verildi.

Burada genellemeye geçmeden önce çalışma için gerekli olan düz (flat) modüller ve pure altmodüllerle ilgili aşağıdaki temel tanım ve özellikler verilecektir:

3.1. Düz (Flat) Modüller ve Pure Altmodüller ile İlgili Temel Özellikler

Tanım 3.1.1. [83] F bir sol R-modül ve M, N birer sağ R-modül olsun. Her $\alpha : M_R \to N_R$ monomorfizması ve $1_F : F \to F$ birim homomorfizması için $\alpha \otimes 1_F : M \otimes_R F \to N \otimes_R F$ homomorfizması bir monomorfizma oluyorsa F modülüne bir *düz (flat) modül* denir. Daha genel olarak F bir düz (flat) sol R-modül olsun. Bu durumda sağ R-modüllerin her

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N$$

tam dizisi için

$$0 \longrightarrow M \otimes_R F \longrightarrow N \otimes_R F$$

dizisi tamdır yani, tensör funktor sağ R-modüllerin

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N$$

tam dizisini korur.

Önerme 3.1.2. [5] *M, N ve K birer sağ R-modül,*

$$0 \longrightarrow M_R \xrightarrow{\theta} N_R \xrightarrow{\phi} K_R \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi ve D bir sol R-modül olsun. Bu durumda $1_D : D \to D$ *birim dönüşüm olmak üzere* $\alpha = \theta \otimes 1_D$ *ve* $\beta = \phi \otimes 1_D$ *olarak alınırsa*

$$M \otimes_R D \xrightarrow{\alpha} N \otimes_R D \xrightarrow{\beta} K \otimes_R D \longrightarrow 0$$

dizisi tam olur.

Tanım 3.1.3. [5] ${}_RU$ ve M_R birer R-modül olmak üzere $-_R \otimes U$ funktoru M orta terimli tüm kısa tam dizilerin tamlığını koruyorsa ${}_RU$'ya *M modülüne göre düz (flat) modül (M-flat modül)* denir. Yani sağ R-modüllerin her

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi için

$$0 \longrightarrow K \otimes U \longrightarrow M \otimes U \longrightarrow L \otimes U \longrightarrow 0$$

dizisi tam oluyorsa U bir M-flat modül olur. Bu durumda açıkça U modülünün M-flat olması için gerek ve yeter koşul M'nin her K altmodülü için

$$0 \longrightarrow K_R \otimes U \longrightarrow M_R \otimes U$$

dizisinin tam olmasıdır.

Eğer ${}_RU$ modülü her sol R-modüle göre flat ise ${}_RU$'ya *düz (flat) sol R-modül* denir. Düz sağ modüller (flat right module) benzer şekilde tanımlıdır.

Önerme 3.1.4. [60] Bir sağ R-modül F için aşağıdaki durumlar denktir:

(i) Sol R-modüllerin her

$$N \longrightarrow M \longrightarrow K$$

tam dizisi için

$$F \otimes N \longrightarrow F \otimes M \longrightarrow F \otimes K$$

dizisi tamdır.

(ii) Sol R-modüllerin her

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi için

$$0 \longrightarrow F \otimes N \longrightarrow F \otimes M \longrightarrow F \otimes K \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

(iii) Her $0 \to N \to M$ birebir (injection) dönüşümü için

$$0 \longrightarrow F \otimes N \longrightarrow F \otimes M$$

dizisi tamdır.

Yukarıda verilen denk koşullardan birini sağlayan bir F modülü de *düz (flat) modül* olarak adlandırılır.

Lemma 3.1.5. (The Flat Test Lemma) [5, Lemma 19.17] *Bir M sol R-modülü için aşağıdaki durumlar denktir:*

(i) *M düz (flat) modüldür;*

(ii) *M modülü R_R-düzdür (flat);*

(iii) *R'nin bir (sonlu üreteçli) I sağ ideali için $\mu_I(a \otimes m) = am$ ile tanımlı olacak şekildeki $\mu_I : I_R \otimes M \to IM$ olan $\mathbb{Z}$-epimorfizması bir monomorfizmadır.*

Teorem 3.1.6. [83, Theorem 1.1.4] *Bir sol R-modül F için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *F düz (flat) modüldür.*

(2) *R'nin her (sonlu üreteçli) sağ I ideali için $r \in I$ ve $x \in F$ olmak üzere $\mu_I(r \otimes x) = rx$ olacak şekilde tanımlı $\mu_I : I \otimes_R F \to IF$ olan $\mathbb{Z}$-lineer dönüşümü injektiftir.*

Tanım 3.1.7. [5] R bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere R'nin her sonlu üreteçli I ideali için $IN = IM \cap N$ oluyorsa N altmodülüne M modülünün bir *pure altmodülü* denir ve $N \leq_p M$ ile gösterilir.
Bir M modülünün her direkt toplananının pure altmodül olduğu açıktır ancak tersi doğru değildir.

Tanım 3.1.8. [57] α bir monomorfizma olmak üzere her R-modül ${}_RM$ için $\alpha \otimes 1_M$ de bir monomorfizma oluyorsa α *pure monomorfizma* olarak adlandırılır.
N, M'nin bir altmodülü olmak üzere $i : N \to M$ içerim dönüşümü pure ise o zaman N, M'nin bir *pure altmodülü* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.9. [83] Sol R-modüllerin bir

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi verilsin. Her sağ R-modül A için

$$0 \longrightarrow A \otimes N \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow A \otimes L \longrightarrow 0$$

dizisi tam dizi oluyorsa

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

dizisine *pure tam dizi* denir. Burada N'ye M'nin bir *pure altmodülü* denir.

Teorem 3.1.10. [5, Lemma 19.18] [83, Theorem 1.1.5] *F bir düz (flat) sol R-modül olsun. Sol R-modüllerin bir $0 \to K \to F \to N \to 0$ tam dizisini göz önüne alalım. Bu durumda N'nin flat R-modül olması için gerek ve yeter koşul R'nin her (sonlu üreteçli) sağ I ideali için $IK = IF \cap K$ olmasıdır. Yani*
N düz (flat) modüldür $\Leftrightarrow$ K, F'nin bir pure altmodülüdür.

Sonuç 3.1.11. [57, Corollary 10.4.2] *Bir düz (flat) modülün her izomorfik görüntüsü de düz (flat) olur.*

Önerme 3.1.12. [73, Proposition 3.46] *R herhangi bir halka olsun. Bu durumda*

(i) *Sol R-modül R, bir düz (flat) sol R-modüldür.*

(ii) *I bir indis kümesi olmak üzere M_i $(i \in I)$ sol R-modüllerinin bir direkt toplamı olan $\bigoplus M_i$ modülünün düz (flat) olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için M_i modülünün düz (flat) olmasıdır.*

(iii) *Her projektif R-modül düz (flat) modüldür.*

Sonuç 3.1.13. [57, Corollary 10.4.6] M bir sol R-modül olmak üzere eğer M'nin her sonlu üreteçli altmodülü bir düz (flat) altmodül tarafından içeriliyorsa o zaman M bir düz (flat) modül olur.

Sonuç 3.1.14. [57, Corollary 10.4.7] Eğer bir $\alpha : A_R \to B_R$ homomorfizması ve bir ${}_RM$ modülü için

$$\alpha \otimes 1_M : A \otimes_R M \to B \otimes_R M$$

bir monomorfizma değilse o zaman A'nın $(\alpha \mid A_0) \otimes 1_M$ bir monomorfizma olmayacak şekilde bir sonlu üreteçli A_0 altmodülü vardır.

Bir $_RM$ modülünün düz (flat) olduğunu göstermek için yukarıda verilen Sonuç 3.1.14 yardımıyla A sonlu üreteçli olmak üzere $\alpha : A \to B$ monomorfizmasına kısıtlayabiliriz. Buradaki soru ihtiyaç duyulan test monomorfizmaları daha da kısıtlanıp kısıtlanmayacağıdır. Bu durumda injektif modüller ile Baer Kriteri'nin uygulanmasına dönmüş oluruz.
$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ modül sınıfında bir injektif eşüreteci yardımıyla injektif modüllere indirgeme gerçekleştirilir. $D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ olmak üzere $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ için $X^\circ :=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,D)$ şeklinde tanımlansın. Böylece X° de bir $\mathbb{Z}$-modül olur. M bir sağ R-modül olmak üzere $X =_R M$ için $\varphi \in M^\circ$, $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $(\varphi r)(m) = \varphi(rm)$ eşitliğini sağlayan M° bir sağ R-modül olur ve bu durumda M°, bir $\mathbb{Z}-R$-bimodül olarak düşünülebilir. Herhangi bir $\mu :_R M \to_R N$ dönüşümü için $\mu^\circ :=\mathrm{Hom}(\mu, 1_D) : N^\circ \to M^\circ$ olsun. Bu durumda $^\circ$, $_R\mathcal{M}$'den $\mathcal{M}_R$'ye bir sırayı tersine çeviren funktor (contravariant functor) olur.

Teorem 3.1.15. [57, Theorem 10.4.8] *Bir $_RM$ modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *$_RM$ flat modüldür.*

(2) *$i_I : I_R \to R_R$ içerim dönüşümü olmak üzere R_R'nin her sonlu üreteçli I sağ ideali için $i_I \otimes 1_M$ bir monomorfizmadır.*

(3) *X_R° =Hom$_{\mathbb{Z}}(M,D)$ bir R-modül olarak injektiftir.*

Teorem 3.1.15 ile $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ için bir sol R-modül M'nin flat olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$'nin injektif olmasıdır.

Lemma 3.1.16. [57, Lemma 10.5.1] *M bir flat sol R-modül N, M modülünün bir altmodülü, I, R halkasının bir sağ ideali ve* $i : I \to R$ *içerim dönüşümü verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:*

(i) $i \otimes 1_{M/N} : A \otimes_R (M/N) \to R \otimes_R (M/N)$ *dönüşümü bir monomorfizmadır.*

(ii) $N \cap IM = IN$*'dir.*

Lemma 3.1.17. (Five Lemma) [5, Lemma 3.15] $I = \{1,2,3,4,5\}$ *indis kümesi ve her* $i \in I$ *için* $f_i : X_i \to Y_i$ *olan R-modül homomorfizmalarının tam dizilerinden oluşan aşağıdaki değişmeli diagramı verilmiş olsun.*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

O zaman

(i) f_1 *bir epimorfizma ,* f_2 *ve* f_4 *birer monomorfizma ise* f_3 *bir monomorfizmadır.*

(ii) f_5 *bir monomorfizma,* f_2 *ve* f_4 *birer epimorfizma ise* f_3 *bir epimorfizmadır.*

(iii) f_1, f_2, f_4 *ve* f_5 *birer izomorfizma ise* f_3 *bir izomorfizmadır.*

Lemma 3.1.18. (Snake Lemma) [60, Lemma 9.1] *R-modüllerin aşağıdaki tam dizileri ile verilmiş değişmeli diagramı göz önüne alınırsa;*

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\alpha'"] & N \arrow[r, "\beta'"] & N'' & \end{tikzcd}$$

Bu durumda bir

$Çek(f) \to Çek(g) \to Çek(h) \to Eşçek(f) \to Eşçek(g) \to Eşçek(h) \to 0$

tam dizisi vardır.

Burada α eğer bir monomorfizma ise Çek$(f) \rightarrow$ Çek(g) dönüşümü de monomorfizmadır. Eğer β' bir epimorfizma ise Eşçek$(g) \rightarrow$ Eşçek(h) dönüşümü de bir epimorfizma olur.

Önerme 3.1.19. (The Snake Diagram) [11, Proposition 1] *Modüllerin tam dizileri ile verilen aşağıdaki değişmeli diyagramı göz önüne alalım.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & L \arrow[d, "h"] \\
M' \arrow[r, "\alpha'"] & N' \arrow[r, "\beta'"] & L'
\end{tikzcd}$$

Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) *h birebir ise*

$Gör(g) \cap Gör(\alpha') = Gör(\alpha' \circ f) = Gör(g \circ \alpha)$;

(ii) *f örten ise*

$Çek(g) + Gör(\alpha) = Çek(\beta' \circ g) = Çek(h \circ \beta)$

Sonuç 3.1.20. [11, Corollary 1] *Önerme 3.1.19'un sonucu olarak aşağıdaki özellikler vardır:*

(i) *α', f ve h bire-bir ise g bire-birdir.*

(ii) *β, f ve h örten ise g örtendir.*

Sonuç 3.1.21. [11, Corollary 2] *Önerme 3.1.19'un diğer bir sonucu olarak aşağıdakiler sağlanır:*

(i) *g bire-bir ve f, β örten ise o zaman h bire-birdir.*

(ii) *g örten ve h, α' bire-bir ise f örtendir.*

Pure altmodüllerin tez içinde ispatlarda kullanılan bazı temel özellikleri ispatsız olarak verilmiştir. Ancak teknik için Önerme 3.1.22'nin ispatı örnek olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Önerme 3.1.22. [36, Proposition 1.2] *M bir R-modül; A ve B, M'nin $A \leq B$ olacak şekildeki altmodülleri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:*

(i) *$A \leq_p B \leq_p M$ ise $A \leq_p M$'dir.*

(ii) *$A \leq_p M$ ise $A \leq_p B$'dir.*

(iii) *$B \leq_p M$ ise $B/A \leq_p M/A$'dır.*

(iv) *$A \leq_p M$ ve $B/A \leq_p M/A$ ise $B \leq_p M$'dir.*

(v) *Eğer A, M'de pure ise o zaman M'nin A'yı içeren altmodülleri ile M/A'nın altmodülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu durum pure altmodüllerin, pure altmodüllere karşılık geldiği anlamındadır.*

İspat:

(i) A, B'de pure altmodül olduğundan R'nin her sonlu üreteçli I ideali için $IA = IB \cap A$ ve B, M'de pure altmodül olduğundan benzer şekilde $IB = IM \cap B$ dir. Buradan yerine koyma ile
$IA = (IM \cap B) \cap A = IM \cap (B \cap A) = IM \cap A$ olur. Böylece $A \leq_p M$ elde edilir.

(ii) $A \leq_p M$ ise R'nin her sonlu üreteçli I ideali için $IA = IM \cap A$'dir. $IA \subseteq IB$ ve $IA \subseteq A$ olduğundan $IA \subseteq IB \cap A$ olur.
Diğer taraftan $IA \subseteq (IB \cap A) \subseteq (IM \cap A) = IA$ olduğundan $(IB \cap A) \subseteq IA$ olur.
Böylece $IA = IB \cap A$ elde edilir. Buradan A, B'de pure almodül olur.

(iii) B, M'de bir pure altmodül olsun. Bu durumda R'nin her sonlu üreteçli I ideali için $IB = IM \cap B$ olur. O halde $IB \subseteq IM$ ve $IB \subseteq B$'dir.
Burada $I(B/A) = I(M/A) \cap (B/A)$ olduğunu göstermeliyiz.
$IB \subseteq B$ olduğundan $I(B/A) \subseteq (B/A)$ olur $(*)$.
Ayrıca $B/A \leq M/A$ olduğundan $I(B/A) \subseteq I(M/A)$ olur $(**)$.
$(*)$ ve $(**)$ gereği $I(B/A) \subseteq I(M/A) \cap (B/A)$ olur.

Şimdi $\bar{x} \in I(M/A) \cap (B/A)$ alalım. Bu durumda $\bar{x} \in I(M/A)$ ve $\bar{x} \in B/A$ olur. Burada $a \in I$ ve $m + A \in M/A$ olmak üzere $\bar{x} = \sum a(m+A)$ şeklinde yazılabilir. O zaman $\bar{x} = \sum(am+A)$ olur. $\bar{x} \in B/A$ olduğundan $\bar{x} = \sum(am+A) \in B/A$ elde edilir. Buradan $am \in B$ olur. Ayrıca $am \in IM$ olduğundan $am \in B \cap IM$ elde edilir. Diğer taraftan B, M'nin bir pure altmodülü olduğu için $B \cap IM = IB$ ve böylece $am \in IB$ olur. Bu durumda $am + A \in I(B/A)$ olduğundan $\bar{x} = \sum(am+A) \in I(B/A)$ yani $\bar{x} \in I(B/A)$ elde edilir. Böylece $I(M/A) \cap (B/A) \subseteq I(B/A)$ olur. Burada çift yönlü kapsamadan $I(B/A) = I(M/A) \cap (B/A)$ yani B/A, M/A'da pure altmodül olur.

(iv) $A \leq_p M$ ve $B/A \leq_p M/A$ olsun. N bir R-modül olmak üzere aşağıdaki tam dizilerin değişmeli diagramını göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
N \otimes A \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d, "1"] & N \otimes B \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "b"] & N \otimes B/A \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
N \otimes A \arrow[r, "\upsilon'"] & N \otimes M \arrow[r, "\nu'"] & N \otimes M/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Eğer υ' ve c birer monomorfizma ise 1 bir monomorfizma olduğundan Sonuç 3.1.20 (i) gereği b bir monomorfizma olur. Böylece Tanım 3.1.8 ve Lemma 3.1.16 ile B, M modülünde purealtmodül olur.

(v) (iii) ve (iv)'ün açık bir sonucudur.

$\square$

Önerme 3.1.23. [36, Proposition 1.3] *R-modüller için $0 \to K \to L \to M \to 0$ bir tam dizi olsun. Bu durumda*

(i) *M bir düz (flat) modül ise K, L'de pure altmodül olur.*

(ii) *Eğer L düz (flat) ise (i)'nin tersi de sağlanır. Bu durumda K de aynı zamanda düz (flat) olur.*

(iii) *L düz (flat) modül ise o zaman K'nin L'de pure altmodül olması için gerek ve yeter koşul M'nin düz (flat) modül olmasıdır.*

(iv) *M düz (flat) modül ise L'nin K'yi içeren altmodülleri ile M'nin altmodülleri arasında birebir eşleme vardır.*

(v) *Eğer K, L'nin bir direkt toplananı ise o zaman K, L'de pure altmodül olur.*

Teorem 3.1.24. [36, Theorem 1.7] M bir sol R-modül ve P, M'nin bir altmodülü olsun. Aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

(1) M/P flat modüldür.

(1.a) P, M'nin pure altmodülüdür.

(2) R'nin tüm sağ I idealleri için $IM \cap P = IP$'dir.

(2.a) R'nin tüm sonlu üreteçli sağ I idealleri için $IM \cap P = IP$'dir.

(2.b) R'nin tüm esas sağ I idealleri için $IM \cap P = IP$'dir.

(3) Her $r \in R$ için $rM \cap P = rP$'dir.

Bu durumda
$(1) \Rightarrow (1.a) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (2.a) \Rightarrow (2.b) \Leftrightarrow (3)$
gerektirmeleri vardır.
Ayrıca M bir flat modül ise o zaman
$(1) \Leftrightarrow (1.a) \Leftrightarrow (2)$ gerektirmeleri sağlanır.

3.2. Singüler Modül ve Bazı Temel Özellikleri

K. Goodearl [46] çalışmasında nonsingüler modüller yardımıyla s-kapalı altmodülleri tanımlamıştır. Bu kısımda yapılan genellemeye ışık tutan bu tanımı vermeden önce yapılandırmamıza temel oluşturan aşağıdaki özellikler verilecektir:

Tanım 3.2.1. [46] R bir halka olmak üzere $\mathcal{L}e(R)$, R'nin tüm essential sol ideallerinin kümesini göstersin. Ayrıca I, R'nin bir sol ideali ve $r \in R$ ise
$Ir^{-1} = \{x \in R \mid xr \in I\} = (I : r)$, R halkasının bir sol idealidir.

Önerme 3.2.2. [46, Proposition 1.19] *Bir R halkası için aşağıdaki özellikler vardır:*

(i) *$R \in \mathcal{L}e(R)$'dir.*

(ii) *Eğer $I \leq J \leq_R R$ ve $I \in \mathcal{L}e(R)$ ise o zaman $J \in \mathcal{L}e(R)$ olur.*

(iii) *Eğer $I, J \in \mathcal{L}e(R)$ ise $I \cap J \in \mathcal{L}e(R)$ olur.*

(iv) *Eğer $I \in \mathcal{L}e(R)$ ve $r \in R$ ise o zaman $Ir^{-1} \in \mathcal{L}e(R)$ olur.*

Tanım 3.2.3. [46] R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere

$$Z(M) = \{m \in M \mid Ann(m) \leq_e R\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $Z(M)$, M'nin bir altmodülüdür ve M'nin *singüler altmodülü* olarak adlandırılır.
Eğer $Z(M) = M$ ise M modülüne *singüler (tekil) modül* denir.
Eğer $Z(M) = 0$ ise M modülü *nonsingüler modül* adını alır.
Ayrıca R halkasının bir nonsingüler sol R-modül olması için gerek ve yeter şart $Z({}_RR) = 0$ olmasıdır. Bu durumda R'ye bir *sol nonsingüler halka* denir. Eğer $Z({}_RR) = R$ ise R halkası *sol singüler halka* olarak adlandırılır. (Diğer taraftan R halkasının 0 olmadığı durumlarda R halkası asla singüler modül olamaz.)
Burada değişmeli olmayan halkalar üzerinde sağ ve sol nonsingülerliğin denk ifadeler olmadığını belirtmeliyiz.
Ayrıca $R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olarak alınırsa $\mathbb{Z}$'nin sıfırdan farklı her ideali $\mathbb{Z}$'de essential olduğundan $\mathcal{L}e(\mathbb{Z})$ kümesi $\mathbb{Z}$'nin sıfırdan farklı tüm ideallerinin kümesi

olur. $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde bir M modülü ve M'de bir x elemanı verilsin. Bu durumda $x \in Z(M)$ olması için gerek ve yeter koşul bir n pozitif tamsayısı için $(n\mathbb{Z})x = 0$ yani x elemının sonlu mertebeli olmasıdır. Buradan aşağıdaki özelliklere sahibiz:

(i) $Z(M)$, M'nin torsion altgrubudur.

(ii) M'nin singüler olması için gerek ve yeter koşul M'nin bir torsion grup olmasıdır.

(iii) M'nin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul M'nin bir torsion-free grup olmasıdır.

Özel olarak ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ nonsingüler modül ve dolayısıyla $\mathbb{Z}$ bir nonsingüler halkadır. (Benzer özellikler herhangi bir tamlık bölgesi için de geçerlidir.)

Uyarı 3.2.4. Burada singüler ifadesinin karşılığı tekil olarak verilebilir. Ancak singüler olmayan bir modül, tanımlanışı gereği tam olarak nonsingüler modüle karşılık gelmemektedir. Yani "Bir M modülü singüler değilse nonsingülerdir." ifadesi doğru değildir. Dolayısıyla nonsingüler modüle tekil olmayan modül diyemeyiz. Bu sebeple tez içerisinde teknik olarak singüler modül ve nonsingüler modül terimleri kullanılmıştır.

Tanım 3.2.5. [46] M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere M/N bir nonsingüler modül ise N'ye M'nin bir *s-kapalı (s-closed) altmodülü* denir. M'nin herhangi bir N altmodülü için M'nin N'yi içeren en küçük s-kapalı K altmodülüne N'nin M'deki *s-kapanışı (s-closure)* denir.

Önerme 3.2.6. [46, Proposition 2.3] $Z(R) = 0$ *olduğunu kabul edelim.* $N \leq M$ *birer sol R-modül ve K, N altmodülünün M'deki s-kapanışı olsun. Bu durumda*

(i) $K/N = Z(M/N)$

(ii) *K, M modülünün* $N \leq K$ *ve* K/N *singüler olacak şekildeki tek s-kapalı altmodülüdür.*

(iii) *Eğer M nonsingüler bir modül ise o zaman K, M modülünün $N \leq_e K$ olacak şekildeki tek s-kapalı altmodülüdür.*

Önerme 3.2.7. [46, Proposition 2.4] *M'nin her s-kapalı altmodülü M'de bir kapalı altmodüldür. Eğer M nonsingüler modül ise M'nin her kapalı altmodülü M'nin bir s-kapalı altmodülü olur.*

3.3. Torsion Teoriye Göre Purely Extending Modüller

Bu kısımda aksi belirtilmedikçe halkalar birimli ve birleşmeli; modüller sol modül kabul edilecektir.

Bu bölümde J. Clark'ın [15] ile B.H. Al-Bahrani'nin [2] çalışmasında yer alan bazı özellikler kullanılarak yeni tanımladığımız τ_s-kapalı (τ_s-closed) altmodül yardımıyla bir burulmalı (torsion) teoriye göre genelleştirilmiş purely τ_s-extending modülün tanımı verilmiştir. Ayrıca τ_s-kapalı (closed) altmodül ve purely τ_s-extending modülün teoride sağladığı temel özellikler elde edilmiştir.

Tanım 3.3.1. [15] M bir R-modül olmak üzere M'nin her altmodülü M'nin bir pure altmodülünde essential ise M'ye bir *purely extending modül* denir. Herhangi bir extending modülün purely extending olduğu açıktır.

Lemma 3.3.2. [40], [15, Lemma 1.1] *Herhangi bir R-modül M için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *M bir purely extending modüldür.*

(ii) *M'nin her kapalı altmodülü M'de pure altmodüldür.*

(iii) *Eğer A, M'nin injektif genişlemesi $E(M)$'nin bir direkt toplananı ise o zaman $A \cap M$ kesişimi M'nin bir pure altmodülüdür.*

Tanım 3.3.3. [2] M bir R-modül olmak üzere eğer M'nin her s-kapalı altmodülü M'nin bir pure altmodülü oluyorsa M'ye bir *purely s-extending modül* denir.

M bir purely extending modül olmak üzere M'nin bir purely s-extending modül olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir.([2, Example (1.2)])

Uyarı 3.3.4. [2]'de kullanılan y-kapalılık K. Goodearl'in Tanım 3.2.5'te verdiği biçimdedir. K. Gooderal s-kapalı altmodül tanımını nonsingüler modül özelliği ile verdiğinden [2]'de, s-kapalı altmodül sembolünün yanlış anlaşıldığı ve s-kapalılık yerine y-kapalılık; purely s-extending yerine purely y-extending ifadelerini kullandıkları kanaatindeyiz. Bu sebeple bu çalışmada s-kapalı altmodül ve purely s-extending modül kavramları kullanılmıştır.

Tanım 3.3.5. [46] R bir halka ve I, R halkasının bir sol ideali olsun. I bir R-modül olarak ${}_RR$ modülünde τ-essential ise I idealine R halkasının *τ-essential ideali* denir ve $I \leq_{\tau_e} R$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.6. [71] R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere

$$Z_\tau(M) = \{m \in M \mid Ann(m) \leq_{\tau_e} R\}$$

ile tanımlansın. Eğer $Z_\tau(M) = M$ ise M'ye *τ-singüler modül* denir. Eğer $Z_\tau(M) = 0$ ise M *τ-nonsingüler modül* olarak adlandırılır.

Şimdi çalışmamızın temelini oluşturan aşağıdaki iki yeni tanımlama verilebilir:

Tanım 3.3.7. M bir R-modül ve N, M modülünün bir altmodülü olmak üzere M/N bölüm modülü bir τ-nonsingüler modül ise N altmodülüne M'nin bir *τ_s-kapalı (closed) altmodülü* denir ve $N \leq_{\tau_s c} M$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.8. M bir R-modül olmak üzere M modülünün her τ_s-kapalı (closed) altmodülü M modülünde pure oluyorsa M modülüne *purely τ_s-extending modül* denir. Kısaca p_{τ_s}-extending ile gösterilir.

Burada özel kapalı altmodül ve bu altmodül yardımıyla tanımlanan yeni extending modül; nonsingülerlik kavramı ile ilişkili olduğu için sembollerde τ_s gösterimi kullanımı tercih edilmiştir.

Lemma 3.3.9. *R bir τ-torsion halka olsun. N, M modülünde τ_s-kapalı bir altmodül ise o zaman N, M'de kapalıdır.*

İspat: N, M modülünde τ_s-kapalı bir altmodül olsun. Bu durumda M/N bölüm modülü τ-nonsingüler yani $Z_\tau(M/N) = 0$ olur. R bir τ-torsion halka olduğundan $Z_\tau(M/N) = Z(M/N)$ olur. N altmodülünün M modülünde kapalı olmadığını kabul edelim. Bu durumda M modülünün N altmodülünü essential olarak içeren bir K altmodülü vardır. O halde K/N bölüm modülü singüler olur [46]. Yani $Z(K/N) = K/N$ elde edilir. Diğer taraftan $Z(K/N)$, $Z(M/N)$ modülünün bir altmodülü ve $Z_\tau(M/N) = 0$ olduğundan ve böylece $Z(M/N) = 0$ olduğundan $Z(K/N) = 0$ yani K/N nonsingüler bulunur. Ancak K/N singüler olduğundan $K/N = 0$ elde edilir. Buradan $N = K$ olur ve dolayısıyla N, M'de bir kapalı altmodül olur. □

Sonuç 3.3.10. *R bir τ-torsion halka olmak üzere eğer M bir purely extending modül ise o zaman M purely τ_s-extending modül olur.*

İspat: M bir purely extending modül ve N, M modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü olsun. R bir τ-torsion halka olduğundan Lemma 3.3.9 ile N, M'nin bir kapalı altmodülü olur. [15, Lemma 1.1] gereği M modülünün her kapalı altmodülü M'de puredür. Buradan N, M'de pure altmodül olur. Böylece M bir purely τ_s-extending modül olur. □

Burada extending modül teorisindeki aşağıdaki temel özelliğe sahibiz:

Lemma 3.3.11. *$M = M_1 \oplus M_2$ bir purely τ_s-extending modül ise M_1 ve M_2 de birer purely τ_s-extending modüldür. Yani purely τ_s-extending bir modülün herhangi bir direkt toplananı da purely τ_s-extending modül olur.*

İspat: $M = M_1 \oplus M_2$ bir purely τ_s-extending modül ve N_1, M_1 modülünün τ_s-kapalı bir alt modülü olsun. Bu durumda $Z_\tau(M_1/N_1) = 0$ olur. İspat için N_1 altmodülünün M_1'de pure olduğunu göstermeliyiz. Bunun için öncelikle N_1 modülünün M modülünde τ_s-kapalı olduğunu yani (M/N_1) bölüm modülünün τ-nonsingüler olduğunu göstermeliyiz. Diğer bir deyişle $Z_\tau(M/N_1) = 0$ olduğunu ispatlamalıyız. (M/N_1) bölüm modülünün τ-nonsingüler olmadığını kabul edelim.
(Yani $Z_\tau(M/N_1) \neq 0$ olsun.)
Bu durumda $Ann(m+N_1) \leq_{\tau_e} R$ olacak şekilde $N_1 \neq m+N_1 \in M/N_1$ elemanı vardır. Diğer yandan $m \in M = M_1 + M_2$ olduğundan $m_1 \in M_1$ ve $m_2 \in M_2$ olmak üzere $m = m_1 + m_2$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

$$\begin{aligned} Ann(m+N_1) &= Ann((m_1+m_2)+N_1) = Ann(m_1+N_1+m_2+N_1) \\ &= Ann(m_1+N_1) \cap Ann(m_2+N_1) \end{aligned}$$

(Bakınız: [5, Proposition 2.16]).
Ayrıca $Ann(m+N_1) \leq_{\tau_e} R$ olduğundan yukarıdaki eşitlikten
$Ann(m_1+N_1) \cap Ann(m_2+N_1) \leq_{\tau_e} R$ olur. Buradan
$Ann(m_1+N_1) \cap Ann(m_2+N_1) \subseteq Ann(m_1+N_1) \subseteq R$ olduğundan
$Ann(m_1+N_1) \leq_{\tau_e} R$ bulunur. Bu ise $Z_\tau(M/N_1) \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $Z_\tau(M/N_1) = 0$ yani N_1, M modülünde τ_s-kapalı altmodül olur. Varsayım gereğince M bir purely τ_s-extending modül olduğu için N_1, M modülünde pure altmodül olur. Böylece Önerme 3.1.22 (ii) gereği N_1, M_1'de pure altmodül olur. O halde M_1 bir purely τ_s-extending modül olarak bulunur.
M_2 altmodülünün purely τ_s-extending olduğu benzer şekilde gösterilir. □

Sonuç 3.3.12. *I sonlu bir indis kümesi olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ bir purely τ_s-extending modül olsun. Bu durumda her $i \in I$ için M_i de purely τ_s-extending olur.*

İspat: Lemma 3.3.11 ile ispat açıktır. □

Lemma 3.3.13. *C bir R-modül olsun. C'nin bir τ-nonsingüler modül olması için gerek ve yeter koşul her τ-singüler R-modül A için $Hom_R(A,C)=0$ olmasıdır.*

İspat: Öncelikle C bir τ-nonsingüler modül ve A bir τ-singüler R-modül olmak üzere $f : A \longrightarrow C$ bir R-modül homomorfizması olsun. Bu durumda $f(A) = f(Z_\tau(A)) \leq Z_\tau(C)$ olur. Gerçekten $f(Z_\tau(A)) \leq Z_\tau(C)$ olduğunu gösterelim:

$x \in f(Z_\tau(A))$ ise $x = f(a)$ olacak şekilde $a \in Z_\tau(A)$ vardır. Buradan $Ann(a) \leq_{\tau_e} R$ olur. $r \in Ann(a)$ alırsak $rx = rf(a) = f(ra) = 0$ yani $r \in Ann(x)$ bulunur. Buradan $Ann(a) \leq Ann(x) \leq R$ olduğundan $Ann(x) \leq_{\tau_e} R$ bulunur. Yani $x \in Z_\tau(C)$ olur. Buradan hipotez gereği $Z_\tau(C) = 0$ olduğundan $f = 0$ yani $Hom_R(A,C) = 0$ bulunur.

Karşıt olarak her τ-nonsingüler A modülü için $Hom_R(A,C) = 0$ olsun. Özel olarak $Hom_R(Z_\tau(C),C) = 0$ olur. Buradan $Z_\tau(C) \longrightarrow C$ içerim dönüşümü sıfırdır. Böylece $Z_\tau(C) = 0$ yani C bir τ-nonsingüler modül olur. □

Lemma 3.3.14. *τ-nonsingüler modüllerin sınıfı kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalıdır. Yani*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

dizisinde C ve A birer τ-nonsingüler modüller ise B de bir τ-nonsingüler modül olur.

İspat: C ve A τ-nonsingüler iki modül olsun. Her τ-singüler M modülü için Lemma 3.3.13 ile $Hom_R(M,C) = 0$ ve $Hom_R(M,A) = 0$ olur. Böylece

$$0 \longrightarrow Hom_R(M,C) \longrightarrow Hom_R(M,B) \longrightarrow Hom_R(M,A) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinden $Hom_R(M,B) = 0$ elde edilir. Buradan B modülü yine Lemma 3.3.13 ile τ-nonsingüler olarak elde edilir. □

Şimdi aşağıdaki iki lemma sonuç olarak verilebilir:

Lemma 3.3.15. *M bir R-modül olmak üzere K, N'nin bir altmodülü olacak şekilde M'nin K ve N altmodülleri verilsin. Eğer K, N'nin bir τ_s-kapalı alt modülü ve N de M'nin bir τ_s-kapalı alt modülü ise bu durumda K, M modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü olur.*

İspat: K, N modülünde τ_s-kapalı ve N, M modülünde τ_s-kapalı bir altmodül olduğundan $Z_\tau(N/K) = 0$ ve $Z_\tau(M/N) = 0$ olur. Burada $Z_\tau(M/K) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi

$$0 \longrightarrow N/K \longrightarrow M/K \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini göz önüne alalım.

[46, Proposition 1.22.(a)] gereğince nonsingular modüllerin sınıfı kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalıdır. $Z_\tau(M/N) \subseteq Z(M/N) = 0$ olduğundan nonsingüler bir modül τ-nonsingüler olur. Lemma 3.3.14 ile τ-nonsingüler modüllerin sınıfı kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalı olduğundan

$$0 \longrightarrow N/K \longrightarrow M/K \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

dizisinde N/K ve M/N τ-nonsingüler iken M/K de τ-nonsingüler olur. Böylece $Z_\tau(M/K) = 0$ yani K, M modülünde bir τ_s-kapalı altmodül olur. □

Yukarıda verilen Lemma 3.3.15 ile τ_s-kapalı altmodüllerin geçişlilik özelliğini sağladığı söylenir.

Lemma 3.3.16. *M bir purely τ_s-extending modül ve N, M modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü ise N de purely τ_s-extending modüldür. Diğer bir deyişle purely τ_s-extending bir modülün τ_s-kapalı bir altmodülü de purely τ_s-extending olur.*

İspat: M bir purely τ_s-extending modül; N, M modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü ve K, M'de τ_s-kapalı altmodül olsun. Lemma 3.3.15 ile τ_s-kapalı altmodüller geçişlilik özelliğini sağladığından K, M'de τ_s-kapalı olur. M bir purely τ_s-extending modül olduğundan K, M'de pure altmodüldür.

Önerme 3.1.22 (ii) gereği K, N'de pure altmodül olur. Böylece N purely τ_s-extending modüldür. □

Kapalı altmodüllerin arakesitlerinin bir kapalı altmodül olması gerekmez [46, Example 1.6]. Ancak τ_s-kapalı altmodüller için aşağıdaki özellik sağlanır:

Önerme 3.3.17. *M bir R-modül ve N, K; M modülünün birer τ_s-kapalı altmodülleri olsun. Bu durumda $N \cap K$, M modülünün bir τ_s-kapalı alt modülü olur.*

İspat: M bir R-modül; N ve K, M modülünün birer τ_s-kapalı altmodülleri olsun. Bu durumda M/K ve M/N modülleri τ-nonsingüler olur. Yani $Z_\tau(M/N) = 0$ ve $Z_\tau(M/K) = 0$ olur. Şimdi $Z_\tau(M/(N \cap K)) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $Z_\tau(M/(N \cap K)) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Ann(\bar{m}) \leq_{\tau_e} R$ olacak şekilde $M/(N \cap K)$'nin sıfırdan farklı en az bir $\bar{m}$ elemanı vardır. Burada $\bar{m} = m + (N \cap K)$ için $m \notin N \cap K$'dir. Diğer taraftan bu $m \in M$ için $\hat{m} = m + N \in M/N$ ve $\tilde{m} = m + K \in M/K$ elemanlarını seçelim.
$Ann(\bar{m}) \subseteq Ann(\hat{m})$ ve $Ann(\bar{m}) \subseteq Ann(\tilde{m})$'dir. Gerçekten $0 \neq r \in Ann(\bar{m})$ olsun. O zaman $r\bar{m} = 0$ yani $rm + (N \cap K) = N \cap K$ olur. O halde $rm \in N \cap K$'dir. Buradan $rm \in N$ ve $rm \in K$ bulunur. Böylece $rm + N = N$ ve $rm + K = K$ olduğundan $r\hat{m} = 0$ ve $r\tilde{m} = 0$ olur. Yani $r \in Ann(\hat{m})$ ve $r \in Ann(\tilde{m})$ bulunur. Böylece $Ann(\bar{m}) \subseteq Ann(\hat{m})$ ve $Ann(\bar{m}) \subseteq Ann(\tilde{m})$ elde edilir. Diğer taraftan $Ann(\bar{m}) \leq_{\tau_e} R$ olduğundan $Ann(\hat{m}) \leq_{\tau_e} R$ ve $Ann(\tilde{m}) \leq_{\tau_e} R$ elde edilir. Bu durumda $Z_\tau(M/N) = 0$ ve $Z_\tau(M/K) = 0$ hipotezinden $m \in N$ ve $m \in K$ yani $m \in N \cap K$ bulunur. Buradan $\bar{m} = m + (N \cap K) = N \cap K$ yani $\bar{m} = \bar{0}$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $Z_\tau(M/N \cap K) = 0$ olmalıdır. Böylece $N \cap K$, M'de τ_s-kapalı alt modül olur. □

Sonuç 3.3.18. *τ_s-kapalı altmodüllerin herhangi arakesiti de τ_s-kapalı olur.*

İspat: Önerme 3.3.17'nin açık bir sonucudur. □

Lemma 3.3.19. *M bir R-modül olmak üzere K, L'nin bir altmodülü olacak şekilde M'nin K ve L altmodülleri verilsin. Eğer L, M'nin bir τ_s-kapalı (closed) altmodülü ise L/K, M/K'nin bir τ_s-kapalı (closed) altmodülü olur.*

İspat: L, M'nin bir τ_s-kapalı altmodülü olsun. Bu durumda $Z_\tau(M/L) = 0$ olur. Diğer taraftan $(M/K)/(L/K) \cong M/L$ ve τ-nonsingüler modüller izomorfizmalar altında kapalı olduğundan $Z_\tau((M/K)/(L/K)) = 0$ olur. Yani L/K, M/K modülünde τ_s-kapalı olarak elde edilir. □

Lemma 3.3.20. *M bir R-modül olmak üzere M modülünün $K \leq L$ olacak şekilde altmodülleri verilsin. Eğer L/K, M/K bölüm modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü ise o zaman L, M modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü olur.*

İspat: L/K, M/K modülünün bir τ_s-kapalı altmodülü olduğundan $Z_\tau((M/K)/(L/K)) = 0$ olur. Buradan $(M/K)/(L/K) \cong M/L$ ve τ-nonsingüler modüller izomorfizma altında kapalı olduğundan $Z_\tau(M/L) = 0$ yani L, M'de τ_s-kapalı altmodül olduğu elde edilir. □

Önerme 3.3.21. *M bir purely τ_s-extending R-modül ve N, M'nin bir τ_s-kapalı altmodülü olsun. Bu durumda M/N bölüm modülü de purely τ_s-extending modül olur.*

İspat: M bir purely τ_s-extending R-modül ve N, M'nin bir τ_s-kapalı alt modülü olsun. Bu durumda N, M'de pure olur. $N \leq K \leq M$ için K/N, M/N'de τ_s-closed bir altmodül olsun. $(M/N)/(K/N) \cong M/K$ ve τ-nonsingüler modüller izomorfizmalar altında kapalı olduğundan $Z_\tau(M/K) = 0$ olur. Yani K, M'de τ_s-kapalı altmodüldür. Hipotez gereği M purely τ_s-extending bir modül olduğundan K, M'de pure olur. Önerme 3.1.22 (iii) gereğince K/N, M/N'de pure ve böylece tanım gereği M/N

purely τ_s-extending modül olur. □

Tanım 3.3.22. [74] Bir M modülünün bir N altmodülünün kapanışı Temel Tanım ve Özellikler bölümünde Tanım 2.4.14 'te verilmiştir. Her alt modülünün tek bir kapanışı olan modüllere *UC (unique closure)- modül* denir.

Torsion teoriye göre kapalı (closed) altmodüller ve UC-modüllerin sınıflandırılması [29] ve [30] çalışmalarında verilmiştir. Burada torsion teoriye göre kapalı (closed) modüllerin başka bir genellemesi aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 3.3.23. M bir R-modül ve N, M modülünün bir altmodülü olmak üzere M'nin N'yi kapsayan en küçük τ_s-kapalı K altmodülüne N'nin M'deki *τ_s-kapanışı (closure)* denir. N'nin τ_s-kapanışı $N^{-\tau_s}$ ile gösterilir.

Lemma 3.3.24. *M bir R-modül olmak üzere M modülünün her altmodülünün M'de bir τ_s-kapanışı vardır.*

İspat: M, bir R-modül ve A, M'nin bir altmodülü olsun.

$\mathcal{S} = \{K \leq M \mid N \leq K$ ve $K \leq_{\tau_s c} M\}$ kümesini tanımlayalım. $Z_\tau(M/M) = 0$ olduğundan M, M'de τ_s-kapalı bir altmodülü olur yani $M \in \mathcal{S}$'dir. Buradan $\mathcal{S}$ boş kümeden farklıdır. Şimdi $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$'de bir zincir olsun. $C = \bigcap_{K_i \in \mathcal{C}} K_i$ alalım. Sonuç 3.3.18 gereğince C, M'de τ_s-kapalı olur. O zaman $C \in \mathcal{S}$ olur. Bu durumda Zorn Lemma ile $\mathcal{S}$'nin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana H dersek H, N'nin M'deki τ_s-kapanışına karşılık gelir. □

Tanım 3.3.25. M bir R-modül olmak üzere M'nin her N altmodülünün M'de tek bir τ_s-kapanışı varsa M'ye bir *τ_s-UC modül* denir.

Önerme 3.3.26. *R bir τ-torsion halka ise her R-modül bir τ_s-UC-modül olur.*

İspat: M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere N'nin M'de K ve L gibi iki τ_s-kapanışı var olsun. Yani $N \leq K \leq_{\tau_s c} M$ ve $N \leq L \leq_{\tau_s c} M$ olsun. Bu durumda $Z_\tau(M/K) = \overline{0} = K$ ve $Z_\tau(M/L) = \overline{0} = L$ olur.

İddia: $Z_\tau(M/(K \cap L)) = \overline{0} = K \cap L$.

$Z_\tau(M/(K \cap L)) \neq \overline{0}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Z_\tau(M/(K \cap L)) = \{m + (K \cap L) \mid Ann(m + (K \cap L)) \leq_{\tau_e} R\} \neq K \cap L$ olur. O halde tanım gereği $Ann(m + (K \cap L)) \leq_{\tau_e} R$ olacak şekilde bir $m \notin K \cap L$ vardır. Burada $r \in Ann(m + (K \cap L))$ ise $rm \in K \cap L \subseteq K$ olur. Buradan $r \in Ann(m + K)$ elde edilir. O halde $Ann(m + (K \cap L)) \subseteq Ann(m + K)$ olur. Benzer şekilde $Ann(m + (K \cap L)) \subseteq Ann(m + L)$ olduğu gösterilebilir. Böylece $Ann(m + K) \leq_e R$ ve $Ann(m + L) \leq_e R$ olacak şeklde $m \notin (K \cap L)$ olduğu görülür. Yani $Ann(m + K) \leq_e R$ ve $Ann(m + L) \leq_e R$ olacak şeklde $m \in (K \cap L)'$ vardır. Buradan $m \notin K$ veya $m \notin L$ olur. Diğer taraftan R bir τ-torsion halka olduğundan $R/Ann(m + K) \in \mathcal{T}$ ve $R/Ann(m + L) \in \mathcal{T}$ olacağından $Ann(m + K) \leq_{\tau_e} R$ ve $Ann(m + L) \leq_{\tau_e} R$ olacak şekilde $m \notin K$ veya $m \notin L$ vardır. Bu durum ise $Z_\tau(M/K) = K$ ve $Z_\tau(M/L) = L$ hipotezi ile çelişir. O halde $Z_\tau(M/(K \cap L)) = K \cap L$ olmalıdır. Böylece $M/(K \cap L)$ bölüm modülü τ-nonsingüler ve buradan $K \cap L$, M'de τ_s-kapalı (closed) altmodül olur. Ayrıca $N \leq (K \cap L)$ olduğundan $K \cap L$, N'nin M'de bir τ_s-kapanışı olur. Ancak K ve L bu özellikteki minimal altmodüller olduğundan $K \cap L = K$ ve $K \cap L = L$ elde edilir. Sonuç olarak $K = L$ olur. Yani N'nin M'de tek bir τ_s-kapanışı vardır. Bu durumda M bir τ_s-UC-modül olur. □

3.4. Torsion Teoriye Göre Purely Extending Modülün Yapılandırılması

Bu kısımda purely τ_s-extending modüllerin karakterizasyonları farklı biçimlerde elde edilmiş olup çarpımsal modül, fully invariant modüller gibi bazı özel modüller ile yapılandırılması sergilenmiştir. Ayrıca flat ve semihereditary halkalar üzerinde purely τ_s-extending modüller karakterize edilmiştir.

Önerme 3.4.1. *M bir R-modül olmak üzere M'nin purely τ_s-extending modül olabilmesi için gerek ve yeter koşul M'nin her N altmodülünün τ_s-kapanışının ($N^{-\tau_s}$) M'de bir pure altmodül olmasıdır.*

İspat: M bir purely τ_s-extending modül olsun. O zaman M modülünün her τ_s-kapalı altmodülü M modülünde pure olur. Zorn Lemma kullanılarak M modülünün her N altmodülünün M'de bir τ_s-kapanışının var olduğu görülür. Böylece τ_s-kapanış tanımından $N^{-\tau_s}$ altmodülü de M'de τ_s-kapalı olur. Hipotez gereği $N^{-\tau_s}$ alt modülü M'de pure olur.

Karşıt olarak M'nin her N altmodülü için N'nin purely τ_s-kapanışı $N^{-\tau_s}$ altmodülünün M'de pure alt modül olduğunu kabul edelim. Diğer yandan K, M'de τ_s-kapalı bir altmodül olsun. Böylece τ_s-kapanış tanımından $K^{-\tau_s} = K$ olur. Hipotez gereği $K^{-\tau_s}$ yani K, M'de pure altmodül olur. Bu durumda M'nin herhangi bir τ_s-kapalı altmodülü M'de pure elde edilir. Böylece M bir purely τ_s-extending modül olarak bulunur. □

Teorem 3.4.2. *R bir τ-torsion halka, M bir R-modül, $E(M)$; M'nin injektif genişlemesi olmak üzere, M'nin purely τ_s-extending modül olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(M)$'nin $A \cap M$, M'de τ_s-kapalı altmodül olacak şekildeki her A direkt toplananı için $A \cap M$ altmodülünün M'de pure olmasıdır.*

İspat: R bir τ-torsion halka, M bir R-modül, $E(M)$,M'nin injektif genişlemesi ve M bir purely τ_s-extending modül olsun. Bu durumda $E(M)$'nin $A \cap M \leq_{\tau_s c} M$ olacak şekildeki her A direkt toplananı için $A \cap M$'nin M'de pure olduğu açıktır.

Karşıt olarak A, M'nin bir τ_s-kapalı altmodülü ve B, A'nın M'de bir tümleyeni olsun. Bu durumda $A \oplus B \leq_e M$ olur [46, Proposition 1.3]. Buradan açıkca $A \oplus B \leq_e E(M)$ olduğu görülür. Böylece $E(A) \oplus E(B) = E(A \oplus B) = E(M)$ elde edilir [47]. $A = A \cap M \leq_e E(A) \cap M$ olduğundan $(E(A) \cap M)/A$ bir singüler modül olur. Ayrıca R bir τ-torsion halka olduğundan $(E(A) \cap M)/A$ τ-singüler olur. Diğer taraftan $(E(A) \cap M)/A \leq M/A$ ve A, M'nin bir τ_s-kapalı altmodülü olduğundan

M/A τ-nonsingüler ve böylece $(E(A)\cap M)/A$ τ-nonsingüler olur. Bu durumda $(E(A)\cap M)/A = 0$ yani $E(A)\cap M = A$ elde edilir. A, τ_s-kapalı olduğundan $E(A)\cap M$ de M'de τ_s-kapalı olur. Burada $E(A)$, $E(M)$'nin bir direkt toplananı olduğundan hipotez gereği $E(A)\cap M$ de M'de pure alt modüldür. Yani A, M'de pure ve böylece M purely τ_s-extending modül olur. □

Teorem 3.4.3. *R bir τ-torsion halka, M bir R-modül ve $E(M)$,M'nin injektif genişlemesi olmak üzere $E(M)$'nin $A\cap M$, M'de τ_s-kapalı olacak şekildeki her A direkt toplananı için $A+M$ bir flat modül olsun. O zaman M bir purely τ_s-extending modüldür.*

İspat: $A\cap M$, M'de τ_s-kapalı altmodül olacak şekilde A, $E(M)$'nin bir direkt toplananını olsun. Aşağıdaki

$$0 \longrightarrow A\cap M \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{f_1} M/(A\cap M) \longrightarrow 0$$

ve

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} A+M \xrightarrow{f_2} (A+M)/A \longrightarrow 0$$

kısa tam dizilerini göz önüne alalım. Burada i_1, i_2 birer içerim dönüşümü ve f_1, f_2 birer doğal epimorfizmadır. A, $E(M)$ modülünün bir direkt toplananı olduğundan $E(M) = A\oplus A'$ olacak şekilde $E(M)$'nin bir A' altmodülü vardır. Bu durumda A, $A+M$'nin bir direkt toplananı olur. Gerçekten $A+M \leq E(M)$ olduğundan
$(A+M) = (A+M)\cap E(M) = (A+M)\cap(A\oplus A') = A\oplus[(A+M)\cap A']$
bulunur (Modüler Kuralından). Bu durumda

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} A+M \xrightarrow{f_2} (A+M)/A \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi de paraçalanabilir olur. Diğer taraftan $A+M$ flat ve flat modüllerin homomorfik görüntüleri de flat olduğundan $(A+M)/A$ flat olur. Diğer taraftan $M/(A\cap M)\cong(A+M)/A$ olduğundan $M/(A\cap M)$ bölüm modülü de flat olur. Burada Teorem 3.1.24 ile $A\cap M$, M'de pure bulunur. Böylece Teorem 3.4.2 gereğince M purely τ_s-extending modül olur. □

Tanım 3.4.4. [6] R değişmeli, birimli bir halka ve M birimsel bir R-modül olsun. M modülünün her N altmodülü için $N=IM$ olacak şekilde R halkasının bir I ideali varsa M modülüne bir *çarpımsal R-modül (multiplication R-module)* denir.
Bir M modülünün bir N altmodülü için

$$(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre M'nin bir çarpımsal R-modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin her N altmodülü için $N=(N:M)M$ olmasıdır.

Tanım 3.4.5. [16] M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere eğer

$$N=Hom(M,N)N=\Sigma\{\varphi(N)\mid \varphi:M\to N\}$$

biçiminde ise N'ye M'nin bir *idempotent altmodülü* denir.
Eğer M modülünün her altmodülü idempotent ise M *fully idempotent modül* olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen tanım ile aşağıdaki sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir:

(i) Her modül kendisinin bir idempotent altmodülüdür.

(ii) Bir modülün her direkt toplananı idempotent altmodüldür.

Teorem 3.4.6. [67, Theorem 2.11] *M bir çarpımsal R-modül ve $M=M_1\oplus M_2$, M_1 ve M_2 fully idempotent altmodüllerin bir direkt toplamı olsun. Bu durumda M modülü de bir fully idempotent modüldür.*

Önerme 3.4.7. [67, Proposition 2.12] *M bir çarpımsal R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Eğer M fully idempotent modül ise o zaman M/N de fully idempotent modül olur.*

Lemma 3.4.8. [67, Lemma 2.13] *M bir fully idempotent R-modül, N, M'nin bir altmodülü ve I, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda $N \cap MI = NI$ olur. Yani N, M'de bir pure altmodüldür.*

Burada fully idempotent altmodüller ile elde edilen aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.4.9. *R değişmeli bir halka, M bir çarpımsal R-modül ve $M = M_1 \oplus M_2$, M_1 ve M_2 fully idempotent altmodüllerin bir direkt toplamı olsun. Bu durumda M bir purely τ_s-extending modüldür.*

İspat: M bir çarpımsal R-modül ve N, M'nin bir τ_s-kapalı altmodülü olsun. Teorem 3.4.6 gereğince M bir fully idempotent R-modül olur. Yine Lemma 3.4.8 gereğince τ_s-kapalı N altmodülü M'de pure olur. Böylece M modülü purely τ_s-extending elde edilir. □

Tanım 3.4.10. *Bir R halkası bir R-modül olarak kendi üzerinde purely τ_s-extending ise R'ye purely τ_s-extending halka denir.*

Purely τ_s-extending bir modülün halka ile kısmi bir karakterizasyonunu belirten aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.4.11. *R değişmeli bir halka ve M bir sadık çarpımsal (faithful multiplication) R-modül olsun. ${}_RR$, purely τ_s-extending modül ise M de purely τ_s-extending modül olur.*

İspat: N, M'nin bir τ_s-kapalı alt modülü olsun. M çarpımsal bir R-modül olduğundan $N = (N:M)M$ yazılır.

İddia: $(N:M)$, ${}_RR$'de τ_s-kapalı bir altmodüldür.

Şimdi $(N:M)$'nin R'de τ_s-kapalı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $R/(N:M)$ τ-nonsingüler değildir. Yani $Z_\tau(R/(N:M)) \neq 0$ olur. O zaman $Ann(r+(N:M))$, R'de τ-essential olacak şekilde $R/(N:M)$'nin sıfırdan farklı en az bir $\bar{r}$ elemanı vardır. Buradan $\bar{r} = r+(N:M) \neq (N:M)$ olur. Bu durumda $rm_0 \notin N$ olacak şekilde en az bir $0 \neq m_0 \in M$ vardır.

Burada $Ann(r+(N:M)) \subseteq Ann(rm_0+N)$ olur: Gerçekten $s \in Ann(r+(N:M))$ olsun. O zaman $sr+(N:M) = (N:M)$ olur. Buradan $sr \in (N:M)$ elde edilir. Yani $(sr)M \subseteq N$ olduğu görülür. (*).

Şimdi $s \in Ann(rm_0+N)$ olduğunu gösterelim.

$s(rm_0+N) = srm_0+N$'dır. Ancak $(sr)M \subseteq N$ olduğundan ve (*) ile bir $m_0 \in M$ için $srm_0 \in N$ bulunur. Yani $srm_0+N = N$ olur. Buradan $s \in Ann(rm_0+N)$ olur. Böylece $Ann(r+(N:M)) \subseteq Ann(rm_0+N)$ elde edilir.

Diğer taraftan N, M'de τ_s kapalı olduğundan M/N τ-nonsingüler olur. Böylece $rm_0+N = N$ olur ki bu durum $rm_0 \notin N$ olması ile çelişir. Bunun sebebi $(N:M)$'nin R'de τ_s-kapalı olmadığı kabulüdür. Böylece $(N:M)$, R'de τ_s-kapalı olmak zorundadır. Ayrıca ${}_RR$ purely τ_s-extending olduğundan $(N:M)$ de R'de pure olur. Şimdi R'nin sonlu üreteçli bir I ideali için $IN = I(N:M)M = (I \cap (N:M))M = IM \cap (N:M)M = IM \cap N$ olur (Tanım 3.4.4). Buradan τ_s-kapalı N altmodülü M'de pure ve böylece M modülü purely τ_s-extending modül olur. □

Önerme 3.4.12. [15, Proposition 1.3] R bir nonsingüler halka olmak üzere R'nin purely extending olması için gerek ve yeter koşul her devirli nonsingüler R-modülün düz (flat) olmasıdır.

Önerme 3.4.13. *R bir düz (flat) halka olsun. ${}_RR$ purely τ_s-extending ise her devirli τ-nonsingüler R-modül düz (flat) olur.*

İspat: R bir düz (flat) halka olmak üzere ${}_RR$ purely τ_s-extending modül olsun. $a \in R$ olmak üzere $M = Ra$, a tarafından üretilen bir devirli τ-nonsingüler

R-modül olsun. $f : R \to M$, $f(r) = ra$ dönüşümünü tanımlayalım. Burada f'nin örten homomorfizma olduğu ayrıca Çek$(f) = Ann(a)$ olduğu açıktır. Buradan $R/$Çek$(f) = R/Ann(a) \cong Ra$ olur. Ayrıca Ra, τ-nonsingüler modül ve τ-nonsingüler modüller izomorfizmalar altında kapalı olduğundan $R/Ann(a)$ τ-nonsingüler bulunur. Böylece $Ann(a)$, R'de τ_s-kapalı olur. Hipotez gereği $Ann(a) =$Çek(f), R'de pure olur. R düz (flat) ve Çek(f) pure olduğundan Teorem 3.1.10 gereğince $R/$Çek$(f) \cong M$ düz (flat) yani Ra düz (flat) olur. □

Önerme 3.4.13'ün tersi aşağıda verilmiştir:

Önerme 3.4.14. *R bir esas ideal bölgesi ve düz (flat) halka olsun. Her τ-nonsingüler R-modül düz (flat) ise R purely τ_s-extending olur.*

İspat: K, R'nin bir τ_s-kapalı ideali olsun. O zaman R/K τ-nonsingüler olur. R, *PID* olduğundan R'nin her ideali esas ideal ve buradan R/K bölüm halkası da *PID* olur. Böylece kendisi yani R/K devirli olur. Hipotez gereği R/K düz (flat) olacağından Teorem 3.1.10 gereğince K, R'de pure bulunur. Böylece R purely τ_s-extending olur. □

Teorem 3.4.15. *R bir esas ideal bölgesi ve düz (flat) halka olsun. Bu durumda $_RR$'nin purely τ_s-extending modül olabilmesi için gerek ve yeter koşul her devirli (cyclic) τ-nonsingüler R-modülün düz (flat) olmasıdır.*

İspat: Önerme 3.4.13 ve Önerme 3.4.14 kullanılarak kolayca görülebilir. □

Tanım 3.4.16. [76] R birimli bir halka olmak üzere R'nin her sol (sağ) ideali projektif ise R'ye bir *sol (sağ) kalıtsal (hereditary) halka* denir. Eğer R halkasının her sonlu üreteçli sol (sağ) ideali projektif ise R'ye bir *sol (sağ) yarıkalıtsal (semi-hereditary) halka* denir.

Teorem 3.4.17. *R bir semi-hereditary halka olmak üzere $_RR$'nin purely τ_s-extending olması için gerek ve yeter şart her devirli τ-nonsingüler R-modülün düz (flat) olmasıdır.*

İspat: R bir purely τ_s-extending semi-hereditary halka; M, R'nin bir a elemanı tarafından üretilen bir devirli τ-nonsingüler R-modül olsun. Yani $M = Ra$ τ-nonsingüler olsun. $f : R \to Ra$; $f(r) = ra$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Burada f'nin örten olduğu açıktır. $R/\text{Çek}(f) = R/Ann(a) \cong Ra$ ve τ-nonsingüler modüller izomorfizmalar altında kapalı olduğundan $R/\text{Çek}(f)$ τ-nonsingüler olur. Bu durumda Çek(f), R'nin bir τ_s-kapalı bir altmodülü olur. Hipotez gereği Çek(f), R'de pure olur. Diğer taraftan R bir semi-hereditary halka olduğundan R halkasının her sonlu üreteçli ideali projektif ve buradan R/Çek(f) projektif olur. Dolayısıyla R/Çek(f) düz (flat) olur. Böylece Ra yani M düz (flat) elde edilir.

Karşıt olarak; C, R'nin τ_s-kapalı bir ideali olsun. R/C, τ-nonsingüler ve R/C devirlidir. Bu durumda hipotez gereği R/C düz (flat) olur. Teorem 3.1.24 gereği C, R'de pure bulunur. Böylece $_RR$'nin bir purely τ_s-extending modül olduğu görülür.

□

Teorem 3.4.18. *R bir semi-hereditary halka olsun. Bu durumda $R \oplus R$'nin purely τ_s-extending olması için gerek ve yeter şart her τ-nonsingüler 2-üreteçli R-modülün düz (flat) olmasıdır.*

İspat: $M = Rm_1 + Rm_2$ bir τ-nonsingüler R-modül olsun. $f : R \oplus R \to M$ dönüşümü $f(r_1, r_2) = r_1m_1 + r_2m_2$ ile tanımlansın. Burada f'nin örten homomorfizma olduğu açıktır. Böylece $(R \oplus R)/\text{Çek}(f) \cong M$ olur. Bu durumda $(R \oplus R)/\text{Çek}(f)$ τ-nonsingüler olduğundan Çek(f), $R \oplus R$'de τ_s-kapalı altmodül olur. Hipotez gereği Çek(f), $R \oplus R$'de pure olur. R semi-hereditary bir halka olduğundan R düz (flat) olur. Düz (flat) modüllerin direkt toplamları da düz (flat) olduğu için $R \oplus R$ de düz (flat) olur [46]. Böylece Önerme 3.1.23 (iii) gereği $(R \oplus R)/$ Çek(f) yani M modülünün düz (flat) olduğu elde edilmiş olur.

Karşıt olarak C, $R \oplus R$'nin bir τ_s-kapalı altmodülü olsun. Bu durumda $(R \oplus R)/C$ τ-nonsingüler olur. Diğer taraftan $R \oplus R$ 2-üreteçli τ-nonsingüler bir R-modül olduğundan $(R \oplus R)/C$ de 2-üreteçli τ-nonsingüler R-modül olacağından hipotez gereği $(R \oplus R)/C$ düz (flat) olur. Bu durumda Teorem 3.1.24 gereği C, $R \oplus R$'de pure olur. Böylece $R \oplus R$ purely τ_s- extending elde edilir. $\square$

Sonuç 3.4.19. *R bir semi-hereditary halka ve I sonlu bir indis kümesi olsun. Bu durumda $\oplus_{(I)}R$'nin purely τ_s-extending olması için gerek ve yeter koşul her τ-nonsingüler I-üreteçli R-modülün düz (flat) olmasıdır.*

İspat: Teorem 3.4.18'in açık bir sonucudur. $\square$

3.5. Torsion Teoriye Göre Purely Extending Modülün Halka ile Sınıflandırılması

Burada bir R halkasının purely τ_s-extending olması durumu tanımlanmış ve purely τ_s-extending halkanın sınıflandırılması yapılmıştır. Son olarak bir purely τ_s-extending modül örneği oluşturulmuştur.

Tanım 3.5.1. [83] R bir tamlık bölgesi (integral domain) olmak üzere eğer R halkasının her sonlu üreteçli ideali projektif ise R'ye bir *Prüfer domain* denir.

Önerme 3.5.2. [73, Proposition 3.49] *R bir tamlık bölgesi olmak üzere eğer M bir düz (flat) R-modül ise M torsion free modüldür.*

Sonuç 3.5.3. [73, Corollary 3.50] *Eğer R bir esas ideal bölgesi (PID) ise her torsion free R modül düz (flat) olur.*

Sonuç 3.5.4. [31, Corollary 12.10] *R bir tamlık bölgesi olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *R bir Prüfer bölge (domain) dir.*

(ii) $_R(R \oplus R)$ *bir extending modüldür.*

(iii) $_RR$ *bir sonlu* Σ*-extending modüldür.*

Önerme 3.5.5. [15, Proposition 1.6] *R bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *R bir Prüfer bölge(domain)dir.*

(ii) $R^{(2)}$ *bir extending modüldür.*

(iii) $R^{(2)}$ *bir purely extending modüldür.*

(iv) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $R^{(n)}$ *bir extending modüldür.*

(v) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $R^{(n)}$ *bir purely extending modüldür.*

Önerme 3.5.6. [73, Proposition 3.46] *R herhangi bir halka olmak üzere*

(i) R_R *sol R-modül olarak düzdür (flat).*

(ii) *Sol R-modüllerin bir* $\oplus_j M_j$ *direkt toplamının düz (flat) olması için gerek ve yeter koşul her bir* M_j *modülünün flat olmasıdır.*

(iii) *Her projektif sol R-modül düz (flat) modüldür.*

Şimdi purely τ_s-extending modül için halka ile aşağıdaki genelleştirilmiş karakterizasyon verilebilir:

Teorem 3.5.7. *R, bir semi-hereditary tamlık bölgesi (yani Prüfer Domain) olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R bir düz (flat) halkadır.*

(2) $R \oplus R$ *extending modüldür.*

(3) $R \oplus R$ *bir purely extending modüldür.*

(4) *$R \oplus R$ bir purely s-extending modüldür.*

(5) *$R \oplus R$ bir purely τ_s-extending modüldür.*

(6) *Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\bigoplus_n R$ bir extending modüldür.*

(7) *Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\bigoplus_n R$ bir purely extending modüldür.*

(8) *Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\bigoplus_n R$ bir purely s-extending modüldür.*

(9) *Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\bigoplus_n R$ bir purely τ_s-extending modüldür.*

İspat:

$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (7)$ gerektirmeleri Sonuç 3.5.4 kullanılarak Önerme 3.5.5'te verilmiştir.

$(3) \Rightarrow (4)$: Önerme 3.2.7 gereği her s-kapalı altmodül bir kapalı altmodül olduğundan purely extending modülün purely s-extending modül olduğu açıktır.

$(4) \Rightarrow (3)$: R bir tamlık bölgesi olduğundan R nonsingülerdir. Buradan $R \oplus R$ nonsingülerdir. Böylece Önerme 3.2.7 gereği her kapalı altmodül s-kapalıdır. Dolayısıyla purely s-extending modül purely extending modül olur.

$(6) \Leftrightarrow (7)$ denkliği tümevarım ile $(3) \Leftrightarrow (4)$ gerektirmesinden açıktır.

$(7) \Leftrightarrow (8)$ [2, Theorem 2.3]'te tümevarım yöntemi ile açıktır.

$(1) \Rightarrow (5)$: R bir düz (flat) halka olsun. R tamlık bölgesi olduğundan
Önerme 3.5.6 (ii) gereği $R \oplus R$ düz (flat) olur. Diğer taraftan R bir tamlık bölgesi olduğundan R nonsingülerdir. Buradan R, τ-nonsingüler olur. τ-nonsingüler modüller direkt toplamlar altında kapalı olduğundan $R \oplus R$ de τ-nonsingüler olur. [22, Corollary (3.3)] gereği $R \oplus R$ τ-torsion free olur.
Şimdi K, $R \oplus R$'nin bir τ_s-kapalı altmodülü olsun. Bu durumda tanım gereği $(R \oplus R)/K$ bir τ-nonsingüler altmodül olur. Böylece tekrar [22, Corollary 3.3]

gereği $(R\oplus R)/K$ τ-torsion free olur. Ayrıca R bir semi-hereditary halka ve $(R\oplus R)/K$ sonlu üreteçli olduğundan $(R\oplus R)/K$ projektif ve Önerme 3.5.6 (iii) gereği $(R\oplus R)/K$ düz (flat) olur. Bu durumda Teorem 3.1.24 kullanılarak K'nin $R\oplus R$'de bir pure altmodül olduğu görülür. Böylece tanımdan $R\oplus R$ bir purely τ_s-extending modül olarak elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (4) : $R\oplus R$'nin purely τ_s-extending olduğunu kabul edelim. L, $R\oplus R$'nin bir s-kapalı altmodülü olsun. O halde $(R\oplus R)/L$, nonsingüler yani $Z((R\oplus R)/L)=0$'dır. Bu durumda $Z_\tau((R\oplus R)/L)=0$ olacağından $(R\oplus R)/L$ τ-nonsingüler olur. Buradan L, $R\oplus R$'de τ_s-kapalı altmodül olur. Böylece $R\oplus R$ purely τ_s-extending olduğundan L, $R\oplus R$'de pure olur. Sonuç olarak $R\oplus R$ purely s-extending elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (9): Sonuç 3.4.19'dan açıktır.

(9) $\Rightarrow$ (8): Bu gerektirme (5) $\Rightarrow$ (4) önermesi ve tümevarım ile açıktır.

□

Bu karakterizasyon ile elde ettiğimiz aşağıdaki örneğe sahibiz:

Örnek 3.5.8. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası (kendi üzerinde sol $\mathbb{Z}$-modül) olmak üzere $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ bir purely τ_s-extending $\mathbb{Z}$-modüldür.

İspat: $\mathbb{Z}$ bir esas ideal bölgesi (PID) olduğundan $\mathbb{Z}$'nin her ideali serbest (free) ve böylece her ideali projektif olur. Buradan $\mathbb{Z}$ bir hereditary halkadır. Böylece $\mathbb{Z}$ bir semihereditary halka olur. Aynı zamanda $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ sonlu üreteçli olduğundan semihereditary tanımı gereği $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ projektiftir. Böylece $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ düz (flat) modül olur. Önerme 3.5.7 (1)$\Rightarrow$ (5) gereği $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ bir purely τ_s-extending modül olur. Ayrıca Lemma 3.3.11 gereği purely τ_s-extending modüllerin direkt toplananları da purely τ_s-extending olduğundan $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ modülünün bir purely τ_s-extending modül olduğu görülür. □

4. PURE KAPALI ALTOBJELER VE PURE BÖLÜM GOLDIE BOYUT (PURE QUOTIENT GOLDIE DIMENSION)

Bu bölümde pure kapalı altobjeler (pure closed subobjects), güçlü pure kapalı altobjeler (strongly pure closed subobjects) ve sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde (finitely accessible additive category) pure bölüm Goldie boyut (pure quotient Goldie dimension) ile ilgili çalışılmıştır. Bu bağlamda sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde, direkt limitler ve pure epimorfik görüntüler altında kapalı olan objelerin her sınıfının pure bölüm (quotient) sonlu boyutlu bir objesinin her strongly pure kapalı altobjesinin bir yarı yerel (semilocal) endomorfizma halkasına sahip olduğu ispatlanmıştır.

Bu çalışma pure Goldie boyut (dimension) [7] ve sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde dual pure Goldie boyut (dimension) [9] çalışmalarının devamı niteliğindedir. Buradaki amacımız sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde pure bölüm Goldie boyutu açıklamaktır.

[7]'te pure Goldie boyut kavramı çalışılmış ve A, sonlu Goldie boyuta sahip ve A'dan A'ya tanımlı her pure monomorfizma bir izomorfizma olacak şekilde bir sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{A}$ kategorisinin bir objesi ise A'nın endomorfizma halkası $End_{\mathcal{A}}(A)$'nın yarı yerel (semilocal) olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç A. Facchini ve D. Herbera'nın [32, Corollary (4.5)]'in bir genelleştirilmişi olarak düşünülebilir. M. K. Berktaş [9] çalışmasında dual pure Goldie boyut kavramı tanımlanmış ve A, sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{A}$ kategorisinin bir objesi olmak üzere A'nın, pure Goldie boyutu n ve dual Goldie boyutu m ise $End_{\mathcal{A}}(A)$ yarı yerel ve $End_{\mathcal{A}}(A)$'nın dual Goldie boyutu $n+m$'den küçük veya $n+m$'ye eşit olduğunu göstermiştir. Bu sonuç [32, Corollary (6.5)]'in sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilere bir genişletilmişi olarak düşünülebilir.

Modül teoride kapalı (closed) alt modüller (yani [31]'de geçen anlamıyla essentially closed) mevcuttur ve özellikle kapalı elemanlar/objeler kafes ve kategori teori yapılarında uygulanması açısından oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bu çalışmanın Pure Kapalı Altobjeler kısmında sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde pure kapalı altobjeler (pure closed subobject) ile güçlü pure kapalı altobjelerin (strongly pure closed subobject) tanımları yapılmış ve sonlu pure quotient boyutlu objelerin sınıflandırılmasında önemli rol oynayan kapalı altobjeler ile pure kapalı altobjeler arasındaki ilişki verilmiştir. Bu durum sonlu pure bölüm boyutlu objelerin karakterizasyonunda önemli rol oynamaktadır. Ayrıca bu bölümde sonlu ulaşılabilir bir toplamsal kategorinin sonlu boyutlu objeleri için bunların pure kapalı altobjelerine göre klasik boyut formülünün (classical dimension formula) [32, Corollary (5.10)] bir genelleştirilmesi Teorem 4.2.10 olarak verilmiştir.

Son kısımda sonlu ulaşılabilir toplamsal kategoriler için pure bölüm Goldie boyut tanımı verilmiş ve bu kategoride direkt limitler ve pure epimorfik görüntüler altında kapalı objelerin her sınıfının bir pure bölüm sonlu boyutlu objesinin her güçlü pure kapalı altobjesinin (strongly pure closed subobject) bir yarı yerel endomorfizma halkasına sahip olduğu ispatlanmıştır. [32]'de belirtildiği gibi bir modülün/objenin bir yarı yerel halkaya sahip olması pek çok avantaj sağlar.

Öncelikle bu bölüm içinde kullanacağımız kategori teorisinde yer alan bazı temel tanım ve özellikleri verelim:

4.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 4.1.1. [82] $Obj(\mathcal{C})$ objelerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{C}$'deki objelerin her sıralı (A,B) çifti için $(A,B) \neq (A',B')$ iken $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A',B') = \varnothing$ olacak şekilde A'dan B'ye morfizmaların bir $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ kümesi var ve $\mathcal{C}$'nin objelerinin her (A,B,C) üçlüsü için bir $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \times Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \to Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$ morfizmaların bileşkesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\mathcal{C}$'ye bir *kategori (category)* denir.

1. Birleşme özelliği: $Obj(\mathcal{C})$'nin A,B,C,D, objeleri için $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ ve $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$ olmak üzere $h(gf) = (hg)f$

2. Birim morfizmalar vardır: $Obj(\mathcal{C})$'nin her A objesi için $B \in Obj(\mathcal{C})$ olmak üzere $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$'deki her f morfizmi için $fid_A = id_B f = f$ olacak şekilde bir $id_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ ve $id_B \in Mor_{\mathcal{C}}(B,B)$ morfizmaları vardır.

Genellikle kolaylık olsun diye $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ yerine $Mor(A,B)$ ve $A \in Obj(\mathcal{C})$ yerine $A \in \mathcal{C}$ yazılır. $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ için genelde $f : A \to B$ gösterimi kullanılır.

Tanım 4.1.2. [82] $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere

1. $Obj(\mathcal{D}) \subset Obj(\mathcal{C})$
2. $Obj(\mathcal{D})$'nin her A,B objesi için $Mor_{\mathcal{D}}(A,B) \subset Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$
3. $\mathcal{D}$'deki morfizmaların bileşkesi $\mathcal{C}$'deki bileşkenin kısıtlanışı ise $\mathcal{D}$'ye $\mathcal{C}$'nin bir *altkategorisi (subcategory)* denir.

Eğer $Mor_{\mathcal{D}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ ise $\mathcal{D}$'ye $\mathcal{C}$'nin bir *tam altkategorisi (full subcategory)* denir.

Tanım 4.1.3. [18] $\mathcal{A}_0$, sonlu temsil edilebilir (finitely presented) objelerin bir sınıfı olmak üzere $\mathcal{A}_0$'ın bir F objesi için

$$0 \to Hom_{\mathcal{A}}(F,X) \to Hom_{\mathcal{A}}(F,Y) \to Hom_{\mathcal{A}}(F,Z) \to 0$$

dizisi tam dizi oluyorsa $\mathcal{A}$ kategorisindeki $g \circ f = 0$ olacak şekildeki

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

dizisine bir *pure tam dizi* denir. Bu durumda f'ye bir *pure monomorfizma* g'ye de bir *pure epimorfizma* denir .

Tanım 4.1.4. [5, Definition (0.12)] Burada funktor (functor), kategorilerin homomorfizmaları olarak düşünülebilir. $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, mor_{\mathcal{C}}, \circ)$ ve $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, mor_D, \circ)$

birer kategori olsun. A,B,C objeleri $\mathcal{C}$ kategorisinden alınmak üzere, $F^{'}$, $\mathcal{C}$'den $\mathcal{D}$'ye bir fonksiyon ve $F^{''}$, **C**'nin morfizmalarından **D**'nin morfizmalarına bir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{C}$'nin her A,B,C objesi ve **C** kategorisinde tanımlı her $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ morfizması için

(F.1) $F^{''}(f) : F^{'}(A) \to F^{'}(B)$ ve $F^{''}(g) : F^{'}(B) \to F^{'}(C)$ dönüşümleri **D** kategorisinde fonksiyonlar

(F.2) $F^{''}(g \circ f) = F^{''}(g) \circ F^{''}(f)$

(F.3) $F^{''}(1_A) = 1_{F'(A)}$

şartları sağlanıyorsa $F = (F^{'}, F^{''})$ fonksiyonların çiftine **C** kategorisinden **D** kategorisine bir *sıra koruyan funktor (covariant functor)* denir. Böylece bir sıra koruyan funktor objeleri objelere, fonksiyonları fonksionlara, birimleri birimlere götürür ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \circ f"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını

$$\begin{tikzcd} F^{'}(A) \arrow[r, "F^{'}(f)"] \arrow[d, "F^{'}(g \circ f)"'] & F^{'}(B) \arrow[dl, "F^{'}(g)"] \\ F^{'}(C) & \end{tikzcd}$$

biçiminde korur.

Tanım 4.1.5. [5, Definition (0.12)] $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, mor_C, \circ)$ ve $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, mor_D, \circ)$ birer kategori olsun. A,B,C objeleri $\mathcal{C}$ kategorisinden alınsın. $F^{'}$, $\mathcal{C}$'den $\mathcal{D}$'ye bir fonksiyon ve $F^{''}$, **C**'nin morfizmalarından **D**'nin morfizmalarına bir fonksiyon olmak üzere her A,B,C objesi ve **C** kategorisinde tanımlı her $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ morfizması için

(F.1*) $F^{''}(f) : F^{'}(B) \to F^{'}(A)$ ve $F^{''}(g) : F^{'}(C) \to F^{'}(B)$ dönüşümleri **D** kategorisinde fonksiyonlar

(F.2*) $F^{''}(g \circ f) = F^{''}(f) \circ F^{''}(g)$

(F.3*) $F^{''}(1_A) = 1_{F^{'}(A)}$

şartları sağlanıyorsa $F = (F^{'}, F^{''})$ fonksiyonların çiftine **C** kategorisinden **D** kategorisine bir *sırayı tersine döndüren funktor (contravariant functor)* denir. Böylece sırayı tersine döndüren funktor

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \circ f"'] & B \arrow[dl, "g"] \\
C &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramında

$$\begin{tikzcd}
F^{''}(A) & F^{''}(B) \arrow[l, "F^{''}(f)"'] \\
F^{''}(C) \arrow[u, "F^{''}(g \circ f)"] \arrow[ur, "F^{'}(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

şeklinde okları tersine döndürür.

T, **C**'den **D**'ye bir sıra koruyan (covariant) [sırayı tersine çeviren (contravariant)] bir funktor olsun. $\mathcal{C}$'den $\mathcal{D}$'ye her sıra koruyan (covariant) [sırayı tersine çeviren (contravariant)] T : $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktoru $\mathcal{C}$'deki A'dan B'ye morfizmalarını $\mathcal{D}$'de T(A)'dan T(B)'ye [T(B)'den T(A)'ya] eşlesin. Yani her $A,B \in Obj(\mathcal{C})$ için
$\mathrm{T}_{A,B} : Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathrm{T}(A),\mathrm{T}(B))$
$[\mathrm{T}_{A,B} : Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{D}}(\mathrm{T}(B),\mathrm{T}(A))]$ dönüşümüne sahibiz [82].
Modül kategorsinde morfizmaları modül homomorfizmaları olarak düşünürüz.

Tanım 4.1.6. [82] $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ birer kategori ve T, $\mathcal{C}$'den $\mathcal{D}$'ye tanımlı bir sırayı koruyan (covariant) (veya sırayı tersine çeviren (contravariant)) funktor olsun.
1. $\mathcal{C}$'nin her A, B objesi için $T_{A,B}$ injektif (bire bir) ise T'ye *faitful funktor*
2. $\mathcal{C}$'nin her A, B objesi için $T_{A,B}$ surjektif (örten) ise T'ye *full funktor*
3. T hem full hem de faithful ise T'ye *fully faithful funktor* denir.

Tanım 4.1.7. [38], [58] $\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{C}$'nin objelerinin sınıfı bir küme oluyorsa $\mathcal{C}$ kategorisine bir *small kategori* denir.
$\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{C}$'deki objelerin izomorf olmaları objelerin eşit olmasını gerektiriyorsa yani $\mathcal{C}$'deki her izomorfizma bir otomorfizma oluyorsa $\mathcal{C}$ kategorisine *sketally kategori* denir.
$\mathcal{C}$ kategorisindeki objelerin izomorfizma sınıfları bir small küme biçiminde ise o zaman $\mathcal{C}$ kategorisine bir *sketally small kategori* denir.

Tanım 4.1.8. [58] $\mathcal{C}$ boştan farklı bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ kategorisinin objelerinin her bir C_1, C_2 çifti ve bir $D \in \mathcal{C}$ objesi için $\varphi_i : C_i \to D$ morfizmaları var ve φ_1, φ_2 morfizmalarının her bir çifti için $\psi \circ \varphi_1 = \psi \circ \varphi_2$ olacak şekilde bir $\psi : D \to E$ morfizmi ve bir $E \in \mathcal{C}$ objesi varsa $\mathcal{C}$ kategorisine *filtrelidir (filtered)* denir.
Eğer $\mathcal{C}$ sketally small filtreli kategori ise bir $X : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ $(C \to X_C)$ funktorunun $\underrightarrow{Lim}_{C\in\mathcal{C}} X_C$ eş limitine (colimit) bir *direkt limit* adı verilir.

Tanım 4.1.9. [58] A, $\mathcal{C}$ kategorisinin bir objesi olsun. $\mathcal{C}$ kategorisinde her $\underrightarrow{Lim} B_\lambda$ direkt limiti için $\underrightarrow{Lim} Hom(A, B_\lambda) \to Hom(A, \underrightarrow{Lim} B_\lambda)$ doğal morfizması bir izomorfizma oluyorsa A objesine bir *sonlu temsil edilebilir (finitely presented) obje* denir. $\mathcal{C}$'deki sonlu temsil edilebilir (finitely presented) objelerin full alt kategorisi fp$\mathcal{C}$ ile gösterilir.
$\mathcal{C}$ bir toplamsal kategori olmak üzere fp$\mathcal{C}$ sketally small ve $\mathcal{C}$ kategorisindeki her obje, fp$\mathcal{C}$'deki objelerin bir direkt limiti ise $\mathcal{C}$'ye bir *yerel sonlu temsil edilebilir (locally finetely presented) kategori* denir.

Tanım 4.1.10. [1] $\mathcal{A}$ direkt limitlere sahip bir toplamsal kategori olsun. $\mathcal{A}$ kategorisinde her obje bu kategorinin sonlu temsil edilebilir objelerinin bir direkt limiti olacak şekilde sonlu temsil edilebilir objelerin bir kümesine sahip ise $\mathcal{A}$ kategorisine *sonlu ulaşılabilir kategori* denir.

Örneğin direkt limitleri tam olan, bir üreteç ve eşçarpımlar (coproducts) ile oluşturulan Abelian kategoriler Grothendieck kategori olarak adlandırılır. Her R-modül M için $\sigma[M]$ kategorisi bu türden bir kategoridir. Yani bir Grothendieck kategoridir. Burada $\sigma[M]$ kategorisi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

Tanım 4.1.11. [82] M ve N birer R-modül olsun. Eğer N, bir M-üreteçli (M-generated) modülün bir altmodülüne izomorf ise N'ye *M ile altüretilmiştir (subgenerated by M)* ya da M, N için bir *altüreteçtir (M is subgenerator for N)* denir.

$\mathcal{C}$, sol R-modüllerin R-Mod sınıfının bir altkategorisi olsun. Eğer $\mathcal{C}$'deki her obje M ile altüretilmiş ise $\mathcal{C}$ alt kategorisine *M ile altüretilmiştir* ya da M, $\mathcal{C}$ için bir *altüreteçtir* denir .

Objeleri M ile altüretilmiş bütün R-modüllerden oluşan R-Mod sınıfının full altkategorisi (full subcategory) $\sigma[M]$ ile gösterilir.

Bu tanım ile M, $\sigma[M]$'de bir altüreteçtir ve bir modülün M ile altüretilmiş olması için gerek ve yeter koşul M-üreteçli modüller arasında bir morfizmanın bir çekirdeği olmasıdır.

$\mathcal{A}_0$, sonlu temsil edilebilir (finitely presented) objelerin bir sınıfı olmak üzere $\mathcal{E}$ =Func($\mathcal{A}_0^{op}$,Ab), $\mathcal{A}_0^{op}$'den abel (değişmeli) grupların kategorisine tüm contravariant fanktörlerin bir kategorisi olsun. Bu durumda $\mathcal{E}$ yerel sonlu temsil edilebilir (finitely presented) bir Grothendieck kategori olur.

F, $\mathcal{E}$'deki bir sırayı tersine çeviren (contravariant) funktor olmak üzere F, sonlu üreteçli projektif objelerin bir direkt limiti ise F'ye bir *düz (flat) obje* denir.

$T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$'ye $T(A) = Hom(-,A)$ şeklinde tanımlı, full ve faithfull funktor olmak üzere aşağıda verilen Yoneda'nın Lemması yardımı ile $\mathcal{A}$ kategorisinin $\mathcal{E}$'nin tüm flat objelerinin $\mathcal{F}$ =Flat($\mathcal{A}_0^{op}$,Ab) full altkategorisine denk olduğunu söyleyebiliriz.

Lemma 4.1.12. *(Yoneda Lemma) $U,V \in Obj(\mathcal{C})$ olsun. $s : h_U \to h_V$ fanktörlerinin herhangi bir morfizması verilsin. Bu durumda $h(\varphi) = s$ olacak şekilde tek bir $\varphi : U \to V$ morfizmi vardır. Başka bir deyişle h funktoru fully faithful olur.*

Ayrıca $\mathcal{F}$'deki f'nin bir pure monomorfizma olabilmesi için gerek ve yeter koşul f'nin $\mathcal{E}$'de bir monomorfizma olmasıdır. A, $\mathcal{E}$'nin bir objesi olmak üzere $\mathcal{A}$ kategorisindeki herhangi bir pure tam dizi için $Hom_{\mathcal{A}}(-,A)$ funktoru tam oluyorsa A'ya *pure injective obje* denir. C, $\mathcal{E}$ kategorisinde bir obje olmak üzere $\mathcal{F}$'nin her Z objesi için $Ext^1_{\mathcal{E}}(Z,C) = 0$ oluyorsa C'ye *eşburulmalı obje (cotorsion object)* denir. $\mathcal{F}$ kategorisinin bir M objesinin pure injektif olabilmesi için gerek ve yeter koşul M'nin $\mathcal{E}$'de cotorsion olmasıdır [18], [51].
$\mathcal{X}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\mathcal{X}$ sınıfının boş kümeden farklı ve izomorfizmalar altında kapalı olduğunu hatırlayalım. Yani $M \in \mathcal{X}$ ve $N \cong M$ ise $N \in \mathcal{X}$'dir. Ayrıca $\mathcal{X}$ sınıfının sonlu direkt toplamlar ve direkt toplananlar altında kapalı olduğunu varsayalım. Yani $M_1, M_2, ..., M_t \in \mathcal{X}$ ise o zaman $M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_t \in \mathcal{X}$ olur. Eğer $M = N \oplus L \in \mathcal{X}$ ise o zaman $N, L \in \mathcal{X}$'dir.

Tanım 4.1.13. [83] M bir sol R-modül ve $X \in \mathcal{X}$ olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\varphi : M \to X$ lineer dönüşümü (modül homomorfizması) varsa X'e M'nin bir *$\mathcal{X}$-envelopu* adı verilir.

(1) $X' \in \mathcal{X}$ ile herhangi $\varphi' : M \to X'$ lineer dönüşümü için $\varphi' = f\varphi$ olacak şekilde bir $f : X \to X'$ dönüşümü vardır. Başka bir deyişle her $X' \in \mathcal{X}$ için

$$\mathrm{Hom}_R(X,X') \to \mathrm{Hom}_R(M,X') \to 0$$

dizisi tamdır.

(2) $\varphi = f\varphi$ olacak biçimde $f : X \to X$ bir endomorfizma ise o zaman f bir otomorfizmadır.

Eğer sadece (1) şartı sağlanıyorsa [(2) olmayabilir] bu durumda $\varphi : M \to X$ bir $\mathcal{X}$*-preenvelope* olarak adlandırılır.
Kolaylık açısından bazen φ, M'nin bir $\mathcal{X}$-envelopu (preenvelopu) olarak adlandırılır.

$\mathcal{X}$-örtü ($\mathcal{X}$-cover) dual olarak tanımlanır.
$\mathcal{G}$ bir Grothendieck kategori olmak üzere $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$'deki objelerin bir sınıfı ve A, $\mathcal{G}$'nin bir objesi ve $F, F^{'} \in \mathcal{X}$ olsun. Herhangi bir $f : F^{'} \to A$ morfizması $p : F \to A$ morfizmasına indirgenebiliyorsa p'ye A'nın bir $\mathcal{X}$*-precoverı* denir. Herhangi bir $g : A \to A$ endomorfizması $g \circ p = p$ olacak şekilde bir otomorfizma oluyorsa F'ye bir $\mathcal{X}$*-cover* denir. Bir toplamsal kategorideki $\mathcal{X}$ sınıfından kasıt objelerin bir sınıfının izomorfizmalar altında kapalı olmasıdır.
O halde $\mathcal{E}$ yerel sonlu temsil edilebilir (local finitely presented) Grothendieck kategori olmak üzere $\mathcal{E}$'nin full altkategorisi $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$'ya denk olduğundan burada altkategori $\mathcal{A}$ ve geniş $\mathcal{E}$ kategorilerinde çalıştığımızı varsayabiliriz.
Ayrıca bu çalışmada aksi belirtilmediği sürece $\mathcal{A}$ bir sonlu ulaşılabilir toplamsal kategori, $\mathcal{E}$ birleşmeli fanktör kategori ve $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$'nın direkt limitler ve epimorfik görüntüler altında kapalı objelerinin bir sınıfını gösterecektir.

Tanım 4.1.14. [83] $\mathcal{F}^{\perp}$, flat precovera sahip M modüllerinin sınıfını göstermek üzere $M \in \mathcal{F}^{\perp}$ olsun. Herhangi bir flat R-modül F için $Ext^1_R(F,M) = 0$ oluyorsa M'ye bir *eşburulmalı modül (cotorsion module)* denir.
$\mathcal{C} = \mathcal{F}^{\perp}$ tüm eşburulmalı (cotorsion) sol R-modüllerin sınıfı olsun. Bir R-modül M için $\varphi : M \to C$ bir $\mathcal{C}$-genişleme ($\mathcal{C}$-envelope) dönüşümüne bir *eşburulmalı genişleme (cotorsion envelope)* denir. Burada φ bir monomorfizmadır. Ayrıca buradaki $\mathcal{C}$-genişleme M'nin $\mathcal{C}$ kategorisindeki injektif genişlemesi anlamındadır.

(Değişmeli (abelian) gruplar için eşburulmalı genişlemeler kavramı [39] de incelenmiştir.)

4.2. Pure Kapalı (Closed) Altobjeler

Bu bölümde sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorilerde pure kapalı altobjeler ile güçlü pure kapalı altobjelerin kavramları ve kapalı altobjeler ile pure kapalı altobjeler arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca sonlu pure bölüm boyutlu objeler ve bunların pure kapalı altobjeleri için klasik boyut formülünün (dimension formula) bir genelleştirilmesi yapılmıştır.

Tanım 4.2.1. [1] A,$A^{'}$ ve $A^{''}$, bir sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{A}$ kategorisinin objeleri olsun. $p : A \to A^{'}$ bir pure monomorfizma olmak üzere $f \circ p$ bir pure monomorfizma olacak şekilde $f : A^{'} \to A^{''}$ monomorfizması bir pure monomorfizma oluyorsa p'ye *pure essential monomorfizma* denir.

Tanım 4.2.2. [10] F, bir sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{A}$ kategorisinin bir objesi olsun. S, F objesinin bir altobjesi olmak üzere $f : S \to L$ bir pure essential monomorfizma iken $S = L$ olacak şekilde F'de bir L altobjesi varsa F'nin S altobjesine *(F'de) pure kapalıdır (closed)* denir. Eğer S, kendini içeren her bir objede pure kapalı ise S'ye *güçlü pure kapalı (strongly pure closed) altobje* denir.

Örneğin $\mathcal{A}$ kategorisindeki bir F objesinin her direkt toplananı F objesinde pure kapalıdır ve $\mathcal{A}$'daki her pure injektif obje kendini içeren herhangi bir objede güçlü pure kapalıdır [51, Lemma 2.(ii)].

Önerme 4.2.3. [10, Proposition 1] *Sonlu ulaşılabilir toplamsal bir $\mathcal{A}$ kategorisinde herhangi bir pure injektif objenin her pure kapalı altobjesi bir direkt toplanandır.*

İspat: Sonlu ulaşılabilir toplamsal kategoride bir pure injektif objenin her pure kapalı altobjesi pure injektiftir. Böylece ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki standart sonuç kolayca elde edilir.

Önerme 4.2.4. [10, Proposition 2] *A, bir sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{A}$ kategorisinin bir objesi olsun. C, B'nin bir altobjesi ve B de A'nın bir altobjesi olsun. Bu durumda C, A'da pure kapalı ise C, B'de de pure kapalı olur.*

Tanım 4.2.5. [82] $\{A_\lambda\}_\Lambda$ bir $\mathcal{C}$ kategorisinin objelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{C}$ kategorisindeki $\{g_\lambda : A_\lambda \to Y\}_\Lambda$ morfizmalarının her ailesi için $\varepsilon_\lambda g = g_\lambda$ olacak şekilde tek bir $g : K \to Y$ morfizması varsa $\{\varepsilon_\lambda : A_\lambda \to K\}_\Lambda$ morfizmaları ile $\mathcal{C}$'deki bir K objesine $\{A_\lambda\}_\Lambda$ ailesinin *eşçarpımı (coproduct)* denir.

Önerme 4.2.6. [19, Proposition 2.1] *$\mathcal{C}$ eşçarpımlara sahip bir kategori ve $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}$ kategorisinde eşçarpımlar altında kapalı objelerin bir sınıfı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *$\mathcal{C}$ kategorisindeki her objenin bir monic $\mathcal{X}$-örtüsü vardır.*

(ii) *$\mathcal{X}$, homomorfik görüntüler altında kapalıdır.*

Aşağıda verdiğimiz sonuç sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{A}$ kategorisinde pure kapalı altobjelerin geniş Grothendieck $\mathcal{E}$ kategorisindeki kapalı altobjelerle ilişkisini gösterir:

Lemma 4.2.7. [10, Lemma 1] *A, $\mathcal{C}$ kategorisinin bir objesi ve S, A objesinin bir altobjesi olsun. S, $\mathcal{A}$ kategorisinde A objesinde pure kapalı ise S, $\mathcal{E}$ kategorisinde A objesinde kapalı olur.*

İspat: [20, Theorem 2.6] gereği $\mathcal{A}$'daki her objenin bir $\mathcal{C}$-örtüsü (cover) vardır. [20, Theorem 2.6]'nın ispatında gösterildiği üzere [20, Theorem 2.4] ve [20, Theorem 2.5] kullanılırsa $T : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ funktoru full ve faithful olduğundan $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ kategorisinde olduğu gibi $\mathcal{E}$ kategorisinde de aynı kapanış özelliklerine sahiptir. [82, (33.9)]'un bir uyarlaması olarak $\mathcal{C}$ sınıfının direkt toplamlar ve pure epimorfik görüntüler altında kapalı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}$'nin direkt limitler ve pure epimorfik görüntüler altında kapalı olmasıdır. Böylece [19, Proposition 2.1] gereği $\mathcal{E}$'deki her objenin bir monic $\mathcal{C}$-örtüsü (cover) vardır.

Şimdi C, $\mathcal{E}$ kategorisindeki A objesinin bir S altobjesinin kapanışı olsun. $FC(A/C)$, A/C'nin monic $\mathcal{C}$-örtüsü olacak şekilde $\mathcal{E}$ kategorisindeki aşağıdaki diyagramı ele alalım.

$$\begin{tikzcd}
& & & FC(A/C) \arrow[d, "\varphi'"] & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & A \arrow[r, "p"] \arrow[ru, dotted, "f'"] & A/C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bu durumda $\varphi' f' = p$ olur. Böylece φ' bir izomorfizma olur. Buradan A/C flat ve böylece C flat olur. [51, Lemma (3)]'ten $f : S \to C$, $\mathcal{A}$'da bir pure monomorfizma olur.

Şimdi $g \circ f$, $\mathcal{A}$'da bir pure monomorfizma olacak şekilde bir $g : C \to X$ monomorfizmasını ele alalım. Yine [51, Lemma (3)] kullanılarak $g \circ f$, $\mathcal{E}$ kategorisinde bir monomorfizma olur. [5, Corollary (5.13)] gereği f, $\mathcal{E}$'de bir essential monomorfizma olduğundan g, $\mathcal{E}$'de bir monomorfizma ve böylece g, $\mathcal{A}$'da bir pure monomorfizma olur. Buradan f, $\mathcal{A}$'da bir pure essential monomorfizmadır. Böylece S pure kapalı olduğundan $S = C$ elde edilir. □

[7] ve [9]'de bahsedildiği üzere $\mathcal{A}$'nın bir A objesinin sıfırdan farklı her altobjesi pure essential olan parçalanamaz (indecomposable) pure altobjelerinin sonlu direkt toplamı olacak şekilde bir pure essential altobjesi varsa A'nın *sonlu pure Goldie boyutu* vardır. Yani $p.udim(A) < \infty$ olur. [7, Proposition (3)] gereği sonlu pure Goldie boyut; A'nın pure injektif genişlemesinin (injective envelope) parçalanamaz (indecomposable) altobjelerinin sonlu direkt toplamı olması anlamına gelir.

Teorem 4.2.8. [31, 5.8] *M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun.*

(1) *N, M'de esseantial altmodül ise o zaman M'nin sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip olması için gerek ve yeter şart N'nin sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip olmasıdır. Bu durumda $udim(N) = udim(M)$ eşitliği vardır.*
Tersine eğer M sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip ve $udim(N) = udim(M)$ ise o zaman N, M'de essential altmodül (yani $N \leq_e M$) olur.

(2) *Eğer $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_k$ ise o zaman*

$$udim(M) = udim(M_1) + udim(M_2) + ... + udim(M_k)$$

eşitliği vardır.

(3) *N ve M/N alt modüllerinin sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip olduğunu kabul edelim. O zaman M sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip ve*

$$udim(M) \leq udim(N) + udim(M/N)$$

eşitsizliği vardır.

(4) *M'nin sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip olduğunu varsayalım. M'den M'ye tanımlı herhangi bir f monomorfizması için $Im(f)$, M'de essential yani $Im(f) \leq_e M$ olur.*

Lemma 4.2.9. [31, 5.10] *M bir R-modül ve K, M'nin bir alt modülü olsun.*

(i) *M'nin sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda K'nin M'de kapalı olması için gerek ve yeter şart K ve M/K'nin sonlu düzgün (uniform) boyuta sahip ve*

$$udim(M) = udim(K) + udim(M/K)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

(ii) *Aşağıdaki durumlar denktir:*

(a) *M'nin sonlu düzenli (uniform) boyutu vardır.*

(b) *M kapalı altmodüller üzerinde ACC özelliğini sağlar.*

(c) *M kapalı altmodüller üzerinde DCC özelliğini sağlar.*

Şimdi ana sonucumuzu aşağıdaki teoremle verelim:

Teorem 4.2.10. [10, Theorem 1] *F, $\mathcal{C}$'de bir sonlu pure boyutlu obje ve K, F'nin bir pure kapalı altobjesi olsun. Bu durumda*

$$p.udim(F) = p.udim(K) + p.udim(F/K)$$

olur.

İspat: Lemma 4.2.7 gereği K, $\mathcal{E}$ kategorisindeki F objesinde kapalıdır. Bu durumda [31, (5.10)] kullanılırsa $u.dim(F) = u.dim(K) + u.dim(F/K)$ elde edilir. [7, Proposition (4)] gereğince

$$p.udim(F) = p.udim(K) + p.udim(F/K)$$

olur. □

$\mathcal{E}$ kategorisindeki kapalı altobjeler ile $\mathcal{A}$ kategorisindeki pure kapalı altobjeler arasında fazla bağlantı kurulamadığından [31, (5.10)]'da olduğu gibi Teorem 4.2.10 'un karşıtının varlığını söylemek zor gözüküyor. Ancak [31, Theorem (5.8.(3))] ve [7, Proposition (4)]'ün açık bir sonucu olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 4.2.11. [10, Proposition 3] $\mathcal{A}$ sonlu ulaşılabilir toplamsal bir kategori, F, $\mathcal{A}$'nın bir objesi ve S, F'nin bir altobjesi olsun. Ayrıca S ve F/S'nin $\mathcal{A}$'da sonlu pure boyutlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda F de sonlu pure boyutlu olur ve

$$p.udim(F) \leq p.udim(S) + p.udim(F/S)$$

dir.

4.3. Pure Bölüm Goldie Boyut (Pure Quotient Goldie Dimension)

Bu bölümde sonlu ulaşılabilir toplamsal kategoriler için pure bölüm Goldie boyut (pure quotient Goldie dimension) tanımı verilmiştir. Ayrıca bu kategoride direkt limitler ve epimorfik görüntüler altında kapalı objelerin her sınıfının bir pure bölüm sonlu boyutlu objesinin her güçlü pure kapalı altobjesinin (strongly pure closed subobject) bir yarı yerel endomorfizma halkasına sahip olduğu gösterilmiştir.

Tanım 4.3.1. $\mathcal{A}$ bir sonlu ulaşılabilir toplamsal kategori ve A, $\mathcal{A}$ kategorisinin bir objesi olsun. A'nın her pure homomorfik görüntüsünün sonlu pure Goldie boyutu varsa A *sonlu pure bölüm Goldie boyuta sahiptir (veya kısaca pure bölüm sonlu boyutludur)* denir.

Tanım 4.3.2. [32] $\mathcal{G}$ bir Grothendieck kategori ve A, $\mathcal{G}$'nin bir objesi olmak üzere $\mathcal{G}$'de L_0 injektif ve L_0, L_1 sonlu Goldie boyutlu objeler olacak şekilde bir

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow 0$$

tam dizisi varsa A *sonlu eşüreteçlidir (copresented)* denir.

Teorem 4.3.3. [51] *$\mathcal{C}$ bir yerel sonlu temsil edilebilir toplamsal kategori (locally finitely presented additive category) ve X, $\mathcal{C}$'nin bir objesi olsun. Bu durumda pure monomorfizma olan bir $\eta : X \to PE(X)$ pure injektif genişleme (pure injective envelope) vardır.*

Şimdi ana sonuçlarımızdan bir diğeri olan aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.4. [10, Theorem 2] *$\mathcal{C}$ bir yerel sonlu temsil edilebilir toplamsal kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ kategorisinin bir sonlu pure bölüm Goldie boyutlu objesinin her güçlü pure kapalı altobjesinin bir yarı yerel endomorfizma halkası vardır.*

İspat: A, $\mathcal{C}$ kategorisinde sonlu pure bölüm Goldie boyutlu bir obje ve K, A'nın güçlü pure kapalı bir altobjesi (strongly pure closed subobject) olsun. Bu durumda Lemma 4.2.7 gereği K, $\mathcal{E}$ kategorisindeki A objesinde kapalı olur. Hipotez gereği K objesi $E(A)$'nın eşburulmalı genişlemesinde (cotorsion envelope) kapalı olur. [51, Theorem 6] gereği $E(A)$'nın $\mathcal{A}$'daki pure injektif envelopu, $E(A)$'nın $\mathcal{E}$'deki eşburulmalı genişlemesi (cotorsion envelope) olduğundan K objesi $E(A)$'da da kapalı olur. Buradan [31, Lemma 1.10] ile A/K, $E(A)/K$'nin bir essential altobjesi olur. Böylece $udim(A/K) = udim(E(A)/K)$ elde edilir. [7, Proposition (4)] uygulanırsa $udim(A/K) = p.udim(A/K)$ olduğundan A/K, $E(A)/K$ ve $E(K)/K$, $\mathcal{E}$ kategorisinde sonlu boyutlu elde edilir. Buradan $E(K)$ injektif, $E(K)$ ve $E(K)/K$ sonlu Goldie boyutlu olmak üzere $\mathcal{E}$'de bir

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E(K) \longrightarrow E(K)/K \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Böylece K, $\mathcal{E}$'de bir sonlu eşüreteçli (finitely copresented) obje olur. [32, Theorem 5.4] gereği $End_{\mathcal{A}}(K) = End_{\mathcal{E}}(K)$ bir yarı yerel halka olur. □

Örnek 4.3.5. [10, Example 1] $\mathcal{A}$ bir sonlu ulaşılabilir toplamsal kategori; Y ve Z, $\mathcal{A}$ kategorsinin herhangi objeleri olmak üzere Y'den Z'ye tanımlı her epimorfizma pure ise Z bir flat nesnedir [21]. [21, Theorem (2)] gereği $\mathcal{A}$'daki flat objelerin sınıfı pure epimorfik görüntüler ve direkt limitler altında kapalıdır.

Bu durumda $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$'daki tüm flat objelerin sınıfı olmak üzere Teorem 4.3.4 aşağıdaki hali alır:

$\mathcal{A}$'daki bir pure bölüm sonlu boyutlu flat objenin her güçlü (strongly) pure kapalı (closed) altobjesinin bir yarı yerel (semilocal) endomorfizma halkası vardır.

Aynı zamanda Teorem 4.2.10 ile F, $\mathcal{A}$'da bir sonlu pure Goldie boyutlu flat obje ve K, F'nin bir pure kapalı altobjesi ise o zaman

$$p.udim(F) = p.udim(K) + p.udim(F/K)$$

eşitliği vardır.

KAYNAKLAR

[1] Adamek, J., Rosicky, J. 1994. Locally Presentable and Accessible Categories. Cambridge University Press.

[2] Al-Bahrani, B. H. 2013. On purely Y-extending modules. **Iraqi Journal of Science**, 54 (3): 672-675.

[3] Albu, T. , Birkenmeier, G. F. , Erdoğan, A. , Tercan, A. 2010. Ring and Module Theory, Birkhauser (Springer).

[4] Asgari, Sh. 2019. T-quasi-continuous modules. **Communications in Algebra**, 47 (5): 1939-1953.

[5] Anderson, F. W., Fuller, K. R. 1974. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York.

[6] Barnard, A. 1981. Multiplication modules. **Journal of Algebra**, 71: 174-178.

[7] Berktaş, M. K. 2015. On objects with a semilocal endomorphism rings in finitely accessible additive categories. **Algebras and Represent Theor.**, 18 (5): 1389-1393.

[8] Berktaş, M. K., Doğruöz, S. 2015. A relative extending module and torsion precovers. **Bulletin of the Iranian Math. Soc.**, 41 (5): 1249-1257.

[9] Berktaş, M. K. 2017. On pure Goldie dimensions. **Comm. in Algebra**, 45 (8): 3334-3339.

[10] Berktaş, M. K., Doğruöz, S. and Tarhan, A. 2019. Pure Closed Subobjects and Pure Quotient Goldie Dimension. **JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications**, 41 (1): 49-57.

[11] Bourbaki, N. 1964. Elements of Mathematics, Commutative Algebra. Paris, Hermann.

[12] Camillo, V. P., Zelmanowitz, J. M. 1980. Dimension Modules. **Pasific Journal of Mathematics**, 91 (2): 249-261.

[13] Chatters, A. W., Hajarnavis, C. R. 1977. Rings in which every complement right ideal is a direct summand. **Quart J. Math. Oxford**, 28 (1): 61-80.

[14] Chatters, A. W., Khuri, S. M. 1980. Endomorphism rings of modules over nonsingular CS-rings. **Journal of the London Math. Soc.**, 21 (2): 434-444.

[15] Clark, J. 1999. On purely extending modules. **The Proceedings of the International Conference in Abelian Groups and modules**, 353-358.

[16] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. 2006. Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory. Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel.

[17] Cohn, P. M. 1959. On the free product of associative rings. **Math. Zeithschr**, 71: 380-398.

[18] Crawley-Boevey, W. W. 1994. Locally finitely presented additive categories. **Comm. in Algebra**, 22 (5): 1641-1674.

[19] Crivei, S., Torrecillas, B. 2008. On some monic covers and epic envelopes. **The Arabian Journal for Science and Engineering**, 33: 124-135.

[20] Crivei, S., Prest, M., Torrecillas, B. 2010. Covers in finitely accessible categories. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 138 (4): 1213-1221.

[21] Crivei, S. 2013. On flat objects of finitely accessible categories. **The Scientific World Journal**, 4 pages.

[22] Çeken, S., Alkan, M. 2017. Singular and nonsingular modules relative to a torsion theory. **Communications in Algebra**, 45 (8): 3377-3389.

[23] Dauns, J., Fuchs, L. 1988. Infinite Goldie Dimension. **Journal of Algebra**, 115: 297-302.

[24] Doğruöz, S. 1997. Extending Modules Relative to Module Classes. A thesis presented to the University of Glasgow Faculty of Science for the degree of Doctor of Philosophy.

[25] Doğruöz, S., Smith, P. F. 1998. Modules Which are Extending Relative to Module Classes. **Communications in Algebra**, 26 (6): 1699-1721.

[26] Doğruöz, S., Smith, P. F. 2000. Modules which are Weak Extending Relative to Module Classes. **Acta Mathematica Hungarica**, 87: 1-10.

[27] Doğruöz, S. 2006. Classes of extending modules associated with a torsion theory. **East-West Journal of Mathematics**, 8 (2): 163-180.

[28] Doğruöz, S. 2008. Extending modules relative to a torsion theory. **Czechoslovak Mathematical Journal**, 58 (133): 381-393.

[29] Doğruöz, S., Harmancı, A., Smith, P. F. 2009. Modules with unique closure relative to a torsion theory II, **Turkish Math. Journal**, 33: 111-116.

[30] Doğruöz, S., Harmancı, A., Smith, P. F. 2010. Modules with unique closure relative to a torsion theory I, **Canadian Math. Bull.**, 53 (2): 230-238.

[31] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith P. F. and Wiasbauer, R. 1994. Extending Modules. Pitman Research Notes in Mathematics Series 313, Longman, New York.

[32] Facchini, A., Herbera, D. 2006. Local morphisms and modules with a semilocal endomorphism ring. **Algebra Represent Theor.**, 9: 403-422.

[33] Faith, C. 1967. Lectures on injective modules and quotient rings. Springer LNM 49.

[34] Faith, C. 1973. Algebra: Ring, Modules and Categories I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[35] Faith, C. 1976. Algebra II, Ring Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[36] Fieldouse, D. J. 1967. Purity and Flatness. Ph. D. Thesis. McGill University, Montreal, Canada.

[37] Fieldhouse, D. J. 1969. Pure Theories. **Math-Ann.**, 184: 1-18.

[38] Freyd, P. J. 1964. Abelian Categories. Harper and Row.

[39] Fuchs, L. 1977. Cotorsion modules over noetherian hereditary rings. **Houston J. Math.**, 3 (1):33-46.

[40] Fuchs, L. 1995. Notes on generalized continuous modules, preprint.

[41] Fuchs, L. 1969. On Quasi-Injective Modules. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze**, 23 (4): 541-546.

[42] Garrett, B. P. 2007. Abstract Algebra. Taylor Francis Group. Chapman & Hall/CRC.

[43] Golan, J. S. 1986. Torsion Theories. Longman Scientific and Technical, New York.

[44] Goldie, A. W. 1958. Structure of prime rings under ascending chain conditions. **Proc. London Math. Soc.**, 3-8 (4): 589-608.

[45] Goldie, A. W. 1960. Semi-prime rings with maximum condition. **Proc. London Math. Soc.**, 3-10 (1):201-220.

[46] Goodearl, K. R. 1976. Ring Theory, Nonsingular Rings and Modules. Marcel Dekker, New York.

[47] Goodearl, K. R. , Warfield, R. B. 1989. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. Cambridge University Press.

[48] Harada, M. 1965. Note on quasi-injective modules. **Osaka J. Math.**, 2: 351-356.

[49] Harmancı, A. , Smith, P. F. 1993. Finite direct sums of $\mathcal{CS}$ modules. **Houston J. Math.**, 19 (4): 523-532.

[50] Hazewinkel, M. , Gubareni, N. , Kirichenko, V. V. 2004. Algebras, Rings and Modules. Kluwer Academic Publishers.

[51] Herzog, I. 2003. Pure-injective envelopes. **Journal of Algebra and Its Applications**, 2 (4): 397-402.

[52] Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Holf, Rinehart and Wiston, Inc. New York, Chicago.

[53] Jeremy, L. 1971. Sur les modules et anneaux quasi-continuous. **C. R. Acad. Sci. Paris**, 272: 80-83.

[54] Jeremy, L. 1974. Modules et anneaux quasi-continuous. **Canad. Math. Bull.**, 17 (2): 217-228.

[55] Kamal, M. A., Müller, B. J. 1988. Extending modules over commutative domains. **Osaka J. Math.**, 25: 531-538.

[56] Kaplansky, I. 1950. Infinite Abelian Groups. University of Chicago.

[57] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press. London Mathematical Society Monograph No.17.

[58] Krause, H. 1998. Functors on Locally Finitely Presented Additive Categories. **Colloquium Mathematicum**, 75 (1): 105-132.

[59] Lam, T. Y. 1998. Lectures on Modules and Rings. Springer-Verlag, New York.

[60] Lang, S. 2005. Algebra. Springer-Verlag, New York, ISBN-13: 978-0387-95385-4.

[61] Malik, D. S., Morderson, J. N., Sen, M. K. 1997. Fundamentals of Abstract Algebra. The McGraw-Hill Companies, Inc, International Editions.

[62] Mohamed, S., Bouhy, T. 1977. Continuous modules. **Arabian J. Sci. Eng.**, 2: 107-122.

[63] Mohamed, S. H., Müller, B. J. 1990. Continuous and Discrete Modules. London Math. Soc. LNC 147 Cambridge Uni. Press, Cambridge.

[64] Müller, J. B., Rizvi, T. 1982.On the Decomposition of Continuous Modules. **Canad. Math. Bull.** , 25 (3): 296-301.

[65] Neumann, J. von. 1936. Continuous geometry. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, 22 (2): 92-100.

[66] Neumann, J. von. 1936. On regular rings. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, 22 (12): 707-713.

[67] Orhan Ertaş, N. 2014. Fully Idempotent and Multiplication Modules. **Palestine Journal of Mathematics**, 3 (1): 432-437.

[68] Osofsky, B. L. 1964. Rings all whose finitely generated modules are injective. **Pasific Journal of Mathematics**, 14 (2): 645-650.

[69] Osofsky, B. L. 1968. Noninjective cyclic modules. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 19: 1383-1384.

[70] Osofsky, B. L., Smith, P. 1991. Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands. **Jour. of Algebra**, 139: 342-354.

[71] Pardo, G. 1985. Spectral Gabriel Toplogies and Relative Singular Functors. **Communications in Algebra**, 13 (1): 21-57.

[72] Pardo, G., Dung, N. V., Wisbauer, R. 1993. Complete pure injectivity and endomorphism rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (4): 1029-1034.

[73] Rotman, J. J. 1979. An intoductiıon to homological algebra. Academic Press, New York.

[74] Smith, P. F. 1992. Modules for which every submodule has a unique closure. **Proceedings of the Biennial Ohio-Denison Conference**, 302-313.

[75] Smith, P. F., Tercan, A. 1992. Continuous and quasi-continuous modules. **Houston Journal of Mathematics**, 18 (3): 339-348.

[76] Strenström, B. 1975. Rings of Quotients. Springer-Verlag.

[77] Takeuchi, T. 1972. On direct modules. **Hokkaido Math. J.**, 1 (2): 168-177.

[78] Tercan, A. Kara, Y. 2015. Modül ve Halka Teori Latis Teorik Yaklaşımlar. Efil Yayınevi, ANKARA.

[79] Tercan, A. Yücel, C. 2016. Module Theory, Extending Modules and Generalizations, Bassel: Birkhauser-Springer.

[80] Utumi, Y. 1965. On continuous rings and self-injective rings. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 118: 158-173.

[81] Utumi, Y. 1966. On the continuity and self injectivity of a complete regular rings. **Canad. J. Math.**, 18: 404-412.

[82] Wisbauer, R. 1991. Foundations of module and ring theory. Gordon and Breach.

[83] Xu, J. 1996. Flat covers of modules. Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Azime TARHAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Pamukören, 15.05.1989

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Ens., Matematik Anabilim Dalı
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurum : MEB-Matematik Öğretmeni (2015-...)

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar :
-ESCI, Zentralblatt MATH
Berktaş, M. K., Doğruöz, S. and Tarhan, A. 2019. Pure Closed Subobjects and Pure Quotient Goldie Dimension. **JP Journal of Algebra , Number Theory and Applications**, Vol. 41 (1): 49-57.
b)Bildiriler :
c) Katıldığı Projeler :
-BAP-FEF-17041

İLETİŞİM

E-posta Adresi : a.tarhan89@hotmail.com
Tarih : 18.12.2020